МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУ ВПО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ)
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

КРАТКИЙ КУРС

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ЧАСТЬ 1. СТАТИКА

Учебное пособие

Набережные Челны
2017

Краткий курс теоретической механики. Часть 1. Статика: Учебное пособие. / Составители: Б.Ф. Байрамов, Ф.Д. Байрамов. – Набережные Челны: Издательство НЧИ КФУ, 2017 г. – 111 с.

Учебное пособие содержит статику твёрдого тела. Все вопросы статики рассматриваются для общего случая пространственной системы сил, а результаты для плоской системы сил приводятся как частный случай общих результатов. По содержанию и логическому построению некоторых разделов пособие несколько отличается от существующих учебников по теоретической механике. Кроме теоретического материала имеются типовые задачи с подробными решениями, тестовые задачи с ответами для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля.

Учебное пособие предназначено для студентов всех направлений дневного и заочного вида обучения. Оно будет полезно и преподавателям по механике.

Рецензенты:
к.т.н., доцент Х.К. Тазмеев;
к.ф.-м.н., доцент И.А. Шакиров.

Печатается в соответствии с решением редакционно-издательского совета Набережночелнинского института (филиала) Казанского (Приволжского) федерального университета (протокол № 17 от 15.03.2017 г.)

© Набережночелнинский
институт (филиал)
Казанского (Приволжского)
федерального университета,
2017 год.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – наука о механическом движении материальных тел.

Механически движением называется происходящее с течением времени изменение взаимного положения тел в пространстве. Частным случаем механического движения является состояние равновесия тел. Поэтому изучение равновесия тел также входит в круг задач механики.

По характеру рассматриваемых задач механику принято разделять на статику, кинематику и динамику.

Статика – раздел, который изучает равновесие твёрдых тел, находящихся под действием сил. Здесь излагается также общее учение о силах.

Кинематика – раздел, который изучает геометрические свойства движения тел без учёта их инертности (массы) и действующих на них сил.

Динамика – раздел, который изучает движение тел с учётом сил действующих на них.

СТАТИКА

В статике под равновесием понимается состояние покоя тел по отношению к Земле или движение тел под действием уравновешенной системы сил.

1. Основные понятия статики

Абсолютно твёрдое тело – тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда остаётся неизменным, то есть это тело, которое не деформируется. Абсолютно твёрдое тело – упрощённая модель реальных тел. Использование такой модели позволяет установить наиболее общие условия равновесия. Абсолютно твёрдые тела для краткости называют также просто твёрдыми телами.

Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется материальной точкой. Материальная точка, в отличие от геометрической точки, обладает массой и способностью взаимодействовать с другими телами.

Сила – мера механического взаимодействия материальных тел. Сила – векторная величина. Её действие на тело определяется:

1) численным значением (модулем);
2) направлением.
3) точкой приложения;

Точка приложения силы и её направление определяют линию действия силы.

В международной системе единиц измерения физических величин (СИ) за единицу силы принят Ньютон (Н), а в технической системе – килограмм-сила (кг с).

$$1\,\text{кг с} \approx 9{,}81\,\text{Н}; \qquad 1\,\text{Н} \approx 0{,}102\,\text{кг с}.$$

Силу можно задавать:

– векторным способом, обозначая буквой с чертой над нею (например, $\overline{F}$);

– аналитическим способом: через её проекции на оси, например, прямоугольной декартовой системы координат (рис. 1).

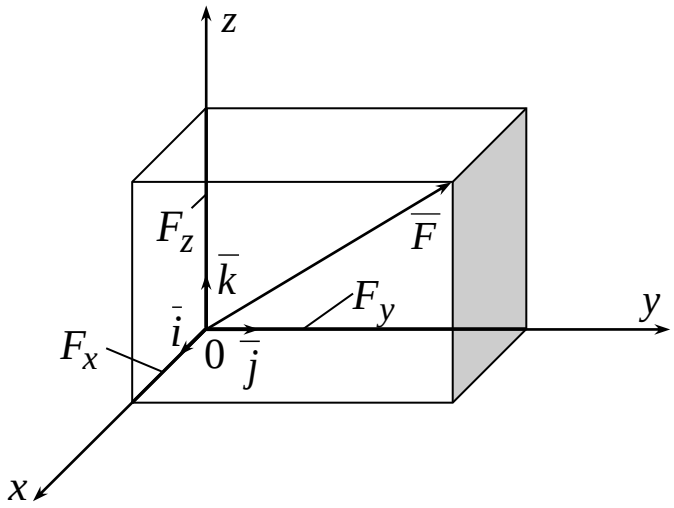


Рис. 1.

Модуль силы обозначается символом $\left|\overline{F}\right|$ или той же буквой, но без черты над нею.

Через проекции вектор силы представляется так:

$$\overline{F} = F_x \cdot \overline{i} + F_y \cdot \overline{j} + F_z \cdot \overline{k},$$

где $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – единичные векторы (орты) декартовых осей; F_x, F_y, F_z – проекции силы $\overline{F}$ на соответствующие оси.

Проекция силы на ось – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

Если угол острый ($< 90^\circ$) – проекция силы положительна (рис. 2), если угол тупой ($> 90^\circ$) – проекция силы отрицательна (рис. 3), если сила перпендикулярна оси (90°, 270°), то её проекция на эту ось равна нулю (рис. 4).

$$F_x = F \cdot \cos\alpha$$

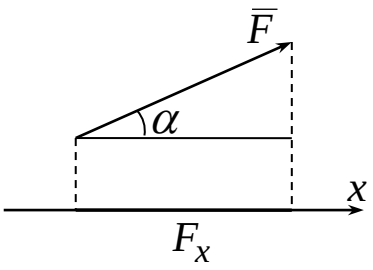


Рис. 2.

$$F_x = F \cdot \cos\alpha = F \cdot \cos\left(180^\circ - \varphi\right) = -F \cdot \cos\varphi$$

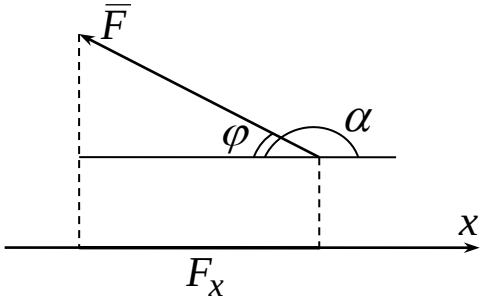


Рис. 3.

$$F_x = 0$$

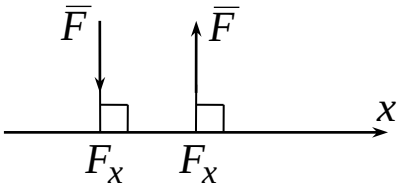


Рис. 4.

Совокупность нескольких сил $\left(\overline{F_1}, \ldots, \overline{F_n}\right)$, действующих на тело, называется системой сил.

Если, не нарушая состояния абсолютно твёрдого тела, одну систему сил $\left(\overline{F_1}, \ldots, \overline{F_n}\right)$, приложенных к нему, можно заменить другой системой $\left(\overline{P_1}, \ldots, \overline{P_n}\right)$, и наоборот, то такие системы сил называются эквивалентными:

$$\left(\overline{F_1}, \ldots, \overline{F_n}\right) \sim \left(\overline{P_1}, \ldots, \overline{P_n}\right).$$

Если система сил $\left(\overline{F_1}, \ldots, \overline{F_n}\right)$ эквивалентна одной силе $\overline{R}$, т.е. $\left(\overline{F_1}, \ldots, \overline{F_n}\right) \sim \overline{R}$, то последняя называется равнодействующей данной системы сил.

Система сил, под действием которой твёрдое тело может находиться в покое, называется уравновешенной или эквивалентной нулю:

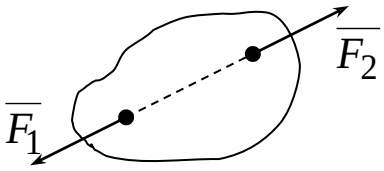
$$\left(\overline{F_1}, \ldots, \overline{F_n}\right) \sim 0.$$

Силы, действующие на данное тело, можно разделить на внешние и внутренние. Внешними называются силы, которые действуют на это тело со стороны других тел, а внутренними – силы, с которыми части данного тела действуют друг на друга.

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется сосредоточенной. Силы, действующие на все точки данного объёма или данной части поверхности тела, называются распределёнными.

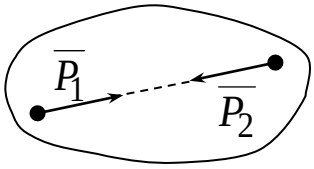
2. Аксиомы статики

Аксиома 1. Две силы, приложенные к абсолютно твёрдому телу, будут уравновешены (эквивалентны нулю) тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны (рис. 5, 6).



$\left(\overline{F_1}, \overline{F_2}\right) \sim 0$

Рис. 5.



$\left(\overline{P_1}, \overline{P_2}\right) \sim 0$

Рис. 6.

Первая аксиома устанавливает самую простую уравновешенную систему сил.

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твёрдое тело не изменяется, если к ней прибавить или от неё отнять уравновешенную систему сил.

Из этой аксиомы вытекает следующее следствие: действие силы на абсолютно твёрдое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль её линии действия в любую другую точку тела.

В самом деле, пусть на твёрдое тело действует приложенная в точке A сила $\overline{F}$ (рис. 7).

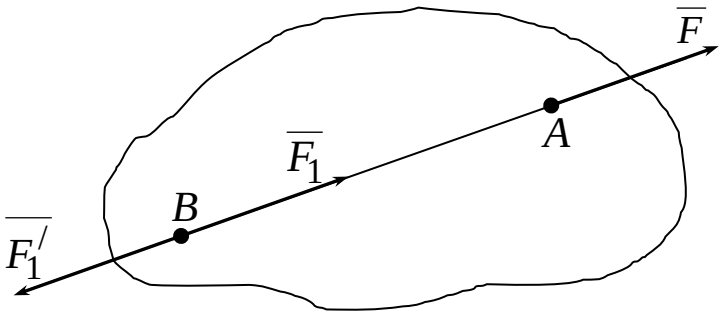


Рис. 7.

Возьмём на линии действия этой силы произвольную точку B и приложим в ней две уравновешенные силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_1^/}$, такие, что $\overline{F_1} = \overline{F}$ и $\overline{F_1^/} = -\overline{F}$. От этого действие силы $\overline{F}$ на тело не изменится. Но силы $\overline{F}$ и $\overline{F_1^/}$ также образуют уравновешенную систему, которая может быть отброшена. В результате на тело будет действовать только одна сила $\overline{F_1}$, равная $\overline{F}$, но приложенная в точке B.

Таким образом, вектор, изображающий силу $\overline{F}$, можно считать приложенным в любой точке на линии действия силы. Такой вектор называется скользящим.

Аксиома 3. (Аксиома параллелограмма сил).

Две силы, приложенные к телу в одной его точке, можно заменить одной равнодействующей силой, приложенной в той же

точке и равной их геометрической сумме (рис. 8).

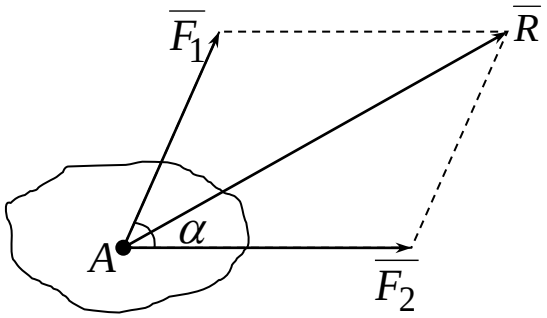


Рис. 8.

Эта аксиома:

1) указывает, что две силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, приложенные в одной точке, эквивалентны одной силе $\left(\overline{F_1}, \overline{F_2}\right) \sim \overline{R}$;

2) устанавливает, что равнодействующая равна векторной сумме этих сил $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$. Модуль равнодействующей равен:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}.$$

Третья аксиома применима к любым, не обязательно абсолютно твёрдым телам.

Аксиома 4. (Третий закон Ньютона – закон равенства действия и противодействия). Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 9).

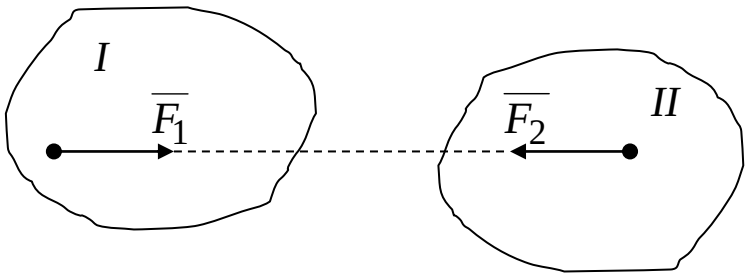


Рис. 9.

Замечание: силы взаимодействия двух тел не составляют систему уравновешенных сил, так как они приложены к разным телам.

Аксиома 5. (Принцип отвердевания). Равновесие деформируемого тела не изменится, если жёстко связать его точки и считать тело абсолютно твёрдым.

Замечание: условия равновесия, являющиеся необходимыми и достаточными для абсолютно твёрдого тела, являются необходимыми, но недостаточными для нетвёрдого тела.

Пример. Абсолютно жёсткий стержень может оставаться в равновесии под действием двух сил (рис. 10), равных по модулю и направленных вдоль оси стержня как навстречу друг к другу, так и друг от друга (т.е. под действием как сжимающих, так и растягивающих сил). Нить, соответствующая этому стержню, может оставаться в равновесии только под действием двух сил, направленных друг от друга (рис. 11). Под действием сил, направленных друг к другу, нить сомнётся.

стержень

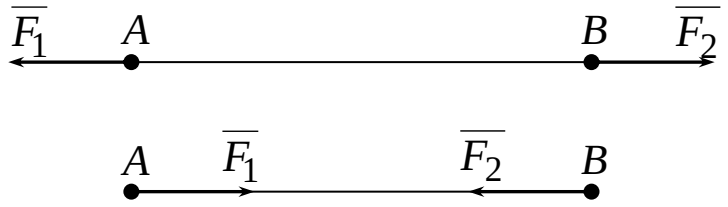


Рис. 10.

нить

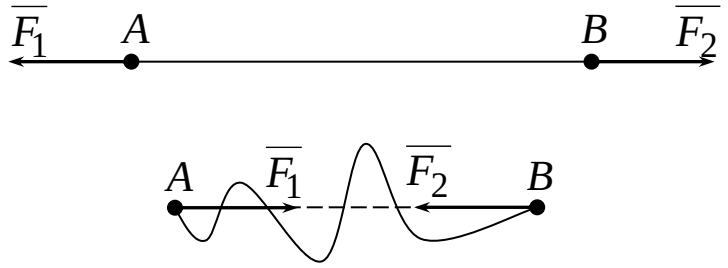


Рис. 11.

3. Связи и их реакции

Первоначально введём понятия свободного и несвободного твёрдого тела.

Свободное тело – тело, движение которого ничем не ограничено.

Несвободное тело – тело, свобода движения которого ограничена другими телами.

Тела, ограничивающие свободу движения данного твёрдого тела в некоторых направлениях, по отношению к нему называются связями. Сила, с которой связь действует на тело, называется реакцией связи. Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не даёт перемещаться телу.

Если считать силу, с которой твёрдое тело действует на связь действием, то реакция связи является противодействием. При этом сила – действие приложена к связи, а реакция связи приложена к твёрдому телу.

Все силы, действующие на твёрдое тело, можно разделить на две группы: активные силы и реакции связи.

Активные силы – все силы, не являющиеся реакциями связей. Иногда активные силы называют задаваемыми, а реакции связей – пассивными силами.

Все условия равновесия в теории механики выводятся для свободного тела. Чтобы воспользоваться этими условиями для несвободного тела используют принцип освобождаемости от связей:

Несвободное твёрдое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие соответствующими реакциями связей.

Примеры основных видов связей.

1. Гладкая поверхность (плоскость) – поверхность (плоскость), трением о которую данного тела можно пренебречь.

Реакция идеально гладкой поверхности (плоскости) $\overline{N}$ направлена по общей нормали к соприкасающимся поверхностям (рис. 12, 13).

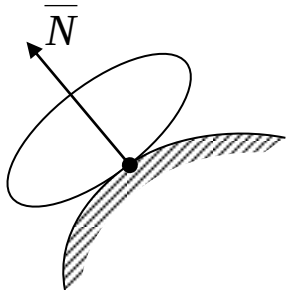


Рис. 12.

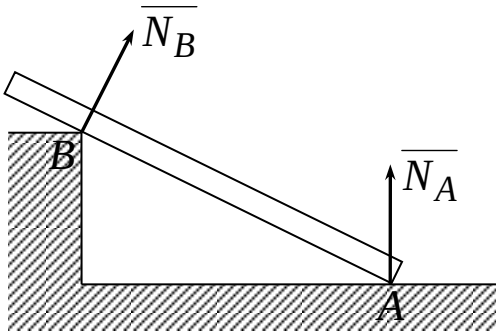


Рис. 13.

2. Нерастяжимая невесомая нить (канат, трос и так далее).

Реакция нити $\overline{T}$ направлена вдоль нити к точке её подвеса (рис. 14) и называется натяжением.

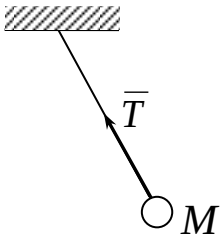


Рис. 14.

3. Невесомый стержень, на концах которого шарниры – стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Реакция $\overline{S}$ невесомого стержня направлена вдоль оси

стержня или вдоль прямой, соединяющей шарниры на концах (рис. 15).

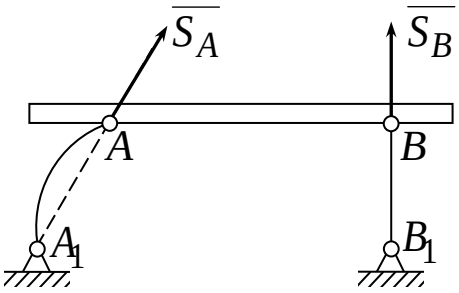


Рис. 15.

4. Цилиндрический шарнир (подшипник) – соединение двух тел, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому вокруг общей оси (рис. 16, 17), где A – неподвижная опора, B – тело.

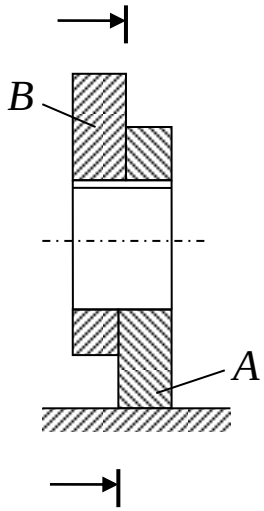


Рис. 16.

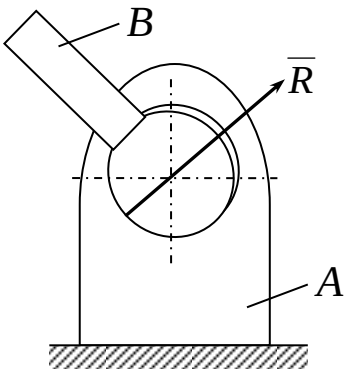


Рис. 17.

Реакция $\overline{R}$ такого шарнира (схематичное изображение которого показано на рис. 18) может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси вращения (плоскости Axy).

В задачах неизвестную по величине и направлению реакцию $\overline{R}_A$ разлагают на составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, параллельные осям координат:

$$\overline{R}_A = \overline{X}_A + \overline{Y}_A.$$

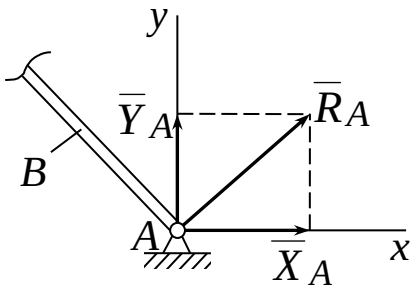


Рис. 18.

5. Сферический шарнир и подпятник.

Тела, соединённые сферическим шарниром, могут как угодно поворачиваться одно относительно другого вокруг центра шарнира. Реакция $\overline{R}$ может иметь любое направление в пространстве (рис.19).

Произвольное направление в пространстве может иметь и реакция $\overline{R}$ подпятника (подшипника с упором), изображенного на рис. 20.

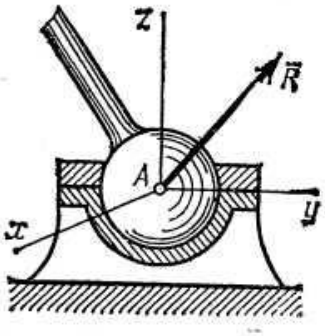


Рис. 19.

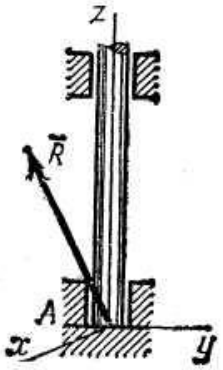


Рис. 20.

Две основные задачи статики

I задача – задача упрощения систем сил, действующих на твёрдое тело. Эта задача заключается в том, что данная система сил заменяется другой системой сил, ей эквивалентной, но более простой.

II задача – задача о равновесии. В этой задаче выводятся условия равновесия различных систем сил, действующих на твёрдое тело.

4. Система сходящихся сил

Рассмотрим решение задач статики на примере системы сходящихся сил.

Сходящиеся силы – силы, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Пусть задана система сходящихся сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right)$, приложенных к твёрдому телу (рис. 21).

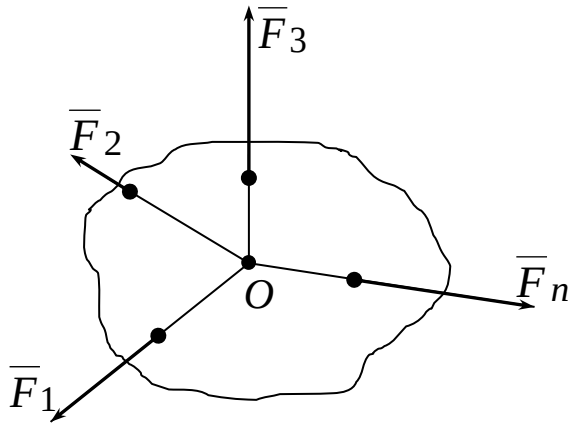


Рис. 21.

Согласно следствию из аксиомы 2 перенесём точки приложения сил по линиям их действия в точку пересечения O (рис. 22).

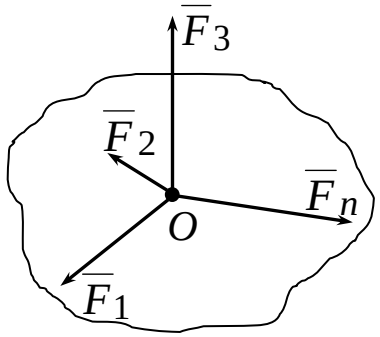


Рис. 22.

Складывая силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ на основании аксиомы 3, заменим их одной равнодействующей:

$$\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2, \quad \left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right) \sim \overline{R}_1.$$

Далее, складываем силу $\overline{R}_1$ с силой $\overline{F}_3$:

$$\overline{R}_2 = \overline{R}_1 + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3, \quad \overline{R}_2 \sim \left(\overline{R}_1, \overline{F}_3\right) \sim \left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right).$$

Продолжая такое сложение до последней силы, приходим к выводу: система сходящихся сил эквивалентна одной силе (равнодействующей), которая равна их геометрической сумме и проходит через точку пересечения линий действия этих сил:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i. \tag{1}$$

Более простым и удобным способом сложения сил является сложение построением силового многоугольника. Для нахождения этим способом суммы сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right)$ (рис. 22) откладываем от произвольной точки O силу $\overline{F}_1$, от конца этой силы – силу $\overline{F}_2$ и так далее до последней силы системы $\overline{F}_n$. Соединяя начало силы $\overline{F}_1$ с концом $\overline{F}_n$, получаем силу $\overline{R}$, которая называется замыкающей стороной силового многоугольника и определяет геометрическую сумму слагаемых сил (рис. 23).

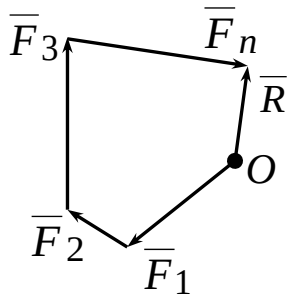


Рис. 23.

Аналитический способ сложения сил

Аналитический способ сложения сил – сложение, используя проекции слагаемых сил на координатную ось.

Проектируя равенство (1) на декартовые оси координат, найдём проекции равнодействующей:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}; \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}; \\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \end{cases}$$

Зная эти проекции, можно определить модуль силы $\overline{R}$ и углы α, β, γ, которые она образует с координатными осями x, y, z соответственно, по формулам:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{R_x}{R}; \\ \cos\beta = \dfrac{R_y}{R}; \\ \cos\gamma = \dfrac{R_z}{R}. \end{cases}$$

В случае плоской системы сил:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}; \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}; \end{cases}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2};$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{R_x}{R}; \\ \cos\beta = \dfrac{R_y}{R}. \end{cases}$$

Условия равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы их равнодействующая равнялась нулю, то есть построенный многоугольник сил должен быть замкнутым:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) выражает геометрическое условие равновесия. Векторное равенство (2) эквивалентно трём скалярным равенствам:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

(3) – аналитические условия равновесия.

В случае плоской системы

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0. \end{cases}$$

Теорема о трёх силах

На основании аксиом статики можно доказать следующую теорему о трёх силах:

Если твёрдое тело под действием трёх непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, находится в равновесии, то линии

действия этих сил пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть на тело действуют три силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$. Так как по условиям теоремы эти силы лежат в одной плоскости и не параллельны, то линии действия сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ пересекаются в точке A (рис. 24).

