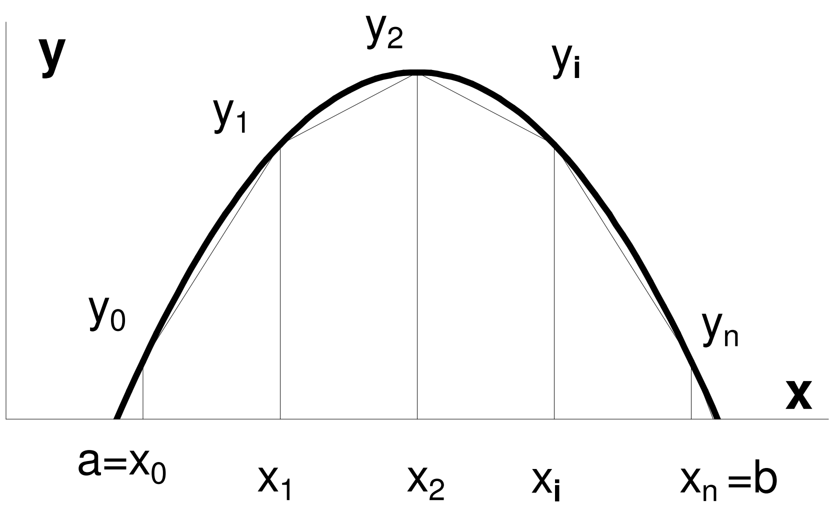
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Численные методы в электронных таблицах

Методическое руководство к лабораторным работам



Казань
Казанский государственный университет
2009

Публикуется по решению учебно-методической комиссии геологического факультета Казанского государственного университета от 20.02.2009 г., протокол № _2_.

Численные методы в электронных таблицах: Методическое руководство к лабораторным работам**.** Составители: Галеев А. А., Поминов А. И.. – Казань: Казанский государственный университет, 2009.

Методическое руководство составлено в соответствии с требованиями по подготовке студентов специальности «Гидрогеология и инженерная геология». Изложенный материал является составной частью курсов «Математические методы в гидрогеологии» и «Введение в численные методы». В руководстве дается краткое изложение теоретических основ и примеров решения математических задач в электронных таблицах (MS Excel или OpenOffice.org Calc). Описание каждой лабораторной работы содержит базисные понятия и определения математического аппарата, разобранные примеры решения задач и задания для самостоятельной работы студентов.

СОДЕРЖАНИЕ

Общие приемы работы с электронными таблицами

Лабораторная работа №1. Основные манипуляции с таблицами.

1 Установка параметров страницы таблицы

Чтобы установить параметры страницы документа необходимо выполнить команду Файл-Параметры страницы. Здесь с помощью четырех закладок (*Страница, Поля, Колонтитулы, Лист*) устанавливаются размеры страницы документа, ориентация страницы, границы размещения одной страницы документа на бумажном носителе, колонтитулы и другие необходимые параметры.

2 Перемещение по таблице

Для выделения любой ячейки таблицы достаточно щелкнуть на ней мышью. Кроме того, курсорную рамку можно перемещать в любом направлении клавишами управления курсором (←, ↑, →, ↓). Для перемещения по рабочему листу можно использовать стандартный механизм полос прокрутки (стрелки и бегунки). Чтобы мгновенно перейти к заданному элементу таблицы, можно выбрать команду Правка-Перейти... Если искомая ячейка имеет *имя,* можно просто выбрать его в раскрывающемся списке поля имени.

3 Выделение фрагментов электронной таблицы

Чтобы выделить: *прямоугольную область* смежных ячеек – выделите одну из 4 угловых ячеек, а затем, используя клавиши ←, ↑, →, ↓, при нажатой клавише Shift, измените границы выделяемой области ячеек; целый *столбец* – щелкните мышью на соответствующем номере в заголовке столбца; целую *строку* – щелкните мышью на соответствующем номере в заголовке строки; *всю* таблицу – щелкните на кнопке в левом верхнем углу листа (на пересечении заголовков строк и столбцов). *Примечание.* Если вам необходимо отформатировать *часть ячейки,* вы можете *выделить* эту часть в строке формул с помощью клавиши Shift и стрелок управления курсором.

4 Очистка ячеек

Для очистки выделенного блока ячеек можно воспользоваться командой Правка-Очистить, которая позволяет удалить либо все содержимое ячеек, либо какие-то его элементы (например, примечание или формат). Для той же цели вы можете нажать клавишу Delete.

5 Вставка и удаление

Вы можете вставлять пустые ячейки, столбцы и строки с помощью команд Вставка-Ячейки..., Вставка-Столбцы и Вставка-Строки**.** При выполнении этой операции прилегающие ячейки смещаются в заданном пользователем направлении. Это делается следующим образом: предварительно выделяется столько ячеек (строк, столбцов), сколько их должно быть вставлено (пустые элементы будут вставлены в позиции текущего выделения); выбирается команда Ячейки (Строка, Столбец) меню Вставка; если вставляются ячейки, то в диалоговом окне *Добавление ячеек* задают направление смещения прилегающих ячеек. Аналогичный результат достигается с помощью команды Добавить контекстного меню выделенного диапазона элементов. Удаление предварительно выделенных ячеек осуществляется командой Удалить меню Правка или контекстного меню выделенного диапазона. В появившемся диалоговом окне выбирают направление смещения прилегающих ячеек.

6 Перемещение, копирование и вставка фрагментов

С помощью буфера обмена вы можете переместить, вырезать, скопировать и вставить выделенный блок ячеек (с помощью клавиатуры, мыши и пункта главного меню Правка). В некоторых случаях адреса ячеек при выполнении этих команд могут изменяться. Переместить или скопировать выделенный блок ячеек также можно методом "Drag-and-Drop". Чтобы воспользоваться этим способом, указатель мыши следует становить на *рамку* выделенного блока (указатель примет форму стрелки) и "буксировать" блок. При *копировании* следует удерживать нажатой клавишу Ctrl.

7 Поиск и замена

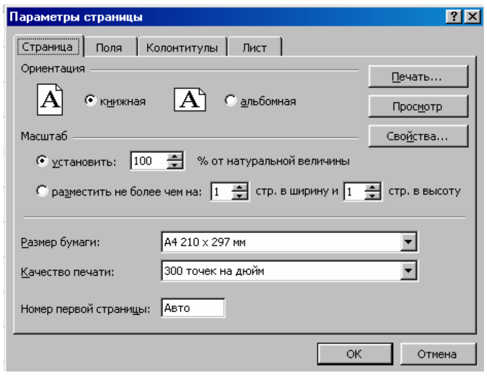
Для этих операций используются команды Правка-Найти... и Правка-Заменить.... При этом в соответствующих диалоговых окнах задается строка символов для поиска, направление поиска, а также включаются некоторые дополнительные возможности поиска.

8 Отмена и повторение команд

Excel, как и текстовый редактор Word, в большинстве случаев позволяет отменить неудачно выполненную команду, а также повторить последнюю выполненную команду. Отмена выполняется либо с помощью кнопки на панели инструментов, либо с помощью команды Правка-Отменить, либо при нажатии комбинации клавиш Ctrl-z. Повтор команды выполняется либо с помощью кнопки на панели инструментов, либо с помощью команды Правка-Повторить, либо при нажатии комбинации клавиш Ctrl-y.

Задание: Составление расписания занятий группы

1.Выполните настройку параметров страницы в меню **Файл** следующим образом: ориентация листа – книжная; размер бумаги – А4; качество печати – 300 точек на дюйм; поля: верхнее – 2 см, нижнее – 2 см, левое – 3 см, правое – 1 см; верхний колонтитул – Лабораторная работа № 1; нижний колонтитул – фамилия и группа студента, выполняющего лабораторную работу.



2.Выделите одну из ячеек (например, А1) таблицы и введите в ней "Понедельник" и нажмите клавишу Enter;

3.Увеличьте ширину ячейки, с которой вы работали. Для этого необходимо подвести мышь к границе заголовка столбца и раздвинуть весь столбец.

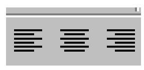
4.Чтобы ввести другие дни недели: выделите ячейку А1 и подведите мышь к нижнему правому углу ячейки так, чтобы указатель мыши принял форму "черного крестика" и протяните вправо его по другим ячейкам. Такая операция называется *Автозаполнение*.

5.Выровняйте ширину других столбцов.

6.Вставьте столбец для указания номеров пар. Вставка - Столбцы.

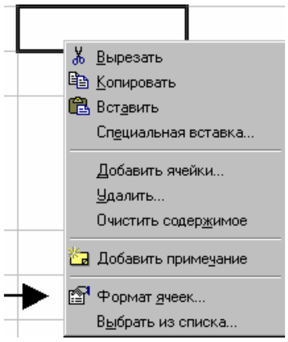
*7.*Повторите операцию автозаполнения для номеров пар.

*8.*Выделите ячейки с номерами и воспользуйтесь кнопками выравнивания абзацев.



*9.*Введите расписание занятий вашей группы.

10.Измените границы, цвет фона и цвет символов для различных ячеек. Подготовьте самую верхнюю строку над расписанием для формирования заголовка с названием таблицы, с указанием факультета, номера группы, учебного семестра и т.д. Измените наклонную ориентацию текста в ячейках. Для этого, необходимо изменить формат содержимого ячейки т.е. – выбрать ячейку – вызвать контекстно-зависимое меню правой кнопкой мыши. – выбрать команду формат ячейки.



11. Переименуйте рабочий лист с выполненным заданием, дав ему новое наименование «Лаб_Раб_№1»

12. Создайте в каталоге C:\Data папку с названием «Группа_№№№» и сохраните в ней свою рабочую книгу в виде файла с названием «ФамилияИО.***».

13. Продублируйте сохраненный файл на свой внешний носитель. Все последующие лабораторные работы вы будете выполнять в этой же рабочей книге, но на отдельных рабочих листах.

Лабораторная работа №2. Создание таблицы и диаграмм.

1. Создание таблицы и ввод формул

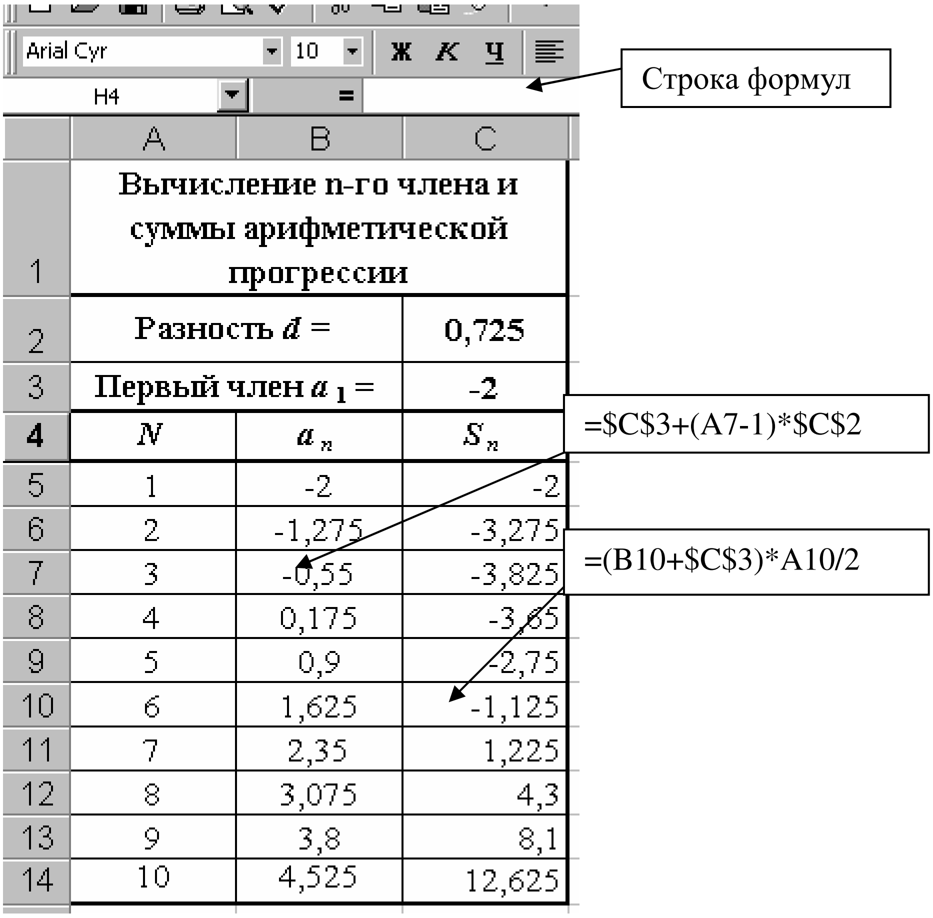
В данной работе составим таблицу, вычисляющую n-й член и сумму арифметической прогрессии.

Формулы для вычисления *n-го* члена арифметической прогрессии и суммы *n* ее первых членов:

$$a_n = a_i + d(n - 1)$$

$$S_n = (a_1 + a_n)\cdot n/2,$$

где a_1 – первый член прогрессии; d – разность арифметической прогрессии. На рисунке 3.1 представлена таблица для вычисления *n*-го члена и суммы арифметической прогрессии, первый член которой равен –2, а разность равна 0,725. Ниже приведен пример таблица для вычисления n-го члена и суммы арифметической прогрессии



	A	B	C
1	**Вычисление n-го члена и суммы арифметической прогрессии**		
2	**Разность *d* =**		**0,725**
3	**Первый член *a* 1 =**		**-2**
4	***N***	***a* n**	***S* n**
5	1	-2	-2
6	2	-1,275	-3,275
7	3	-0,55	-3,825
8	4	0,175	-3,65
9	5	0,9	-2,75
10	6	1,625	-1,125
11	7	2,35	1,225
12	8	3,075	4,3
13	9	3,8	8,1
14	10	4,525	12,625

Перед выполнением этого задания придумайте свою арифметическую прогрессию, т. е. задайте значение первого члена прогрессии и разности в ячейках С2 и С3. Задание выполняется в таком порядке:

1. Выделите ячейку А1 и введите в нее заголовок таблицы "Вычисление n-го члена и суммы арифметической прогрессии" (здесь и в дальнейшем при вводе текста, заключенного в двойные кавычки, сами эти **кавычки набирать не нужно**, если это специально не оговорено). Заголовок будет размещен в одну строчку и займет несколько ячеек правее А1. Используя функцию объединения смежных ячеек объедините ячейки А1÷С1, увеличьте высоту строки и задайте перенос строк в ячейке командой **Формат ячейки- Выравнивание - Переносить по словам**.

2. Создайте строку заголовков таблицы. Объединив ячейки A2-B2 и A3-B3, создайте надписи «Разность d =» и «Первый член a1 =». Введите соответствующие численные значения в ячейки C2 и C3.В ячейку А4 введите "***N***", в В4 - "$\boldsymbol{a_n}$", в С4 - "S_n". Для набора нижних индексов воспользуйтесь командой **Формат ячеек – Шрифт – нижний индекс**. Выделите заполненные четыре ячейки и при помощи соответствующих кнопок панели инструментов увеличьте размер шрифта на 1 пт, выровняйте по центру и примените полужирный стиль начертания символов. Строка заголовков вашей таблицы оформлена. Можете приступить к заполнению.

3. В ячейки А5-А14 введите порядковые номера **n** для членов арифметической прогрессии Можете, например, использовать маркер заполнения. Введите в ячейку А5 число 1, в ячейку А6 число 2, выделите обе эти ячейки и, ухватившись за маркер заполнения, протяните его вниз. Отличие от заполнения одинаковыми данными заключается в том, что, выделив две ячейки, вы указали принцип, по которому следует заполнить оставшиеся ячейки.

4. Во втором столбце размещаются ***n***-е члены прогрессии. Введите в ячейку В5 формулу для вычисления значений *n*-го члена прогрессии, в которой вместо значений ***d*** и $\boldsymbol{a}_1$ указаны адреса ячеек в знаках $$ (абсолютная ссылка), содержащих эти константы. **Все формулы начинаются со знака равенства.** Для того чтобы ввести формулу, необходимо выделить ячейку, в которую хотите поместить формулу, набрать знак равенства и затем набрать саму формулу со ссылками на соответствующие ячейки таблицы (не забудьте, что заголовки столбцов определяются латинскими буквами и русские А, С, В, хоть и похожи на такие же буквы латинского алфавита, но не являются равноценной заменой). Можно не набирать с клавиатуры адрес той ячейки, на которую делается ссылка (относительная или абсолютная). Набрав знак равенства, щелкните мышью по нужную ячейку и в строке формул появится ее адрес, затем продолжите набор формулы. В этом случае вам не нужно переключаться на латиницу. Полностью введя формулу, зафиксируйте ее нажатием клавиши Enter, в ячейке окажется результат вычисления по формуле, а в Строке формул –сама формула. Вот проявилась и еще одна функция Строки формул: если в ячейке вы увидите результат вычислений по формуле, то саму формулу можно просмотреть в Строке формул, выделив соответствующую ячейку. Если вы неправильно набрали формулу, исправить ее можно в Строке формул, предварительно выделив ячейку.

5. Выделите ячейку С5 и аналогично предыдущему введите формулу «=(B5+$C$3)*A5/2» для вычисления значений суммы первых *n* членов прогрессии и заполните формулой нижележащие ячейки, протащив маркер заполнения вниз. Выделите ячейку С8 и посмотрите в Строке формул, как выглядит формула, она приняла вид «=(B8+$C$3)*A8/2». Заметно, что относительные ссылки в формуле изменились при смещении самой формулы, а абсолютные (в знаках $$) – сохранились.

6. Теперь данными заполнены все ячейки, остается их только оформить, подобрав оптимальный размер шрифтов, ширины и высоты ячеек и др. с использованием команды «Формат ячейки».

7. Остается выполнить обрамление таблицы. Для этого выделите отдельные группы ячеек таблицы и командой **«**Формат ячейки», выберите вкладку *Рамка*, определите стиль линии и активизируйте переключатели Сверху, Снизу, Слева, Справа и др..

2. Создание диаграмм

1. Создайте диаграмму на листе книги, содержащей таблицу первого задания. Выделите диапазон ячеек A5:C14 с данными для нанесения на диаграмму. Для этого вызовите подменю Диаграмма… в меню Вставка (либо на панели инструментов нажмите

кнопку). Открывается окно Мастера диаграмм, в котором предлагается выбрать тип диаграммы.

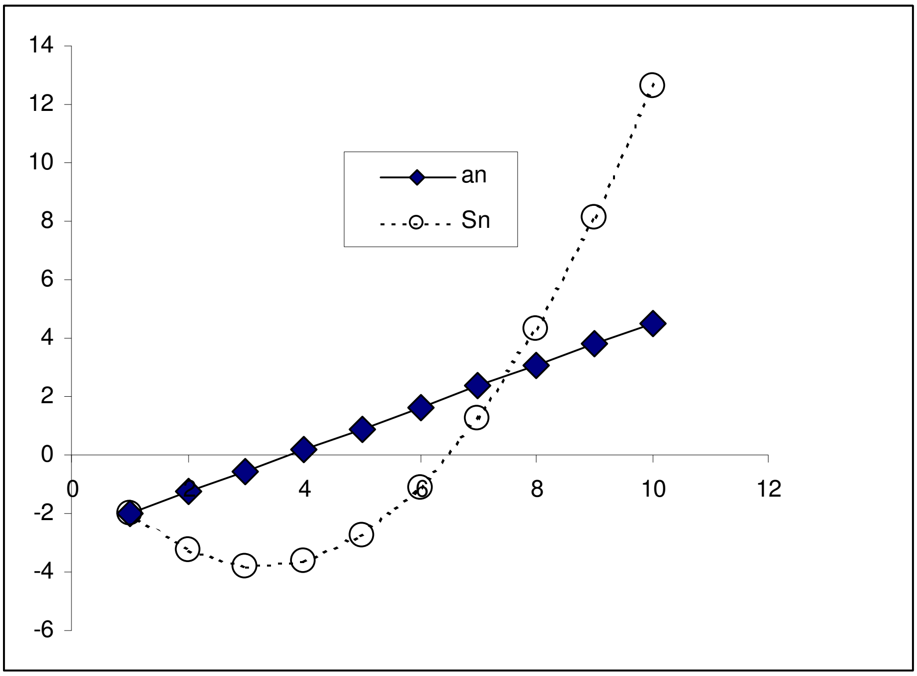
2. Выберите разновидность диаграммы «Точечная». Для этого достаточно щелкнуть мышью по нужному изображению диаграммы. Если вы хотите увидеть, как выглядит конечный результат, то можете щелкнуть мышью по кнопке Просмотр результата.

3. Нажмите кнопку Далее, чтобы перейти ко второму этапу работы Мастера диаграмм. Открывается второе окно Мастера диаграмм, в котором предлагается указать включаемые в диаграмму ячейки. (Если требуемые ячейки были выделены заранее, то этот диапазон будет отображаться в окне выбора диапазона, иначе следует выделить этот диапазон. Также здесь имеется возможность определить, как строится график по исходным данным: по строкам или столбцам). Обратите внимание на закладку *Ряд*: здесь можно из описываемой исходной области данных выделить один или несколько столбцов для присвоения им имени..

4. Нажмите кнопку Далее. Появляется третье окно Мастера Диаграмм, в котором с помощью соответствующих закладок диалогового окна указываются настройки таких параметры выбранной диаграммы, как заголовки, оси, линии сетки, подписи данных, таблица данных и легенда.

5. Нажмите кнопку Далее, чтобы подтвердить параметры диаграммы и открыть последнее окно Мастера диаграмм. В нем задается место размещения полученной диаграммы: на новом листе либо на текущем.

6. Нажмите кнопку *Готово*. Excel завершает построение диаграммы и выводит её на листе книги. Если диаграмма выделена (диаграмма по периметру выделена черной с маленькими квадратиками в центре и по углам), то Excel отображает панель инструментов диаграмм для облегчения основных операций с ними и выбирает масштаб с таким расчётом, чтобы на экране была видна вся диаграмма. Если на вашем экране отображаются другие панели инструментов, воспользуйтесь командой Панели инструментов в меню Вид, чтобы вызвать нужные.



Лабораторная работа № 3. Действия над матрицами.

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы в Excel.

1. **Массивы, формулы массива.** Под массивом в Excel понимается диапазон ячеек, обрабатываемый единообразно. Под формулой массива понимается единственная формула, связанная со всеми ячейками массива. Для ввода формулы массива следует:
   - выделить массив (ячейку или прямоугольный диапазон ячеек), для которого будет применяться формула;
   - ввести формулу;
   - нажать комбинацию клавиш ⟨Shift⟩ + ⟨Ctrl⟩ + ⟨Enter⟩ .

Пример вычисления суммы двух матриц.

Заполним две группы ячеек размером 3x3 произвольными числами (на рисунке это массивы B2:D4 и F2:H4). Для того, чтобы результат их суммирования был записан в соответствующих ячейках J2:L4 выполним следующее. Выделим ячейки J2:L4 и в строке формул введем выражение =B2:D4+F2:H4 (вместо ручного ввода диапазона ячеек, например B2:D4, их можно просто выделить курсором на рабочем листе). После нажатия комбинации клавиш ⟨Shift⟩ + ⟨Ctrl⟩ + ⟨Enter⟩ формула окажется заключенной в фигурные скобки {=B2:D4+F2:H4}, что является явным ***признаком формулы массива***.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Матрица А				Матрица В				А + В		
2	1	2	3		9	8	7		10	10	10
3	4	5	6	+	6	5	4	=	10	10	10
4	7	8	9		3	2	1		10	10	10

Произведение двух уже имеющихся квадратных 3×3 матриц А и В можно найти, используя встроенную функцию Excel **МУМНОЖ**(массив1,массив2). Для этого в любом месте рабочего листа необходимо 1) выделить диапазон ячеек 3×3 (на рисунке - это диапазон J7:L9), куда будет помещен результат вычислений; 2) вызвать функцию **МУМНОЖ** и на запрос Мастера Функций последовательно ввести диапазон ячеек для матриц А и В; 3) нажать комбинацию клавиш ⟨Shift⟩ + ⟨Ctrl⟩ + ⟨Enter⟩. При вычислении произведения двух неквадратных матриц следует помнить, что число столбцов (n) первой матрицы m×n должно совпадать с числом строк второй матрицы (n×k), а размер матрицы-произведения есть m×k, где m – число строк и k - число столбцов.

	H	I	J	K	L	M	N	O
6				A x B				
7			30	24	18			
8			84	69	54			
9			138	114	90			
10								
11								
12								

{=МУМНОЖ(B2:D4;F2:H4)}

Вычисление обратной матрицы осуществляется аналогично с применением встроенной функции **МОБР**, пример вычисления приведен на рисунке. Следует помнить, что обратная матрица определена только для квадратных матриц.

	B	C	D	E	F	G	H
13		**A**				**A^{-1}**	
14	2	2	1		0.4	0.4	-0.6
15	2	1	2		0.4	-0.6	0.4
16	1	2	2		-0.6	0.4	0.4
17							
18							

{=МОБР(B14:D16)}

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы.

Здесь предполагается, что число неизвестных равно числу уравнений и решение может быть записано в матричном виде: $\mathbf{X = A^{-1} \times C}$.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

1) Введите массивы коэффициентов и свободных членов.
2) В свободном месте электронной таблицы выделите блок ячеек, совпадающий по размеру с массивом коэффициентов.
3) Обратитесь к функции **МОБР**. На запрос **«Мастера функций»** введите адрес массива коэффициентов и завершите ввод формулы нажатием комбинации клавиш **⟨Shift⟩ + ⟨Ctrl⟩ + ⟨Enter⟩**.
4) Выделенные ячейки заполнятся числами. Полученная матрица и есть обратная матрица коэффициентов.
5) В свободном месте электронной таблицы выделите блок ячеек, необходимый для размещения решений системы.
6) Обратитесь к функции **МУМНОЖ**. На запрос **«Мастера функций»** введите адрес обратной матрицы (массива 1) и адрес вектора свободных членов (массива 2), завершите ввод формулы нажатием комбинации клавиш **⟨Shift⟩ + ⟨Ctrl⟩ + ⟨Enter⟩** .

	F	G	H	I	J
6	Матрица коэффициентов, A				Свободные члены, C
7	10	1	1		12
8	2	10	1		13
9	2	2	10		14
10					
11					
12	Обратная матрица коэффициентов, A^{-1}				
13	0.1035941	-0.0084567	-0.00951374		
14	-0.0190275	0.1035941	-0.00845666		
15	-0.0169133	-0.0190275	0.10359408		
16					
17		Решение системы, X			
18		x_1 =	1		
19		x_2 =	1		
20		x_3 =	1		

7) Полученные значения есть решение системы уравнений.

Убедитесь, что функция **МОБР** может быть вложена как один из аргументов функции **МУМНОЖ,** что позволяет ввести окончательную формулу решения непосредственно в ячейки H17:H19 {= МУМНОЖ (МОБР (F7:H9);J7:J9)} , без промежуточного вывода обратной матрицы в ячейки F12:H14.

***Задание* 1**. Решить самостоятельно.

1) $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 15 = 0 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_5 - 0{,}5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 5{,}4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 - 7{,}5 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3{,}3 \end{cases}$$

***Задание* 2.**

В порошковой пробе из смеси минералов кальцита [$CaCO_3$], доломита [$CaMg(CO_3)_2$] и апатита [$Ca_5(PO_4)_3(OH)$] рентгенофлуоресцентным методом были определены следующие массовые концентрации элементов:

$$K_C = 3.5\ \%$$
$$K_O = 44.1\ \%$$
$$K_{Ca} = 36.1\ \%$$

Определить содержание каждого из указанных минералов в пробе, используя химические формулы минералов и атомные веса входящих в них элементов.

Атомные веса элементов (а.е.м.):

Элемент	C	O	Mg	P	Ca
Атомная масса (а.е.м.)	12.011	16.00	24.32	30.975	40.08

Ход выполнения задания.

1. Составить систему из трех уравнений вида

$$\begin{aligned} M_{CX}X &+ M_{CY}Y &+ M_{CZ}Z &= K_C \\ M_{OX}X &+ M_{OY}Y &+ M_{OZ}Z &= K_O \\ M_{CaX}X &+ M_{CaY}Y &+ M_{CaZ}Z &= K_{Ca} \end{aligned}$$

Где X, Y, Z – неизвестные концентрации минералов; K_C, K_O, K_{Ca} – измеренные концентрации элементов; Коэффициенты вида - M_{ij} – массовые доли элементов **i** в разных минералах ***j***.

2. Вычислить на рабочем листе MS Excel молекулярные массы минералов и массовую долю измеренных элементов в их составе:

Например, $M(CaCO_3) = 40.08 + 12.011 + 3*16.00 = 100.091$ (а.е.м.). Массовая доля кислорода $M_{OКальцит} = M(O)/M(CaCO_3) = (3*16.00)/100.091=0.479564$.

3. Решение системы уравнений методом обратной матрицы и оформление полученного результата.

Результат.

Вычисленные содержания минералов в анализируемой пробе.

Минерал	Содержание (% масс.)
Кальцит	6,2
Доломит	21,1
Апатит	72,6

Лабораторная работа № 4. Табличное и графическое представление результатов измерений

Все таблицы и графики должны иметь названия и подписи, поясняющие использованные обозначения, с целью краткого и точного описания представленных данных.

Все измерения содержат, по меньшей мере, две переменные, одну из которых выбирают в качестве независимой (обозначают аргументом $\boldsymbol{x}$), а другая является зависимой (рассматривается как функция $\boldsymbol{y}$).

Оформление таблиц

В таблице аргумент и функция должны стоять в одной строке. Столбец значений аргумента и функции должен иметь заголовок, содержащий название и единицу измерения используемых величин. Предпочтительно располагать значения в столбце по порядку возрастания или убывания аргумента. Выравнивание чисел в столбцах удобно проводить по разделителю десятичных знаков или по правому краю для целых чисел. Числа в таблице округляются так, чтобы последняя цифра была первой сомнительной цифрой.

При округлении чисел соблюдают следующие правила (сомнительной, для примера, является первая цифра после запятой):

- если первая отбрасываемая цифра меньше пяти, то последнюю сохраняемую цифру оставляют неизменной (12,345 округляют до 12,3);
- если первая отбрасываемая цифра больше или равна пяти, а последующие больше нуля, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу (12,367 округляют до 12,4; 12,352 – до 12,4);
- если первая отбрасываемая цифра равна пяти и за нею следуют нули, то последнюю сохраняемую цифру округляют до ближайшего четного значения (12,350 округляют до 12,4; 12,450 – до 12,4);
- в целых числах цифры, следующие за первой сомнительной, заменяют нулями (например, скорость света в вакууме c = 299 792 500 м/с).

Таблица 1. Молярная электрическая проводимость водных растворов хлорида калия при 25 °С.

Число молей KCl		Удельная электрическая проводимость ι, $См \cdot м^{-1}$	Молярная электрическая проводимость μ, $См \cdot м^2 \cdot моль^{-1}$
в 1 л	в 1 $м^3$		
1	1000	11,19	0,01119
0,1	100	1,289	0,01289
0,01	10	0,1413	0,01413
0,001	1	0,01469	0,01469
0,0001	0,1	0,001489	0,01489

Интерполяцией называется определение значения функции, находящейся *между* измеренными ее значениями; она может быть аналитической или графической.

Тогда, когда можно принять, что функция Y линейно изменяется между двумя соседними значениями X, для интерполяции используют метод пропорциональных частей. Например, определим значение удельной электрической проводимости для числа молей равного 0,014 (Табл. 1). Для ближайших к данному значению числа молей примем обозначения $x_1 = 0{,}1$ и $x_2 = 0{,}01$ и для соответствующих значений функции (удельная электрическая проводимость) $y_1 = 1{,}289$ и $y_2 = 0{,}1413$. Искомое значение y для $x = 0{,}014$ определим из пропорции:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

и окончательно запишем

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = 1{,}289 + \frac{0{,}1413 - 1{,}289}{0{,}01 - 0{,}1}(0{,}014 - 0{,}1) = 0{,}192309$$

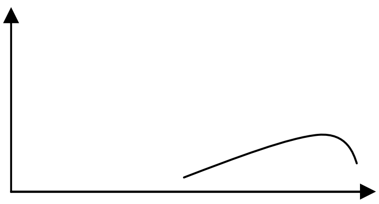
Задание. Определить молярную электрическую проводимость для растворов с заданной конценрацией KCl:
700 моль/м^3; 30 моль/м^3; 4 моль/м^3; 0,6 моль/м^3.