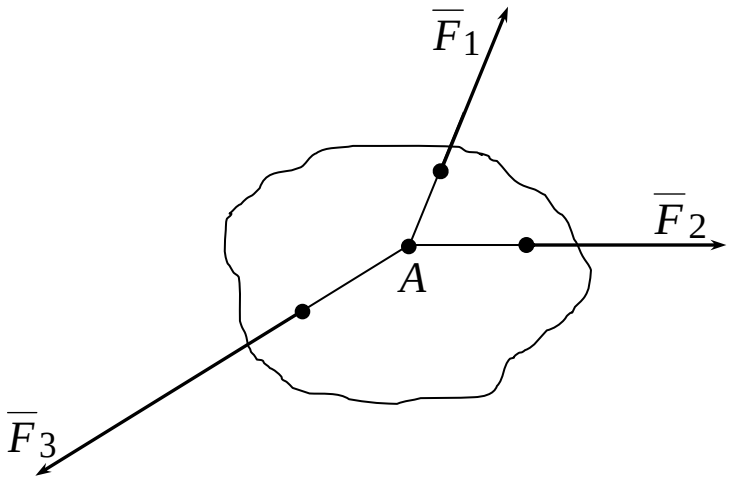


Рис. 24.

Согласно следствию из аксиомы 2 силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ можно перенести в точку A, а по аксиоме 3 их можно заменить одной силой $\overline{R}$.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2.$$

Таким образом, рассматриваемая система сил приведена к двум силам $\overline{R}$ и $\overline{F}_3$ (рис. 25).

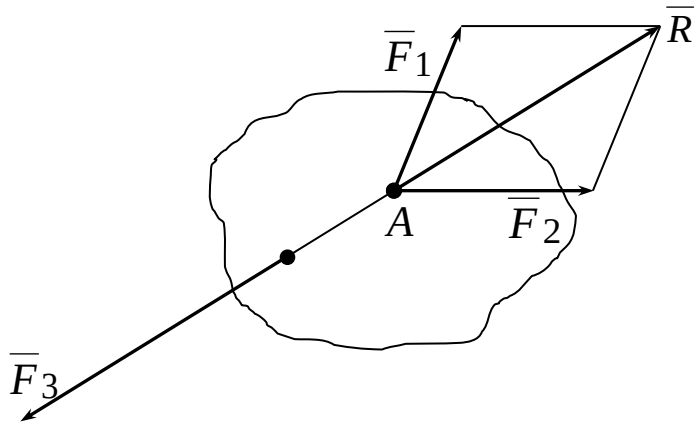


Рис. 25.

По условиям теоремы тело находится в равновесии, следовательно, согласно аксиоме 1 силы $\overline{R}$ и $\overline{F}_3$ должны иметь общую линию действия, но тогда линия действия силы $\overline{F}_3$ также проходит через точку A, что и требовалось доказать.

ТЕОРИЯ МОМЕНТОВ И ПАР СИЛ

5. Момент силы относительно точки

Рассмотрим силу $\overline{F} = \overline{AB}$, приложенную к телу в точке A, и произвольно выбранную в пространстве точку O (рис. 26). Эту точку называют также центром момента. Длина перпендикуляра h, опущенного из точки O на линию действия силы $\overline{F}$, называется плечом этой силы относительно точки O.

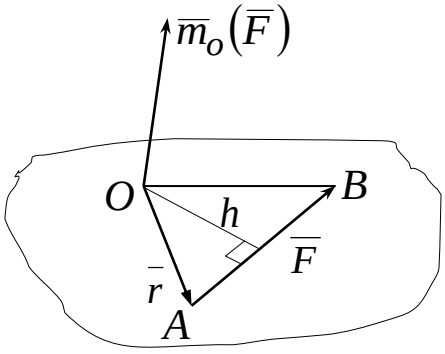


Рис. 26.

Для характеристики способности силы повернуть тело вокруг точки вводится понятие момента силы относительно точки. Моментом силы $\overline{F}$ относительно точки O называется вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$, равный по модулю произведению модуля силы на её плечо h, приложенный в точке O и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через точку O и силу $\overline{F}$, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки.

Согласно этому определению

$$\left|\overline{m}_o\left(\overline{F}\right)\right| = F \cdot h = 2 \cdot S_{\Delta OAB}. \qquad (4)$$

Последний результат следует из того, что

$$S_{OAB} = AB \cdot \frac{h}{2} = F \cdot \frac{h}{2}.$$

Если теперь $\overline{r}$ – радиус-вектор, проведённый из центра момента в точку приложения силы, то справедлива формула

$$\overline{m}_o\left(\overline{F}\right) = \overline{r} \times \overline{F}, \qquad (5)$$

в справедливости которой убеждаемся непосредственной проверкой (с использованием определения векторного произведения двух векторов) равенства модулей и совпадения направлений векторов $\overline{m}_o\left(\overline{F}\right)$ и $\overline{r} \times \overline{F}$.

Если исключить тривиальный случай $F = 0$, то легко увидеть, что момент силы относительно точки равен нулю лишь тогда, когда линия действия силы проходит через центр момента $(h = 0)$.

Алгебраический момент силы относительно точки

Пусть все силы, действующие на твёрдое тело, расположены в одной плоскости (например, в плоскости чертежа). Такая система сил называется плоской системой сил. В данном случае (рис. 27) векторы моментов сил относительно произвольной точки O, лежащей в плоскости действия сил, направлены по одной прямой, перпендикулярной этой плоскости в ту или иную сторону.

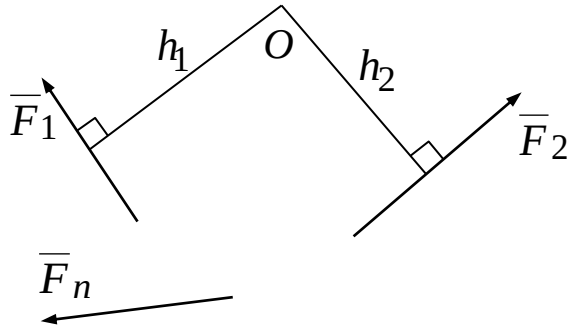


Рис. 27.

Но векторы, лежащие на одной прямой, полностью определяются своими алгебраическими значениями, т.е. величинами, равными модулям этих векторов, взятым со знаком плюс или минус. Значения моментов, идущих к нам от плоскости действия сил, будем считать положительными, а идущих от нас – отрицательными. В связи со сказанным, при рассмотрении плоской системы сил момент силы относительно точки удобнее определить как алгебраическую величину, равную произведению модуля силы на её плечо, взятому со знаком плюс или минус, т.е.

$$m_o(\overline{F}) = \pm F \cdot h. \qquad (6)$$

Если сила стремится повернуть плоскость действия сил против хода часовой стрелки, то момент силы – положительный, если по ходу часовой стрелки – отрицательный. Например, на рис. 27:

$$m_o(\overline{F}_1) = -F_1 \cdot h_1, \quad m_o(\overline{F}_2) = F_2 \cdot h_2.$$

6. Момент силы относительно оси

Пусть в точке A к телу приложена сила $\overline{F}$. В пространстве проведем некоторую ось z (рис. 28). Для характеристики способности силы повернуть тело вокруг оси вводится понятие момента силы относительно оси.

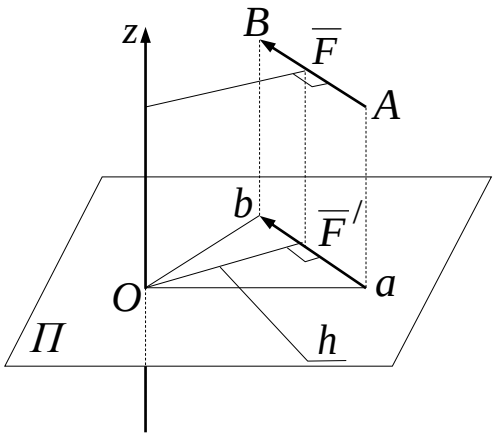


Рис. 28.

Для определения момента силы относительно оси необходимо:

1) провести плоскость Π, перпендикулярную оси (в любом месте);

2) спроектировать силу $\overline{F}$ на эту плоскость и вычислить величину $\overline{F}^{/}$;

3) найти плечо h проекции $\overline{F}^{/}$ относительно точки O пересечения оси с плоскостью, то есть длину перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия $\overline{F}^{/}$. Моментом силы $\overline{F}$ относительно оси z, который обозначим $m_z(\overline{F})$, называется скалярная величина, равная алгебраическому моменту силы относительно точки O, то есть

$$m_z(\overline{F}) = m_o(\overline{F}_n) = \pm F^{/} \cdot h = \pm 2 \cdot S_{\Delta Oab}.$$

Правило знаков: если, смотря с конца оси z, сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, то момент силы положительный, в противном случае – отрицательный. Так как h является одновременно кратчайшим расстоянием между силой $\overline{F}$ и осью z, т. е. плечом силы $\overline{F}$ относительно оси z, то момент силы относительно оси можно определить и следующим образом.

Моментом силы $\overline{F}$ относительно оси z называется скалярная величина, равная взятому со знаком плюс или минус произведению модуля проекции $\overline{F}^{/}$ силы $\overline{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо силы $\overline{F}$ относительно оси z. Правило знаков сохраняется прежним.

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы $\overline{F}$:

1) пересекает ось (тогда $h = 0$);

2) параллельна оси (тогда $F^{/} = 0$).

7. Связь между моментами силы относительно точки и относительно оси, проходящей через эту точку

Имеет место простая формула, связывающая момент силы

относительно оси с её моментом относительно произвольной точки, взятой на этой оси:

$$m_z(\overline{F}) = m_{Oz}(\overline{F}) = m_{0_1 z}(\overline{F}), \tag{7}$$

где $\overline{m}_O(\overline{F})$ и $\overline{m}_{O_1}(\overline{F})$ – моменты силы $\overline{F}$ относительно точек O и O_1 соответственно (рис. 29). Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось момента силы относительно произвольной точки на оси.

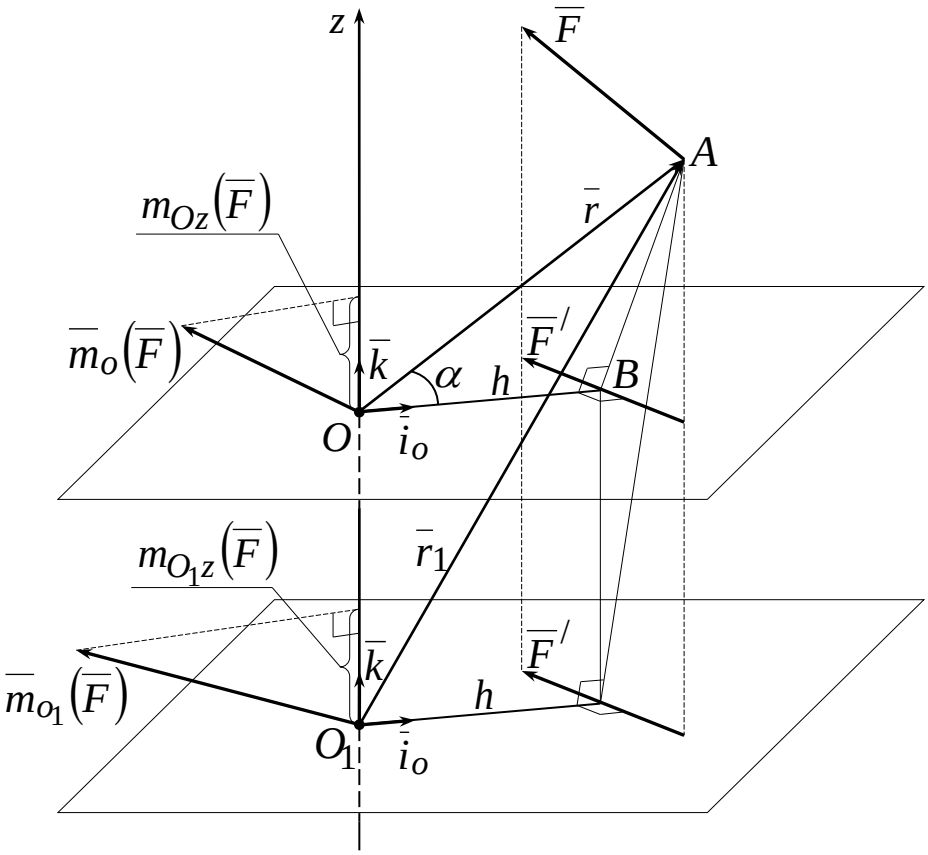


Рис. 29.

Для доказательства (7) введём орт $\overline{k}$ оси z и вычислим проекцию момента $\overline{m}_O(\overline{F})$ на ось z. Используя круговую перестановку в смешанном произведении векторов $\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}) = \overline{c}\cdot(\overline{a}\times\overline{b}) = \overline{b}\cdot(\overline{c}\times\overline{a})$ и формулу (5), получим

$$m_{Oz}(\overline{F}) = \overline{k}\cdot\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{k}\cdot(\overline{r}\times\overline{F}) = \overline{r}\cdot(\overline{F}\times\overline{k}).$$

Вектор $\overline{F} \times \overline{k}$ направлен по отрезку, определяющему плечо силы $\overline{F}^{/}$ относительно точки O. Введем орт $\bar{i}_O$ этого отрезка. Тогда можно записать

$$\overline{F} \times \overline{k} = \left(F \cdot k \cdot \sin\left(\overline{F}, \overline{k}\right)\right) \cdot \bar{i}_O = F^{/} \cdot \bar{i}_O.$$

Следовательно,

$$m_{Oz}\left(\overline{F}\right) = F^{/} \cdot \bar{r} \cdot \bar{i}_O = F^{/} \cdot r \cdot \cos\alpha = F^{/} \cdot h = m_z\left(\overline{F}\right).$$

8. Пара сил

Парой сил, или просто парой, называется система $\left(\overline{F}, -\overline{F}\right)$ двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил. Плоскость, в которой расположены силы пары, называется плоскостью действия пары.

Теорема. Пара сил, приложенная к твёрдому телу, не имеет равнодействующей.

Докажем теорему рассуждением от противного. Предположим, что пара $\left(\overline{F}, -\overline{F}\right)$ имеет равнодействующую $\overline{R} \neq \overline{F}$ (рис. 30). Тогда эта пара сил вместе с уравновешивающей силой $-\overline{R}$ должна образовать уравновешенную систему, т.е. $\left(\overline{F}, -\overline{F}, -\overline{R}\right) \sim 0$. Силу $-\overline{R}$ разложим в её точке приложения O, взятой в плоскости действия пары, на силы $\overline{Q}$ и $\overline{P}$. Сила $\overline{Q}$ перпендикулярна плоскости действия пары, а $\overline{P}$ расположена на ней. Складывая последовательно силы $\overline{P}$ и $\overline{F}$, а затем и $-\overline{F}$ получим силу, которая не может уравновеситься силой $\overline{Q}$. Итак, пришли к противоречию с исходным предположением.

Если допустить, что равнодействующая $\overline{R}$ параллельна силам пары, то противоречие получается уже после сложения сил $-\overline{R}$ и $\overline{F}$ (или $-\overline{F}$). Если же предположить, что равнодействующая $\overline{R}$ перпендикулярна плоскости действия пары, то, разложив силу $-\overline{R}$ на составляющие, приложенные в точках приложения сил $\overline{F}$ и $-\overline{F}$, и

сложив силы, приложенные в одной точке, снова придём к противоречию, которое доказывает теорему. Пару сил нельзя уравновесить силой, она может быть уравновешена только парой – это следует из доказанной теоремы.

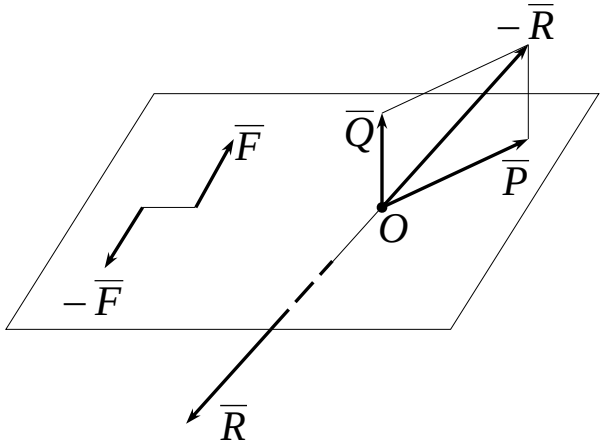


Рис. 30.

Не имея равнодействующей, пара сил наряду с силой является не упрощаемым и самостоятельным элементом статики.

Момент пары

Пусть на твёрдое тело действует пара сил $\left(\overline{F},-\overline{F}\right)$ (рис. 31).

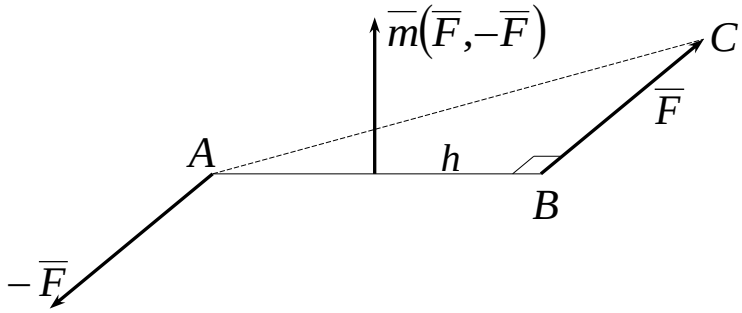


Рис. 31.

Кратчайшее расстояние h между силами пары называется её плечом. Приложенная к твёрдому телу пара стремится повернуть его. Для характеристики этого поворачивающего действия вводится понятие момента пары сил. Моментом пары сил называется вектор $\overline{m}=\overline{m}\left(\overline{F},-\overline{F}\right)$, равный по модулю произведению модуля одной из сил

пары на её плечо h и направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против часовой стрелки.

$$\left|\overline{m}\left(\overline{F},-\overline{F}\right)\right| = F \cdot h = 2 \cdot S_{\Delta ABC}.$$

Из самого определения следует, что момент пары является свободным вектором, то есть он может быть приложен в любой точке пространства. На рис. 31 момент пары приложен для определённости в середине плеча h. Из того, что момент пары является вектором свободным, не следует ещё, что пару сил так же свободно можно переносить вместе с моментом. Поэтому далее будет доказана теорема об эквивалентности пар, определяющая эквивалентные действия над парами.

Из определений момента силы относительно точки и момента пары следует, что момент пары равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой:

$$\overline{m}\left(\overline{F},-\overline{F}\right) = \overline{m}_A\left(\overline{F}\right) = \overline{AB} \times \overline{F} = \overline{m}_B\left(-\overline{F}\right) = \overline{BA} \times \left(-\overline{F}\right).$$

Имеет место теорема: сумма моментов сил пары относительно произвольной точки O пространства не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары (рис. 32).

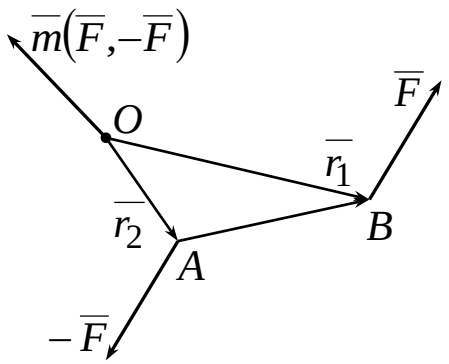


Рис. 32.

Доказательство теоремы сводится к непосредственному вычислению:

$$\overline{m}_o(\overline{F})+\overline{m}_o(-\overline{F})=\overline{r}_1\times\overline{F}+\overline{r}_2\times(-\overline{F})=(\overline{r}_1-\overline{r}_2)\times\overline{F}=$$
$$=\overline{AB}\times\overline{F}=\overline{m}_A(\overline{F})=\overline{m}(\overline{F},-\overline{F}). \qquad (8)$$

Очевидно, что эта сумма не зависит от выбора точки O.

Следствие теоремы: сумма моментов сил пары относительно любой оси равна проекции момента пары на эту ось. Действительно, с учетом (7) и (8) относительно любой оси получим

$$m_z(\overline{F})+m_z(-\overline{F})=m_{Oz}(\overline{F})+m_{Oz}(-\overline{F})=m_z(\overline{F},-\overline{F}).$$

Пример. В плоскости Π, расположенной перпендикулярно координатной плоскости yz под углом 30^0 к оси Oy, дана пара сил $(\overline{F},-\overline{F})$ (рис. 33). Найти сумму моментов сил пары относительно координатных осей, если $|\overline{m}(\overline{F},-\overline{F})|=10H\cdot м$.

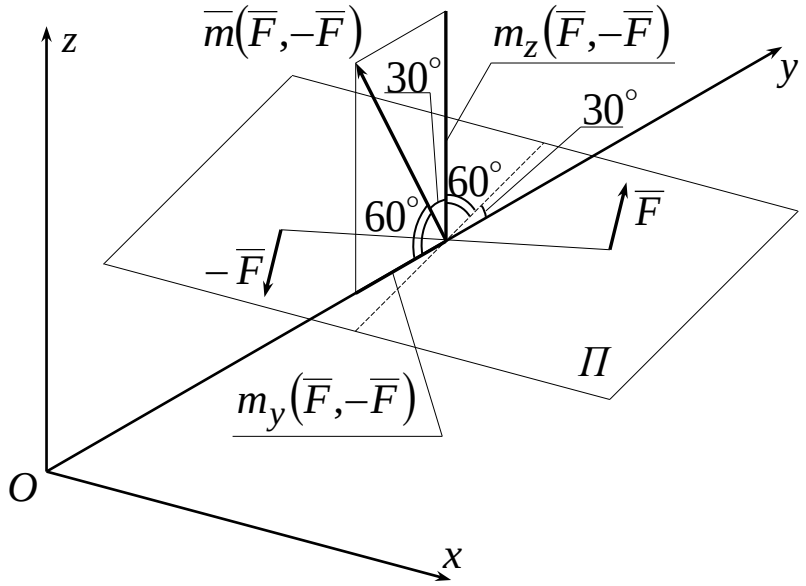


Рис. 33.

Решение. Момент пары направлен перпендикулярно плоскости Π и составляет с осями x, y, z углы, соответственно равные 90°, 120°, 30°. Поэтому:

$$m_x(\overline{F})+m_x(-\overline{F})=m_x(\overline{F},-\overline{F})=|\overline{m}(\overline{F},-\overline{F})|\cdot\cos 90^\circ=0,$$

$$m_y(\overline{F})+m_y(-\overline{F})=m_y(\overline{F},-\overline{F})=\left|\overline{m}(\overline{F},-\overline{F})\right|\cdot\cos 120^\circ=10\times\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-5H\cdot м,$$

$$m_z(\overline{F})+m_z(-\overline{F})=m_z(\overline{F},-\overline{F})=\left|\overline{m}(\overline{F},-\overline{F})\right|\cdot\cos 30^\circ=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}H\cdot м.$$

9. Алгебраический момент пары сил

Пусть все пары, действующие на твёрдое тело, расположены в одной плоскости. Например, в плоскости чертежа (рис. 34).

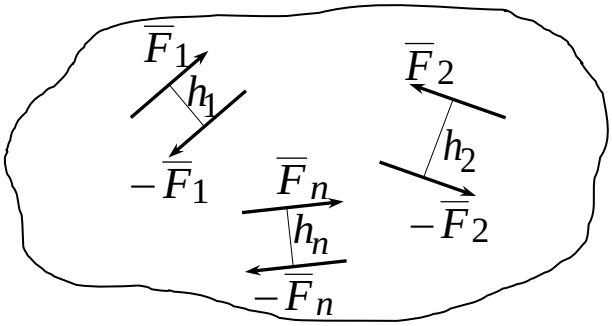


Рис. 34.

Такая система пар называется плоской системой пар. В этом случае векторы моментов всех пар направлены перпендикулярно плоскости, в которой расположены пары, в ту или иную сторону. Но параллельные векторы полностью определяются своими алгебраическими значениями, то есть величинами, равными модулям этих векторов и взятыми со знаком плюс или минус. Значения моментов, идущих к нам от плоскости действия пар, будем считать положительными, а от нас – отрицательными. Таким образом, при рассмотрении плоской системы пар момент пары удобнее рассматривать как алгебраическую величину, равную произведению модуля одной из сил пары на её плечо, взятому со знаком плюс или минус, то есть

$$m(\overline{F},-\overline{F})=\pm F\cdot h. \qquad (9)$$

Правило знаков: если пара стремится повернуть плоскость

действия пар против хода часовой стрелки, то момент пары положительный, если по ходу часовой стрелки – отрицательный.

Момент пары сил определяется формулой (9) и называется алгебраическим моментом пары.

Например, на рис. 34

$$m(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)=-F_1\cdot h_1,$$
$$m(\overline{F}_2,-\overline{F}_2)=F_2\cdot h_2.$$

10. Теорема об эквивалентности пар

Докажем теорему, с помощью которой становятся возможными эквивалентные преобразования пар, приложенных к твёрдому телу.

Теорема. Для эквивалентности двух пар необходимо и достаточно, чтобы их моменты были векторно равны.

1. Доказательство необходимости.