Оформление графиков

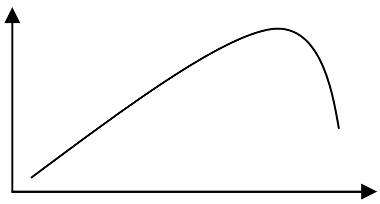
Значение независимой переменной откладывают по оси абсцисс, функции – по оси ординат.

Выбор масштаба. Масштаб графика выбирается таким, чтобы все поле графика было информативным. Нет необходимости пересечение осей координат связывать с нулевыми значениями.

Неправильно



Правильно



Аппроксимация методом наименьших квадратов.

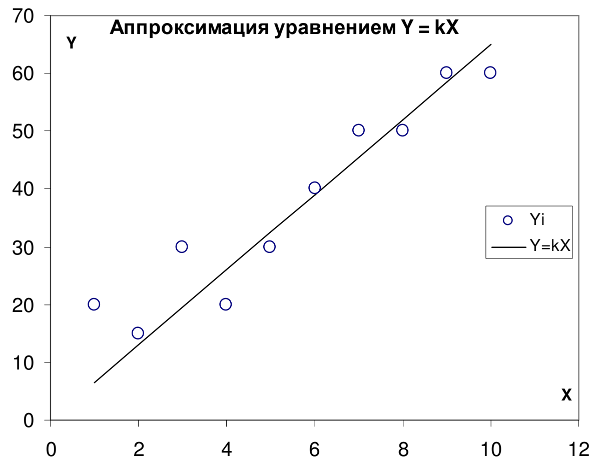
Лабораторная работа № 5. Метод наименьших квадратов.

Аппроксимирующая функция вида y = *kx*.

Подгоночное уравнение зависимости табличной функции y от аргумента x, определяемое по данным измерений, называют аппроксимацией или уравнением регрессии, а саму функцию – аппроксимирующей функцией. При нахождении аппроксимирующей функции $y(x)$ требуется, чтобы значения y_i, измеренные экспериментально, и значения $y(x_i)$, вычисленные по уравнению регрессии, различались минимально. Для этого используют метод наименьших квадратов (**МНК**), минимизирующий сумму квадратов отклонений экспериментальных и вычисленных значений функции: $[y_i - y(x_i)]^2$.

Рассмотрим получение уравнения линейной регрессии вида $y = \mathbf{k}x$ для аппроксимации данных, приведенных в первых двух столбцах таблицы.

Xi	Yi	Xi Yi	Xi^2
1	20	20	1
2	15	30	4
3	30	90	9
4	20	80	16
5	30	150	25
6	40	240	36
7	50	350	49
8	50	400	64
9	60	540	81
10	60	600	100
	Σ =	2500	385



Просуммируем квадраты всех отклонений:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{k}) = \Sigma[y_i - y(x_i)]^2 = \Sigma[y_i - \boldsymbol{k}x_i]^2 = \Sigma y_i^2 - 2\boldsymbol{k}\Sigma x_i\, y_i + \boldsymbol{k}\Sigma x_i^2.$$

и потребуем, чтобы эта сумма $\mathbf{S}(\boldsymbol{k})$ приняла свое минимальное значение при некотором значении $\boldsymbol{k}$, что равносильно требованию равенства нулю первой производной $d\mathbf{S}(\boldsymbol{k})/d\boldsymbol{k}$:

$$d\mathbf{S}(\boldsymbol{k})/d\boldsymbol{k} = -\,2\Sigma x_i\, y_i + 2\boldsymbol{k}\Sigma x_i^2 = 0.$$

Решая это уравнение относительно неизвестной $\boldsymbol{k}$, получим искомое значение $\boldsymbol{k} = (\Sigma x_i\, y_i)/(\,\Sigma x_i^2) = (2500/385) = 6.49$ такое, что его подстановка в уравнение $y = \boldsymbol{k}x$ обеспечивает наилучшую аппроксимацию табличной функции. Этот наиболее простой случай требует создания таблицы для вычислений в рабочем листе MS Excel, содержащей дополнительные колонки с вычислениями $x_i\, y_i$ и x_i^2 в каждой строке, ячеек для их суммы и вычисления $\boldsymbol{k} = (\Sigma x_i\, y_i)/(\,\Sigma x_i^2)$.

В данном случае, для определения значения функции, по измеренным значениям аргумента используется уравнение y=kx или наоборот, зная измеренное значение функции можно определить соответствующее значение аргумента по формуле x= y/k.

Задание. Найти коэффициент k аппроксимирующей функции y = kx и построить график, иллюстрирующий взаимное расположение аппроксимирующей прямой и табличных значений функции. Определить неизвестные значения x, которым соответствуют следующие измеренные значения y: 17; 34,5; 57; 72.

Аппроксимирующая функция вида y = $\boldsymbol{k}x + \boldsymbol{b}$.

Для более общего случая линейной регрессии $y = \boldsymbol{k}x + \boldsymbol{b}$, применяя аналогичный подход, решают систему уравнений с двумя неизвестными, $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}) = \Sigma[y_i - y(x_i)]^2 = \Sigma[y_i - \boldsymbol{k}x_i - \boldsymbol{b}]^2 = \Sigma y_i^2 - 2\boldsymbol{k}\,\Sigma x_i\,y_i + \boldsymbol{k}^2\Sigma x_i^2 - 2\boldsymbol{b}\Sigma y_i + 2\boldsymbol{kb}\,\Sigma x_i + \mathrm{n}\boldsymbol{b}^2 = \min.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(\boldsymbol{k},\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{k}} = -2\Sigma x_i\,y_i + 2\boldsymbol{k}\Sigma x_i^2 + 2\boldsymbol{b}\Sigma x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S(\boldsymbol{k},\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = -2\Sigma y_i + 2\boldsymbol{k}\Sigma x_i + 2\mathrm{n}\boldsymbol{b} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}\Sigma x_i^2 + \boldsymbol{b}\Sigma x_i = \Sigma x_i\,y_i \\ \boldsymbol{k}\Sigma x_i + \boldsymbol{b}\mathrm{n} = \Sigma y_i \end{cases}$$

откуда окончательно получим:

$$\begin{cases} \boldsymbol{k} = (\mathrm{n}\Sigma x_i\,y_i - \Sigma x_i\Sigma y\mathrm{i})/(\mathrm{n}\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2) = 5.30303 \\ \boldsymbol{b} = (\Sigma x_i^{\ 2}\Sigma y\mathrm{i} - \Sigma x_i\,\Sigma x_i y_i)/(\mathrm{n}\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2) = 8.333333 \end{cases}$$

Аппроксимирующая функция вида $\mathrm{Y} = \boldsymbol{B}\mathrm{X}^{\boldsymbol{k}}$**.**

После логарифмирования получим

$$\ln\mathrm{Y} = \ln\boldsymbol{B} + \boldsymbol{k}\ln\mathrm{X}.$$

Введем обозначения: $\mathrm{x} = \ln\mathrm{X}$, $\mathrm{y} = \ln\mathrm{Y}$, $\boldsymbol{b} = \ln\boldsymbol{B}$. В новых обозначениях уравнение примет уже известный вид:

$$\mathrm{y} = \boldsymbol{k}\mathrm{x} + \boldsymbol{b}.$$

Применяя решение, полученное в предыдущем случае для неизвестных $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}$, нам останется только вычислить один из искомых параметров $\boldsymbol{B}$, по формуле: $\boldsymbol{B} = \mathbf{exp}(\boldsymbol{b})$

Аппроксимирующая функция вида $\mathrm{Y} = \boldsymbol{k}/\mathrm{X} + \boldsymbol{b}$**.**

Замена переменной X новой переменной $\mathrm{x} = 1/\mathrm{X}$ приводит к уже известному уравнению линейной регрессии

$$\mathrm{y} = \boldsymbol{k}\mathrm{x} + \boldsymbol{b}.$$

Аппроксимирующая функция вида $\mathrm{Y} = \boldsymbol{B}\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}X}$**.**

После логарифмирования получим:

$$\ln\mathrm{Y} = \ln\boldsymbol{B} + \boldsymbol{k}\mathrm{X}.$$

Введем обозначения: $\mathrm{y} = \ln\mathrm{Y}$ ($\mathrm{Y} = \mathrm{e}^{\mathrm{y}}$), $\boldsymbol{b} = \ln\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{B} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{b}}$). В новых обозначениях уравнение примет уже известный вид:

$$\mathrm{y} = \boldsymbol{k}\mathrm{X} + \boldsymbol{b}.$$

Пара значений параметров $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{B} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{b}}$ определяет решение задачи аппроксимации.

Используемые замены сведены в таблицу:

Вид аппроксимирующей функции	Переход к линейному уравнению вида y=kx+b	Замены переменных X, Y и подгоночного параметра B для перехода к линейному уравнению y=kx+b			
		x=	y=	k=	b=
Y = kX+B	y = kx + B	X	Y	k	B
Y = k/X+B	y = k(1/X) + B	1/X	Y	k	B
$Y=BX^k$	lnY = klnX + lnB	lnX	lnY	k	ln(B)
$Y=Be^{kX}$	lnY = kX + lnB	X	lnY	k	ln(B)

После перехода к новым переменным и вычисления параметров k и b методом МНК параметры исходных уравнений получаются заменой B = b или B= e^b, в соответствии с видом уравнения.

В рабочем файле Аппроксимация.xls составлена программа для аппроксимации экспериментальных данных с использованием, в частности, всех рассмотренных выше функций.

Исходные табличные (экспериментальные) данные вводятся в столбцы C и D, начиная со строки №16. В ячеку D13 необходимо вручную ввести число N, равное числу узлов (пар значений x_i и y_i), используемых для аппроксимации. Выбор функции осуществляется выделением ячейки V10 и выбором из списка имеющихся функций, вызываемого при нажатии правой кнопки мыши.

Задание. Используя средства MS Excel построить графики, иллюстрирующие нижеприведенные экспериментальные данные, и определить вид функции, ***наилучшим образом*** аппроксимирующей эти данные по критерию $\mathbf{S}(\boldsymbol{k}) = \Sigma[y_i - y(x_i)]^2 = \mathbf{min}$, с использованием файла «Аппроксимация.xls». Оформить результаты решения в виде рабочей книги Excel, на отдельных рабочих листах для каждой задачи.

1. При наблюдении за скоростью испарения рапы с поверхности озера Эльтон получены следующие (усредненные) данные:

Соленость рапы, %	20	24	26	28	30	33	36
Скорость испарения % от пресной воды	71	62	54	42	35	22	9

Установите вид зависимости и подберите ее коэффициенты с применением метода МНК.

2. Выполните аналогичное задание для зависимости давления водяного пара (мм.рт.ст.) над насыщенным раствором Na_2SO_4 в зависимости от температуры:

температура, ^oC	16	20	24	28	30	35	39
давление, мм.рт.ст.	11,6	14,7	18,9	23,8	27,2	36,0	44,6

3. Построить эмпирическую формулу зависимости полной влагоемкости $w_п$ от объемного веса $\gamma_{ск}$ скелета глин $w_п = w_п(\gamma_{ск})$ методом МНК по данным таблицы:

$\gamma_{ск}$, г/см^3	0,8	0,9	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,75	2,50
$w_п$, доли един.	1,0	0,83	0,70	0,58	0,48	0,40	0,33	0,20	0,10

Комментарии к рабочему Листу "Аппроксимация"

1) Группировка данных позволяет сгруппировать области рабочего листа, в которых, например, содержатся промежуточные вычисления, с тем, чтобы сократить количество информации выводимой на экран монитора в процессе работы. Способ, которым выполняется группировка данных, описан в Справке контекстного меню Excel:

"Щелкните правой кнопкой мыши выбранные элементы (например, смежные столбцы или строки), выберите Группа и структура в контекстном меню и затем укажите «Группировать».

2) Здесь также используется ряд встроенных функций, например, "СТОЛБЕЦ()", "АДРЕС(номер_строки; номер_столбца)", "ДВССЫЛ(ссылка_на ячейку)", с описанием которых можно познакомиться, вызвав соответствующую Справку в Excel. Например в ячейке I13 использована сложная функция ("формула в формуле") "СУММ(H16:ДВССЫЛ(АДРЕС(15+$D$13;СТОЛБЕЦ())))", которая вместо привычного суммирования ячеек с явно указанными адресами, сначала определяет необходимый диапазон суммируемых ячеек, в зависимости от заданного числа узлов в ячейке D13.

3) Значения 0 или 1 в ячейках U3:U9, вычисляются с использованием вложенных функций "Ч(логическое_значение)" и "СОВПАД(текст1;текст2)" по сложной формуле, например, в ячейке U3: "=Ч(СОВПАД($V$10;V9))".

4) Имеются и другие, сложные функции, использующие способ "формула в формуле", см. например ячейки Q16 и другие в этом столбце, смысл применения которых ***следует понимать и объяснять*** при сдаче данной Лабораторной работы.

Лабораторная работа № 6. Нахождение аппроксимирующего полинома третьей степени.

Нахождение аппроксимирующего полинома третьей степени от одной переменной методом МНК.

1. Вид искомого уравнения зависимости y(x):

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

2. Распишем сумму (S) квадратов отклонений измеренных значений y_i от ожидаемых значений $y(x_i)$ при данных значениях x_i. (суммирование производится по всем узлам – парам экспериментально полученных значений y_i и x_i):

$$\begin{aligned}
S &= \sum (y - y_i)^2 = \sum (c_1 + c_2 x_i + c_3 x_i^2 + c_4 x_i^3 - y_i)^2 \\
&= \sum (c_1^2 + 2c_1(c_2 x_i + c_3 x_i^2 + c_4 x_i^3 - y_i) \\
&+ c_2^2 x_i^2 + 2c_2 x_i (c_3 x_i^2 + c_4 x_i^3 - y_i) \\
&+ c_3^2 x_i^4 + 2c_3 x_i^2 (c_4 x_i^3 - y_i) \\
&+ c_4^2 x_i^6 - 2c_4 x_i^3 y_i + y_i^2) \\
&= n c_1^2 + 2c_1 c_2 \sum x_i + 2c_1 c_3 \sum x_i^2 + 2c_1 c_4 \sum x_i^3 - 2c_1 \sum y_i \\
&+ c_2^2 \sum x_i^2 + 2c_2 c_3 \sum x_i^3 + 2c_2 c_4 \sum x_i^4 - 2c_2 \sum x_i y_i \\
&+ c_3^2 \sum x_i^4 + 2c_3 c_4 \sum x_i^5 - 2c_3 \sum x_i^2 y_i \\
&+ c_4^2 \sum x_i^6 - 2c_4 \sum x_i^3 y_i + \sum y_i^2
\end{aligned}$$

3. Требование минимума для функции $S(c_1, c_2, c_3, c_4)$ равносильно требованию равенства 0 первых частных производных.

$$\frac{\partial \sum (y - y_i)^2}{\partial c_1} = 2nc_1 + 2c_2 \sum x_i + 2c_3 \sum x_i^2 + 2c_4 \sum x_i^3 - 2\sum y_i = 0$$

$$\frac{\partial \sum (y - y_i)^2}{\partial c_2} = 2c_1 \sum x_i + 2c_2 \sum x_i^2 + 2c_3 \sum x_i^3 + 2c_4 \sum x_i^4 - 2\sum x_i y_i = 0$$

$$\frac{\partial \sum (y - y_i)^2}{\partial c_3} = 2c_1 \sum x_i^2 + 2c_2 \sum x_i^3 + 2c_3 \sum x_i^4 + 2c_4 \sum x_i^5 - 2\sum x_i^2 y_i = 0$$

$$\frac{\partial \sum (y - y_i)^2}{\partial c_4} = 2c_1 \sum x_i^3 + 2c_2 \sum x_i^4 + 2c_3 \sum x_i^5 + 2c_4 \sum x_i^6 - 2\sum x_i^3 y_i = 0$$

После сокращения на 2 каждого из уравнений получим следующую систему 4 линейных уравнений с 4 неизвестными c_1, c_2, c_3, c_4:

$$\begin{cases}
c_1 n + c_2 \sum x_i + c_3 \sum x_i^2 + c_4 \sum x_i^3 = \sum y_i \\
c_1 \sum x_i + c_2 \sum x_i^2 + c_3 \sum x_i^3 + c_4 \sum x_i^4 = \sum x_i y_i \\
c_1 \sum x_i^2 + c_2 \sum x_i^3 + c_3 \sum x_i^4 + c_4 \sum x_i^5 = \sum x_i^2 y_i \\
c_1 \sum x_i^3 + c_2 \sum x_i^4 + c_3 \sum x_i^5 + c_4 \sum x_i^6 = \sum x_i^3 y_i
\end{cases}$$