Пусть даны две пары: $(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)$, $(\overline{F}_2,-\overline{F}_2)$ и

$$(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)\sim(\overline{F}_2,-\overline{F}_2). \qquad (10)$$

Докажем, что моменты этих пар векторно равны. Сначала отметим, что условие $(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)\sim(\overline{F}_2,-\overline{F}_2)$ может выполняться только для пар, лежащих в параллельных плоскостях или, в частности, в одной плоскости. Так как, если пары расположены в пересекающихся плоскостях, то никакими эквивалентными преобразованиями, а именно (см. аксиомы статики) присоединением или отбрасыванием уравновешенной системы сил, использованием сложения и разложения сил по правилу параллелограмма, нельзя одну пару преобразовать в другую.

Итак, пусть пары $(\overline{F}_1,-\overline{\overline{F}}_1)$ и $(\overline{F}_2,-\overline{F}_2)$ лежат в параллельных плоскостях I и II (рис. 35) (в частности, эти плоскости могут совпадать).

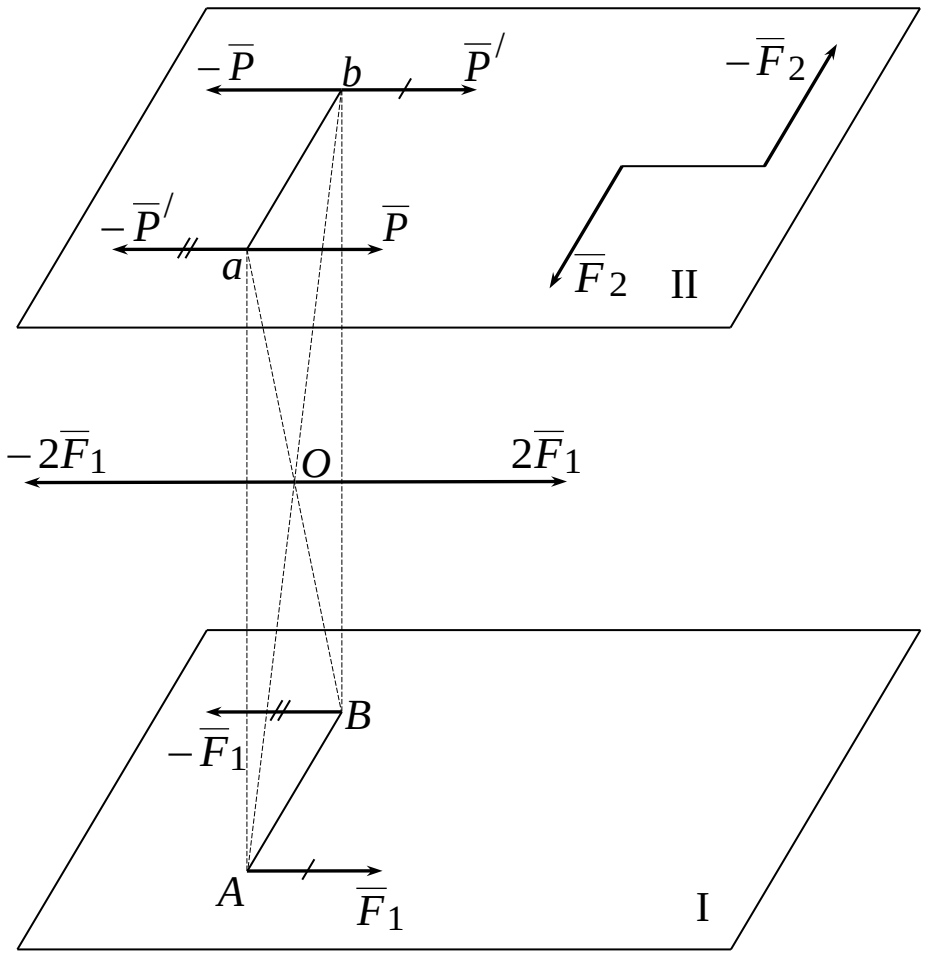


Рис. 35.

Возьмём в плоскости II отрезок ab, равный и параллельный AB. Приложим в точках a и b по две силы, равные по модулю и параллельные силе $\overline{F}_1$, направленные в противоположные стороны: $P = P^{/} = F_1$. Силы $\overline{F}_1$ и $\overline{P}^{/}$ заменим равнодействующей $2\overline{F}_1$, приложенной в точке O пересечения диагоналей параллелограмма $ABba$. Аналогично силы $-\overline{F}_1$ и $-\overline{P}^{/}$ заменятся равнодействующей $-2\overline{F}_1$, приложенной также в точке О. Отбрасывая силы $2\overline{F}_1$ и $-2\overline{F}_1$ получим пару $(\overline{P},-\overline{P})$, эквивалентную паре $(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)$:

$$(\overline{P},-\overline{P}) \sim (\overline{F}_1,-\overline{F}_1). \tag{11}$$

При этом очевидно,

$$\overline{m}(\overline{P},-\overline{P}) = \overline{m}(\overline{F}_1,-\overline{F}_1) \tag{12}$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\left(\overline{F}_2,-\overline{F}_2\right)\sim\left(\overline{P},-\overline{P}\right). \qquad (13)$$

Для наглядности совместим плоскость II с плоскостью чертежа (рис. 36) и разложим силу $\overline{F}_2$ в точке C на составляющие $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ (выбор точек C и D на линиях действия сил $\overline{F}_2$ и $-\overline{F}_2$ не существенен, так как сила, приложенная к твёрдому телу – вектор скользящий).

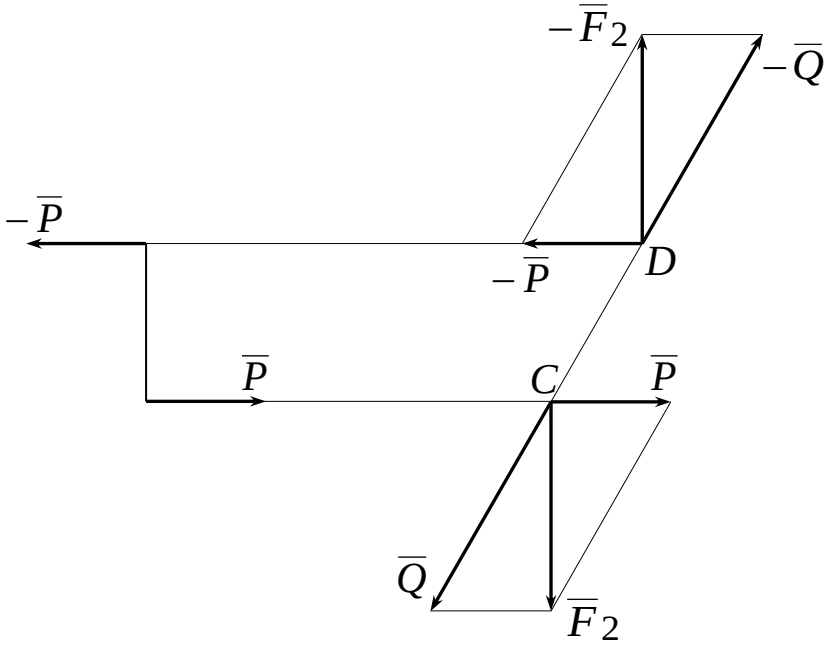


Рис. 36.

Тогда

$$\left(\overline{F}_2,-\overline{F}_2\right)\sim\left(\overline{P},-\overline{P},\overline{Q},-\overline{Q}\right). \qquad (14)$$

Сопоставляя (13) и (14), найдем, что $\left(\overline{Q},-\overline{Q}\right)\sim 0$, то есть силы $\overline{Q}$ и $-\overline{Q}$ направлены по одной прямой CD.

Вычислим момент пары $\left(\overline{F}_2,-\overline{F}_2\right)$. Учитывая (12) и то, что $\overline{m}_D\left(\overline{Q}\right)=\overline{DC}\times\overline{Q}=0,$ получим

$$\overline{m}\left(\overline{F}_2,-\overline{F}_2\right)=\overline{m}_D\left(\overline{F}_2\right)=\overline{DC}\times\overline{F}_2=\overline{DC}\times\left(\overline{P}+\overline{Q}\right)=\overline{DC}\times\overline{P}+\overline{DC}\times\overline{Q}=$$

$$=\overline{DC}\times\overline{P}=\overline{m}_D\left(\overline{P}\right)=\overline{m}\left(\overline{P},-\overline{P}\right)=\overline{m}\left(\overline{F}_1,-\overline{F}_1\right),$$

что и требовалось доказать.

2. Доказательство достаточности.

Пусть

$$\overline{m}(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)=\overline{m}(\overline{F}_2,-\overline{F}_2). \qquad (15)$$

Требуется доказать, что пары $(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)$ и $(\overline{F}_2,-F_2)$ эквивалентны.

Из (15) следует, что пары $(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)$ и $(\overline{F}_2,-F_2)$ лежат в параллельных плоскостях I и II (в частности, эти плоскости могут совпадать). Точно так же, как при доказательстве необходимости, пару $(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)$ заменим парой $(\overline{P},-\overline{P})$, расположенной в плоскости II, а силы $\overline{F}_2$ и $-\overline{F}_2$ в точках C и D разложим на составляющие $\overline{P}$, $\overline{Q}$ и $-\overline{P}$, $-\overline{Q}$.

Вычислим момент пары $(\overline{F}_2,-\overline{F}_2)$:

$$\overline{m}(\overline{F}_2,-\overline{F}_2)=\overline{DC}\times\overline{F}_2=\overline{DC}\times(\overline{P}+\overline{Q})=\overline{DC}\times\overline{P}+\overline{DC}\times\overline{Q}=$$

$$=\overline{m}(\overline{P},-\overline{P})+\overline{m}_D(\overline{Q}).$$

Отсюда согласно (12) и (15) найдём, что $\overline{m}_D(\overline{Q})=0$, то есть сила $\overline{Q}$ лежит на прямой CD. Следовательно, $(\overline{Q},-\overline{Q})\sim 0$ и поэтому из (14) и (11) получим

$$(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)\sim(\overline{F}_2,-\overline{F}_2).$$

Теорема доказана.

Заметим, что если пары $(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)$ и $(\overline{F}_2,-\overline{F}_2)$ лежат в одной плоскости, то при доказательстве теоремы замена пары $(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)$ на пару $(\overline{P},-\overline{P})$ не проводится, если же силы пар $(\overline{F}_1,-\overline{F}_1)$ и $(\overline{F}_2,-\overline{F}_2)$ параллельны, то достаточно воспользоваться правилом сложения параллельных сил.

Следствия теоремы:

1. Для эквивалентности двух пар, лежащих в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы их алгебраические моменты были равны.
2. Пару сил можно перенести куда угодно в плоскости действия или в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары.
3. У пары сил можно менять как угодно модули сил и длину плеча, сохраняя неизменённым её момент.
4. Пара сил полностью определяется своим моментом.

11. Теорема сложения пар. Условие равновесия системы пар

Рассмотрим произвольную систему пар, моменты которых соответственно равны: $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n$.

Теорема сложения пар: Система пар эквивалентна одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов пар системы:

$$\overline{m} = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i. \tag{16}$$

Доказательство теоремы следует из заключения о том, что пара сил полностью определяется своим моментом, поэтому сложение пар сводится к сложению их моментов.

Из теоремы сложения пар вытекает следующее условие равновесия системы пар: для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма моментов пар системы была равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i = 0. \tag{17}$$

Доказательство необходимости условия (17) следует из того, что если это условие не выполняется, то система пар приводится к одной паре с моментом, не равным нулю. Следовательно, исходная система пар не будет находиться в равновесии.

Доказательство достаточности условия (17) следует из того, что при выполнении этого условия момент результирующей пары будет равен нулю, то есть или силы, или плечо результирующей пары будут равны нулю. Это означает, что данная система пар будет эквивалентна нулю.

Замечание: При рассмотрении плоской системы пар векторное сложение моментов этих пар равносильно скалярному сложению их алгебраических значений, то есть векторные равенства (16) и (17) эквивалентны соответствующим скалярным равенствам.

Примеры на применение условий равновесия пар сил

Пример 1. На изогнутую под углом 30° балку, свободно положенную в точке A и имеющую шарнир в точке B, действуют моменты $M_1 = 1 кН \cdot м$, $M_3 = 2{,}5 кН \cdot м$. Какой момент M_2 необходимо приложить к балке, чтобы реакция в опоре A равнялась $0{,}1 кН$ (рис. 37 а).

Решение: Допустим, искомый момент совпадает по направлению с M_1 и M_3. Тогда на балку действуют три заданных момента – M_1, M_2, M_3. Их уравновесит четвёртая пара, создаваемая равными реакциями опор N (рис. 37 б). Так как реакция опоры A перпендикулярна к AC, то и реакция в шарнире B также перпендикулярна к AC. Для равновесия системы пар необходимо, чтобы сумма их моментов равнялась нулю, то есть

$$\sum_{i=1}^{4} M_i = 0,$$

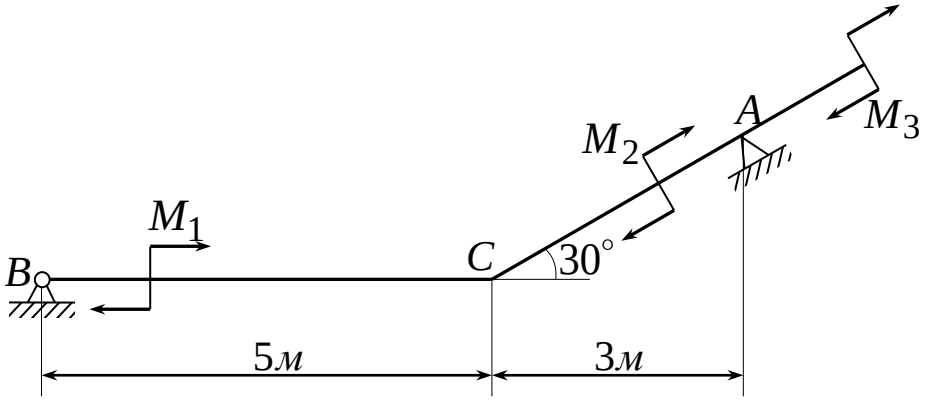
$$-M_1 - M_2 - M_3 + N \cdot h = 0.$$

Откуда искомый момент:

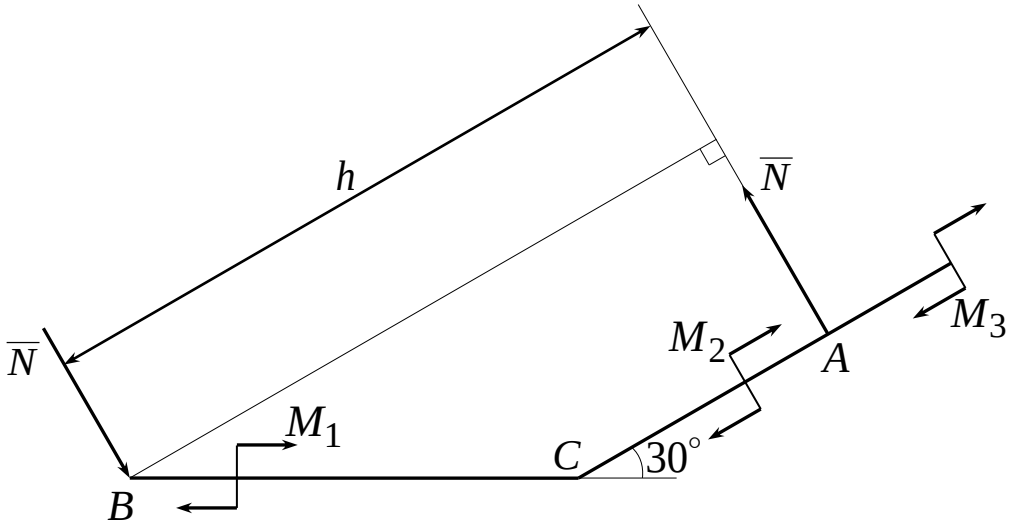
$$M_2 = N \cdot h - M_1 - M_3 = 0{,}1 \cdot 7{,}8 - 1 - 2{,}5 = -2{,}72 кН \cdot м,$$

где h – плечо момента, создаваемого реакциями N. Из рис. 37 б:

$$h = 5 \cdot \cos 30^0 + \frac{3}{\cos 30^0} = 7{,}8м.$$



а)



б)

Рис. 37.

Пример 2. К прямоугольному параллелепипеду, длина рёбер которого $a = 10см$, $b = 16см$, $c = 12см$, приложены три взаимоуравновешивающиеся пары сил $\left(\overline{P}_1, \overline{P}_1^{/}\right)$, $\left(\overline{P}_2, \overline{P}_2^{/}\right)$, $\left(\overline{P}_3, \overline{P}_3^{/}\right)$. Силы первой пары имеют модуль $P_1 = P_1^{/} = 4H$. Определить модули остальных сил (рис. 38).

Решение: При равновесии трёх пар сил, не лежащих в одной плоскости, геометрическая сумма моментов этих пар должна быть

равна нулю, то есть треугольник их моментов должен быть замкнут:

$$\sum_{i=1}^{3} \overline{M}_i = 0,$$

$$\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 = 0.$$

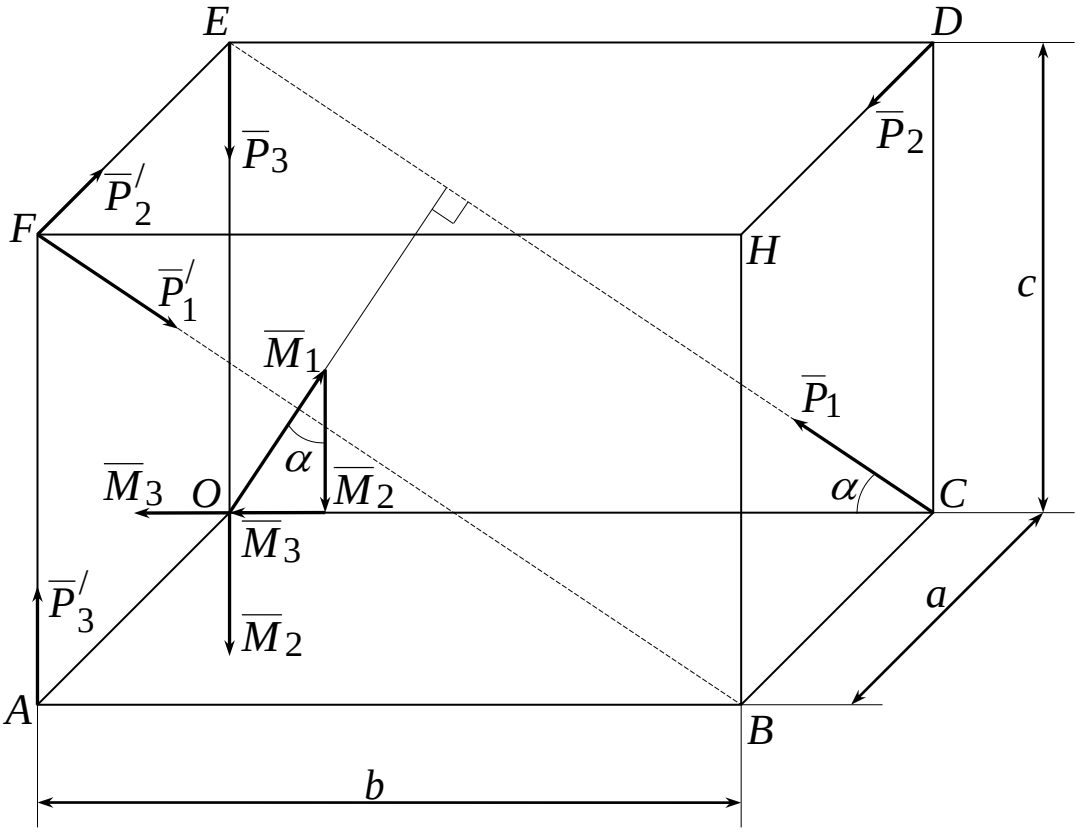


Рис. 38.

Строим в точке O момент каждой пары сил, направляя его перпендикулярно к плоскости действия пары так, чтобы, смотря ему навстречу, видеть соответствующую пару сил стремящейся вращать эту плоскость против хода часовой стрелки:

$$\overline{M}_1 \perp BCEF, \quad \overline{M}_2 \perp EDHF, \quad \overline{M}_3 \perp OAFE.$$

Модули моментов:

$$M_1 = P_1 \cdot BC = 4 \cdot 10 = 40 H \cdot см;$$

$M_2 = P_2 \cdot ED = P_2 \cdot 16;$

$M_3 = P_3 \cdot AO = P_3 \cdot 10.$

Строим замкнутый треугольник моментов пар сил.

Из ΔEOC:

$$\sin\alpha = \frac{EO}{EC} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{12}{\sqrt{16^2 + 12^2}} = \frac{12}{20} = 0{,}6;$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8.$$

Из треугольника моментов:

$M_2 = M_1 \cdot \cos\alpha = 40 \cdot 0{,}8 = 32 H \cdot см;$

$M_3 = M_1 \cdot \sin\alpha = 40 \cdot 0{,}6 = 24 H \cdot см.$

Модули сил, составляющих пары:

$$P_2 = P_2^{/} = \frac{M_2}{12} = \frac{32}{16} = 2H;$$

$$P_3 = P_3^{/} = \frac{M_3}{10} = \frac{24}{10} = 2{,}4H.$$

ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЦЕНТРУ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

12. Главный вектор и главный момент системы сил

Дана произвольная система сил $\left(\overline{F_1}, \ldots, \overline{F_n}\right)$.

Сила $\overline{F}^{\Gamma}$, равная геометрической сумме всех сил системы, называется главным вектором этой системы:

$$\overline{F}^{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i.$$

Момент $\overline{M}^{\Gamma}$, равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно точки O, называется главным моментом системы сил относительно этой точки:

$$\overline{M}_O^{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_O\left(\overline{F}_i\right).$$

Для плоской системы сил это равенство можно рассматривать как скалярное равенство и главный момент как скалярную величину.

Момент M_z^{Γ}, равный алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно оси z, называется главным моментом системы сил относительно этой оси:

$$M_z^{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} m_z\left(\overline{F}_i\right).$$

13. Лемма Пуансо о параллельном переносе силы

Лемма: Сила, приложенная в какой-либо точке твёрдого тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в любой другой точке этого тела, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

Доказательство: Пусть к твёрдому телу в точке A приложена сила $\overline{F}$ (рис. 39).

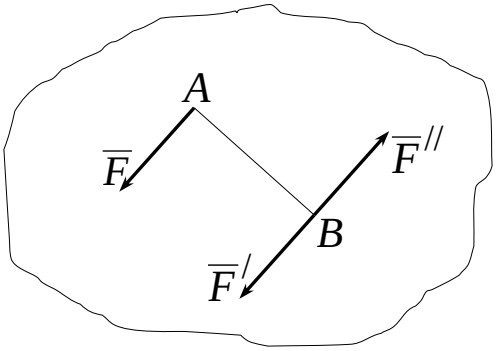


Рис. 39.

Приложим в точке B систему двух сил $\overline{F}^{/}$, $\overline{F}^{//}$, эквивалентную

нулю. Причём $\overline{F}^{/} = \overline{F}$, тогда $\overline{F}^{//} = -\overline{F}$. Получаем

$$\overline{F} \sim \left(\overline{F}, \overline{F}^{/}, \overline{F}^{//}\right)$$

С другой стороны, система сил $\left(\overline{F}, \overline{F}^{/}, \overline{F}^{//}\right)$ эквивалентна силе $\overline{F}^{/}$ и паре сил $\left(\overline{F}, \overline{F}^{//}\right)$. Следовательно, $\overline{F} \sim \left(\overline{F}^{/}, \left(\overline{F}, \overline{F}^{//}\right)\right)$.

Момент пары $\left(\overline{F}, \overline{F}^{//}\right)$ равен

$$\overline{m}\left(\overline{F}, \overline{F}^{//}\right) = \overline{m}_B\left(\overline{F}\right),$$

что и требовалось доказать.

При параллельном переносе силы нужно добавить одну пару сил или её момент (рис. 40).

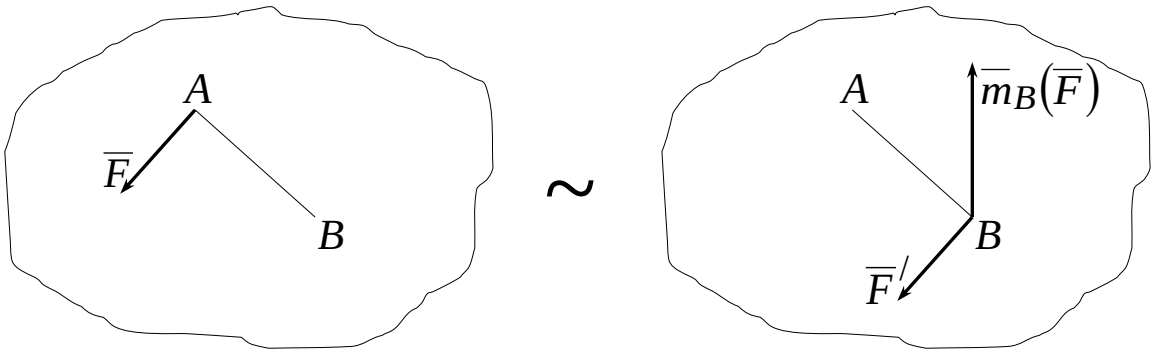


Рис. 40.

14. Приведение произвольной системы сил к данному центру

Пусть на твёрдое тело действует произвольная система сил $\left(\overline{F_1}, \ldots, \overline{F_n}\right)$ (рис. 41). Выберем какую-нибудь точку O за центр приведения и, пользуясь леммой Пуансо, перенесём все силы в центр O, присоединяя при этом соответствующие моменты.

Таким образом, система сил $\left(\overline{F_1}, \ldots, \overline{F_n}\right)$ заменяется системой сил $\left(\overline{F}_1^{/}, \ldots, \overline{F}_n^{/}\right)$ и системой моментов $\left(\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_n\right)$. При этом

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_1^{/}, \quad \overline{F}_2 = \overline{F}_2^{/}, \quad \ldots, \quad \overline{F}_n = \overline{F}_n^{/};$$

$$\overline{m}_1 = \overline{m}_O(\overline{F}_1), \quad \overline{m}_2 = \overline{m}_O(\overline{F}_2), \quad \ldots, \quad \overline{m}_n = \overline{m}_O(\overline{F}_n).$$

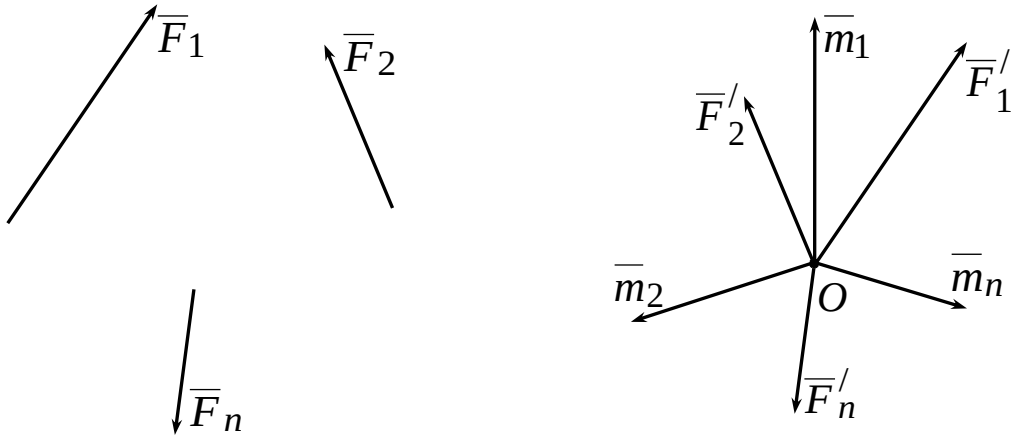


Рис. 41.

Складывая сходящиеся силы с одним штрихом, заменяем их одной силой:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{/} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{F}^{\Gamma}.$$

Складывая моменты – одним моментом:

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_i) = \overline{M}_O^{\Gamma}.$$

Таким образом, доказана следующая основная теорема статики: любую систему сил путём приведения к данному центру можно заменить одной силой, равной главному вектору системы сил и приложенной к центру приведения, и одним моментом, равным главному моменту системы сил относительно центра приведения (рис. 42), то есть

$$(\overline{F_1}, \ldots, \overline{F_n}) \sim (\overline{F}^{\Gamma}, \overline{M}_O^{\Gamma}). \tag{18}$$

Из доказанной теоремы следует, что две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты относительно

одного и того же центра, эквивалентны (условие эквивалентности систем сил).

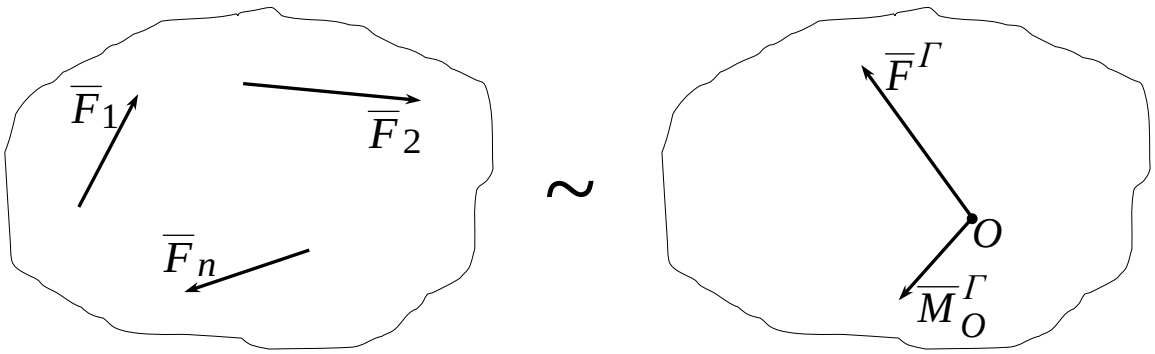


Рис. 42.

Отметим ещё, что значение $\overline{F}^{\Gamma}$ от выбора центра O, очевидно, не зависит. Значение же $\overline{M}_O^{\Gamma}$ при изменении положения центра O может в общем случае изменяться вследствие изменения значений моментов отдельных сил. Поэтому всегда необходимо указывать, относительно какого центра определяется главный момент.

15. Различные случаи приведения системы сил к центру

1. Приведение к паре сил.

$$\overline{F}^{\Gamma} = 0, \quad \overline{M}_O^{\Gamma} \neq 0.$$

Система приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту $\overline{M}_O^{\Gamma}$. В этом случае значение $\overline{M}_O^{\Gamma}$ не зависит от выбора центра приведения, так как иначе получилось бы, что одна и та же система сил заменяется разными, не эквивалентными друг другу парами, что невозможно.

2. Приведение к равнодействующей.

Система сил приводится к равнодействующей в следующих двух случаях:

а) $\overline{F}^{\Gamma} \neq 0, \quad \overline{M}_O^{\Gamma} = 0.$

В этом случае система приводится к равнодействующей $\overline{R} = \overline{F}^{\Gamma}$, приложенной к центру приведения.

Замечание: не следует отождествлять главный вектор $\overline{F}^{\Gamma}$ с равнодействующей $\overline{R}$, так как равнодействующая $\overline{R}$ – это одна сила, которая эквивалентна данной пространственной системе сил, а главный вектор $\overline{F}^{\Gamma}$ эквивалентен данной системе сил только в совокупности с парой сил, момент которой равен главному моменту $\overline{M}_O^{\Gamma}$.

б) $\overline{F}^{\Gamma} \neq 0, \quad \overline{M}_O^{\Gamma} \neq 0, \quad \overline{F}^{\Gamma} \perp \overline{M}_O^{\Gamma}.$

В этом случае система сил приводится к равнодействующей $\overline{R} = \overline{F}^{\Gamma}$, линия действия которой параллельна линии действия силы $\overline{F}^{\Gamma}$ и отстоит от неё на расстоянии $h = \dfrac{M_O^{\Gamma}}{F^{\Gamma}}$.

Действительно, при $\overline{F}^{\Gamma} \perp \overline{M}_O^{\Gamma}$ пара сил, момент которой равен главному моменту $\overline{M}_O^{\Gamma}$, и сила $\overline{F}^{\Gamma}$ лежат в одной плоскости. Тогда, выбрав силы пары $\overline{R}$ и $\overline{R}^{/}$ равными по модулю $\overline{F}^{\Gamma}$ и располагая их как показано на рис. 43, получим, что силы $\overline{R}^{/}$ и $\overline{F}^{\Gamma}$ взаимно уравновесятся, и система заменится одной равнодействующей $\overline{R}$, равной $\overline{F}^{\Gamma}$, линия действия которой проходит через точку O_1.

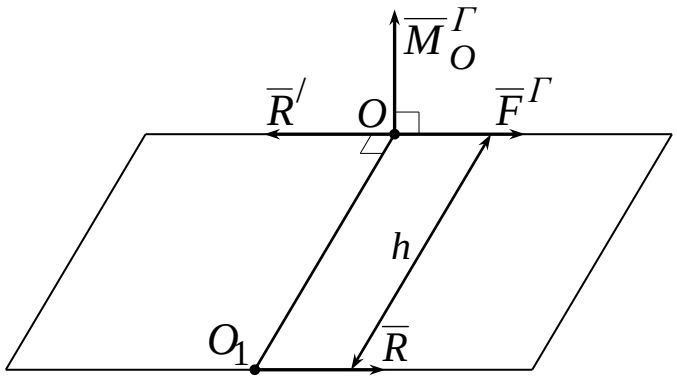


Рис. 43.

При этом момент пары $\left(\overline{R}, \overline{R}^{/}\right)$ должен быть равен $\overline{M}_O^{\Gamma}$:

$$\overline{m}\left(\overline{R}, \overline{R}^{/}\right) = \overline{M}_O^{\Gamma}. \qquad (19)$$

Или, по модулю,

$$M_O^{\Gamma} = R \cdot h.$$

Откуда $h = \dfrac{M_O^{\Gamma}}{R}$ или $h = \dfrac{M_O^{\Gamma}}{F^{\Gamma}}$.

3. Приведение к динаме (силовому винту).

Если $\overline{F}^{\Gamma} \neq 0$, $\overline{M}_O^{\Gamma} \neq 0$, $\overline{F}^{\Gamma} \,||\, \overline{M}_O^{\Gamma}$, то система сил приводится к динаме.

Совокупность, состоящая из одной силы и одного момента, лежащих на одной прямой, называется динамой (или силовым винтом) (рис. 44).

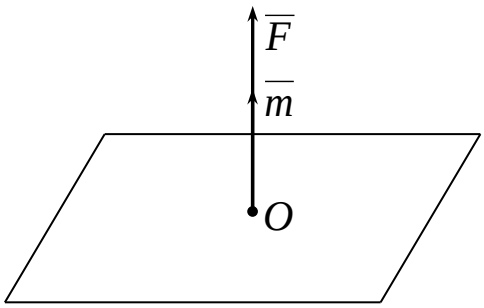


Рис. 44.

Линия действия силы $\overline{F}$ называется центральной осью динамы. Если $\overline{F}^{\Gamma} \neq 0$, $\overline{M}_O^{\Gamma} \neq 0$ и при этом векторы $\overline{F}^{\Gamma}$ и $\overline{M}_O^{\Gamma}$ не перпендикулярны друг другу и не параллельны, то система сил тоже приводится к динаме, но её ось не будет проходить через центр O.

Упражнение. Показать, что плоская система сил и система параллельных сил могут приводиться или к паре, или к равнодействующей, а к динаме не приводятся.

4. Условия равновесия системы сил.

$$\overline{F}^{\Gamma} = 0, \quad \overline{M}_O^{\Gamma} = 0. \tag{20}$$

В этом случае система сил (твёрдое тело под действием этих сил) находится в равновесии.

При выполнении условий (20) согласно основной теореме статики система сил будет эквивалентна нулю. Следовательно, равенства (20) – достаточные условия равновесия. Одновременно эти равенства являются и необходимыми условиями равновесия, так как при невыполнении хотя бы одного из них система сил приводится или к паре, или к равнодействующей, либо к динаме, то есть равновесия не будет.

Таким образом, равенства (20) – необходимые и достаточные условия равновесия произвольной системы сил: Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы относительно произвольной точки равнялись нулю.

С учётом определений главного вектора и главного момента равенства (20) запишутся так:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_O\left(\overline{F}_i\right) = 0. \tag{21}$$

(20) и (21) называются векторными условиями равновесия.

Замечание: В случае плоской системы сил второе равенство (21) можно рассматривать как скалярное равенство.

16. Теорема Вариньона

Теорема: Если система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно какой-либо точки равен сумме моментов всех сил данной системы относительно той же точки.

$$\overline{m}_O(\overline{R}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_i). \qquad (22)$$

Справедливость теоремы следует из равенства (19). Действительно, учитывая, что $\overline{m}(\overline{R}, \overline{R}^{/}) = \overline{m}_O(\overline{R})$ и $\overline{M}_O^{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_i)$, из (19) получаем (22).

Проектируя равенство (22) на ось z, проходящую через точку O, найдём теорему Вариньона относительно оси:

$$m_{Oz}(\overline{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\overline{F}_i).$$

Замечание: В случае плоской системы сил векторное равенство (22) можно заменить на скалярное равенство

$$m_O(\overline{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_O(\overline{F}_i).$$

АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ

17. Произвольная пространственная система сил

Проектируя равенства (21) на прямоугольные декартовые оси, получим:

1) $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;$

2) $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;$

3) $\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;$ (23)

4) $\sum_{i=1}^{n} m_x\left(\overline{F}_i\right)=0;$

5) $\sum_{i=1}^{n} m_y\left(\overline{F}_i\right)=0;$

6) $\sum_{i=1}^{n} m_z\left(\overline{F}_i\right)=0.$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

18. Пространственная система сходящихся сил

Если точку схода сил принять за начало координат декартовых осей, то три последних равенства (23) (уравнения моментов) обратятся в тождества вида $0 \equiv 0$. Таким образом, в этом случае условиями равновесия будут

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0; \qquad (24)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0.$$

Упражнение: Показать, что если за начало координат взять другую точку, то уравнения моментов будут следствиями уравнений (24).

19. Пространственная система параллельных сил

В этом случае можно выбрать координатные оси так, что ось z

будет параллельна силам (рис. 45).

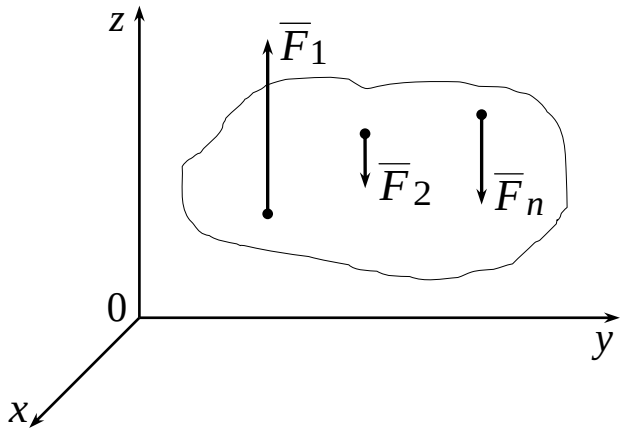


Рис. 45.

Тогда проекции каждой из сил на оси x и y и их моменты относительно оси z будут равны нулю и система (23) даст три условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_x\left(\overline{F}_i\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y\left(\overline{F}_i\right) = 0.$$

Остальные равенства обратятся в тождества вида $0 \equiv 0$.

20. Произвольная плоская система сил

В этом случае координатную плоскость $0xy$ совмещают с плоскостью, в которой расположены силы (рис. 46). Из (23) находим следующие условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad (25)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_z\left(\overline{F}_i\right) = 0.$$

Остальные равенства (23) в этом случае обратятся в пустые равенства $0 \equiv 0$.

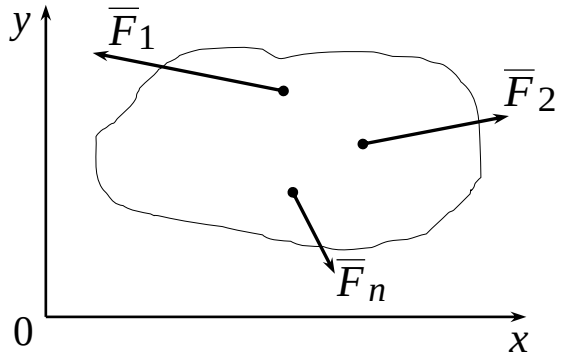


Рис. 46.

Уравнения (25) называются первой или основной формой условий равновесия плоской системы сил: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю. Одновременно равенства (25) выражают условия равновесия твёрдого тела, находящегося под действием плоской системы сил.

Вторая форма условий равновесия плоской системы сил: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекций на ось $0x$, не перпендикулярную прямой AB, были равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A\left(\overline{F}_i\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_B\left(\overline{F}_i\right)=0; \qquad (26)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0.$$

Необходимость этих условий очевидна, так как если любое из них не выполняется, то или $\overline{F}^{\Gamma}\neq 0$, или $M_A^{\Gamma}\neq 0$ ($M_B^{\Gamma}\neq 0$) и равновесия не будет. Докажем их достаточность. Если для данной системы сил выполняются только первые два из условий (26), то для неё $M_A^{\Gamma}=0$ и $M_B^{\Gamma}=0$. Такая система сил может не находиться в равновесии, а иметь равнодействующую $\overline{R}$, одновременно проходящий через точки A и B (рис. 47).

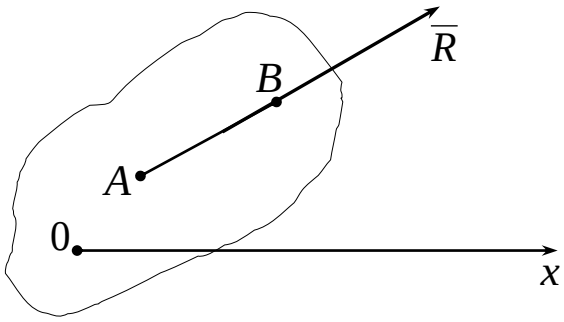


Рис. 47.

Но по третьему условию должно быть $R_x=\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0$. Так как ось $0x$ проведена не перпендикулярно к AB, то последнее условие может быть выполнено, только когда $\overline{R}=0$, то есть когда имеет место равновесие.

Третья форма условий равновесия плоской системы сил (уравнения трёх моментов): для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трёх центров A, B и C, не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A\left(\overline{F}_i\right)=0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_B\left(\overline{F}_i\right)=0; \qquad (27)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_C\left(\overline{F}_i\right)=0.$$

Необходимость этих условий, как и в предыдущем случае, очевидна. Достаточность условий (27) следует из того, что если при одновременном выполнении этих условий данная система сил не находилась бы в равновесии, то она должна была бы приводиться к равнодействующей, одновременно проходящей через точки A, B и C, что невозможно, так как эти точки не лежат на одной прямой. Следовательно, при выполнении условий (27) имеет место равновесие.

Во всех трёх случаях для плоской системы сил получаются три условия равновесия. Условия (25) считаются основными, так как при пользовании ими никаких ограничений на выбор координатных осей и центра моментов не налагается.

21. Плоская система параллельных сил

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно направить ось $0x$ перпендикулярно силам, а ось $0y$ параллельно им (рис. 48).

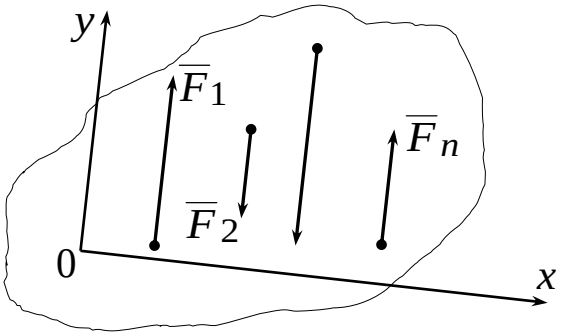


Рис. 48.

Тогда проекция каждой из сил на ось $0x$ будет равна нулю и первое из равенств (25) обратится в тождество вида $0 \equiv 0$. В результате для параллельных сил останется два условия равновесия:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \\ &\sum_{i=1}^{n} m_z\left(\overline{F}_i\right) = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

где ось $0y$ параллельна силам.

Другая форма условий равновесия для параллельных сил, получающаяся из равенств (26), имеет вид:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} m_A\left(\overline{F}_i\right) = 0; \\ &\sum_{i=1}^{n} m_B\left(\overline{F}_i\right) = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

При этом точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной силам.

22. Статически определённые и неопределённые задачи

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются статически определёнными.

Задачи же, в которых число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются статически неопределёнными.

23. Решение задач статики

Задачи по статике решаются аналитическим способом путём составления уравнений равновесия. При решении задач целесообразно придерживаться следующего плана:

1) установить объект равновесия;
2) выявить все связи и показать на расчётной схеме все их реакции, а также все активные силы;
3) определить вид системы сил, действующих на данный объект равновесия;
4) выбрать наиболее удобную для составления и решения уравнений равновесия систему координат;
5) составить систему уравнений равновесия рассматриваемого объекта, находящегося в равновесии под действием данной системы сил;
6) решить полученную систему уравнений относительно искомых величин.

Плоская система сил

Задачи на равновесие твёрдых тел, находящихся под действием плоской системы сил, решаются по приведённому ниже общему плану.

Уравнения равновесия твёрдого тела в случае произвольной плоской системы сил можно составить в одной из трёх форм.

Выбирая ту или иную форму уравнений равновесия, следует стремиться к получению наиболее простой системы уравнений, чтобы в каждое из них входило минимальное число неизвестных. Необходимо иметь в виду, что получению более простой системы уравнений способствует также удачный выбор системы координат. Оси координат следует направлять так, чтобы они были перпендикулярны к некоторым неизвестным реакциям. Тогда эти реакции в соответствующие уравнения проекций не войдут. С этой же целью точки для составления уравнений моментов следует выбирать там, где пересекается больше неизвестных реакций (если только это не усложнит вычисление плеч других сил). При вычислении моментов часто бывает удобно разлагать некоторые силы на составляющие и, пользуясь теоремой Вариньона, находить момент силы как сумму моментов этих составляющих.

Пространственная система сил

Задачи равновесия твёрдых тел, находящихся под действием пространственной системы сил, решаются по изложенному общему плану.

Для равновесия твёрдого тела под действием пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех действующих сил (активных и пассивных) на произвольно выбранные оси декартовых координат и суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_x\left(\overline{F}_i\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y\left(\overline{F}_i\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_z\left(\overline{F}_i\right) = 0.$$

Для того, чтобы задача была статически определённой, число неизвестных, входящих в эти уравнения, не должно быть более шести. Выбирая систему координат, следует стремиться к тому, чтобы оси координат были параллельны или перпендикулярны к возможно большему числу неизвестных реакций. Тогда эти реакции либо проектируются на оси в натуральную величину, либо их проекции на оси координат равны нулю. Кроме того, желательно

начало координат выбирать так, чтобы оси пересекали как можно больше неизвестных реакций. В этом случае они не войдут в уравнение моментов.

При составлении уравнений равновесия наибольшее затруднение вызывает вычисление моментов сил относительно осей координат. В некоторых случаях бывает удобно, как и в случае плоской системы сил, разложить силу на составляющие, параллельные координатным осям, и находить момент силы относительно оси по теореме Вариньона как алгебраическую сумму моментов составляющих. В сложных случаях для облегчения вычисления моментов сил рекомендуется изобразить на вспомогательном рисунке проекцию рассматриваемой конструкции и приложенных к ней сил на плоскость, перпендикулярную к оси, относительно которой определяются моменты сил. При этом проекции сил даются со стороны положительного направления.

24. Равновесие систем тел

В статике твёрдого тела наряду с задачами равновесия одного тела приходится рассматривать и задачи равновесия системы сочленённых тел, то есть конструкции, состоящей из нескольких связанных не жёстко друг с другом частей. В сочленённых системах различают внешние связи (опоры), скрепляющие конструкцию с телами, не входящими в её состав, и внутренние связи, соединяющие части конструкции между собой.

Решение задач равновесия сочленённых систем можно произвести двумя способами.

Первый способ. Освободиться только от внешних связей и составить уравнения равновесия для всей конструкции в целом как для одного твёрдого тела. Правомерность составления этих уравнений следует из аксиомы отвердевания, согласно которой система сил, действующих на конструкцию, при равновесии должна удовлетворять условиям равновесия твёрдого тела, хотя конструкция после освобождения от внешних опор и не остаётся жёсткой. Часто

число полученных таким образом уравнений оказывается меньше числа неизвестных, однако это обстоятельство ещё не делает задачу статически неопределённой. Если расчленить конструкцию на отдельные части и составить уравнения равновесия для одной или нескольких частей с учётом реакций внутренних связей, то число неизвестных может оказаться не больше числа всех составленных независимых уравнений равновесия. В этом случае задача является статически определённой.

Второй способ. Конструкция сразу расчленяется на отдельные жёсткие части и рассматривается равновесие каждой из них в отдельности с учётом внутренних реакций.

ТРЕНИЕ

25. Трение скольжения

Сопротивление, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого, называется трением скольжения. Различают трение скольжения в покое и в движении.

Возникновение трения обусловлено:

– шероховатостью поверхностей;
– наличием сцепления у прижатых друг к другу тел.

Законы трения скольжения в покое:

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения скольжения (или сила сцепления), которая может принимать любые значения от нуля до некоторого максимального значения $F_{тр}^{\max}$:

$$0 \le F_{тр} \le F_{тр}^{\max}.$$

Приложенная к телу сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

2. Максимальная сила трения пропорциональна нормальному давлению тела на опорную поверхность, или, что то же самое, нормальной реакции поверхности:

$$F_{тр}^{\max} = f_0 \cdot N,$$

где f_0 – статический коэффициент трения, он – величина безразмерная; определяется опытным путём и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния их поверхностей (характер обработки, температура, влажность и тому подобное).

3. Значение максимальной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

Значение силы трения при покое определяется неравенством, следовательно, это значение может быть любым, но не большим, чем $F_{тр}^{\max}$. Чему конкретно равна сила трения, можно установить, только решив соответствующую задачу. Величине $F_{тр}^{\max}$ сила трения будет равна лишь тогда, когда действующая на тело сдвигающая сила достигает такого значения, что при малейшем её увеличении тело начинает двигаться (скользить). Равновесие, имеющее место, когда сила трения $F_{тр} = F_{тр}^{\max}$, называется предельным равновесием.

Законы трения скольжения в движении:

1. Сила трения скольжения в движении направлена противоположно скорости тела относительно опорной поверхности.

2. Сила трения скольжения в движении также пропорциональна нормальной реакции опорной поверхности:

$$F_{тр} = f \cdot N,$$

где f – отвлечённое число и называется динамическим коэффициентом трения скольжения. Определяется опытным путём. Значение f зависит не только от материала и состояния

поверхностей, но и в некоторой степени от скорости движущихся тел. В большинстве случаев с увеличением скорости f сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение.