Запишем в матричном виде данную:

$$(\mathbf{X})\times(\mathbf{c})=(\mathbf{b}),$$

где

$$(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix} \boldsymbol{n} & \sum \boldsymbol{x}_i & \sum \boldsymbol{x}_i^2 & \sum \boldsymbol{x}_i^3 \\ \sum \boldsymbol{x}_i & \sum \boldsymbol{x}_i^2 & \sum \boldsymbol{x}_i^3 & \sum \boldsymbol{x}_i^4 \\ \sum \boldsymbol{x}_i^2 & \sum \boldsymbol{x}_i^3 & \sum \boldsymbol{x}_i^4 & \sum \boldsymbol{x}_i^5 \\ \sum \boldsymbol{x}_i^3 & \sum \boldsymbol{x}_i^4 & \sum \boldsymbol{x}_i^5 & \sum \boldsymbol{x}_i^6 \end{pmatrix},\ (\boldsymbol{c})=\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_3 \\ \boldsymbol{c}_4 \end{pmatrix},\ (\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} \sum \boldsymbol{y}_i \\ \sum \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i \\ \sum \boldsymbol{x}_i^2 \boldsymbol{y}_i \\ \sum \boldsymbol{x}_i^3 \boldsymbol{y}_i \end{pmatrix}$$

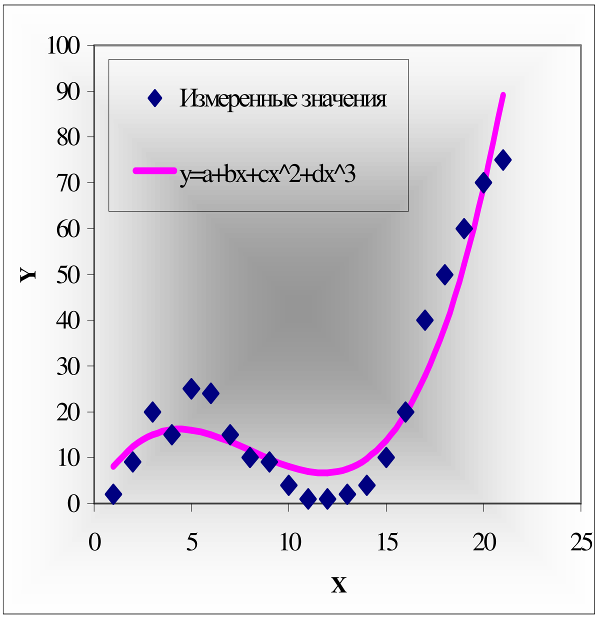
Её решение в матричном виде имеет вид

$$(\mathbf{c})=(\mathbf{X}^{-1})\times(\mathbf{b}),$$

где ($\mathbf{X}^{-1}$) – обратная матрица.

Задание. Используя встроенные **математические** функции программы MS Excel (вычисление обратной матрицы **МОБР(массив)** и перемножение матриц **МУМНОЖ(массив1;массив2**) создать рабочий лист, в котором вычисляются коэффициенты аппроксимирующего полинома третьего порядка для описания следующей серии измерений:

Номер измерения	Xi	Yi
1	1	2
2	2	9
3	3	20
4	4	15
5	5	25
6	6	24
7	7	15
8	8	10
9	9	9
10	10	4
11	11	1
12	12	1
13	13	2
14	14	4
15	15	10
16	16	20
17	17	40
18	18	50
19	19	60
20	20	70
21	21	75



a	b	c	d
1.64	7.49	-1.2	0.05

Численные методы решения уравнений

Лабораторная работа № 7. Метод половинного деления.

Постановка задачи.

Школьные и вузовские программы математики знакомят с классами уравнений, которые можно решить точно с помощью аналитических преобразований и специальных формул. Однако точные методы не являются основными в практике вычислений при решении прикладных задач. Уравнения вида $\sin x - e^x = 0$ и $P_n(x) = 0$, где P_n многочлен общего вида степени для $n \geq 5$.

Корнем уравнения $f(x) = 0$ называется такое значение аргумента x, подстановка которого в уравнение обращает его в тождество. Процесс приближенного решения уравнений распадается на два этапа: 1) *отделение* корней; 2) *уточнение* корней.

Отделить корень уравнения $f(x) = 0$ – значит найти такой *конечный* промежуток (*отрезок изоляции*), внутри которого имеется единственный корень данного уравнения. Отделение корней можно осуществить аналитически или графически.

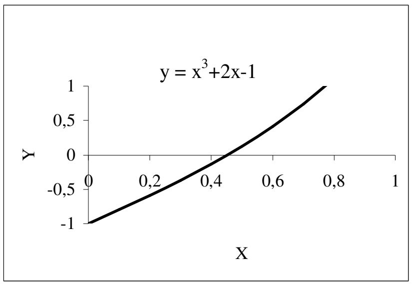
Поиск приближенного значения корня с точночтью до заданного достаточно малого числа $\varepsilon > 0$, называется *уточнением* этого корня.

Отделение корней. Графический способ.

Если на отрезке [a;b] функция f(x) монотонна и непрерывна, а ее значения на концах отрезка имеют разные знаки, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то этот отрезок содержит только один корень уравнения f(x) = 0.

Отделить корни уравнения $x^3+2x-1=0$.
Т.к. $f'(x) = 3x^2+2 >0$ при всех значениях x, то функция $f(x) = x^3+2x-1$ монотонно возрастает в промежутке $(-\infty;+\infty)$.

Т.к. на отрезке [0,1] $f(0)\cdot f(1) < 0$, то единственный корень уравнения находится на отрезке [0,1].

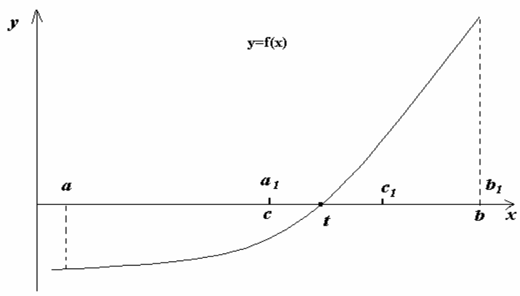


Задание. Графически отделить корни уравнения

Вариант	1	2	3	4	5	6
Функция	$x\cdot\ln x - 1$	$x^3 - 5x+1$	$x\cdot e^x - 1$	$x^4 + x - 1$	$e^x + x - 3$	$e^x + x^2 - 2$

Уточнение корней. Метод половинного деления.

Пусть f(x) непрерывна на [*a*,*b*] и пусть $f(a)\cdot f(b) <0$. Разделим [*a*;*b*] пополам точкой $c = (a+b)/2$ и вычислим f(c). Если F(c) = 0, то корень t найден. Если же нет, то выберем ту половину отрезка , на концах которой значения функции разных знаков и обозначим ее $[a_1;b_1]$. Затем отрезок $[a_1;b_1]$ делим пополам точкой $c_1 = (a_1+b_1)/2$ и проводим аналогичные рассуждения. Получится либо точный



корень c_1, либо отрезок $[a_2;b_2]$ со свойством $f(a_2)\cdot f(b_2) < 0$. И так далее.

Для того, чтобы найти приближенное значение корня с точностью до $\varepsilon > 0$, необходимо **остановить** процесс половинного деления **на таком шаге** n, на котором отрезок $[a_n;b_n]$ будет иметь длину $\boldsymbol{b_n - a_n \leq 2\varepsilon}$ и вычислить $x = (a_n+b_n)/2$. Ясно, что тогда можно взять $t \approx x$, причем $|t - x| \leq \varepsilon$.

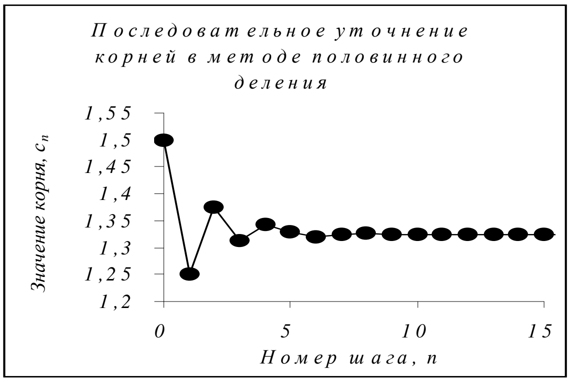
Пример уточнения корня уравнения $y = x^3-x-1$ на отрезке [1; 2] с точностью 0,0001.

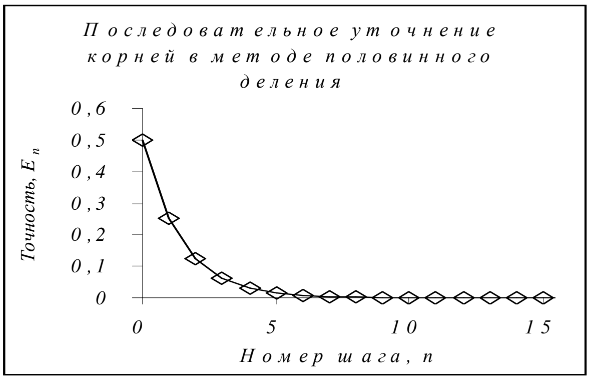
	G	H	I	J	K	L	M	N
2	N	a_n	c_n	b_n	E_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
3	0	1	1,5	2	0,5	-1	0,875	5
4	1	1	1,25	1,5	0,5	-1	-0,29688	0,875
5	2	1,25	1,375	1,5	0,25	-0,29688	0,224609	0,875
6	3	1,25	1,3125	1,375	0,125	-0,29688	-0,05151	0,224609
15	12	1,324707	1,324829	1,324951	0,000122	-4,7E-05	0,000474	0,000995
16	13	1,324707	1,324768	1,324829	6,1E-05	-4,7E-05	0,000214	0,000474
17	14	1,324707	1,324738	1,324768	3,05E-05	-4,7E-05	8,36E-05	0,000214

=ЕСЛИ(L3*M3<0;H3;I3)

=ЕСЛИ(N3*M3<0;J3;I3)

Заполнить таблицу, где a_n и b_n, - концы вложенных отрезков, c_n – вычисляемая середина этих отрезков, E_n – оценка точности приближения: $E_n = (b_n - a_n)/2$; $f(a_n)$, $f(b_n)$, $f(c_n)$ – вычисляемые значения функции на концах отрезка и его середине. Для ячеек в столбце K, содержащих значения E_n, в меню «Формат» выбрать опцию «Условное форматирование» и при выполнении условия $E_n < 0{,}0001$ задать изменение «Вида» отображаемой ячейки, например, изменив цвет ячейки на зеленый или любой другой. Уточненным значением корня тогда будет число $x = c_n$ в соответствующей строке столбца **I**. Последовательность уточнений может быть проиллюстрирована графически, как показано ниже.





Задание 2. Уточнить корни уравнения. Построить графики иллюстрирующие последовательное уточнение корней в методе половинного деления.

Вариант	1	2	3	4	5	6
Функция	$x\cdot\ln x - 1$	$x^3 - 5x+1$	$x\cdot e^x - 1$	$x^4 + x - 1$	$e^x + x - 3$	$e^x + x^2 - 2$

Лабораторная работа № 8. Метод касательных.

Уточнение корней методом касательных.

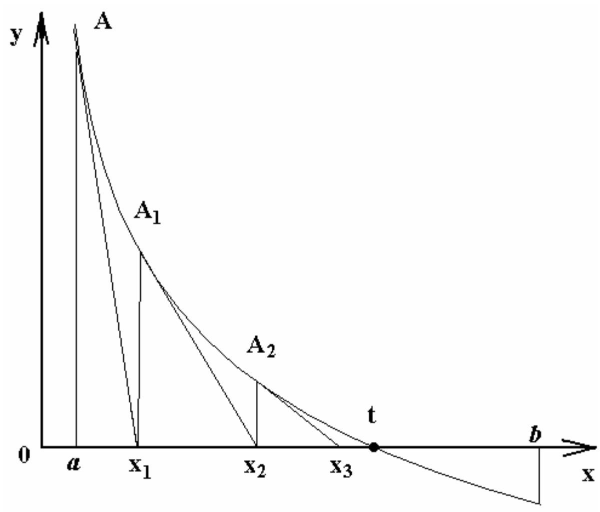
Метод касательных называется также *методом Ньютона* и относится к *методам последовательных приближений*.

Условия применения метода касательных:

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$ и на отрезке $[a; b]$ находится единственный корень t, причем значения функции на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Кроме того, функция имеет непрерывные производные f' и f'' с отличными от нуля и сохраняющими постоянный знак значениями при всех $x \in [a; b]$.

Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $A(a; f(a))$ до пересечения с осью Ox. Из курса аналитической геометрии известно, что прямая с известным угловым коэффициентом k и проходящая через данную точку $(x_0; y_0)$, описывается уравнением $y-y_0 = k(x-x_0)$. В нашем случае это можно записать в виде:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$



Полагая $y = 0$, находим абсциссу x_1 точки пересечения касательной с осью Ox:

$$x_1 = a - f(a)\,/\,f'(a)$$

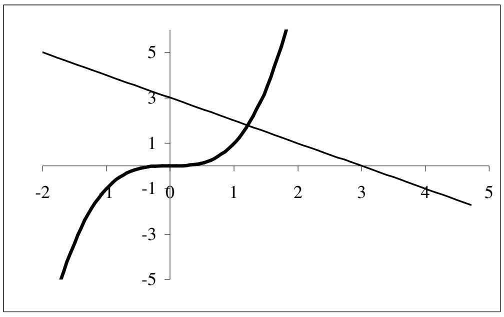
где $f'(a) \neq 0$. Полученное значение x_1 – это первое приближение к корню. Проведя касательную через точку $A_1(x_1; f(x_1))$ и найдя точку ее пересечения с осью Ox, получим x_2 – второе приближение к корню. Аналогично определяются последующие приближения:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n))\,/\,f'(x_n)} \qquad (1)$$

В качестве начального приближения x_0 в методе касательных удобно выбирать один из концов отрезка $[a; b]$, причем при $f'(x)f''(x) > 0$ следует брать $x_0 = b$, а при $f'(x)f''(x) < 0$ следует брать $x_0 = a$.

Пример. Методом касательных найти корень уравнения $x^3 + x - 3 = 0$ с точностью до 5-го знака после запятой.

Записав данное уравнение в виде $x^3 = -x + 3$ и построив графики функций $p(x) = x^3$ и $g(x) = -x + 3$, найдем, что единственный корень уравнения принадлежит отрезку [1; 2].



Найдем производные: $f'(x)= 3x^2 + 1$ и $f''(x) = 6x$. Вычислим значения производных на концах отрезка: $f'(1)= 4$, $f''(1)= 6$, $f'(2)= 13$, $f''(2)= 12$. Т.к. на обоих концах отрезка производные одного знака, то в качестве нулевого приближения выбираем $x_0 = b$, т.е. $x_0 = 2$. Результаты вычислений по формуле (1) записываем в виде таблицы.

=I2^3+I2-3

=3*I2^2+1

2

	H	I	J	K
1	n	x_n	$f(x_n)$	f '
2	0	2	7	13
3	1	1.46154	1.583522986	7.408284024
4	2	1.24779	0.190563463	5.670925834
5	3	1.21418	0.004189066	5.422732474
6	4	1.21341	2.17326E-06	5.417106511
7	5	1.21341	5.86642E-13	5.41710359
8	6	1.21341	0	5.41710359
9	7	1.21341	0	5.41710359
10	8	1.21341	0	5.41710359

=I2-J2/K2

Из таблицы видно, что искомый корень t = 1,21341.

Задание. Уточнить корни уравнения методом касательных. Провести графическое отделение корней и проверить применимость метода касательных в выделенных отрезках. Заполнить таблицу последовательного приближения к искомому корню в каждом отрезке изоляции. Построить графики иллюстрирующие последовательное уточнение корней в методе касательных. Сравнить эффективность метода половинного деления и метода касательных при одинаковом выборе концов отрезков изоляции и одинаковых требованиях к точности: $0{,}5\cdot 10^{-6}$.

Вариант	1	2	3	4	5	6
Функция	$x\cdot\ln x - 1$	$x^3 - 5x+1$	$x\cdot e^x - 1$	$x^4 + x - 1$	$e^x + x - 3$	$e^x + x^2 - 2$

Лабораторная работа № 9. Метод простой итерации.

Уточнение корней методом простой итерации.

Будем рассматривать уравнение вида

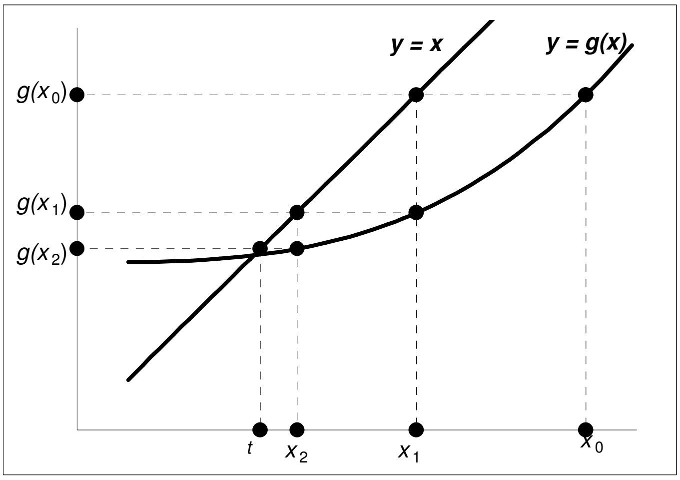
$$x = g(x) \qquad (1)$$

с корнем t, отделенном на отрезке $[a; b]$. Это уравнение можно получить из уравнения $f(x)=0$ путем эквивалентных преобразований. Например, уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ представляется в таком виде разными способами:

$$\begin{aligned}
&(a)\ x = (x^3 + 1)/3;\\
&(b)\ x = x^3 - 2x + 1; \qquad (2)\\
&(c)\ x = (3x-1)^{1/3};\\
&(d)\ x = x - \boldsymbol{c}(x^3 - 3x + 1),\ \text{где } \boldsymbol{c} \text{ – произвольная постоянная.}
\end{aligned}$$

Рекуррентная формула

Пусть x_0 – нулевое приближение к искомому корню, вычислив $g(x_0)$ можно получить первое приближение $x_1 = g(x_0)$, вторым приближением будет $x_2 = g(x_1)$ и т.д. (см. рисунок).



Таким образом, процесс последовательного приближения (итераций) осуществляется с помощью рекуррентной формулы:

$$x_n = g(x_{n-1}). \qquad (3)$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{t}$, то этот предел является корнем: $t = g(t)$.

Теорема. Итерационный процесс сходится ($\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{t}$), на отрезке $[a; b]$ длины h, содержащем корень t, если для всех $x \in [a - h; b + h]$ функция $g(x)$ дифференцируема и выполнено условие

$$|g'(x)| \le q < 1$$

при любом выборе нулевого приближения $x_0 \in [a; b]$.
(Отрезок $[a - h; b + h]$ называют при этом *отрезком "тройной" длины*.)

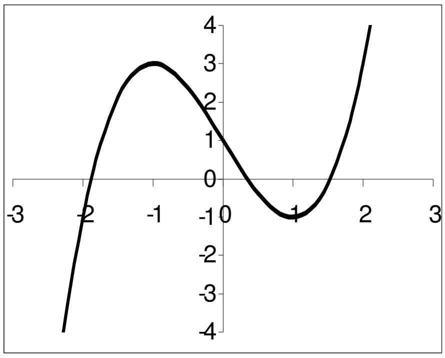
Оценкой погрешности приближения к корню на n-ом шаге метода простой итерации является величина:

$$\Delta_n = \frac{\boldsymbol{q}}{1-\boldsymbol{q}}\left|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{n-1}\right|$$

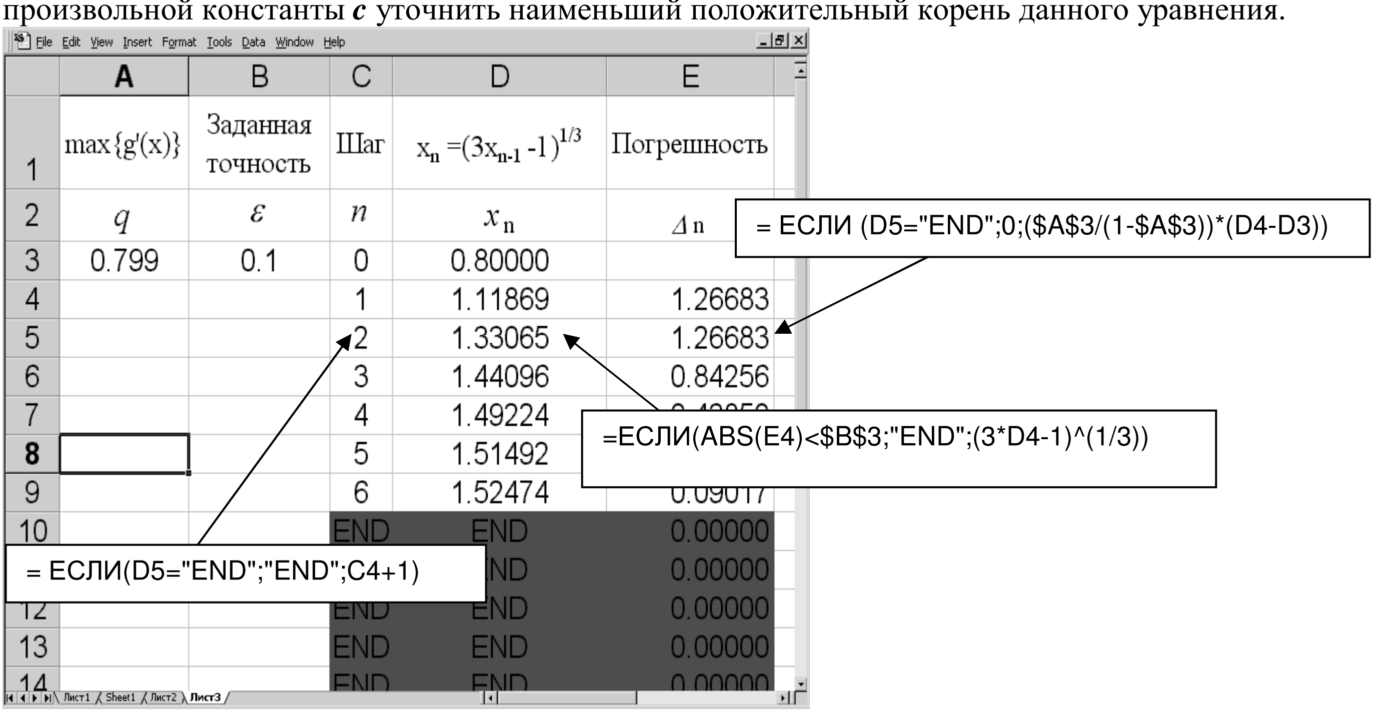
Условием окончания итерационного процесса при заданной точности $\varepsilon > 0$ является неравенство $\Delta_n \le \varepsilon$.

Пример. Один из корней уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$ расположен на отрезке [1,2; 1,6] длины 0,4. Рассмотрим представление исходного уравнения в форме (2*a*):

$$x = (x^3 + 1)/3.$$



На данном отрезке $|g'(x)| = x^2 > 1$ и потому, согласно условиям теоремы, применить метод простой итерации нельзя. Аналогичный вывод имеет место и в случае представления в форме (2*b*): $x = x^3 - 2x + 1$, так как $g'(x) = 3x^2 - 2$, причем $3\cdot(1{,}2)^2 - 2 = 2{,}32 > 1$ и $3\cdot(1{,}6)^2 - 2 = 5{,}68 > 1$. Рассмотрим представление (2*c*): $x = (3x-1)^{1/3}$. Производная $g'(x) = (3x-1)^{-2/3}$ на отрезке "тройной" длины [0,8; 2,0] положительна, убывает и потому $g'(x) \le g'(0{,}8) < 0{,}799$ при всех $x \in [a - h; b + h]$. Следовательно, для этого уравнения выполнены все условия теоремы с $q = 0{,}799$. На рисунке приведен пример составления таблицы Excel для этой итерационной последовательности, в которой наряду с числовыми переменными использованы текстовые переменные ("End") и условное форматирование для индикации окончания процесса итерации при заданной точности. Самостоятельно исследовать пригодность представления уравнения в форме (2*d*) и подходящим выбором произвольной константы ***c*** уточнить наименьший положительный корень данного уравнения.



	A	B	C	D	E
1	max{g'(x)}	Заданная точность	Шаг	$x_n = (3x_{n-1} - 1)^{1/3}$	Погрешность
2	q	ε	n	x_n	Δn
3	0.799	0.1	0	0.80000	
4			1	1.11869	1.26683
5			2	1.33065	1.26683
6			3	1.44096	0.84256
7			4	1.49224	
8			5	1.51492	
9			6	1.52474	0.09017
10			END	END	0.00000
11				END	0.00000
12			END	END	0.00000
13			END	END	0.00000
14			END	END	0.00000

Задание. **Уточнить корни уравнения методом простой итерации**.

1. Найти графически отрезок [*a*; *b*] изоляции одного из корней уравнения $f(x) = 0$.

2. Привести исходное уравнение к виду $x = g(x)$, пригодному для метода простой итерации на отрезке "тройной" длины [*a*-*h*; *b*+*h*].

3. Составить рабочий лист Excel с формулами для вычисления приближений до достижения требуемой точности $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-5}$.

4. Найдите приближенный корень и выпишите его с верными знаками.

Вариант	1	2	3	4	5	6
f(x)	x-5sinx-1	lnx + 2x	4sinx+2x+1	2x+lnx+0,5	$x+2-e^x$	2cosx+x-1

Вариант	7	8	9
f(x)	$x-(x+1)^3$	x^3-2x+2	3x+cosx+1

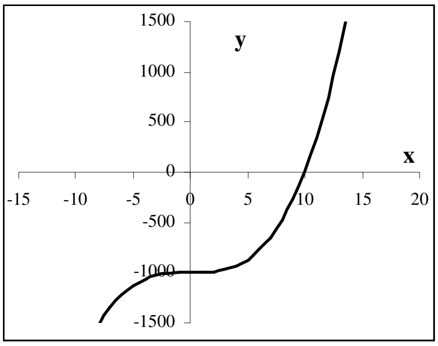
Лабораторная работа № 10. Использование встроенных модулей.

Уточнение корней уравнений с использованием встроенных модулей Excel

Циклические ссылки и итерации в Excel.

Если в ячейку Excel введена формула, содержащая ссылку на эту же самую ячейку (может быть и не напрямую, а опосредованно - через цепочку других ссылок), то говорят, что имеет место циклическая ссылка (цикл). На практике к циклическим ссылкам прибегают, когда речь идет о реализации итерационного процесса, вычислениях по рекуррентным соотношениям. В обычном режиме Excel обнаруживает цикл и выдает сообщение о возникшей ситуации, требуя ее устранения. Excel не может провести вычисления, так как циклические ссылки порождают бесконечное количество вычислений. Есть два выхода из этой ситуации: устранить циклические ссылки или допустить вычисления по формулам с циклическими ссылками (в последнем случае число повторений цикла должно быть конечным).

Возьмем для примера уравнение $\boldsymbol{x^3 + x - 1000 = 0}$. Очевидно, что корень данного уравнения несколько меньше *10*. Если переписать это уравнение в виде $x = g(x) = 1000 - x^3$ и начать итерационный процесс при $x_0=10$, то из первых же приближений очевидна его расходимость. Если же учесть, что $f'(x)=3x^2+1>0$ и принять за приближенное значение максимума $f'(x)$ число $\boldsymbol{Max} = 300$, то можно построить сходящийся итерационный процесс на основе представления $x = g(x) = x - \boldsymbol{c}(x^3 + x - 1000)$, где $\boldsymbol{c}$ – произвольная постоянная, например $\boldsymbol{c = 1/Max}$:



$$X = X - \frac{X^3 + X - 1000}{300}$$

Можно и искусственно подобрать подходящую форму эквивалентного уравнения $\boldsymbol{x = g(x)}$, например:

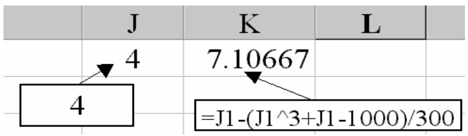
$$X = \sqrt[3]{1000 - X}$$

или

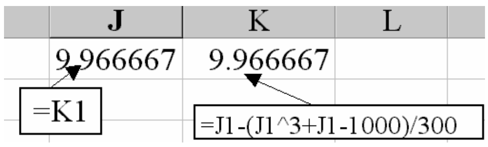
$$X = \frac{1000}{X^2} - \frac{1}{X}$$

Рассмотрим задачу нахождения корней уравнения: $x^3 + x - 1000 = 0$, графическое представление которого приведено на рисунке. Найти корень этого (и любого другого) уравнения можно, используя всего одну ячейку Excel. Для этого последовательно введем:

1) в ячейку **J1** начальное приближение к корню x_0= 4, а в ячейку **K1** — формулу для вычисления функции $g(x) = x - \boldsymbol{c}\,(x^3 + x - 1000)$;



2) изменим содержимое ячейки J1, согласно итерационной формулы x = g(x), т.е. введем формулу "**= K2**".



Для включения режима циклических вычислений в *меню Сервис/Параметры/вкладка Вычисления* включаем флажок *Итерации*, при необходимости изменяем число повторений цикла в поле *Предельное число итераций* и точность вычислений в поле *Относительная погрешность* (по умолчанию их значения равны 100 и 0,0001 соответственно). Кроме этих установок выбираем вариант ведения вычислений: *автоматически* или *вручную*. При *автоматическом* вычислении Excel выдает сразу конечный результат, при вычислениях, производимых *вручную*, можно наблюдать результат каждой итерации.

Подбор параметра

Когда желаемый результат вычислений по формуле известен, но неизвестны значения, необходимые для получения этого результата, можно воспользоваться средством *Подбор параметра*, выбрав команду *Подбор параметра* в меню *Сервис*. При подборе параметра Excel изменяет значение в одной конкретной ячейке до тех пор, пока вычисления по формуле, ссылающейся на эту ячейку, не дадут нужного результата.

Возьмем в качестве примера все то же уранение $x^3 + x - 1000 = 0$.. Для нахождения корня уравнения выполним следующие действия:

	B	C
2	x=	0
3	f(x)=	-1000

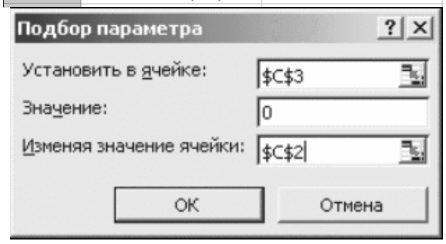


Рис. 1. Окно диалога Подбор параметра

- В ячейку C3 введем формулу для вычисления значения функции, стоящей в уравнении слева от знака равенства. В качестве аргумента используем ссылку на ячейку C2, т.е. **=C2^3+C2-1000**.
- В окне диалога *Подбор параметра* в поле *Установить в ячейке* введем ссылку на ячейку с формулой, в поле *Значение* - ожидаемый результат, в поле *Изменяя значения ячейки* - ссылку на ячейку, в которой будет храниться значение подбираемого параметра (содержимое этой ячейки не может быть формулой).
- После нажатия на кнопку *Ok* Excel выведет окно диалога *Результат подбора параметра*. Если подобранное значение необходимо сохранить, то нажмите на *Ok*, и результат будет сохранен в ячейке, заданной ранее в поле *Изменяя значения ячейки*. Для восстановления значения, которое было в ячейке C2 до использования команды *Подбор параметра*, нажмите кнопку *Отмена*.
- При подборе параметра Excel использует итерационный (циклический) процесс. Количество итераций и точность устанавливаются в меню *Сервис/Параметры/вкладка Вычисления*. В случае, когда уравнение имеет более одного корня, необходимо задавать разные начальные приближения, соответствующие отрезкам изоляции этих корней и после этого снова запустить процесс *Подбор параметра.*

Задание. Самостоятельно в Excel сделайте графические иллюстрации, отделите корни, приведите уравнения в каждом отдельном интервале изоляции к виду, пригодному для итераций и уточните корни с точностью $0{,}5 \cdot 10^{-5}$.

1) $(4 + x^2)(e^x - e^{-x}) = 18$ $x \in [1{,}2;\ 1{,}3]$. 2) $x^2 - 1{,}3 \ln(x + 0{,}5) - 2{,}8x + 1{,}15 = 0$. 3) $\sqrt[3]{x^2 \cdot (x+4)} = 0$.

Численное интегрирование.