Угол трения. Конус трения

Реакция реальной (шероховатой) связи слагается из двух составляющих: из нормальной реакции $\overline{N}$ и перпендикулярной ей силы трения (сцепления) $\overline{F}_{тр}$. Следовательно, полная реакция $\overline{R}$ будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до $\overline{F}_{тр}^{\max}$ сила $\overline{R}$ изменяется от $\overline{N}$ до $\overline{R}_{\max}$, а её угол с нормалью растёт от нуля до некоторого предельного значения φ. Наибольший угол φ, который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется углом трения (рис. 49).

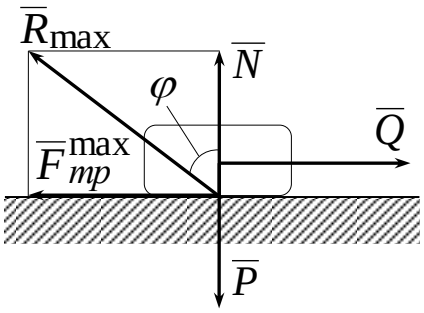


Рис. 49.

Из рис. 49 видно, что

$$tg\varphi = \frac{F_{тр}^{\max}}{N} = \frac{f_0 \cdot N}{N} = f_0,$$

$$\varphi = arctg\ f_0.$$

Конус, описанный при вращении силы $\overline{R}_{\max}$ вокруг силы $\overline{N}$, называется конусом трения (рис. 50).

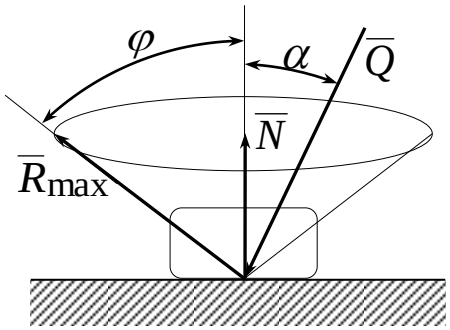


Рис. 50.

Если линия действия равнодействующей активных сил $\overline{Q}$ лежит внутри конуса трения, то есть $\alpha \le \varphi$, то вне зависимости от модуля Q тело останется в покое, так как сдвигающее усилие $Q \cdot \sin\alpha$ будет меньше $F_{тр}^{\max}$. Действительно:

$$\alpha \le \varphi \to Q \cdot \sin\alpha \le Q \cdot \sin\varphi = Q \cdot tg\varphi \cdot \cos\varphi = f_0 \cdot Q \cdot \cos\varphi = f_0 \cdot N = F_{тр}^{\max}.$$

26. Равновесие при наличии трения

Изучение равновесия тел с учётом трения скольжения можно свести к рассмотрению предельного равновесия, которое имеет место, когда сила трения равна $F_{тр}^{\max}$.

При аналитическом решении реакцию шероховатой связи изображают двумя её составляющими $\overline{N}$ и $\overline{F}_{тр}^{\max}$. Затем составляют обычные уравнения равновесия и присоединяют к ним равенство $F_{тр}^{\max} = f_0 \cdot N$. Из полученной таким путём системы уравнений и определяют искомые величины.

Если в задаче требуется определить условия равновесия при всех значениях, которые может иметь сила трения, то есть при $F_{тр} \le F_{тр}^{\max}$, то её тоже можно решить, рассмотрев предельное равновесие и уменьшая затем в полученном результате коэффициент трения f_0 до нуля.

Отметим ещё, что если в задаче надо определить значение силы трения $F_{тр}$, когда равновесие не является предельным, то эту силу $F_{тр}$ следует считать неизвестной величиной и находить из соответствующих уравнений, решая задачу с учётом неравенства $F_{тр} \le f_0 \cdot N$.

27. Трение качения

Трение качения – сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиуса R и веса P, лежащий на горизонтальной шероховатой поверхности. Приложим к оси катка силу $\overline{Q}$, меньшую $\overline{F}_{тр}^{\max}$. Тогда в точке A возникает сила трения $\overline{F}_{тр}$, численно равная $\overline{Q}$, которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать нормальную реакцию $\overline{N}$ тоже приложенной в точке A, то она уравновесит силу $\overline{P}$, а силы $\overline{Q}$ и $\overline{F}_{тр}$ образуют пару, вызывающую качение цилиндра. При такой схеме качение должно начаться под действием любой, сколь угодно малой силы $\overline{Q}$ (рис. 51).

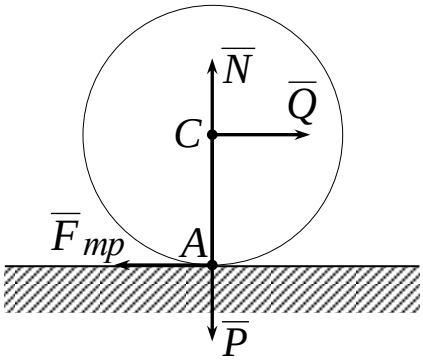


Рис. 51.

Но как показывает опыт, это не так. Объясняется это тем, что фактически вследствие деформаций тел касание их происходит вдоль некоторой площадки AB. При действии силы $\overline{Q}$ интенсивность давления у края A убывает, а у края B возрастает. В результате

реакция $\overline{N}$ оказывается смещённой в сторону действия силы $\overline{Q}$. С увеличением силы $\overline{Q}$ до некоторого предельного значения $\overline{Q}_{пр}$ это смещение растёт до некоторой предельной величины k (рис. 52).

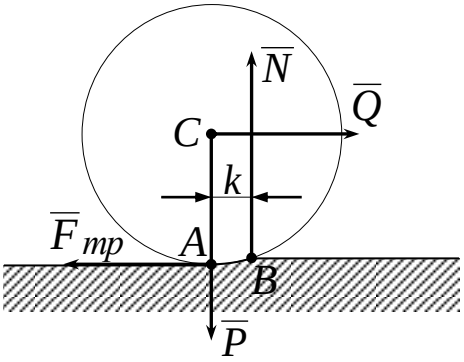


Рис. 52.

Таким образом, пока $Q < Q_{пр}$, каток находится в покое, при $Q > Q_{пр}$ начинается движение.

При смещении реакции $\overline{N}$ возникает пара $(\overline{P}, \overline{N})$, препятствующая качению катка. Максимальное значение момента этой пары при $Q = Q_{пр}$ равно

$$M_{тр} = k \cdot N$$

и называется моментом трения качения. Коэффициент пропорциональности k измеряется в сантиметрах и называется коэффициентом трения качения. Определяется опытным путём. Приводится в справочниках.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

28. Центр тяжести твёрдого тела

Рассмотрим твёрдое тело, находящееся вблизи земной поверхности, считая, что размеры тела малы по сравнению с радиусом Земли. На каждую частицу тела действует сила тяжести.

Так как размеры тела по сравнению с радиусом Земли малы, то эти силы тяжести можно считать параллельными друг другу.

Складывая силы тяжести частиц по правилу сложения параллельных сил, заменим их равнодействующей

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \overline{p}_i,$$

приложенной в некоторой точке C. Эта сила $\overline{P}$ называется весом тела. Понятно, что при любых поворотах тела относительно Земли модуль и точка приложения веса $\overline{P}$ не изменяются, другим будет только направление $\overline{P}$ относительно тела.

Неизменно связанная с телом точка, через которую проходит линия действия веса тела при любых его поворотах относительно Земли, называется центром тяжести тела.

Найдём координаты центра тяжести. В осях $0xyz$, где ось $0z$ параллельна силам, обозначим координаты точек: $M_1(x_i, y_i, z_i)$, $M_2(x_j, y_j, z_j)$, … , $C(x_C, y_C, z_C)$ (рис 53).

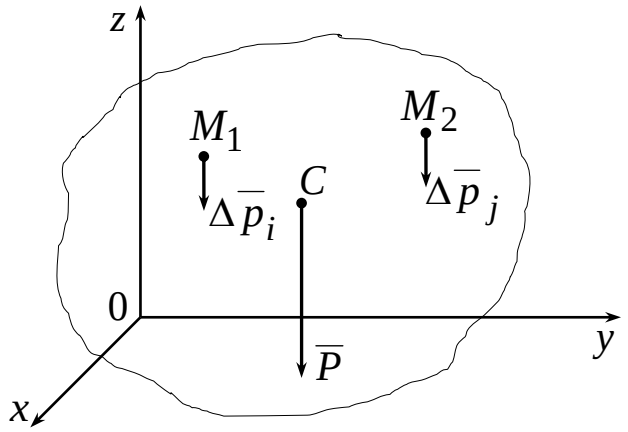


Рис. 53.

Беря моменты сил относительно оси $0y$ и применяя теорему Вариньона, получим

$$P \cdot x_C = \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \cdot x_i,$$

для координаты y_C аналогичную формулу найдём, беря моменты относительно оси $0x$:

$$P \cdot y_C = \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \cdot y_i.$$

Для определения z_C учтём, что поворот тела относительно Земли равносилен повороту осей относительно тела. Вместо поворота тела относительно Земли повернём оси так, чтобы ось $0y$ стала параллельной силам (рис. 54).

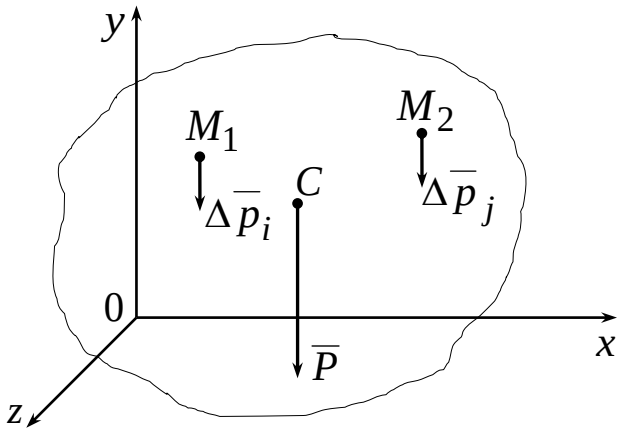


Рис. 54.

Применим теорему Вариньона, беря моменты сил относительно оси $0x$. Это даёт:

$$P \cdot z_C = \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \cdot z_i.$$

Окончательно получим следующие формулы для координат центра тяжести твёрдого тела:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \cdot x_i}{P}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \cdot y_i}{P}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \cdot z_i}{P}. \qquad (30)$$

29. Координаты центра тяжести однородного тела

Вес любой части однородного тела пропорционален её объёму:

$$\Delta p_i = \gamma \cdot \Delta V_i, \quad P = \gamma \cdot V,$$

где V – объём всего тела, γ – постоянный удельный вес.

Подставив эти выражения в (30), после сокращения на общий множитель γ получим:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \cdot x_i}{V}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \cdot y_i}{V}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \cdot z_i}{V}. \qquad (31)$$

Координаты (31) называются координатами центра тяжести объёма, так как они от материала тела, то есть от γ не зависят, а зависят только от геометрической формы тела.

Аналогично, для однородной тонкой пластины:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot x_i}{S}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot y_i}{S}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot z_i}{S}, \qquad (32)$$

где S – площадь всей пластины, ΔS_i – площади её частей. Координаты (32) называют координатами центра тяжести пластины.

Точно также определяются координаты центра тяжести тонкой проволоки (центра тяжести линии):

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta \ell_i \cdot x_i}{\ell}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta \ell_i \cdot y_i}{\ell}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta \ell_i \cdot z_i}{\ell}, \qquad (33)$$

где ℓ – длина всей линии, $\Delta \ell_i$ – длины её частей.

30. Некоторые способы определения центров тяжести

1. Симметрия. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

2. Разбиение. Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по формулам (30) – (33).

Пример. Дана однородная пластина нижеприведённой формы (рис. 55).

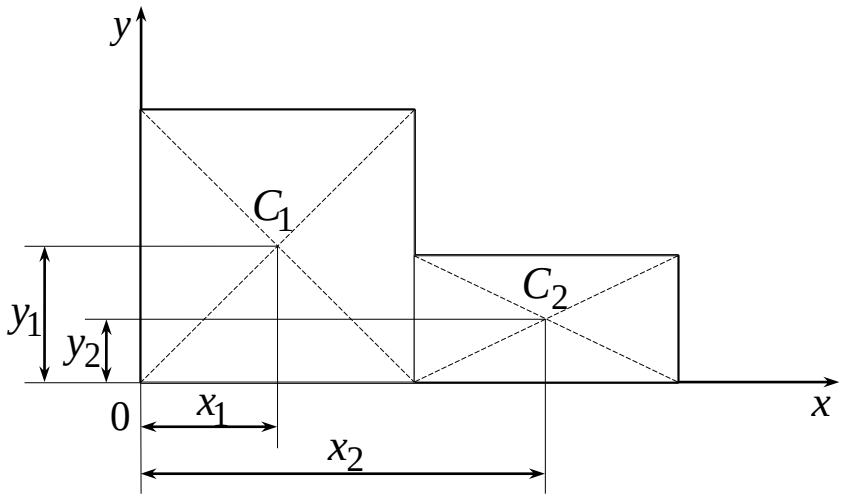


Рис. 55.

Разделим тело на два прямоугольника. Центр тяжести каждого прямоугольника находится в точке пересечения его диагоналей. Применяя формулы (32), найдём:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot x_i}{S} = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2}{S_1 + S_2}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot y_i}{S} = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2}{S_1 + S_2},$$

где x_1, y_1 – координаты центра тяжести первого прямоугольника; x_2, y_2 – координаты центра тяжести второго прямоугольника; S_1, S_2 –

площади прямоугольников.

3. Дополнение. Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны. Координаты центра тяжести всего тела вычисляются по тем же формулам (30) – (33), только объёмы или площади вырезанной части берутся с отрицательным знаком.

Пример. Дана прямоугольная пластина с вырезом радиуса r (рис. 56).

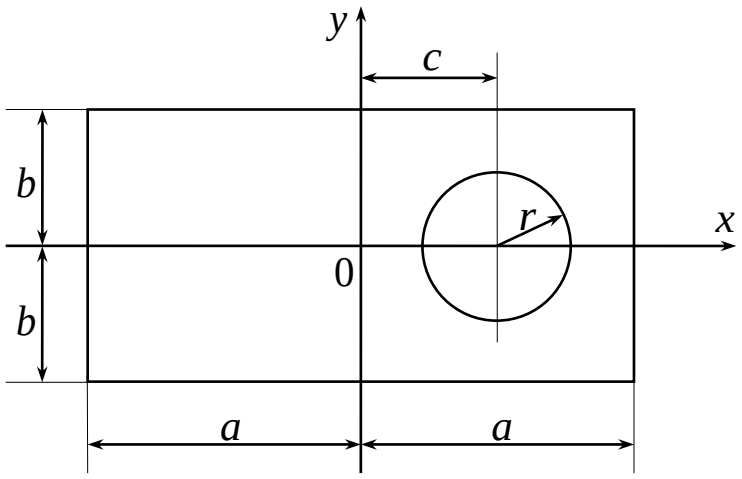


Рис. 56.

$$x_C = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2}{S_1 + S_2} = \frac{S_1 \cdot 0 + S_2 \cdot c}{S_1 + S_2} = \frac{\left(-\pi \cdot r^2\right) \cdot c}{4 \cdot a \cdot b + \left(-\pi \cdot r^2\right)} = -\frac{\pi \cdot c \cdot r^2}{4 \cdot a \cdot b - \pi \cdot r^2};$$

$y_C = 0,$ так как $y_1 = y_2 = 0.$

Здесь $S_1 = 4 \cdot a \cdot b$ – площадь всей прямоугольной пластины (без учёта выреза), $S_2 = \pi \cdot r^2$ – площадь вырезанного круга.

4. Интегрирование. Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, центры тяжести которых известны, то в формулах (31) – (33) переходят к пределу, устремляя число разбиений к бесконечности. Тогда суммы в этих формулах обращаются в интегралы:

$$x_C = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{(V)} x \cdot dV, \quad y_C = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{(V)} y \cdot dV, \quad z_C = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{(V)} z \cdot dV;$$

$$x_C = \frac{1}{S} \cdot \int\limits_{(S)} x \cdot dS, \quad y_C = \frac{1}{S} \cdot \int\limits_{(S)} y \cdot dS, \quad z_C = \frac{1}{S} \cdot \int\limits_{(S)} z \cdot dS;$$

$$x_C = \frac{1}{\ell} \cdot \int\limits_{(\ell)} x \cdot d\ell, \quad y_C = \frac{1}{\ell} \cdot \int\limits_{(\ell)} y \cdot d\ell, \quad z_C = \frac{1}{\ell} \cdot \int\limits_{(\ell)} z \cdot d\ell. \qquad (34)$$

5. Экспериментальный способ. Центры тяжести неоднородных тел сложной формы обычно определяются экспериментально.

31. Центры тяжести некоторых однородных тел

1. Центр тяжести дуги окружности.

Рассмотрим дугу $\overset{\smile}{AB}$ радиуса R с центральным углом $\angle AOB = 2 \cdot \alpha$. В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси $0x$ (рис. 57).

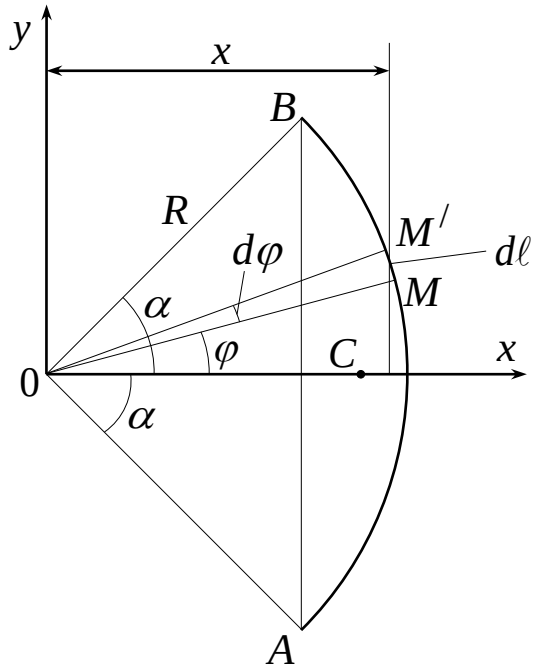


Рис. 57.

Найдём координату x_C по формулам (34). Для этого выделим на дуге $\overset{\smile}{AB}$ элемент $MM^{/}$ длиной $d\ell = R \cdot d\varphi$, положение которого определяется углом φ. Координата x элемента $MM^{/}$ будет $x = R \cdot \cos\varphi$. Подставляя эти значения x и $d\ell$ в первую из формул (34) и имея в виду, что интеграл должен быть распространён на всю длину дуги, получим:

$$x_C = \frac{1}{\ell} \cdot \int_A^B x \cdot d\ell = \frac{R^2}{\ell} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi \cdot d\varphi = 2 \cdot \frac{R^2}{\ell} \cdot \sin\alpha,$$

где ℓ – длина дуги $\overset{\smile}{AB}$, равная $R \cdot 2 \cdot \alpha$.

Отсюда окончательно находим, что центр тяжести дуги окружности лежит на её оси симметрии на расстоянии от центра 0, равном

$$x_C = \frac{R \cdot \sin\alpha}{\alpha},$$

где угол α измеряется в радианах.

2. Центр тяжести площади кругового сектора (рис. 58).

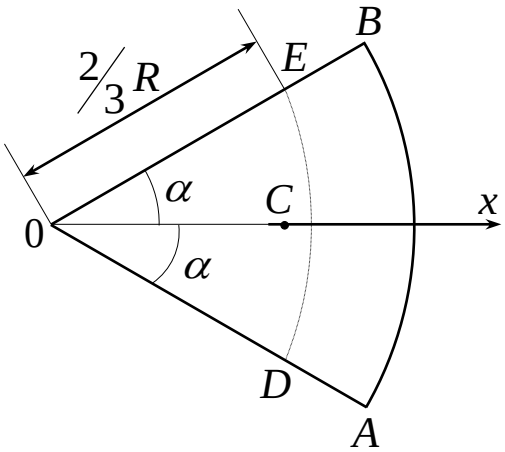


Рис. 58.

$$x_C = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \cdot \sin\alpha}{\alpha}.$$

3. Центр тяжести площади треугольника в точке пересечения медиан (рис. 59).

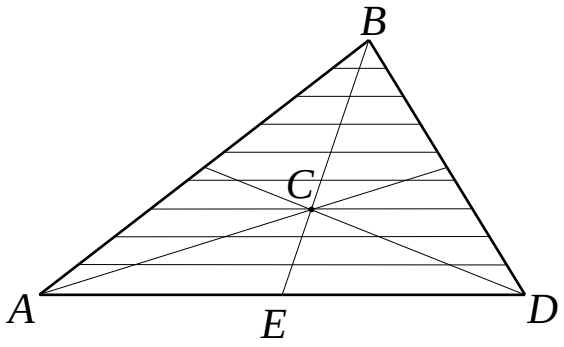


Рис. 59.

$$CE = \frac{BE}{3}.$$

4. Центр тяжести объёма пирамиды (или конуса) (рис. 60).

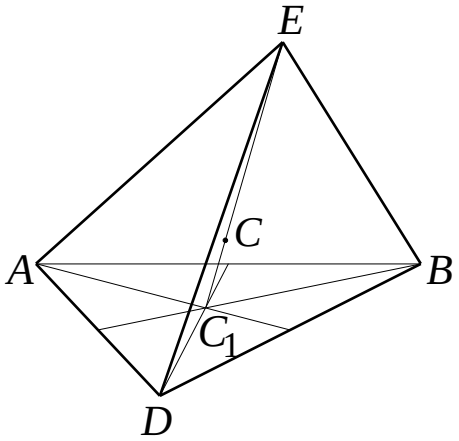


Рис. 60.

$$CC_1 = \frac{EC_1}{4},$$

где C_1 – центр тяжести площади основания пирамиды.

5. Центр тяжести объёма полушара (рис. 61).

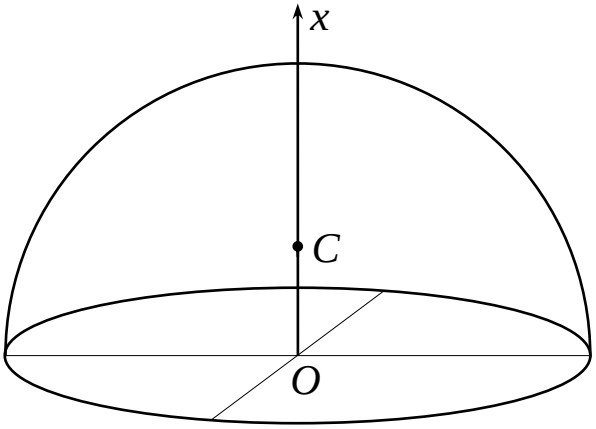


Рис. 61.

$$x_C = OC = \frac{3 \cdot R}{8},$$

где R – радиус полушара.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется материальной точкой, абсолютно твёрдым телом?
2. Какими факторами определяется действие силы на твёрдое тело?
3. Что называется равнодействующей системы сил?
4. Сформулируйте все известные вам аксиомы статики.
5. Что называется связью, реакцией связи, и каковы реакции типовых видов связей?
6. Как определяется проекция силы на плоскость и ось?
7. В чём состоит метод двойного проектирования силы?
8. В чём заключается геометрический и аналитический способы сложения сил?
9. Как формулируются условия равновесия системы сходящихся сил?
10. Сформулируйте теорему о трёх силах.
11. Что представляет собой вектор-момент силы и алгебраический момент силы относительно центра?

12. В каком случае момент силы относительно центра равен нулю?
13. Что называется моментом силы относительно оси?
14. В каком случае момент силы относительно оси равен нулю?
15. Какая зависимость существует между моментом силы относительно оси и относительно центра, лежащего на этой оси?
16. Как выражаются моменты силы относительно трёх координатных осей через проекции силы и координаты точки её приложения?
17. Что называется парой сил? Чем характеризуется действие пары сил на твёрдое тело?
18. Как направлен, где приложен и чему равен по модулю вектор-момент пары?
19. Что называется алгебраическим моментом пары сил?
20. При каких условиях две пары сил будут эквивалентны?
21. Что является условием равновесия системы пар сил?
22. Могут ли уравновесить друг друга две пары сил, лежащие в пересекающихся плоскостях?
23. В чём заключается теорема о сложении пар сил?
24. Что называется главным вектором произвольной системы сил и в чём состоит его отличие от равнодействующей силы произвольной системы сил?
25. Что называется главным моментом произвольной системы сил относительно центра и оси?
26. Изменяются ли главный вектор и главный момент при перемене положения центра приведения?
27. В чём состоит теорема Вариньона?
28. При каком условии величина главного момента произвольной системы сил не зависит от выбора положения центра приведения?
29. Как формулируются условия равновесия произвольной системы сил?
30. Сколько независимых уравнений равновесия можно составить для произвольной пространственной системы сил?
31. Сформулируйте условия равновесия плоской системы сил.

32. Какие уравнения равновесия можно составить для плоской системы сил?
33. В чём заключается метод расчленения?
34. Что называется статически определённой и неопределённой задачей?
35. Что называется силой трения скольжения в покое (силой сцепления)? Как направлена, в каких пределах она изменяется?
36. Какова связь между углом трения и коэффициентом трения?
37. Как направлена сила трения скольжения в движении?
38. Что называется коэффициентом трения качения? Какова его размерность?
39. Что называется моментом трения качения? В каких пределах он изменяется?
40. Как найти центр тяжести составного тела? В чём суть метода отрицательных площадей (объёма)?

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО СТАТИКЕ

Задача 1. Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы

Задача. Определить реакции опор фермы от заданной нагрузки, а также силы во всех её стержнях способом вырезания узлов. Схема фермы показана на рис. 62. Необходимые для расчёта данные приведены в табл. 1.

P_1	P_2	P_3	a	h	Номера стержней
кН	кН	кН	м	м	
5	10	4	4	2	6, 7, 12

Табл.1.

Решение.