Лабораторная работа 11. Формулы прямоугольников.

В курсе математического анализа доказывается, что когда функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b], для нее существует первообразная F ($F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a; b]$), причем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Данная формула, называемая формулой Ньютона-Лейбница, представляет собой точный метод вычисления определенного интеграла. Однако в реальности использовать ее удается не всегда.

Численные методы позволяют отыскать приближение к интегралу по числовому выражению на основе значений подынтегральной функции в конечном множестве точек из отрезка интегрирования. Такой способ вычислений называется механической квадратурой, соответствующие приближенные формулы называют формулами численного интегрирования или квадратурными формулами, а используемые при этом аргументы функции – узлами квадратуры.

Формулы прямоугольников.

Интегрируемость функции f на отрезке [a; b] означает, что если этот отрезок разбить точками $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$ на n частей, выбирать числа $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и составлять интегральные суммы

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \qquad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}),$$

то будет существовать конечный предел этих сумм при $h \to 0$ ($h = \max\limits_{i=1,2\ldots n} \Delta x_i$ - шаг разбиения), не зависящий ни от способа разбиения отрезка на части, ни от выбора точек t_i из этих частей. Этот предел и есть определенный интеграл

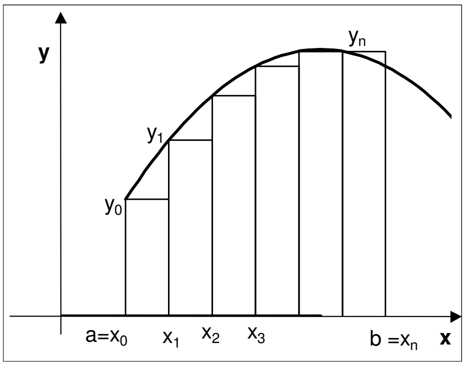
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} S_n$$

В случае разбиения отрезка [a; b] на равные части $h = (b - a)/n = \Delta x_i$, а условие $h \to 0$ равносильно условию $n \to \infty$. Следовательно, при достаточно больших n можно положить:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \quad .$$

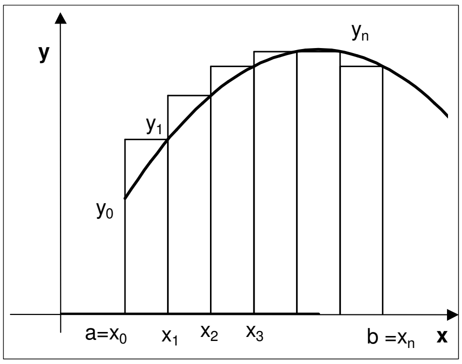
Если взять в качестве точек t_i левые концы отрезков $[x_{i-1}; x_i]$: $y_{i-1} = f(x_{i-1})$, то получим формулу *левых прямоугольников*

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) = J_n(л).$$



Приняв $t_i = x_i$ – правые концы отрезков $[x_{i-1}; x_i]$: $y_i = f(x_i)$, получим формулу *правых прямоугольников*

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = J_n(\text{пр})$$



Погрешность приближения по формуле прямоугольников оценивается на основе теоремы:
Если подынтегральная функция f имеет на [a; b] непрерывную производную f′, то оценка погрешностей формул для J_n(л) и J_n(пр) дается неравенством:

$$|J - J_n| \le M_1 \cdot \frac{(b-a)^2}{2n},$$

где $M_1 = \max|f'(x)|$ на отрезке [a; b]

Пример. По формулам прямоугольников, приняв n = 10, вычислить $J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$.

Решение. Здесь h = (1-0)/10 = 0,1; $f(x) = 1/(1+x^3)$. Составим таблицу соответствующих значений аргумента и функции, необходимых для приближенного вычисления данного интеграла.

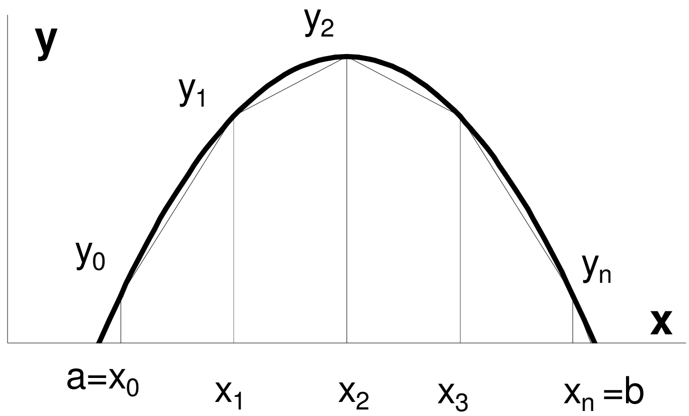
K	x_k	$y_k = 1/(1+x_k^3)$
0	0	1
1	0.1	0.999001
2	0.2	0.992063
3	0.3	0.97371
4	0.4	0.93985
5	0.5	0.888889
6	0.6	0.822368
7	0.7	0.744602
8	0.8	0.661376
9	0.9	0.578369
10	1	0.5
		$\sum_{i=1}^{9} y_i = 7,600228$

Так как $\sum_{i=0}^{9} y_i$ =8,600228, $\sum_{i=1}^{10} y_i$ =8,100228, то по формулам для J_n(л) и J_n(пр) соответственно получим: J_n(л) = 0,1·8,600228 = 0,8600228 и J_n(пр) = 0,1·8,100228 = 0,8100228.

Задание. По формулам прямоугольников, приняв n = 10, вычислить определенные интегралы 1) $\int_1^{11} \frac{dx}{x+2}$. 2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$. 3) $\int_1^2 e^x dx$. 4) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$. 5) $\int_1^2 \mathrm{sh}\, x dx$. 6) $\int_1^2 \mathrm{ch}\, x dx$. 7) $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}\, x dx$

Лабораторная работа 12. Формула трапеций.

В методе прямоугольников оценка площади под кривой аналитической функции f(x) в интервале от [a, b] вычисляется как сумма площадей прямоугольников, одна из сторон которого совпадает с отрезком $[x_k, x_{k+1}]$, а высота равна значению функции в одной из точек на краях отрезка $f(x_k)$ или $f(x_{k+1})$. Можно повысить точность оценки определенного интеграла, если заменять аналитическую функцию на каждом интервале $[x_k, x_{k+1}]$, k = 0, 1, 2 … , n-1 отрезком прямой, соединяющей точки графика функции y = f(x) на концах отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ с соответствующими координатами: (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}) – линейная интерполяция.



При выборе постоянного шага для приращений $\Delta x_k = h$, так что $x_{k+1} = x_k + h$, формула трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла на отрезке [a, b] имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx J_n(\text{тр}) = h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + \frac{y_k + y_{k+1}}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)$$

$$= h\,(y_0/2 + y_1 + y_2 + \ldots + y_k + \ldots + y_{n-1} + y_n/2),$$

где $h = (b-a)/n$, $x_k = a + k\cdot h$, $y_k = f(x_k)$, k = 0, 1, 2, … n.

Правая часть формулы выражает площадь фигуры, состоящей из трапеций, высота каждой из которых равна h.

Погрешность приближения можно оценить по формуле для остаточного члена:

$$|R_n| = |J - J_n(\text{тр})| \le M \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

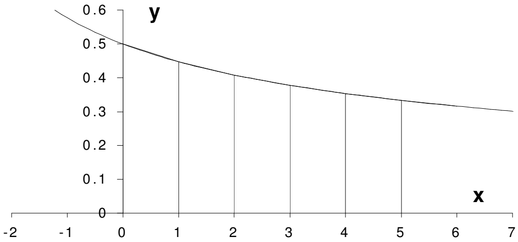
где $M = \max|f''(x)|$ на отрезке [a; b].

Пример 1. По формуле трапеций вычислить $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ при n = 5.

Решение. С помощью формул находим h, x_k, y_k: $h = 1$; $x_k = k$; $y_k = \frac{1}{\sqrt{x_k + 4}}$.

и заполняем таблицу:

k	x_k	y_k
0	0	0,5
1	1	0,447
2	2	0,409
3	3	0,377
4	4	0,353
5	5	0,332



Вычисляем сумму:
J_n(тр) = $1\cdot(0{,}5/2 + 0{,}447 + 0{,}409 + 0{,}377 + 0{,}353 + 0{,}333/2) = 2{,}002$.

Как видим, полученное приближенное значение интеграла мало отличается от результата, найденного с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$J = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} = \int_0^5 (x+4)^{-\frac{1}{2}} d(x+4) = 2(x+4)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^5 = 2.$$

Пример 2. По формуле трапеций с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$ вычислить $\int_2^3 \frac{dx}{x-1}$.

Решение. Для определения числа n отрезков разбиения, потребуем для остаточного члена выполнения неравенства $|R_n| \le \varepsilon$: $M \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} \le \varepsilon$, откуда $n \ge \sqrt{M \cdot \frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}}$. Так как $f(x) = 1/(x-1)$; $f'(x)=1/(x-1)^2$; $f''(x)=2/(x-1)^3$, то $M = \max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)| = \max\limits_{2\le x\le 3}\left|\frac{2}{(x-1)^3}\right| = 2$.

Следовательно $n \ge \sqrt{2\cdot\frac{(3-2)^3}{12\cdot 0{,}01}} = \sqrt{\frac{50}{3}} > \sqrt{16} = 4.$ Поскольку n – целое число, то можно взять n = 5. Определив n, найдем $h = (b-a)/n = (3-2)/5 = 0{,}2$; $x_k = 2 + k\cdot 0{,}2$; и заполним таблицу и по формуле трапеций вычислим:

k	x_k	y_k
0	2	1
1	2,2	0,833
2	2,4	0,714
3	2,6	0,625
4	2,8	0,556
5	3	0,500

J_n(тр) = $h\cdot(y_0/2 + y_1 + y_2 + \ldots + y_k + \ldots + y_{n-1} + y_n/2)=$
$=0{,}2\cdot(0{,}5+0{,}833+0{,}714+0{,}625+0{,}556+0{,}250)=0{,}6956$.

Полученный результат удовлетворяет условиям задачи, так как $\int_2^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_2^3 = 0{,}6931$; $|R_n| = |0{,}6931-0{,}6956| = 0{,}0025 < 0{,}01$.

Задание 1. По формуле трапеций, приняв n = 10, вычислить определенные интегралы $\int_1^{11} \frac{dx}{x+2}$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$.

Задание 2. По формуле трапеций с точностью до 0,01 вычислите определенные интегралы:

1) $\int_0^{1,2} e^x dx$. **2)** $\int_1^3 \ln(2x)dx$ **3)** $\int_1^{11} \frac{dx}{x+2}$. **4)** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$.

5) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$. **6)** $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}\, x dx$. **7)** $\int_1^2 \mathrm{sh}\, x dx$.

Численные методы решения задачи Коши.

Лабораторная работа 13. Методы Эйлера и Рунге-Кутта.

Пусть имеем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка

$$F(x,y,y') = 0$$

Если в этом уравнении можно выразить производную y' через x и y, то получим эквивалентное уравнение

$$y' = f(x,y),$$

разрешенное относительно производной.

В общем случае данное ОДУ имеет множество решений в некоторой области D изменения величин x, y, и y':

$$y = \varphi(x, C),$$

которое называют *общим решением* дифференциального уравнения, где C – произвольная числовая постоянная. Для определения постоянной C необходимо задать дополнительное условие – *начальное условие*, например, заранее известное значение y_0 искомой функции y(x) при $x = x_0$. Задачу нахождения единственного решения ОДУ, удовлетворяющего начальному условию называют *задачей Коши* (ЗК).

Приближенные методы решения ЗК применяют тогда, когда точного решения данного уравнения не существует, или его нахождение оказывается слишком трудоемким.

Численное решение задачи Коши, при заданных значениях x_0 и $y_0 = y(x_0)$, состоит в построении таблицы (или *сетки*) приближенных значений $y_1, y_2, y_3, \dots y_k, \dots y_n$ для конечного числа точек (*узлов сетки*) $x_1, x_2, x_3, \dots x_k, \dots x_n$ в заданном отрезке $x \in [a,b]$ существования решения ЗК.

Метод Эйлера. Чаще всего выбирают равноотстоящие точки, получаемые разбиением отрезка [a; b] с постоянным шагом $\Delta x = h$ (*шаг сетки*), так, что $x_{k+1} = x_k + h$ (k = 0, 1, 2 … n). Так как по определению производной

$$\boldsymbol{y}' = \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{h}},$$

то имеем приближенно $y(x+h) \approx y(x) + hy' = y(x) + hf(x,y)$ и можем вычислить, например, значение y_1 по заданным значениям x_0, y_0 и h: $y_1 = y_0 + hf(x_0,y_0)$, затем $y_2 = y_1 + hf(x_1,y_1)$, т.е., последовательно находим значения

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k,y_k).\ (k = 0, 1, 2, \dots n).$$

В результате вместо точного решения $y = \varphi(x)$ мы находим функцию $y_k = y(x_k)$ дискретного аргумента, заданную таблично (*сеточную функцию*). На графике ломаная линия (*ломаная Эйлера*), построенная соединением соседних узлов такой сетки (x_k, y_k), является приближением интегральной кривой $y = \varphi(x)$. Точность данного метода имеет порядок h.

Пример. Найти решение $\boxed{\text{ЗК: } y' = y - x;\ \ y(0) = 2}$ на отрезке [0;1] с шагом h = 0,2.

Решение. В поле таблицы для начальных условий (которые, вообще говоря, могут быть изменены в дальнейшем) на рабочем листе Excel запишем: $x_0 = 0$ (в ячейке G5), $y_0 = 2$ (в ячейке G6). Ячейки E8 и F8 приравняем соответствующим начальным значениям и вычислим в ячейке G8: $f(x_0,y_0) = y_0 - x_0 = f(0,2) = 2 - 0 = 2$, и в ячейке H8: $h\cdot f(x_0,y_0) = 0{,}2\cdot 2 = 0{,}4$. В следующих строках для k = 1, 2, 3, 4 и 5 вычисляем

$x_1 = x_0 + h = 0+0{,}2=0{,}2$ в ячейке E9 по формуле $\boxed{\text{= E8+\$G\$4}}$;

$y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0,y_0) = 2+0{,}4 = 2{,}4$ в ячейке F9 по формуле $\boxed{\text{= F8+H8}}$;

$f(x_1,y_1) = y_1 - x_1 = 2{,}4 - 0{,}2 = 2{,}2$ в ячейке G9 по формуле $\boxed{\text{= F9-E9}}$.

Выделяя и копируя формулы ячеек E9, F9 и G9 в расположенные ниже ячейки, заполняем таблицу.

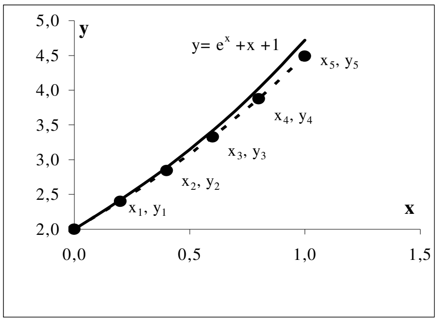
=G6

=F9-E9

=F8+H8

	D	E	F	G	H	I	J
4			h=	0.2			
5			x_0=	0			
6			y_0=	2			
7		x_0+kh	y_k	$f(x_k,y_k)$	$h*f(x_k,y_k)$	Точное решение $y=e^x+x+1$	Ошибка $\varepsilon=\lvert y-y_k\rvert$
8	0	0.0	2.0000	2.0000	0.4000	2.0000	0.0000
9	1	0.2	2.4000	2.2000	0.4400	2.4214	0.0214
10	2	0.4	2.8400	2.4400	0.4880	2.8918	0.0518
11	3	0.6	3.3280	2.7280	0.5456	3.4221	0.0941
12	4	0.8	3.8736	3.0736	0.6147	4.0255	0.1519

Для иллюстрации приближенного решения построим на одной диаграмме графики ломаной Эйлера и точного аналитического решения $y = e^x+x+1$.



Метод Рунге-Кутта. Метод Эйлера имеет невысокую точность (порядка h). Для достижения более высокой точности (порядка h^4) используют *метод Рунге-Кутта* четвертого порядка:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3}{6},$$

где

$$K_0 = h \cdot f(x_k, y_k),$$

$$K_1 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_0}{2}),$$

$$K_2 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2}),$$

$$K_3 = h \cdot f(x_k + h, y_k + K_2).$$

Задание 1. Найти методом Рунге-Кутта приближенное решение ЗК из предыдущего примера. Решение оформить в новом рабочем Листе Excel и построить аналогичную диаграмму, иллюстрирующую точность приближения.