1. Определение реакций опор. Покажем реакции опор,

приложенные к ферме. Опора A фермы – каток, на этой опоре имеется реакция $\overline{R}_A$, направленная перпендикулярно опорной поверхности, то есть вертикально вверх. Опора B фермы – неподвижный цилиндрический шарнир, направление реакции неизвестно, поэтому на этой опоре действуют реакции $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$, как составляющие неизвестной реакции $\overline{R}_B$. Кроме того, на ферму действуют задаваемые (активные) силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$.

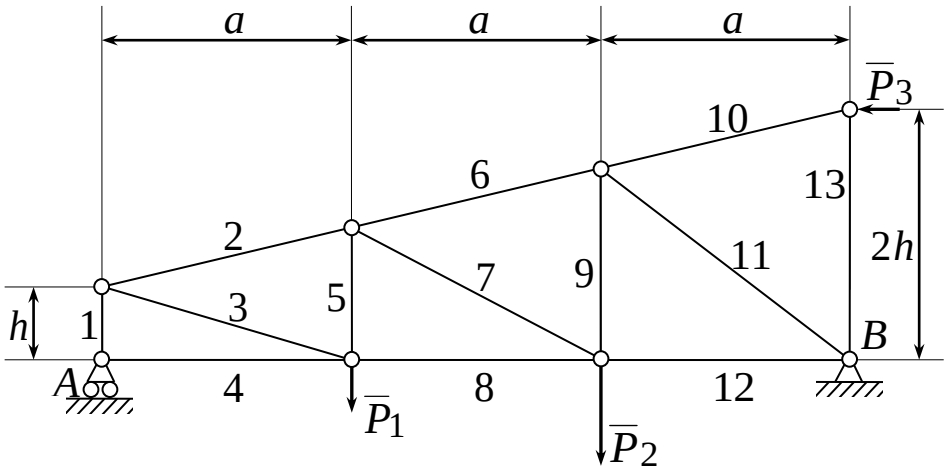


Рис. 62.

Составим уравнения равновесия сил, приложенных к ферме:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ X_B - P_3 = 0; \tag{35}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ R_A - P_1 - P_2 + Y_B = 0; \tag{36}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_A\left(\overline{F}_i\right) = 0;\ -P_1 \cdot a - P_2 \cdot 2 \cdot a + Y_B \cdot 3 \cdot a + P_3 \cdot 2 \cdot h = 0. \tag{37}$$

Из уравнения (35) имеем $X_B = P_3 = 4кН$, из (37) находим $Y_B = 7кН$, а из (36) получаем $R_A = 8кН$.

Проверим правильность определения реакций опор. Составим неиспользованное ранее уравнение равновесия, например, для суммы

моментов всех сил, действующих на ферму, относительно точки E:

$$\sum_{i=1}^{n} m_E\left(\overline{F}_i\right)=0;$$

$$-R_A\cdot a+P_3\cdot\frac{2}{3}\cdot h+Y_B\cdot 2\cdot a+X_B\cdot\frac{4}{3}\cdot h-P_2\cdot a=$$

$$=-8\cdot 4+4\cdot\frac{2}{3}\cdot 2+7\cdot 8+4\cdot\frac{4}{3}\cdot 2-10\cdot 4=72-72=0.$$

Стало быть, реакции опор определены правильно:

2. Определение сил в стержнях фермы способом вырезания узлов.

На рис. 63 показаны узлы фермы с приложенными к ним активными и реактивными силами.

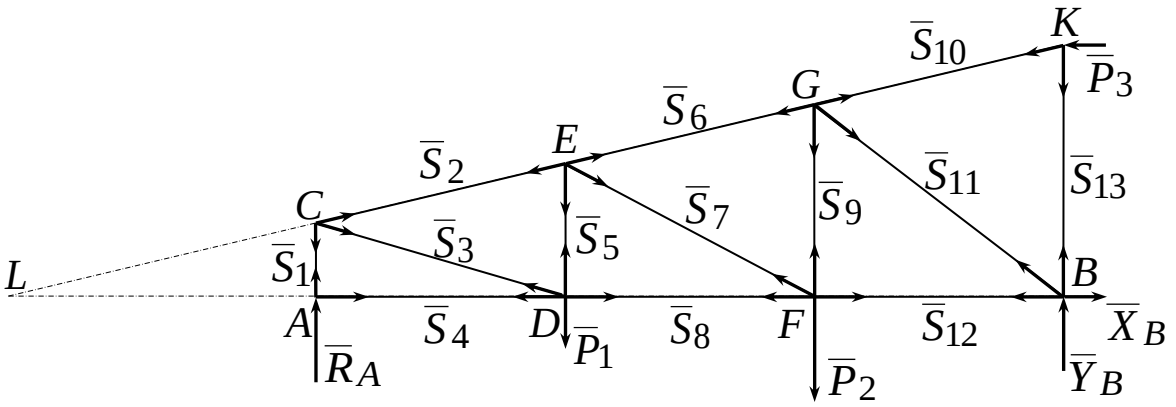


Рис. 63.

Узлами фермы называются места схода стержней различных направлений. Узлы считаются идеальными шарнирами. Принимаем такие обозначения: $\overline{S}_i$ – сила в стержне i; $\overline{S}_{iA}$ – реакция стержня i с направлением, исходящим из узла A и так далее. Реакции стержней направляем от узла, считая стержни растянутыми. Если в результате решения задачи реакция стержня получится отрицательной, то это будет означать, что данный стержень сжат. Для двух соседних узлов, соединённых i-тым стержнем, например, A и C (см. рис. 63): $S_{1A}=S_{1C}$, в то же время $S_{1A}=S_{1C}=S_1$.

Для каждого узла, как для плоской системы сходящихся сил, составляем по два уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0. \qquad (38)$$

Рекомендуется рассматривать узлы в такой последовательности, чтобы каждый раз в уравнения (38) входило не более двух неизвестных.

I. Начнём с рассмотрения узла K:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \; -P_3 - S_{10K} \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \; -S_{10K} \cdot \sin\alpha - S_{13K} = 0.$$

После предварительного определения

$$\cos\alpha = \frac{3 \cdot a}{\sqrt{h^2 + 9 \cdot a^2}} = \frac{12}{\sqrt{148}} = 0{,}986;$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 9 \cdot a^2}} = \frac{2}{\sqrt{148}} = 0{,}164;$$

находим $S_{10K} = -\dfrac{P_3}{\cos\alpha} = -4{,}057 кН$ (знак минус показывает, что стержень сжат).

$$S_{13K} = -S_{10K} \cdot \sin\alpha = 0,(6) кН.$$

II. Узел B:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ -S_{12B} - S_{11B} \cdot \cos\beta_1 + X_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ S_{13B} + Y_B + S_{11B} \cdot \sin\beta_1 = 0.$$

Здесь

$$\cos\beta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(h + \frac{2 \cdot h}{3}\right)^2}} = 0{,}768;$$

$$\sin\beta_1 = \frac{h + \frac{2 \cdot h}{3}}{\sqrt{a^2 + \left(h + \frac{2 \cdot h}{3}\right)^2}} = 0{,}64.$$

Поэтому $S_{11B} = -11{,}98 кН$; $S_{12B} = 13{,}2 кН$.

III. Узел G:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ S_{10G} \cdot \cos\alpha - S_{6G} \cdot \cos\alpha + S_{11G} \cdot \cos\beta_1 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ -S_{9G} - S_{6G} \cdot \sin\alpha - S_{11G} \cdot \sin\beta_1 + S_{10G} \cdot \sin\alpha = 0,$$

откуда $S_{6G} = -13{,}39 кН$; $S_{9G} = 9{,}2 кН$.

IV. Узел F:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ S_{12F} - S_{8F} - S_{7F} \cdot \cos\beta_2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ S_{9F} - P_2 + S_{7F} \cdot \sin\beta_2 = 0.$$

Здесь

$$\cos\beta_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(h + \frac{h}{3}\right)^2}} = 0{,}832;$$

$$\sin\beta_2 = \frac{h + \frac{h}{3}}{\sqrt{a^2 + \left(h + \frac{h}{3}\right)^2}} = 0{,}(5).$$

В результате вычислений находим $S_{7F} = 1{,}44\kappa H$; $S_{8F} = 12\kappa H$.

V. Узел E:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ -S_{2E}\cdot\cos\alpha + S_{6E}\cdot\cos\alpha + S_{7E}\cdot\cos\beta_2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ -S_{5E} - S_{2E}\cdot\sin\alpha + S_{6E}\cdot\sin\alpha - S_{7E}\cdot\sin\beta_2 = 0.$$

Отсюда $S_{2E} = -12{,}17\kappa H$; $S_{5E} = -1\kappa H$.

VI. Узел D:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ -S_{4D} + S_{8D} - S_{3D}\cdot\cos\beta_3 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ S_{5D} - P_1 + S_{3D}\cdot\sin\beta_3 = 0.$$

Здесь

$$\cos\beta_3 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} = 0{,}894;$$

$$\sin\beta_3 = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = 0{,}447.$$

Откуда $S_{3D} = \dfrac{P_1 - S_{5D}}{\sin\beta_3} = 13{,}42\kappa H$; $S_{4D} = S_{8D} - S_{3D}\cdot\cos\beta_3 = 0\kappa H$.

VII. Узел C:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ S_{2C}\cdot\cos\alpha + S_{3C}\cdot\cos\beta_3 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ -S_{1C} - S_{3C}\cdot\sin\beta_3 + S_{2C}\cdot\sin\alpha = 0.$$

Откуда $S_{1C} = -S_{3C}\cdot\sin\beta_3 + S_{2C}\cdot\sin\alpha = -8\kappa H$.

Проверка:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -12{,}17\cdot 0{,}986 + 13{,}42\cdot 0{,}894 \approx 12 - 12 = 0.$$

VIII. Узел A:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ S_{4A} = 0\kappa H;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ R_A + S_{1A} = 8 - 8 = 0.$$

Равенство реакции S_{1A} действующей силе R_A явилось косвенным доказательством правильности решения.

3. Проверка правильности вычислений.

Несмотря на кажущуюся простоту приведённой выше процедуры вычислений усилий в стержнях методом вырезания узлов, тем не менее, возможны ошибки в вычислениях и случайные ошибки автоматически переносятся на усилия в других стержнях, привнося погрешности в усилиях во всех остальных стержнях. Существуют

способы поэтапного контроля вычисленных усилий в стержнях.

А. Самый простой способ заключается в проверке равенств $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$ в каждом узле сразу после определения усилий в стержнях конкретного узла. Это позволит избежать грубых ошибок в вычислениях.

Б. Следующим способом проверки расчёта является построение многоугольника сил для каждого узла. Выбирается масштаб сил и строится многоугольник сил с учётом их направлений и модулей. Вследствие того, что каждый узел находится в равновесии, многоугольники сил должны быть замкнуты (рис. 64).

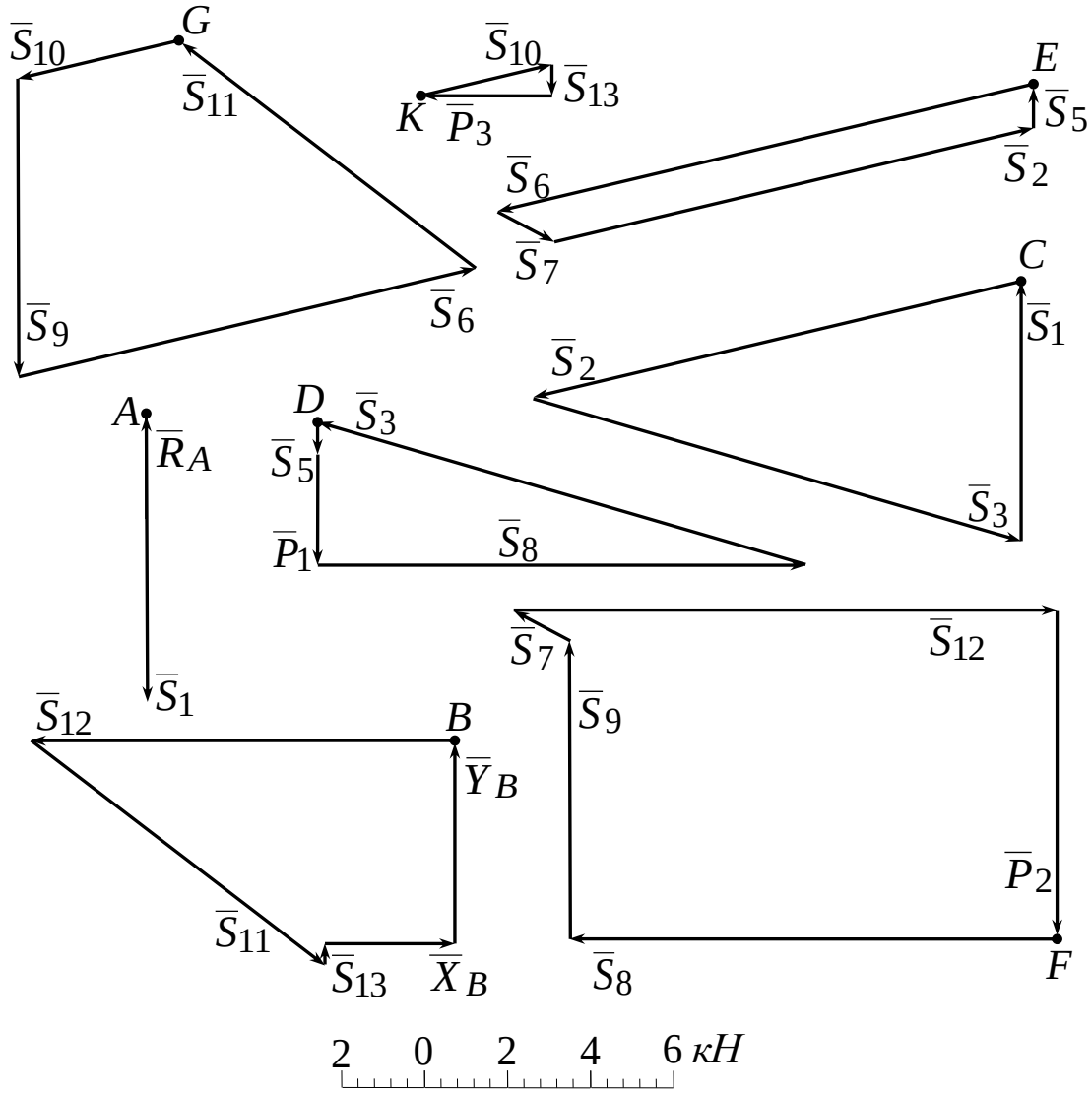


Рис. 64.

Многоугольники сил в узлах необходимо строить сразу после расчёта конкретного узла, дабы сразу же выявить возможные ошибки.

При построении многоугольников сил необходимо учитывать знаки усилий в стержнях, полученных способом вырезания узлов. Например, реакция стержня 11 направлена в сторону, противоположную по направлению, показанному на рис. 63. Это соответствует знаку минус, полученному в аналитическом решении. Измеренные в масштабе значения реакций мало отличаются от значений, найденных аналитически. Результаты расчёта сил в стержнях приведены в табл. 2.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Знак силы	–	–	+		–	–	+	+	+	–	–	+	+
Сила, кН	8	12,2	13,4	0	1	13,4	1,44	12	9,2	4,06	12	13,2	0,(6)

Табл. 2.

На рис. 65 показана схема фермы с условным изображением фактической картинки сил.

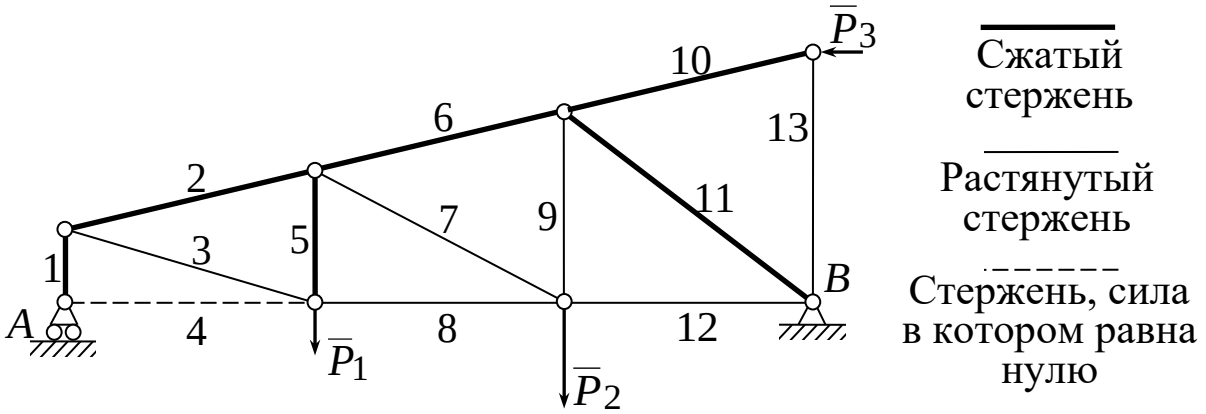


Рис. 65.

В. Определение сил в стержнях способом сечений (способом Риттера) основано на принципе равновесия также и отдельных частей

конструкции при равновесии её в целом. Данный способ является универсальным методом контроля результатов расчёта, полученных методом вырезания узлов фермы. Преимущество способа Риттера заключается в том, что каждая сила определяется из отдельного уравнения и не выражается через силы в соседних стержнях. По этому способу можно определить усилие в любом стержне. Покажем этот способ применительно к стержням 6, 7, 12.

Для определения усилий в стержнях 6 и 7 мысленно разрежем ферму сечением I – I, разрезающим не более чем три стержня. Например, через стержни 6, 7 и 8 (рис. 62). Составим уравнение равновесия для системы сил, действующей на левую или правую часть конструкции относительно той точки, в которой пересекаются линии действия двух из трёх неизвестных усилий в стержнях. Для стержня 6 точкой Риттера является узел F, где пересекаются линии действия сил $\overline{S}_7$ и $\overline{S}_8$. Составим уравнение равновесия для системы сил, приложенной к левой части, к которой приложено меньшее количество сил. В данном случае, к обеим частям фермы приложены системы сил, равновесие которых предполагает учёт двух опорных реакций.

По-прежнему предполагаем все стержни растянутыми. Знак в ответе будет совпадать со знаком проекции силы на координатную ось и соответствовать знаку осевой деформации (минус – стержень сжат).

Для определения S_6 составляем уравнение:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iF} = 0; \quad -S_6 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{4}{3} \cdot h - S_6 \cdot \sin\alpha \cdot a + P_1 \cdot a - R_A \cdot 2 \cdot a = 0,$$

откуда $S_6 = -13{,}39 кН$. Здесь усилие S_6 разложено на горизонтальную составляющую $S_6 \cdot \cos\alpha$ и вертикальную $S_6 \cdot \sin\alpha$. Знак результата минус показывает, что стержень 6 сжат. Видно, что значение усилия S_6, рассчитанное обоими способами, одинаково, что подтверждает правильность вычислений.

Для определения усилия S_7 составим уравнение равновесия для моментов сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки L, где пересекаются линии действия сил $\overline{S}_6$ и $\overline{S}_8$ (точка Риттера для стержня 7):

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iL} = 0; \quad R_A \cdot 3 \cdot a - P_1 \cdot 4 \cdot a - S_7 \cdot \sin\beta_2 \cdot 4 \cdot a = 0,$$

откуда $S_7 = 1{,}44 кН$.

Для определения усилия в стержне 12 мысленно разрежем ферму сечением II – II, проходящем через стержни 10, 11, 12 (рис. 62). Составим уравнение равновесия для моментов сил относительно точки G (точки Риттера для стержня 12), где пересекаются линии действия сил $\overline{S}_{10}$ и $\overline{S}_{11}$:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iG} = 0; \quad -R_A \cdot 2 \cdot a + P_1 \cdot a + S_{12} \cdot \left(h + \frac{2}{3} \cdot h \right) = 0,$$

откуда $S_{12} = 13{,}2 кН$. Видим, что усилие в стержне 12, рассчитанное обоими способами также полностью одинаково. Вследствие того, что объём вычислений для левой части фермы на одну реакцию меньше, для расчёта составлены уравнения равновесия для системы сил, приложенных к левой части фермы.

Задача 2. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Задача. Рама состоит из двух одинаковых частей AC и BC, соединённых между собой шарниром C. Рама находится в равновесии под действием распределённой нагрузки, изменяющейся по закону треугольника ($q = 4 кН/м$), двух сил $P_1 = 15 кН$ и $P_2 = 20 кН$, приложенных в точках E и D, пары с моментом $m = 30 кН \cdot м$. Размеры указаны на рис. 66: $\ell = 4 м$; $h = 3 м$; $a = 1 м$; $\alpha = 60°$. Найти реакции опор A и B, а также реакцию шарнира C.

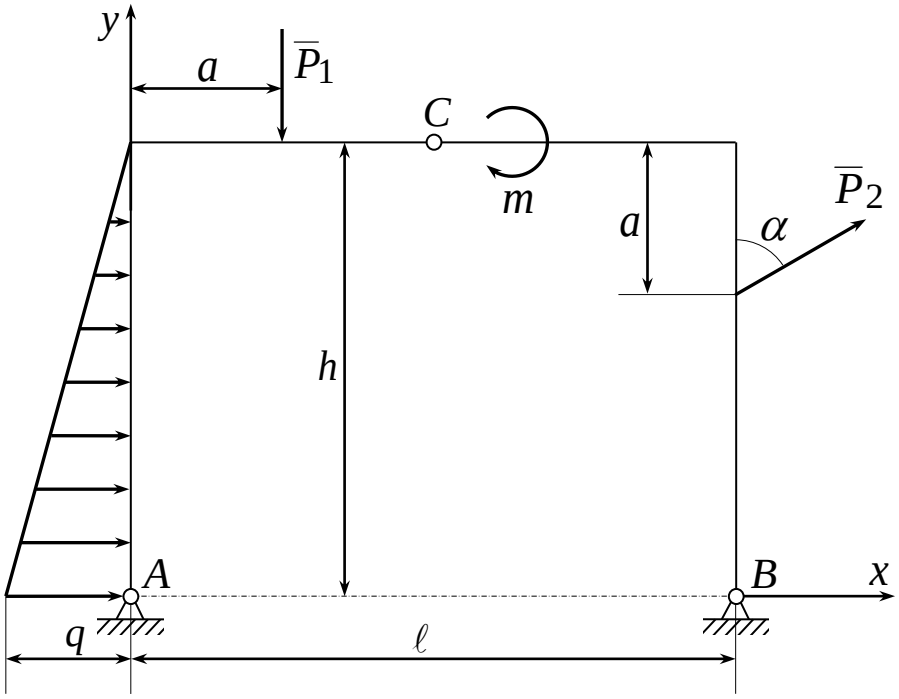


Рис. 66.

Решение. Рассматривается равновесие рамы, состоящей из двух жёстких частей AC и BC. Шарниры A и B являются внешними связями, а шарнир C – внутренней связью.

Решение задачи приведём двумя способами.

1. Рассмотрим равновесие всей рамы в целом, освободив её от внешних связей A и B и заменив их действия соответствующими реакциями.

Направления реакций шарнирно неподвижных опор A и B заранее неизвестны, поэтому их представляем составляющими $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, направленными параллельно осям координат в сторону положительного отсчёта координат (рис. 67).

Распределённую нагрузку интенсивностью q заменяем одной сосредоточенной силой $\overline{Q}$ (равнодействующей распределённых сил), проходящей через центр тяжести треугольника. По модулю $Q = 0{,}5 \cdot h \cdot q = 6кН$. Согласно аксиоме отвердевания система сил $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, $\overline{Q}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, m, действующих на раму, должна удовлетворять при её равновесии уравнениям равновесия твёрдого

тела, хотя рама после освобождения от внешних связей (опор A и B) и не является жёсткой конструкцией.

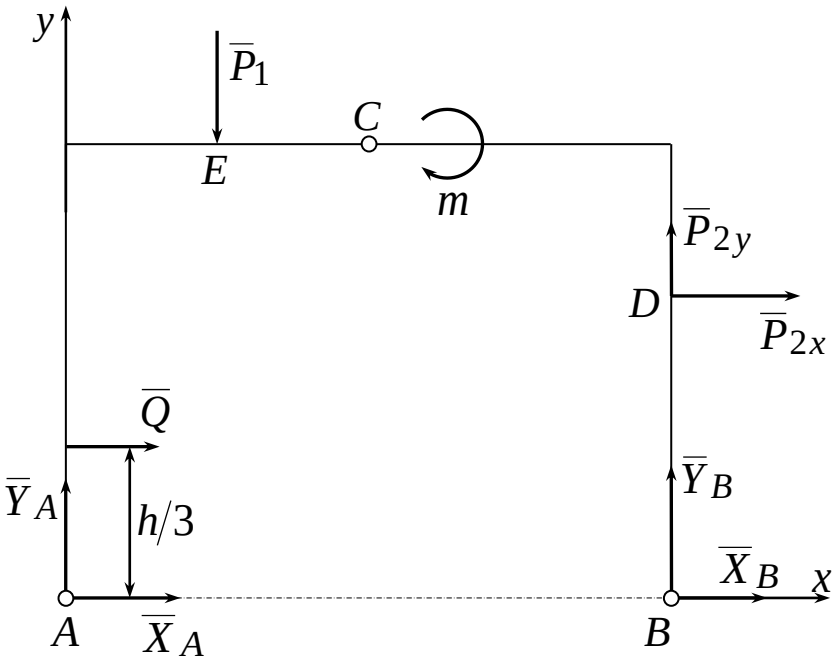


Рис. 67.

Рассматриваемая система сил является плоской, уравнения равновесия составим по второй форме, вычисляя моменты сил относительно точек A и B и проекции сил на ось Ax. Тогда в каждое уравнение войдёт наименьшее число неизвестных реакций.

Для облегчения вычисления моментов силу $\overline{P}_2$ разложим на её составляющие $\overline{P}_{2x}$ и $\overline{P}_{2y}$, и воспользуемся теоремой Вариньона о моменте равнодействующей силы. Учитывая, что $P_{2x} = P_2 \cdot \sin\alpha$, $P_{2y} = P_2 \cdot \cos\alpha$, получим уравнения равновесия всей конструкции в целом:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \;\; X_A + Q + P_2 \cdot \sin\alpha + X_B = 0; \tag{39}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_A\left(\overline{F}_i\right) = 0; \;\; -Q \cdot \frac{h}{3} - P_1 \cdot a - m + P_2 \cdot \cos\alpha \cdot \ell - P_2 \cdot \sin\alpha \cdot (h - a) +$$

$$+ Y_B \cdot \ell = 0; \tag{40}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_B(\overline{F}_i) = 0;\ -Q \cdot \frac{h}{3} + P_1 \cdot (\ell - a) - m - P_2 \cdot \sin\alpha \cdot (h - a) - Y_A \cdot \ell = 0. \quad (41)$$

Во избежание пропусков рекомендуется при составлении уравнений равновесия силы перебирать в определённом порядке, например, идя слева направо.

Из уравнения (40) можно найти реакцию Y_B, из уравнения (41) – реакцию Y_A. Уравнение (39) содержит два неизвестных X_A и X_B и не позволяет найти их значения, поэтому расчленим конструкцию по шарниру C и рассмотрим дополнительно равновесие какой-либо одной части. Рекомендуется выбирать ту часть, к которой приложена наиболее простая система сил. В данной задаче удобнее рассматривать часть AC (рис. 68).

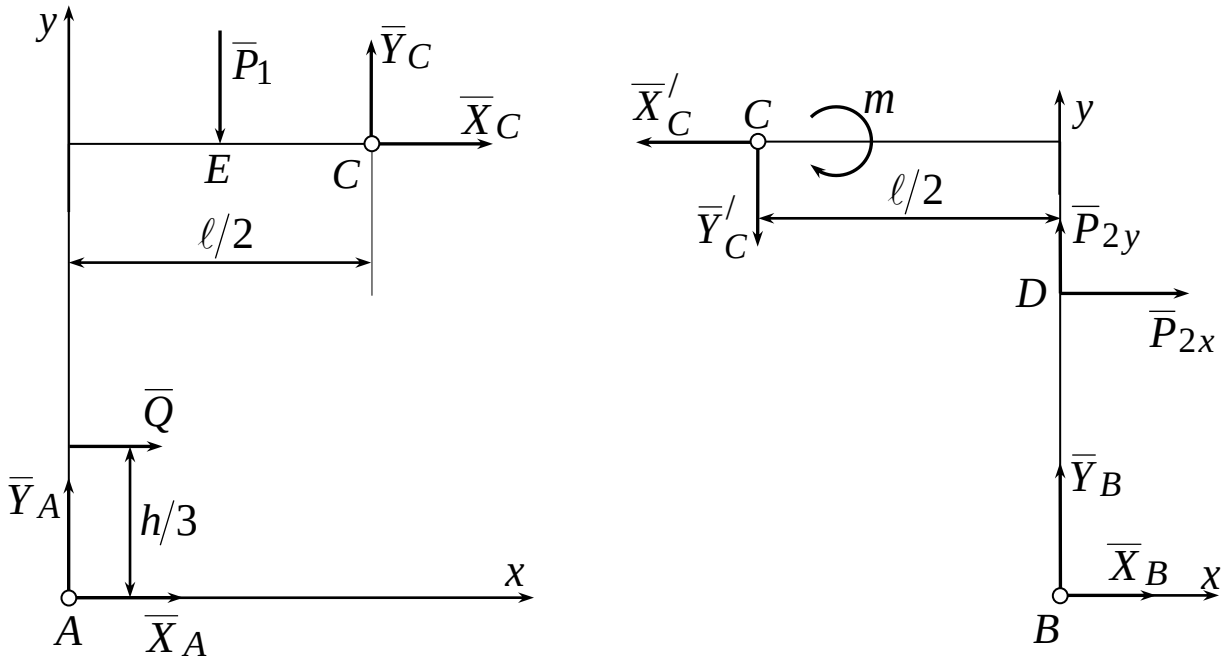


Рис. 68.

Отбрасываем вторую часть конструкции BC. Заменяем действие BC на первую часть конструкции соответствующей внутренней реакцией $\overline{R}_C$. Направление этой реакции, передаваемой через цилиндрический шарнир C, неизвестно, поэтому изобразим её двумя составляющими $\overline{X}_C$ и $\overline{Y}_C$ (рис. 68).

Уравнения равновесия части AC конструкции составим в

первой форме:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ X_A + Q + X_C = 0; \tag{42}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ Y_A - P_1 + Y_C = 0; \tag{43}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_A\left(\overline{F}_i\right) = 0;\ -Q \cdot \frac{h}{3} - P_1 \cdot a - X_C \cdot h + Y_C \cdot \frac{\ell}{2} = 0. \tag{44}$$

В результате подстановки числовых данных в (39) – (44) получим систему шести независимых уравнений для определения шести неизвестных X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C:

$$X_A + X_B + 23{,}32 = 0; \tag{45}$$

$$Y_B - 11{,}41 = 0; \tag{46}$$

$$Y_A + 6{,}41 = 0; \tag{47}$$

$$X_A + X_C + 6 = 0; \tag{48}$$

$$Y_A + Y_C - 15 = 0; \tag{49}$$

$$2 \cdot Y_C - 3 \cdot X_C - 21 = 0. \tag{50}$$

Решая систему уравнений (45) – (50), находим:

$X_A = -13{,}27 кН$; $X_B = -10{,}05 кН$; $X_C = 7{,}27 кН$;

$Y_A = -6{,}41 кН$; $Y_B = 11{,}41 кН$; $Y_C = 21{,}41 кН$.

В действительности силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{X}_B$ направлены в стороны, противоположные показанным на рис. 67 и 68.

2. Решим эту же задачу вторым способом, расчленяя конструкцию на две части по шарниру C и рассматривая равновесие каждой части в отдельности с учётом взаимодействия этих частей

(рис. 68).

Уравнения равновесия части AC уже были составлены. Составим уравнения равновесия части BC в первой форме:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ X_B + P_2 \cdot \sin\alpha - X_C^{/} = 0; \tag{51}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ Y_B + P_2 \cdot \cos\alpha - Y_C^{/} = 0; \tag{52}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_B\left(\overline{F}_i\right) = 0;\ -m - P_2 \cdot \sin\alpha \cdot (h-a) + X_C^{/} \cdot h + Y_C^{/} \cdot \frac{\ell}{2} = 0. \tag{53}$$

$$X_C^{/} = X_C;\quad Y_C^{/} = Y_C.$$

Заметим, что из векторного условия равенства действия и противодействия следует

$$\overline{X}_C^{/} = -\overline{X}_C;\quad \overline{Y}_C^{/} = -\overline{Y}_C,$$

и не следует, что $X_C^{/} = -X_C;\quad Y_C^{/} = -Y_C$.

Убрав штрихи при неизвестных в уравнениях (51) – (53) и подставив числовые данные, получим

$$-X_C + X_B + 17{,}32 = 0; \tag{54}$$

$$-Y_C + Y_B + 10 = 0; \tag{55}$$

$$3 \cdot X_C + 2 \cdot Y_C - 64{,}64 = 0. \tag{56}$$

Последняя система уравнений (54) – (56) совместно с уравнениями (48) – (50) образует систему шести независимых уравнений для определения шести неизвестных. Решение этой системы будет точно таким же, как и решение, полученное способом 1.

Выбор способа решения зависит от характера задачи и

определяется сложностью системы уравнений равновесия. Если система уравнений, полученная способом 1, окажется сложной, можно попытаться применить способ 2 решения задачи.

Задача 3. Равновесие сил с учётом сцепления (трения покоя)

В данной задаче определяют минимальное или максимальное значение силы P и реакции опор системы в состоянии покоя.

Задача. На рис. 69 представлена схема механизма, состоящего из барабана, находящегося под действием груза Q, подвешенного на нити, перекинутой через блок (трением в оси вращения блока пренебрегают), и тормозного устройства в виде закреплённой шарнирно в точке A балки с тормозной колодкой.

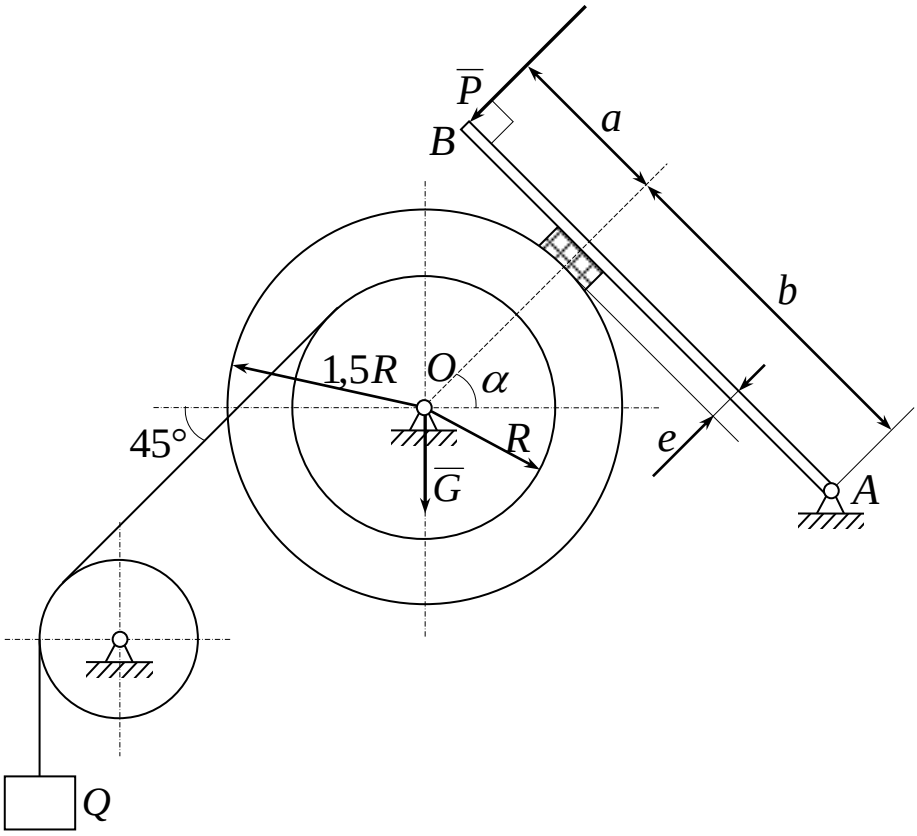


Рис. 69.

Необходимые для расчёта данные приведены в табл. 3.

Для системы, находящейся в покое, определить минимальное значение силы P и реакции опор в точках O и A.

G	Q	a	b	e	α	Коэффициент сцепления (трения покоя) $f_{сц}$	Точки, в которых определяют реакцию
кН		М			град		
2	20	0,25	0,5	0,05	30	0,4	O, A

Табл. 3.

Решение. Рассмотрим сначала систему уравновешивающих сил, приложенных к телу Q. На него действует сила тяжести $\overline{Q}$ и сила натяжения нити $\overline{T}$. Рассматривая тело Q как материальную точку, составим уравнение равновесия указанных сил (рис. 70) в проекции на ось $0y$.

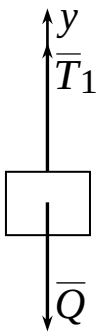


Рис. 70.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad T_1 - Q = 0; \quad T_1 = Q.$$

Из-за отсутствия трения в оси вращения блока сила натяжения нити по всей длине одинакова и поэтому силу $\overline{T}$ $(T = T_1)$, действующую на барабан, направим, как показано на рис. 71.

$$Q = T_1 = T = 20кН.$$

Затем рассмотрим равновесие сил, приложенных к барабану (рис. 71):

$$\sum_{i=1}^{n} m_O\left(\overline{F}_i\right) = 0; \quad T \cdot R - F_{сц} \cdot 1{,}5 \cdot R = 0, \tag{57}$$

где $F_{сц}$ – сила сцепления (сила трения покоя).

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \; X_O + F_{сц} \cdot \sin 30° - N \cdot \cos 30° - T \cdot \cos 45° = 0; \tag{58}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \; Y_O - G - F_{сц} \cdot \cos 30° - N \cdot \sin 30° - T \cdot \sin 45° = 0. \tag{59}$$

В состоянии предельного равновесия сила $\overline{P}$ минимальна, а сила сцепления (трения покоя) между тормозной колодкой и барабаном определяется равенством:

$$F_{сц} = f_{сц} \cdot N. \tag{60}$$

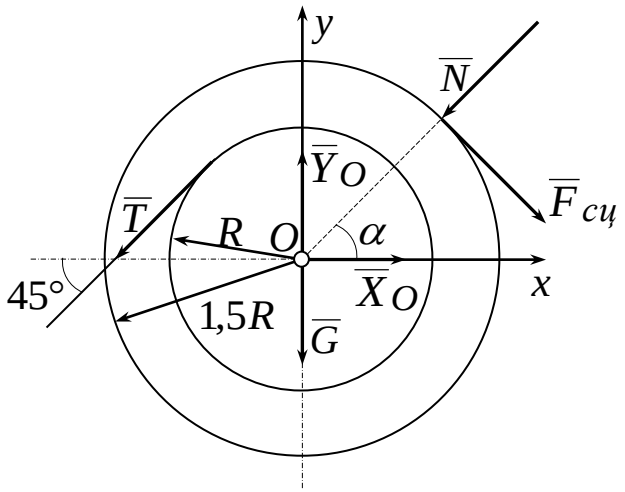


Рис. 71.

Из уравнений (57) – (60) получаем

$$X_O = T \cdot \cos 45° + N \cdot \cos 30° - F_{сц} \cdot \sin 30° = 39{,}52 кН;$$

$$Y_O = T \cdot \sin 45° + N \cdot \sin 30° + F_{сц} \cdot \cos 30° + G = 45{,}53 кН.$$

Для определения минимального значения силы P и реакции R_A

шарнира A воспользуемся показанной на рис. 72 схемой действия сил на балку с тормозной колодкой и составим уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix_1} = 0;\ N^{/} - P + X_A = 0; \tag{61}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy_1} = 0;\ Y_A + F_{сц}^{/} = 0; \tag{62}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_A\left(\overline{F}_i\right) = 0;\ -N^{/} \cdot b + P \cdot (a+b) - F_{сц}^{/} \cdot e = 0. \tag{63}$$

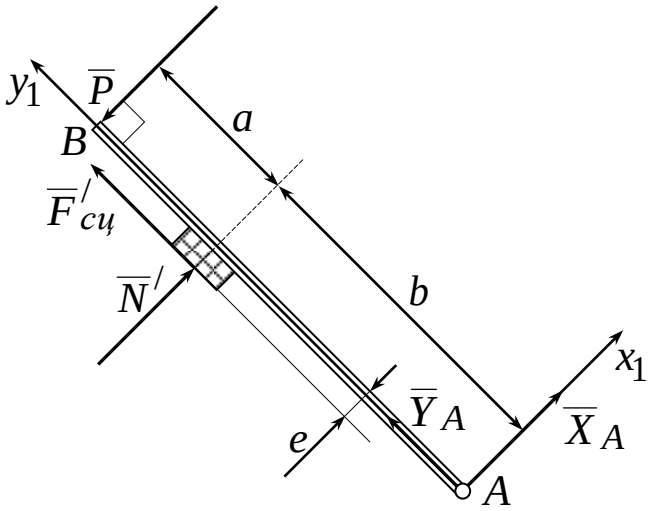


Рис. 72.

Учитывая, что $F_{сц} = F_{сц}^{/}$, а $N = N^{/}$, и подставляя заданные значения a, b, e в уравнения (61) – (63), получаем

$$Y_A = -F_{сц}^{/} = -13,(3)кН;$$

$$P = \frac{N \cdot b + F_{сц} \cdot e}{a+b} = 23,(1)кН;$$

$$P_{\min} = 23,(1)кН;$$

$$X_A = P - N = -10,(2)кН.$$

Задача 4. Определение реакций опор твёрдого тела

Задача 4.1. Однородная квадратная плита $ABCD$ (рис. 73) со стороной $a = 2м$ и весом $P = 2кН$ закреплена в точке A при помощи шарового шарнира, а в точке B – при помощи цилиндрического шарнира. Сторона AB горизонтальна. Плита удерживается в равновесии под углом $\alpha = 30°$ к горизонтальной плоскости Axy стержнем CE, прикреплённым шарнирно к плите и неподвижной опоре E. В точке H на плиту действует сила $F = 3кН$, параллельная стороне AB плиты. В точке D к плите привязана верёвка, находящаяся на одной плоскости со стороной AD плиты и составляющая с ней угол $\beta = 60°$, перекинутая через блок K и натянутая грузом $G = 4кН$.

Определить реакцию в точках A, B, C, если известно, что стержень перпендикулярен к плоскости плиты, $AH = 1/3 \cdot AD$, $AK = AD$. Весом стержня, размерами блока, а также трением следует пренебречь.

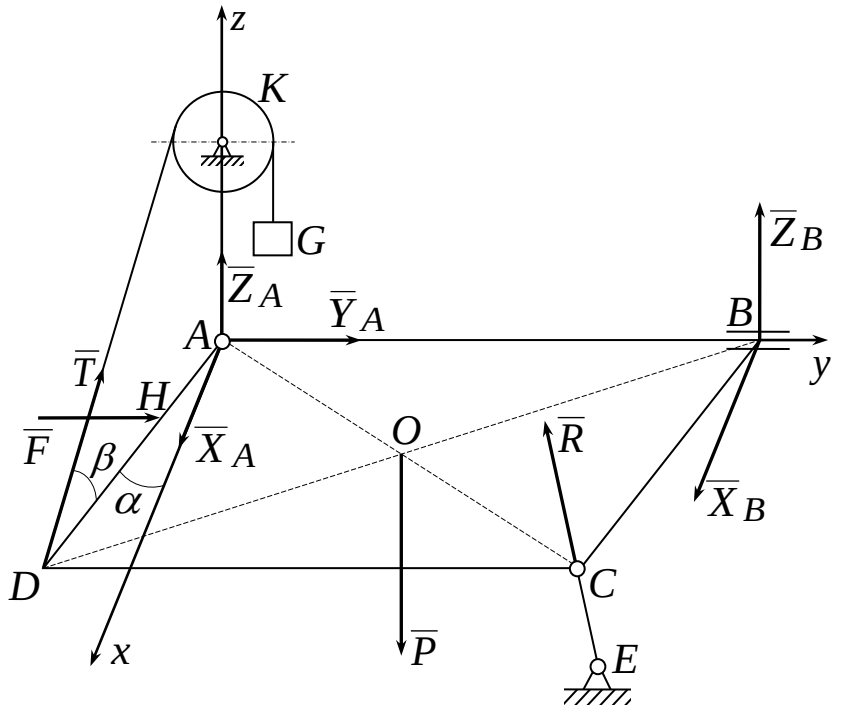


Рис. 73.

Решение. В задаче рассматривается равновесие плиты $ABCD$. Связями для плиты являются: шаровой шарнир A, цилиндрический шарнир B, стрежень CE и верёвка DK.

Реакция в шаровом шарнире A по направлению неизвестна, поэтому представляем её тремя составляющими $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, направленными в сторону положительных направлений осей координат. Цилиндрический шарнир B не препятствует перемещению плиты вдоль оси шарнира, поэтому изображаем его реакцию только двумя составляющими $\overline{X}_B$, $\overline{Z}_B$. Реакция $\overline{R}$ невесомого стержня CE направлена вдоль стержня и согласно условиям задачи перпендикулярна плоскости плиты. Реакция $\overline{T}$ верёвки также направлена вдоль верёвки и при отсутствии трения на блоке по модулю равна весу груза $\overline{G}$. Вес плиты $\overline{P}$ приложен к её центру тяжести O.

Для вычисления проекций сил и проекций моментов сил, приложенных к плите, изображаем проекции плиты вместе с силами на координатные плоскости yz (рис. 74), xz (рис. 75), xy (рис. 76).

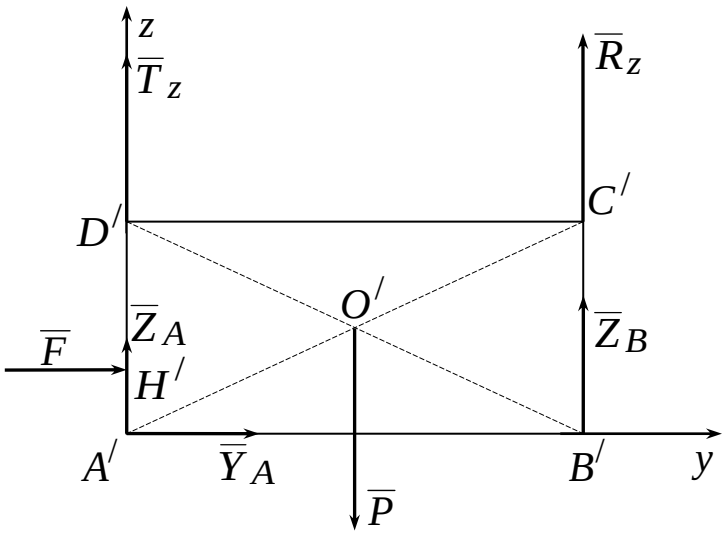


Рис. 74.

Используя эти рисунки, легко найти проекции сил на оси координат:

$$\overline{F}(0;F;0);\ \overline{T}(-G\cdot\cos\alpha;0;G\cdot\sin\alpha);\ \overline{P}(0;0;-P);\ \overline{R}(-R\cdot\sin\alpha;0;R\cdot\cos\alpha),$$

и записать уравнения равновесия проекций:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ X_A + X_B - G \cdot \cos\alpha - R \cdot \sin\alpha = 0; \tag{64}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ Y_A + F = 0; \tag{65}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;\ Z_A + Z_B + G \cdot \sin\alpha + R \cdot \cos\alpha - P = 0. \tag{66}$$

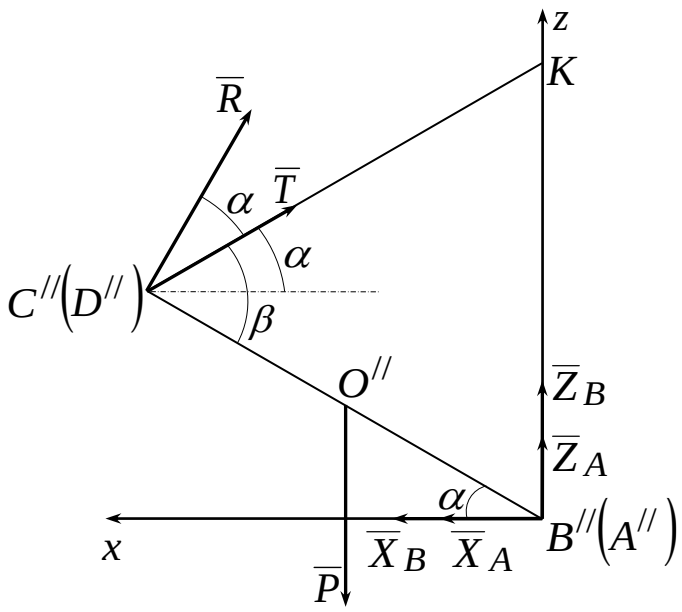


Рис. 75.

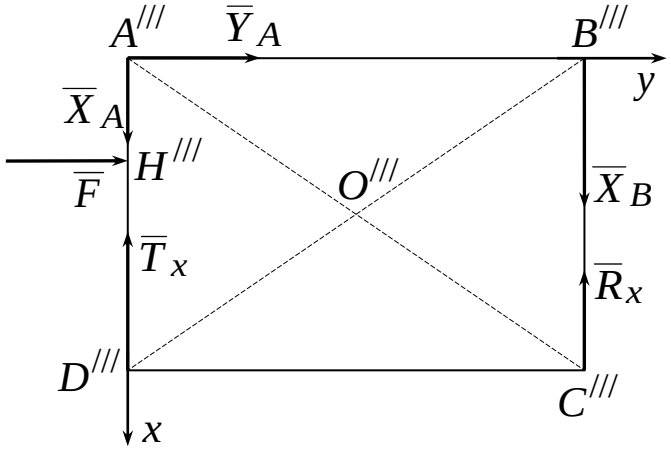


Рис. 76.