В ходе решения заполняют таблицу с вычислениями, например, подобную нижеприведенной.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
18					Метод Рунге-Кутта					
19	k	$x_k = x_0+kh$	y_k	$f(x_k,y_k)$	K_0	K_1	K_2	K_3	Точное решение $y=e^x+x+1$	Ошибка $\varepsilon=\lvert y-y_k\rvert$
20	0	0	2.000000	2	0.4	0.42	0.422	0.4444	2.000000	0.0000000
21	1	0.2	2.421400	2.2214	0.4443	0.4687	0.4712	0.4985	2.421403	0.0000028
22	2	0.4	2.891818	2.4918	0.4984	0.5282	0.5312	0.5646	2.891825	0.0000067
23	3	0.6	3.422106	2.8221	0.5644	0.6009	0.6045	0.6453	3.422119	0.0000123
24	4	0.8	4.025521	3.2255	0.6451	0.6896	0.6941	0.7439	4.025541	0.0000201

Задание 2. Построить графики решений ЗК $\boxed{y' = f(x, y),\ y(0) = 1}$ на интервале [0, 1], полученных методами Эйлера, Рунге-Кутта, для функций f(x, y):1) x + y; 2) 2y - cos2x; 3) 2y + $3e^{-x}$; 4) e^x - 3y; 5) 3y - 2 sinx; 6) y + (cosx)/3; 7) y + cos3x.

В процессе выполнения задания 2 необходимо получить (и проверить подстановкой в исходное уравнение и начальные условия) точные аналитические решения уравнений: 1) $y = 2e^{x} – x - 1$; 2) $y = (\cos 2x – \sin 2x + 3e^{2x})/4$; 3) $y = 2e^{2x} - e^{-x}$; 4) $y= (e^{x} + 3e^{-3x})/4$; 5) $y = (4\cos 2x + 6\sin 2x + 9e^{3x})/13$; 6) $y = (\sin x - \cos x + 7e^{x})/6$; 7) $y = (3\sin 3x – \cos 3x + 11e^{x})/10$.

Приближение функций с помощью рядов.

Лабораторная работа №14. Разложение функций в ряд Маклорена.

Если функция f(x) может быть разложена в промежутке (-R, R) в степенной ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

то этот ряд есть обязательно есть ряд Маклорена данной функции:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad \textbf{(1)}$$

Разложение в степенной ряд функции sin*x*.

Пусть f(x)= sinx. Имеем:

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{IV}(x) = \sin x,\ \ldots;$$

отсюда

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{IV}(0) = 0,\ \ldots.$$

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -1/3!,\ a_4 = 0,\ a_5 = -1/5!,\ \ldots$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (1), получаем ряд Маклорена функции sinx:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

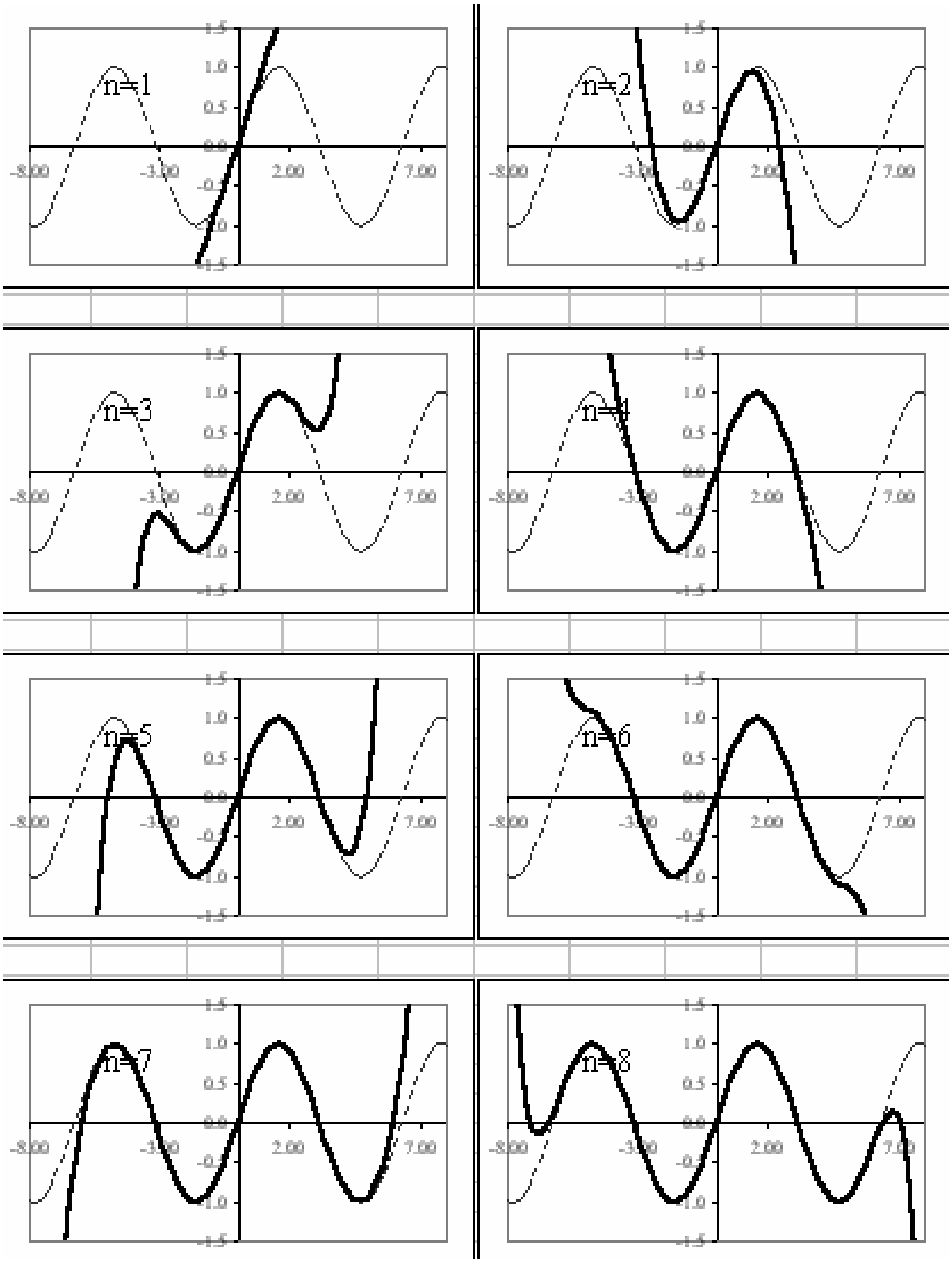
С помощью программы MS Excel можно проиллюстрировать процесс приближения степенного ряда к данной функции. Для этого на рабочем листе создадим и заполним таблицу

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x_0=	-3.2	i	x_i	Sinx	Сумма S_n первых n членов ряда Маклорена, где n =							
2	Δx=	0.02				1	2	3	4	5	6	7	8
3			0	-3.20	0.06	-3.20	2.26	-0.53	0.15	0.05	0.06	0.06	0.06
4			1	-3.18	0.04	-3.18	2.18	-0.53	0.12	0.03	0.04	0.04	0.04
5			2	-3.16	0.02	-3.16	2.10	-0.53	0.10	0.01	0.02	0.02	0.02
6			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Ячейки в столбцах A-E заполняем, как обычно, для построения графика функции. В ячейку F3 введем формулу для вычисления первого члена ряда Маклорена. =D3 . В ячейку G3 вставим выражение для суммирования членов ряда на основе общей формулы

=F3+((-1)^(G$2-1))*($D3^(2*G$2-1)/FACT(2*G$2-1)) ,

которую скопируем в ячейки H3-M3. Затем, выделим ячейки F3-M3 и скопируем их содержимое в нижележащие ячейки. Построим серию графиков, на каждом из которых вместе с функцией sinx (пунктирная кривая) изображена одна из частичных сумм ряда Маклорена (сплошная кривая).



Задание. Привести формулы для разложения в ряд Маклорена следующих функций: 1) cos$x$; 2) e^x; 3) sh$x$; 4) ch$x$; 5) $1/(1+x)$; 6) ln$[1/(1+x)]$; 7) $\cos^2 x$. Построить графики, иллюстрирующие последовательное приближение частичных сумм ряда Маклорена к данным функциям.

Лабораторная работа №15. Разложение функций в ряд Фурье.

Вводная теоретическая часть. Различные формы записи ряда Фурье.

Разложение в ряд Фурье функции, удовлетворяющей условиям Дирихле (согласно теореме Дирихле периодическая функция должна иметь конечное число разрывов и непрерывность производных между ними), с периодом Т = 2π, т.е., f(x) = f(x+2π), имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (1)$$

Коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \text{ где n =1, 2, 3, 4, ….. .}$$

Из формул (1) и (2) могут быть получены другие, часто используемые на практике формы записи ряда Фурье.

(I). Преобразуем выражение (1) к виду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin nx\right)$$

и введем обозначения $A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $\cos\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ и $\sin\varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$, отметим, что при этом выполняются соотношения $|\cos\varphi_n| \le 1$, $|\sin\varphi_n| \le 1$ и $\cos^2\varphi_n + \sin^2\varphi_n = 1$. С учетом введенных обозначений и того, что $\cos\varphi_n \cos nx + \sin\varphi_n \sin nx = \cos(nx - \varphi_n)$, уравнение (1) преобразуется к виду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos\varphi_n \cos nx + \sin\varphi_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos nx - \varphi_n),$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ называется амплитудой, а $\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}$ - фазой *n*-ой гармоники.

.

(II). Для функции f(x) с _произвольным периодом_ Т = 2*l* >0, f(x) = f(x+2*l*), удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке [0,2*l*], осуществим переход к новой переменной $t = \frac{\pi}{l}x$: $f(x) = f(\frac{l}{\pi}t)$. Тогда условие периодичности по новой переменной имеет вид $f(\frac{l}{\pi}t) = f(\frac{l}{\pi}t + 2l) = f[\frac{l}{\pi}(t+2\pi)]$, т.е., ее период равен 2π. Введем обозначение для новой функции $F(t) \equiv f(\frac{l}{\pi}t)$, тогда F(t) = F(t+2 π), т.е. функция F(t) является периодической с периодом 2 π. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \qquad (1')$$

Коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos ntdt, \qquad (2')$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin ntdt, \text{ где n =1, 2, 3, 4, ….. .}$$

Для перехода к переменной x = $\frac{l}{\pi}t$ в разложении Фурье (1') следует учесть, что t = $\frac{\pi}{l}x$: f(x)=f($\frac{l}{\pi}t$)$\equiv F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\frac{\pi}{l}x + b_n \sin n\frac{\pi}{l}x)$ (3)

При вычислении коэффициентов Фурье, учтем, что при замене t = $\frac{\pi}{l}x$ следует подставить dt = $\frac{\pi}{l}dx$ и изменить пределы интегрирования в формулах (2') $t_в = \pi \leftrightarrow x_в = l$ и $t_н = -\pi \leftrightarrow x_н = -l$. В итоге с учетом данной замены имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

и аналогично: $$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}xdx, \qquad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}xdx, \qquad \text{где n =1, 2, 3, 4, ….. .}$$

Формулы (3) и (4) определяют ряд Фурье для функции с произвольным периодом.

(III). Для функций, зависящих от времени (x = t > 0) интегрирование осуществляется в пределах от 0 до T, постоянная величина $\frac{\pi}{l}$ заменяется величиной ω = $\frac{2\pi}{T}$ = $\frac{\pi}{l}$, которая называется циклической частотой и разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\frac{2\pi}{T}t + b_n \sin n\frac{2\pi}{T}t) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \qquad . \qquad (3^*)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt\,, \qquad (4^*)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt\,,$$ где n =1, 2, 3, 4, ….. .

(IV). Комплексная запись ряда Фурье.

Пусть f(x) удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье на отрезке [-π,π]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,. \qquad (1^*)$$

где:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx\,, \qquad (2^*)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx\,,$$ где n =1, 2, 3, 4, ….. .

Используя формулы Эйлера $e^{inx} = \cos nx + \boldsymbol{i} \sin nx$, $e^{-inx} = \cos nx - \boldsymbol{i} \sin nx$, найдем, что

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i\,\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}. \qquad (5)$$

Подставляя эти выражения в ряд (1*) получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n\,\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2})$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n - ib_n}{2}\,e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}\,e^{-inx}). \qquad (6)$$

Введем следующие обозначения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Тогда ряд (6) примет вид:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-inx}\,,$$ где n = 1, 2, 3, 4 …..+∞.

Введем вместо n новый индекс суммирования k, который может принимать и положительные и отрицательные целочисленные значения (k = 0, ±1, ±2, ±3, ±4, …..±∞) и перепишем последнее уравнение:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Последнее равенство можно записать так:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}\,,$$ где k = 0, ±1, ±2, ±3, ……… (7)

Сходимость ряда (7) понимается в смысле существования предела: $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}$.

Таким образом, ряд Фурье (1*) представлен в комплексной форме (7).
Найдем выражения для коэффициентов c_n и c_{-n} через интегралы (2*):

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx. \qquad (8)$$

и аналогично: $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx.$

Отметим, что $|\,c_n\,| = |\,c_{-n}\,| = \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \dfrac{A_n}{2}$, где A_n - амплитуда *n*-ой гармоники. Получим соотношение между фазой *n*-ой гармоники φ_n и коэффициентами $c_{\pm n}$: $\operatorname{tg}\varphi_n = \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{2i(c_n - c_{-n})}{2(c_n + c_{-n})} = i\dfrac{c_n - c_{-n}}{c_n + c_{-n}}$, или $\varphi_n = arctg\left(i\dfrac{c_n - c_{-n}}{c_n + c_{-n}}\right)$.

С использованием введенного выше целочисленного индекса k в равенствах (8) можем окончательно записать

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx, \text{ где } k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\ldots\ldots . \qquad (9)$$

Коэффициенты c_k называются *комплексными коэффициентами* ряда Фурье (7) функции f(x) с периодом 2π. Для функции с произвольным периодом ($T = 2l$) ряд Фурье (7) и формула (9) примут вид:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{l}x},$$
$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-ik\frac{\pi}{l}x}\,dx, \text{ где } k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\ldots . \qquad (10)$$

Если x = t – время, тогда используя обозначение для циклической частоты и изменяя пределы интегрирования $[-l,l]$ на $[0,T]$ по аналогии с (3*) и (4*), получим:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t},$$
$$c_k = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)e^{-ik\omega t}\,dt, \text{ где } k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\ldots . \qquad (11)$$

Пример. Разложить в неполный ряд Фурье функцию f(x) = x при $0 < x < l$: а) по синусам; б) по косинусам.