Используя рис. 74, составим уравнение равновесия моментов сил относительно оси Ax:

$$\sum_{i=1}^{n} m_x\left(\overline{F}_i\right)=0;\ -F\cdot A^{/}H^{/}-P\cdot 0{,}5\cdot a+R_z\cdot a+Z_B\cdot a=0.$$

Учитывая, что $A^{/}H^{/}=AH\cdot\sin\alpha=a/3\cdot\sin\alpha$, $R_z=R\cdot\cos\alpha$, окончательно получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_x\left(\overline{F}_i\right)=0;\ -F\cdot\frac{a}{3}\cdot\sin\alpha-P\cdot\frac{a}{2}+R\cdot a\cdot\cos\alpha+Z_B\cdot a=0. \qquad (67)$$

Из рис. 75 легко получить уравнение равновесия моментов сил относительно оси Ay:

$$\sum_{i=1}^{n} m_y\left(\overline{F}_i\right)=0;\ -G\cdot a\cdot\sin\beta+P\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos\alpha-R\cdot a=0. \qquad (68)$$

Уравнение равновесия моментов сил относительно оси Az составим, используя рис. 76:

$$\sum_{i=1}^{n} m_z\left(\overline{F}_i\right)=0;\ F\cdot A^{///}H^{///}-X_B\cdot a+\left|R_x\right|\cdot a=0,$$

или, учитывая, что $A^{///}H^{///}=AH\cdot\cos\alpha=a/3\cdot\cos\alpha$, $\left|R_x\right|=R\cdot\sin\alpha$,

$$\sum_{i=1}^{n} m_z\left(\overline{F}_i\right)=0;\ F\cdot\frac{a}{3}\cdot\cos\alpha-X_B\cdot a+R\cdot a\cdot\sin\alpha=0. \qquad (69)$$

Подставляя числовые данные в уравнения (64) – (69), получим окончательный вид уравнений равновесия:

$$X_A+X_B-0{,}5\cdot R-3{,}46=0;$$

$$Y_A+3=0;$$

$$Z_A+Z_B+0{,}866\cdot R=0;$$

$Z_B + 0{,}866 \cdot R - 1{,}5 = 0;$

$R + 2{,}6 = 0;$

$X_B - 0{,}5 \cdot R - 0{,}866 = 0.$

Решая полученную систему уравнений, находим неизвестные величины:

$X_A = 2{,}6кН;$ $\quad Y_A = -3кН;$ $\quad Z_A = -1{,}5кН;$

$X_B = -0{,}434кН;$ $\quad Z_B = 3{,}75кН;$ $\quad R = -2{,}6кН.$

Отрицательные знаки значений Y_A, Z_A, X_B, R указывают на то, что направления их в действительности противоположны указанным на рис. 73.

Задача 4.2. Горизонтальная однородная плита $ABCD$ весом $P = 20кН$ закреплена с помощью шести невесомых стержней так, как показано на рис. 77.

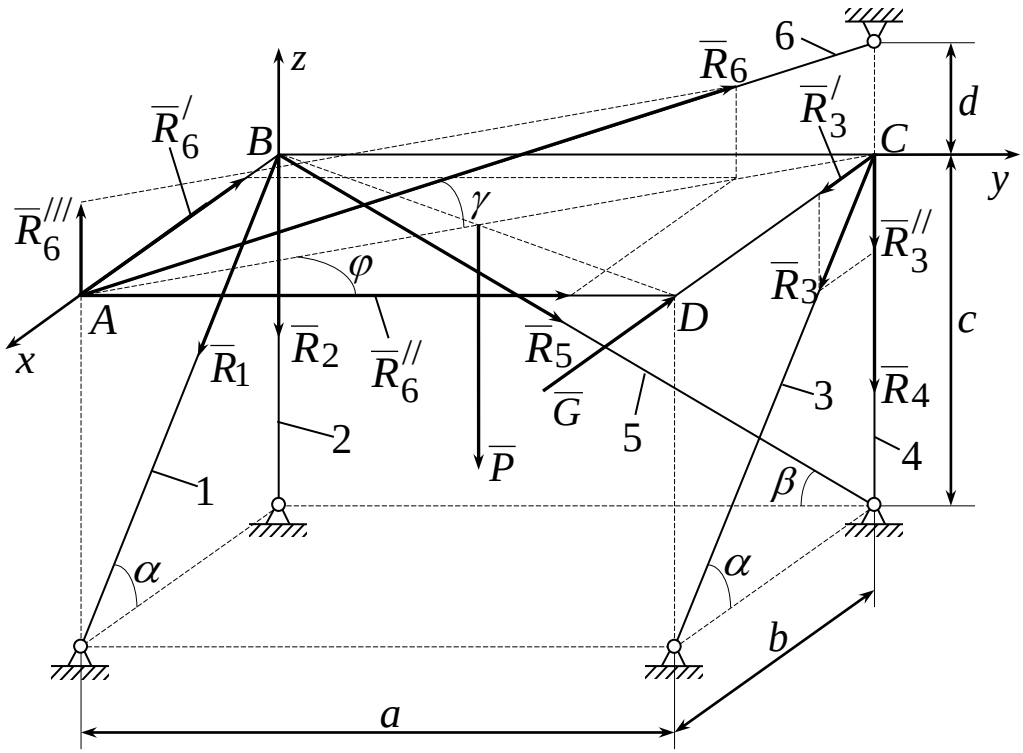


Рис. 77.

Вдоль стороны CD на плиту действует сила $G = 30кН$. Пренебрегая весом стержней, найти усилия в них. Размеры конструкции указаны на рис. 77: $a = 5м$, $b = 4м$, $c = 3м$, $d = 2м$.

Решение. Рассматривается равновесие плиты $ABCD$, находящейся в равновесии под действием приложенных пространственных активных сил и реакций связей. Связями для плиты являются поддерживающие её стержни. Предполагая, что все стержни растянуты, то есть считая, что плита стремится оторваться от стержней, направим их реакции $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, $\overline{R}_3$, $\overline{R}_4$, $\overline{R}_5$, $\overline{R}_6$ вдоль стержней от плиты (рис. 77). Если после решения уравнений равновесия какая-либо реакция получится с отрицательным знаком, то это будет означать, что соответствующий стержень не растянут, а сжат.

Изобразим на рисунке действующие на плиту активные силы $\overline{P}$ и $\overline{G}$. Выберем оси координат, как показано на рис. 77, и введём углы α, β, γ, φ. По заданным размерам вычисляем:

$$\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}} = 0{,}6; \quad \sin\beta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}} = 0{,}51;$$

$$\sin\gamma = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} = 0{,}3; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} = 0{,}62;$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}} = 0{,}8; \quad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{c^2 + a^2}} = 0{,}86;$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} = 0{,}95; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}} = 0{,}82.$$

Реакцию $\overline{R}_6$ разлагаем на три составляющие $\overline{R}_6^{/}$, $\overline{R}_6^{//}$, $\overline{R}_6^{///}$, параллельные осям координат, и её моменты относительно осей координат будем находить по теореме Вариньона о моменте равнодействующей силы. Из рис. 77 имеем

$$R_6^{/} = R_6 \cdot \cos\gamma \cdot \sin\varphi; \quad R_6^{//} = R_6 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\varphi; \quad R_6^{///} = R_6 \cdot \sin\gamma.$$

При вычислении моментов сил относительно осей x и z реакцию $\overline{R}_3$ также разлагаем на составляющие $\overline{R}_3^{/}$ и $\overline{R}_3^{//}$ ($R_3^{/} = R_3 \cdot \cos\alpha$; $R_3^{//} = R_3 \cdot \sin\alpha$) и снова применяем теорему Вариньона.

Составляя уравнения равновесия, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \; R_1 \cdot \cos\alpha + R_3 \cdot \cos\alpha - R_6 \cdot \cos\gamma \cdot \sin\varphi - G = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \; R_5 \cdot \cos\beta + R_6 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\varphi = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \; -R_1 \cdot \sin\alpha - R_2 - R_3 \cdot \sin\alpha - R_4 - R_5 \cdot \sin\beta + R_6 \cdot \sin\gamma - P = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_x\left(\overline{F}_i\right) = 0; \; -R_3 \cdot \sin\alpha \cdot a - R_4 \cdot a - P \cdot \frac{a}{2} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y\left(\overline{F}_i\right) = 0; \; -R_6 \cdot \sin\gamma \cdot b + P \cdot \frac{b}{2} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_z\left(\overline{F}_i\right) = 0; \; -R_3 \cdot \cos\alpha \cdot a + R_6 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\varphi \cdot b + G \cdot a = 0.$$

Подставляя значения модулей составляющих реакций $\overline{R}_3$ и $\overline{R}_6$ и числовые значения параметров конструкции и активных сил, получим

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \; 0{,}8 \cdot R_1 + 0{,}8 \cdot R_3 - 0{,}59 \cdot R_6 - 30 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \; 0{,}86 \cdot R_5 + 0{,}78 \cdot R_6 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;\ -0{,}6 \cdot R_1 - R_2 - 0{,}6 \cdot R_3 - R_4 - 0{,}51 \cdot R_5 + 0{,}3 \cdot R_6 - 20 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_x\left(\overline{F}_i\right) = 0;\ -0{,}6 \cdot R_3 - R_4 - 10 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y\left(\overline{F}_i\right) = 0;\ -1{,}2 \cdot R_6 + 40 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_z\left(\overline{F}_i\right) = 0; -4 \cdot R_3 + 3{,}12 \cdot R_6 + 150 = 0.$$

Решение этой системы уравнений имеет вид:

$R_1 = -1{,}43 кН;$ $R_2 = 16{,}25 кН;$ $R_3 = 63{,}47 кН;$

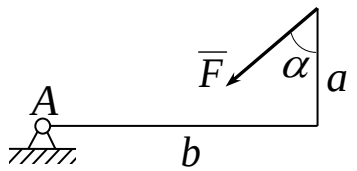
$R_4 = -48{,}08 кН;$ $R_5 = -30{,}19 кН;$ $R_6 = 33{,}(3) кН.$

Полученные результаты показывают, что стержни 2, 3, 6 растянуты, а стержни 1, 4, 5 сжаты. Усилия в стержнях по величине равны соответствующим реакциям. Обычно усилия обозначаются буквой S и им предписывается знак «плюс» или «минус» в зависимости от того, растянут или сжат соответствующий стержень.

Согласно принятому предположению о направлении реакций связей, знаки полученных решением уравнений равновесия реакций связей одновременно определяют и знаки усилий в соответствующих стержнях.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО СТАТИКЕ С ОТВЕТАМИ

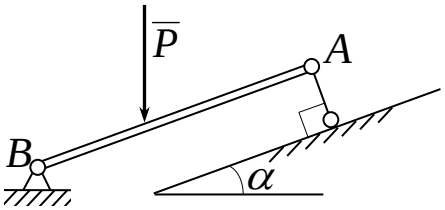
1.



Момент силы относительно точки A определяется по формуле:

✓ $M_A = -F \cdot \cos\alpha \cdot b + F \cdot \sin\alpha \cdot a.$

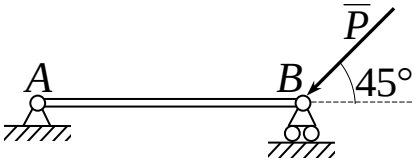
2.



Реакция опоры A должна быть расположена:

✓ под углом α к вертикали.

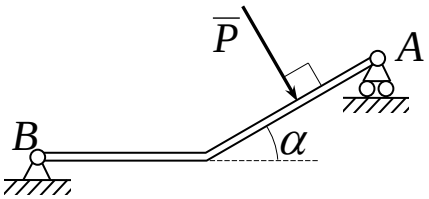
3.



Реакция опоры A расположена:

✓ горизонтально.

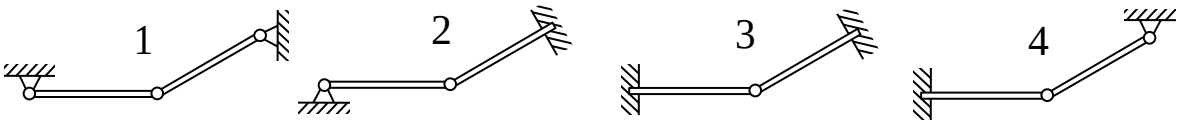
4.



Реакция опоры A расположена:

✓ вертикально.

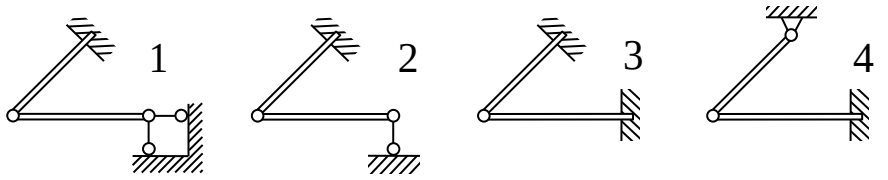
5.



Укажите номер статически определимой составной конструкции.

✓ 1.

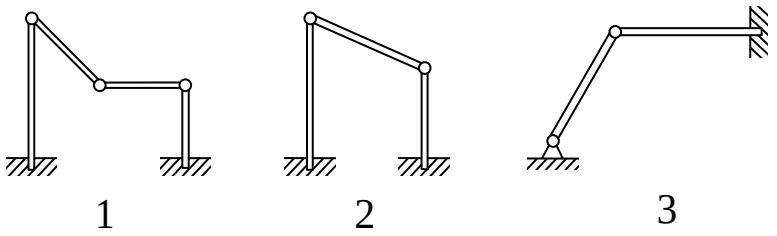
6.



Укажите номер статически неопределимой конструкции.

✓ 1, 3, 4.

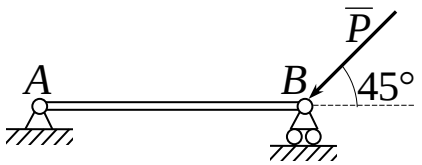
7.



Укажите номер статически определимой составной конструкции.

✓ 1.

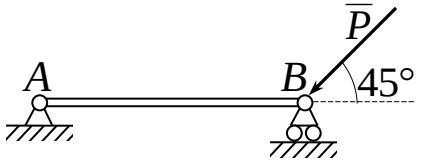
8.



К стержню AB в шарнире B приложена сила $P = 500 \cdot \sqrt{2}$ (Н) под углом 45° к оси стержня. Определить реакцию R_B опоры B (подвижный шарнир).

✓ $R_B = 500$ (Н).

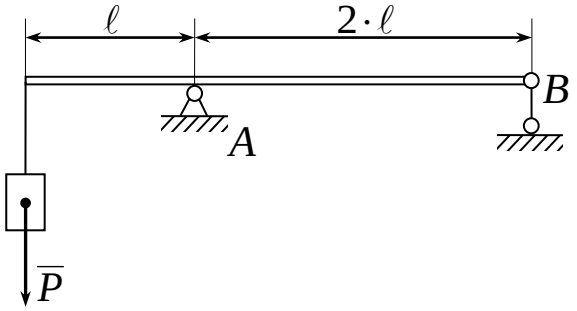
9.



К горизонтальному стержню AB в шарнире B приложена сила $P = 400 \cdot \sqrt{2}$ (Н) под углом 45° к оси стержня. Определить горизонтальную составляющую реакции X_A шарнирной опоры A.

✓ $X_A = 400$ (Н).

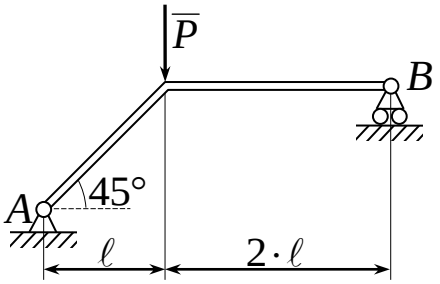
10.



Формула для определения реакции опоры A имеет вид:

✓ $\frac{3}{2} \cdot P.$

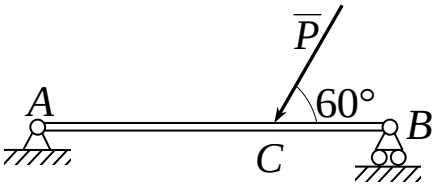
11.



Формула для определения реакции опоры A имеет вид:

✓ $\frac{2}{3} \cdot P.$

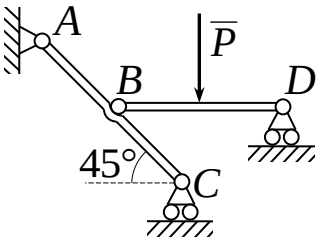
12.



К стержню AB в точке C приложена сила $P = \sqrt{3} \cdot 200$ (Н) под углом $\alpha = 60°$ к оси стержня. $CB = 1/3 \cdot AB$. Определить модуль момента $|m_A(\overline{P})|$ силы $\overline{P}$ относительно шарнира A, если длина стержня AB равна 3 метрам.

✓ $|m_A(\overline{P})| = 600$ (Нм).

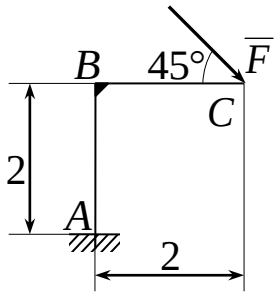
13.



К середине стержня BD приложена вертикальная сила $P = 500$ (Н), $BD = 3$ м. Определить модуль момента $|m_B(\overline{P})|$ силы $\overline{P}$ относительно шарнира B.

✓ $|m_B(\overline{P})| = 750$ (Нм).

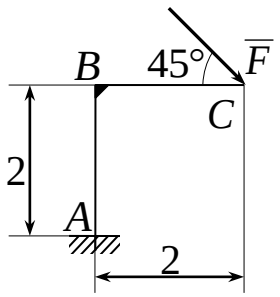
14.



На равнобокий прямоугольный уголок ABC ($AB = BC = 2$ м) с жёсткой заделкой в точке A действует сила $F = \sqrt{2} \cdot 400$ (Н). Определить модуль момента $|m_A(\overline{F})|$ силы $\overline{F}$ относительно точки A.

✓ $|m_A(\overline{F})| = 1600$ (Нм).

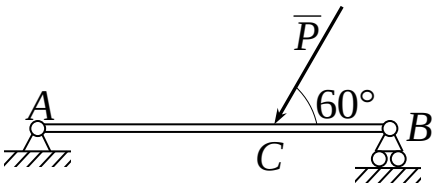
15.



Равнобокий прямоугольный уголок ABC ($AB = BC = 2$ м), весом которого пренебрегают, находится в равновесии под действием силы $F = \sqrt{2} \cdot 200$ (Н). Определить модуль момента $\left|m_C\left(\overline{Y}_A\right)\right|$ вертикальной составляющей реакции $\overline{Y}_A$ жёсткой заделки A относительно точки C.

✓ $\left|m_C\left(\overline{Y}_A\right)\right| = 400$ (Нм).

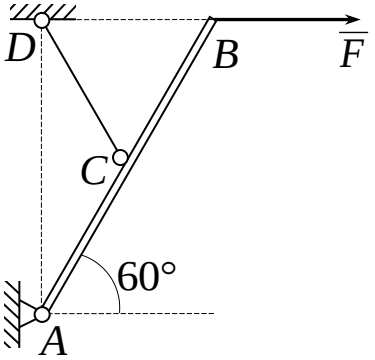
16.



К стержню в точке C приложена сила $P = 400 \cdot \sqrt{3}$ (Н) под углом $\alpha = 60°$ к оси стержня. $CB = 1/3 \cdot AB$. Определить вертикальную составляющую реакции Y_A шарнира A (составляющую, перпендикулярную AB), если длина стержня AB равна 3 метрам (весом стержня пренебречь).

✓ $Y_A = 200$ (Н).

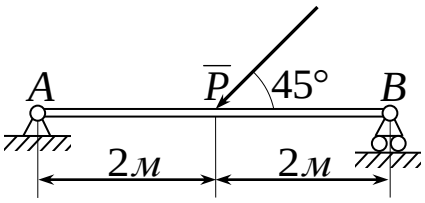
17.



Балка AB удерживается в наклонном положении под углом $60°$ к горизонту стержнем CD. $AC = CB$. На конце B балки действует горизонтальная сила $F = 2$ кН. Определить усилие R_C в стержне CD. Весом балки и стержня пренебречь.

✓ $R_C = 4$ (кН).

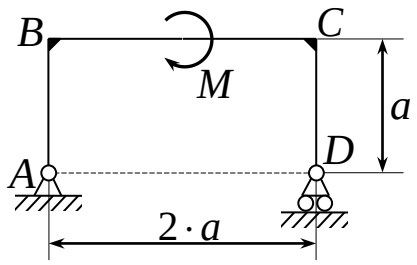
18.



Балка AB шарнирно закреплена на опоре A, в конце B она положена на катки. В середине балки под углом $45°$ к её оси действует сила $P = \sqrt{2} \cdot 4$ (кН). Определить реакцию R_B опоры B. Размеры указаны на рисунке. Весом стержня пренебречь.

✓ $R_B = 2$ (кН).

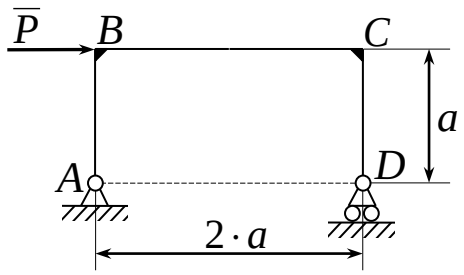
19.



На раму, изображённую на рисунке, приложена пара сил с моментом $M = 600\ H \cdot м$; $a = 1{,}2$ м. Определить величину R_D реакции шарнира D. Весом рамы пренебречь.

✓ $R_D = 250$ (Н).

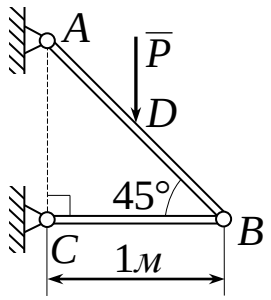
20.



На раму, изображённую на рисунке, в точке B действует горизонтальная сила $P = 400 \cdot \sqrt{5}$ (Н). Размеры указаны на рисунке. Определить реакцию R_A в шарнире A. Весом рамы пренебречь.

✓ $R_A = 1000$ (Н).

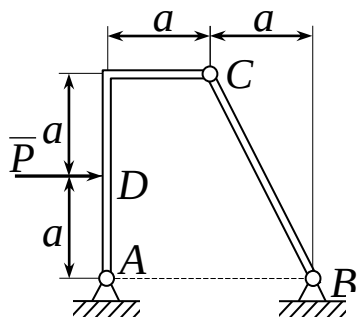
21.



На стержневую конструкцию ABC действует вертикальная сила $P = 200 \cdot \sqrt{5}$ (Н), приложенная в точке D; $AD = DB$. Определить реакцию R_A шарнира A. Весом стержней пренебречь.

✓ $R_A = 500$ (Н).

22.



На составную конструкцию действует горизонтальная сила $\overline{P}$; $P = 400 \cdot \sqrt{5}$ (Н). Определить величину реакции R_B шарнира B. Весом конструкции пренебречь.

✓ $R_B = 500$ (Н).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т.1. – М.: Наука, 1985. – 240 с.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Т.1. – СПб.: Издательство «Лань», 2001. – 368 с.
3. Цывильский В.Л. Теоретическая механика. – М.: Высшая школа, 2001. – 319 с.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1986. – 416 с.
5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
6. Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике, Под ред. Яблонского, - М.: «Интеграл-пресс», 2002. – 384 с.
7. Колесников К.С. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1987. – 426 с.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. – М.: Наука, 1984. – 512 с.
9. Бражниченко Н.А., Кан В.Л., Минцберг Б.Л. и др. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1986. – 480 с.
10. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990. – 234 с.
11. Байрамов Ф.Д., Байрамов Б.Ф. Краткая теория моментов и пар сил. Учебное пособие. – Набережные Челны: Издательство НЧИ КФУ, 2014. – 21 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
СТАТИКА 4
1. Основные понятия статики 4
2. Аксиомы статики 7
3. Связи и их реакции 11
Две основные задачи статики 14
4. Система сходящихся сил 15
Аналитический способ сложения сил 16
Условия равновесия системы сходящихся сил 18
Теорема о трёх силах 18
ТЕОРИЯ МОМЕНТОВ И ПАР СИЛ 20
5. Момент силы относительно точки 20
Алгебраический момент силы относительно точки 21
6. Момент силы относительно оси 22
7. Связь между моментами силы относительно точки и относительно оси, проходящей через эту точку 23
8. Пара сил 25
Момент пары 26
9. Алгебраический момент пары сил 29
10. Теорема об эквивалентности пар 30
11. Теорема сложения пар. Условие равновесия системы пар 34
Примеры на применение условий равновесия пар сил 35
ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЦЕНТРУ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ 38
12. Главный вектор и главный момент системы сил 38

13. Лемма Пуансо о параллельном переносе силы 39
14. Приведение произвольной системы сил к данному центру 40
15. Различные случаи приведения системы сил к центру 42
16. Теорема Вариньона 45
АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ . 46
17. Произвольная пространственная система сил 46
18. Пространственная система сходящихся сил 47
19. Пространственная система параллельных сил..... 47
20. Произвольная плоская система сил..... 48
21. Плоская система параллельных сил 51
22. Статически определённые и неопределённые задачи..... 52
23. Решение задач статики..... 52
24. Равновесие систем тел 55
ТРЕНИЕ..... 56
25. Трение скольжения 56
Угол трения. Конус трения..... 58
26. Равновесие при наличии трения 59
27. Трение качения 60
ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ..... 61
28. Центр тяжести твёрдого тела 61
29. Координаты центра тяжести однородного тела..... 64
30. Некоторые способы определения центров тяжести 65
31. Центры тяжести некоторых однородных тел..... 67
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ..... 70
ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО СТАТИКЕ..... 72
Задача 1. Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы..... 72

Задача 2. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел) 82
Задача 3. Равновесие сил с учётом сцепления (трения покоя) 88
Задача 4. Определение реакций опор твёрдого тела 92
Задача 4.1 92
Задача 4.2 96
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО СТАТИКЕ С ОТВЕТАМИ 99
ЛИТЕРАТУРА 108

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре
Набережночелнинского института
Казанского (Приволжского) федерального университета

Подписано в печать 29.03.2017г.
Формат 60x84/16. Печать ризографическая.
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman».
Усл. п. л. 6,5. Уч.-изд. л. 6,5.
Тираж 50 экз. Заказ № 825.

423810, г. Набережные Челны, Новый город, проспект Мира, 68/19
тел./факс (8552) 39-65-99 e-mail: ic-nchi-kpfu@mail.ru