Решение. а) Используем формулу разложения в ряд Фурье по синусам (косинусам):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\frac{\pi}{l}x, \quad \left(f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{l}x\right)$$

где

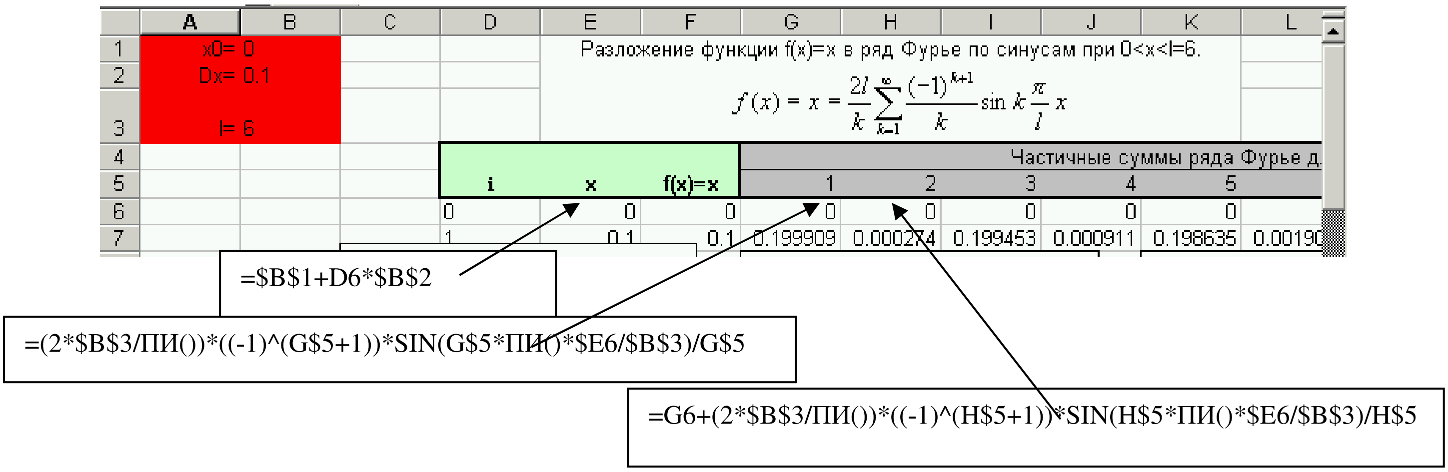
$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin k\frac{\pi}{l}xdx\,,\ \left(a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;\quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos k\frac{\pi}{l}xdx;\right),\ \text{где k = 1, 2, 3, ….∞.}$$

Подставив в формулу заданную функцию f(x) = x, найдем

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\sin k\frac{\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\left(-\frac{xl}{k\pi}\cos k\frac{\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{l}{k\pi}\int_0^l \cos k\frac{\pi}{l}xdx\right) = -\frac{2l}{k\pi}\cos k\pi = \frac{2l}{k\pi}(-1)^{k+1}.$$

Отсюда после подстановки в формулу ряда получим:

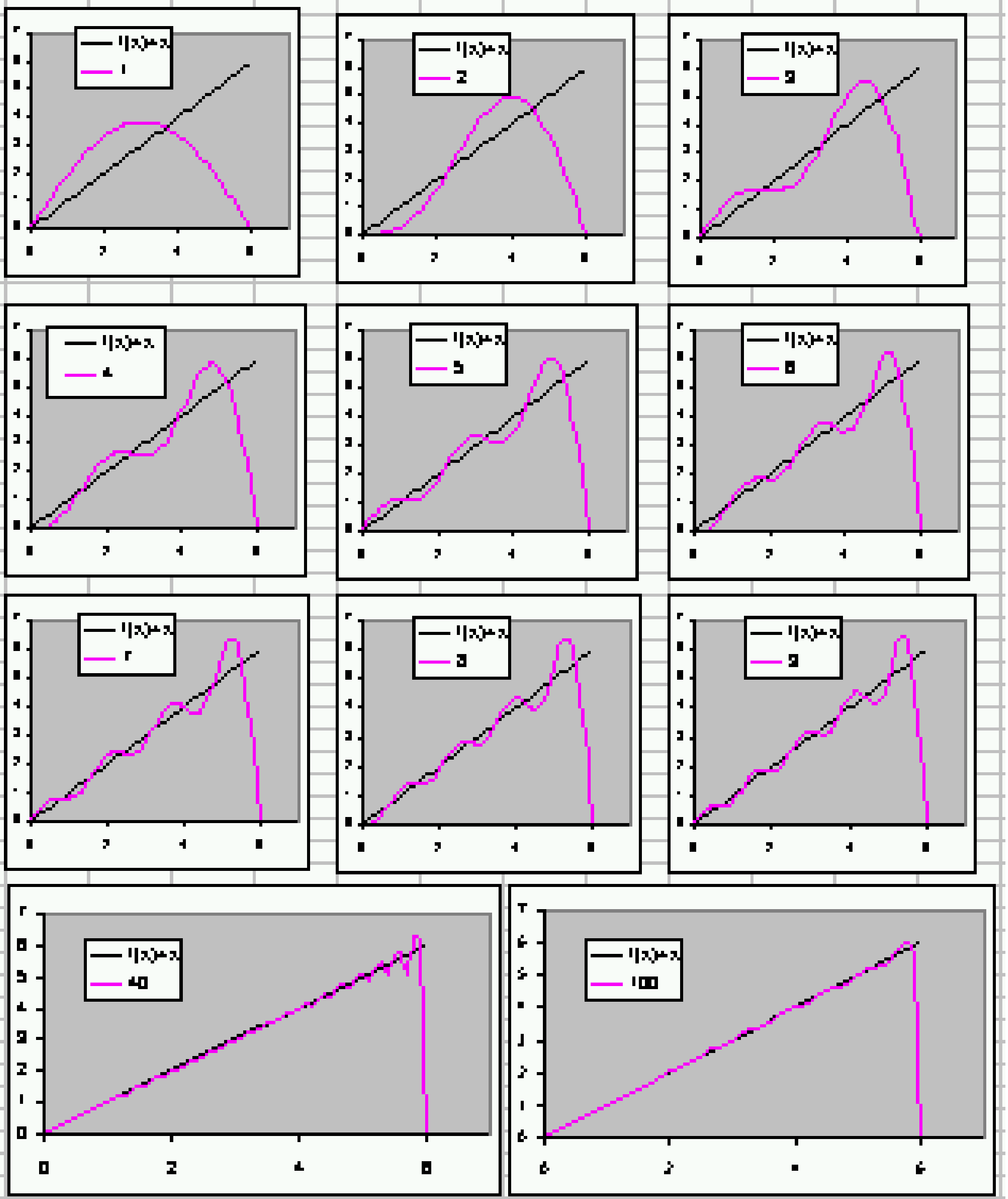
$$f(x) = x = \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\frac{\pi}{l}x\,.$$



Столбцы D, E и F используем для построения графика функции. В ячейку G6 введем формулу для вычисления общего члена разложения в ряд Фурье заданной функции. В ячейку H6 введем формулу для вычисления частичной суммы ряда Фурье и скопируем ее в следующие ячейки по строке 6. Построим диаграммы, иллюстрирующие последовательное приближение частичных сумм ряда Фурье к заданной функции по мере добавления новых гармоник, как показано на рисунке.

Задание. 1). Самостоятельно решить и проиллюстрировать часть (б) первого примера. 2). Разложить в ряд Фурье функцию f(x) = 5-x, заданную в интервале 0 < x < 5. Проиллюстрировать процесс последовательного приближения частичных сумм ряда Фурье к заданной функции по мере увеличения числа членов ряда.

$$f(x) = x = \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\frac{\pi}{l}x$$



Численный спектральный анализ и синтез.

Лабораторная работа № 16. Действия с комплексными числами.

Представление комплексных чисел. Комплексное число z может быть представлено в одной из трех следующих форм:

- алгебраическая форма: $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, x = Re(z) – действительная часть комплексного числа, y = Im(z) – мнимая часть комплексного числа.
- тригонометрическая форма: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
- показательная форма: $z = re^{i\varphi}$, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = Argz = arctg\,\dfrac{y}{x}$.

В MS Excel комплексные числа вводятся в алгебраической форме $x + yi$. Для получения различных элементов комплексных чисел и их преобразований существует ряд функций: **КОМПЛЕКСН, МНИМ.ABS, МНИМ.АРГУМЕНТ, МНИМ.ВЕЩ, МНИМ.СОПРЯЖ, МНИМ.ЧАСТЬ**

Пример. Представить комплексное число ***z=2+i3*** в тригонометрической форме.

Решение.

1. Вводя число *z* в ячейку B1 в форме =**КОМПЛЕКСН**(2;3), получим в ячейке ***2+3i***.
2. Для вычисления модуля комплексного числа, устанавливаем курсор в ячейку B2 и с панели инструментов ***Вставка*** – Выбираем ***Функция*** и вызываем Мастер функций. В диалоговом окне выбираем ***Категория*** – **Инженерные**, Функция – **МНИМ.ABS**. Нажимаем на кнопку ОК. Щелчком мыши на ячейке B1 вводим исходное комплексное число. В ячейке B2 получаем значение модуля 3.605551.
3. Для вычисления аргумента комплексного числа, устанавливаем курсор в ячейку B3 и с панели инструментов ***Вставка*** – Выбираем ***Функция*** и вызываем Мастер функций. В диалоговом окне выбираем ***Категория*** – **Инженерные**, Функция – **МНИМ.АРГУМЕНТ**. Нажимаем на кнопку ОК. Щелчком мыши на ячейке B1 вводим исходное комплексное число. В ячейке B3 получаем значение модуля 0.982794.

	A	B	C
1	Комплексное число	2+3i	5+2i
2	Модуль r = |z| = МНИМ.ABS(B1)	3.60555	
3	Аргумент φ = Argz = МНИМ.АРГУМЕНТ(B1)	0.98279	
4	Тригонометрическая форма записи z = r (cosφ+isinφ)	z = 3.61(cos0.98+isin0.98)	

Для записи результата в текстовом формате как в ячейке B3, с автоматически изменяемыми числовыми значениями модуля и аргумента заданного комплексного числа, следует воспользоваться следующими двумя текстовыми функциями.

- **ТЕКСТ(значение;формат).** Функция преобразования в текст некоторого числа с заданным количеством десятичных знаков. Например, если в ячейке B5 набрать =ТЕКСТ(B3;"0.000"), то в ней будет содержаться текст 0.983, соответствующий округленному до третьего знака после запятой числу из ячейки B3.
- **СЦЕПИТЬ(текст1;текст2;…).** Эта функция позволяет объединить несколько текстовых фрагментов в одной ячейке. Например, если в ячейке B6 набрать =СЦЕПИТЬ("+isin";B5), то в ней появится текст +sin0.983. При этом сохраняется зависимость от ячейки B5 из предыдущего примера.

На вставке показан пример текстового оформления для комплексного числа в тригонометрической форме с использованием этих двух функций в ячейке B4

=СЦЕПИТЬ("z = ";ТЕКСТ(B2;"0.00");"(cos";ТЕКСТ(B3;"0.00");"+isin";ТЕКСТ(B3;"0.00");")").

Студентам рекомендуется самостоятельно создать аналогичную запись комплексного числа 5+2i с округлением числовых значений до третьего знака после запятой.

Задание 1. Найти комплексное число, сопряженное числу 2-i5; Записать комплексное число в алгебраической форме при заданных Rez=6, Imz=-2; Выделить вещественную и мнимую части комплексного числа -3+i8; Представить в тригонометрической форме z=-5+i4.

Арифметические операции.

1. Сумма $z_1+z_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2)$. – функция **МНИМ.СУММ, МНИМ.РАЗН**
2. Произведение $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$. – функция **МНИМ.ПРОИЗВЕД**
3. Деление $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$, $z_2 \neq 0$ - функция **МНИМ.ДЕЛ**
4. Возведение в степень $z^n=r^n\cos n\varphi + ir^n\sin n\varphi$ - функция **МНИМ.СТЕПЕНЬ**
5. Извлечение корня: $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi+2nk}{n}+\sqrt[n]{r}\sin\frac{\varphi+2nk}{n}$ -функция **МНИМ.КОРЕНЬ**.

Задание 2. Используя функции в MS Excel, выполнить следующие арифметические действия.

Разделить (2-i3)/(-2-i); Сложить 3+i4, 5-i2, -6+i; Извлечь корень 4+i5; Вычислить $\frac{(2+i4)(-3-i2)}{(1-i2)-(-2+i4)}$. Результаты оформить в MS Excel.

Функции комплексной переменной $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

Из большого числа функций комплексной переменной в MS Excel реализованы наиболее часто используемые на практике:

1. $e^z=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ - функция **МНИМ.EXP**
2. $\ln z=\ln\sqrt{x^2+y^2}+iarctg\frac{y}{x}$ - функция **МНИМ.LN**
3. lgz=lge·lnz - функция **МНИМ.LOG10**
4. $\log_2 z=\log_2 e \ln z$ - функция **МНИМ.LOG2**
5. SINz= sinx· chy + i*cos*x·*sh*y - функция **МНИМ.SIN**
6. *cos*z= *cos*x·*ch*y – i*sin*x· *sh*y - функция **МНИМ.COS**

Здесь гиперболические функции синуса и косинуса соответственно:

$$shy=\frac{e^y-e^{-y}}{2},\ chy=\frac{e^y+e^{-y}}{2}.$$

Задание 3.

1. Найти значение e^{3-i2}.
2. Вычислить десятичный логарифм комплексного числа 4-i.
3. Найти *ln*(2-i2)/*sin*(3+i2).
4. Вычислить *sin*(1+i2)*cos*(2-i3).
5. Построить графики функции гиперболического синуса и косинуса соответственно.

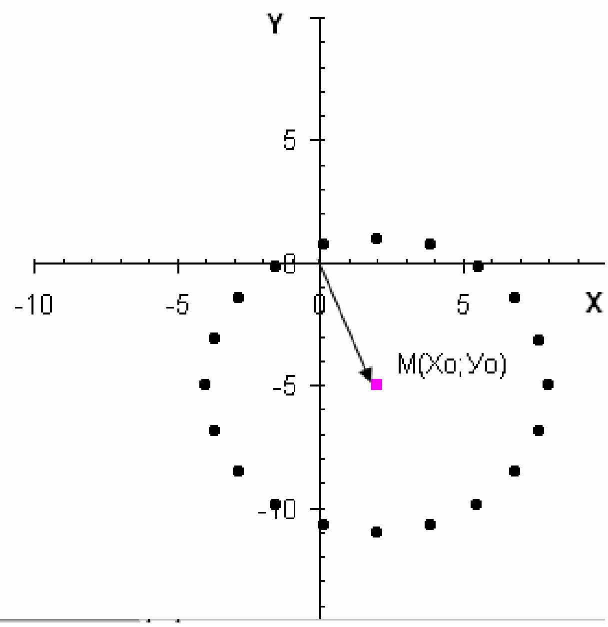
Геометрическое изображение комплексных чисел.

Комплексное число $z = x + iy$ задается парой (x;y) действительных чисел, которая может рассматриваться в качестве координат точки M(x;y) на координатной плоскости. Действительным числам соответствуют точки оси абсцисс, а чисто мнимым – точки оси ординат. Часто вместо точек на плоскости берут их радиус-векторы, т.е. векторы $\overrightarrow{OM}$, идущие из начала координат O(0;0) в точку M(x;y). Изображение комплексных чисел с помощью векторов удобно тем, что при этом получают простое геометрическое истолкование операции над ними. Можно задать положение точки, указав расстояние *r* этой точки M до точки O (полюса) и величину угла φ=∠MOX. Пару чисел (*r*, φ) называют полярными координатами точки M. Выполняются равенства $x = r\cos\varphi$; $y = \sin\varphi$. Длина радиус-вектора точки M называется модулем комплексного числа z, а полярный угол – аргументом или фазой числа и запись $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ является тригонометрической формой комплексного числа z.

Пример. Изобразить на графике множество точек z, для которых $|z - 2 + 5i| = 6$. *Решение.* Данное множество является окружностью радиуса 6 в точке M(2;-5). Для графического изображения составлена таблица значений z(x;y), модуль которого равен 6 и аргумент изменяется от 0 до 2π:

C8 fx =$C$4*COS(B8)+C$2

	A	B	C	D
1	Исходные данные			
2	Центр	Xo=	2	
3	окружности	Yo=	-5	
4	Модуль z	r=	6	
5			Координаты окружности	
6	N	f=Argz	X_i=r*COS(f)+Xo	Y_i=r*SIN(f)+Yo
7	0	0	8	-5
8	1	0.314	7.707	-3.147
9	2	0.628	6.855	-1.475
10	3	0.942	5.529	-0.148
11	4	1.256	3.858	0.705
12	5	1.57	2.005	1.000
13	6	1.884	0.151	0.708
14	7	2.198	-1.521	-0.142
15	8	2.512	-2.850	-1.467
16	9	2.826	-3.704	-3.138
17	10	3.14	-4.000	-4.990
18	11	3.454	-3.710	-6.844
19	12	3.768	-2.861	-8.517
20	13	4.082	-1.537	-9.847
21	14	4.396	0.133	-10.702
22	15	4.71	1.986	-11.000

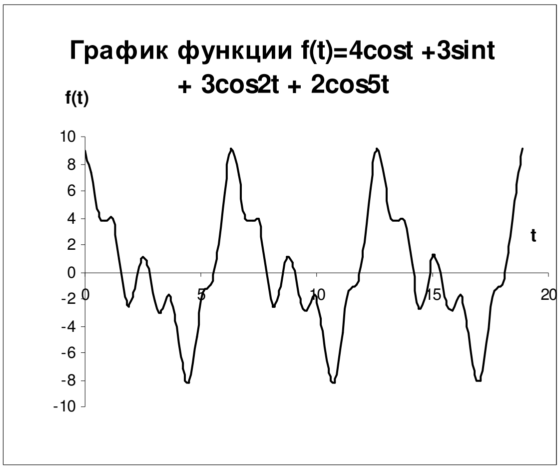


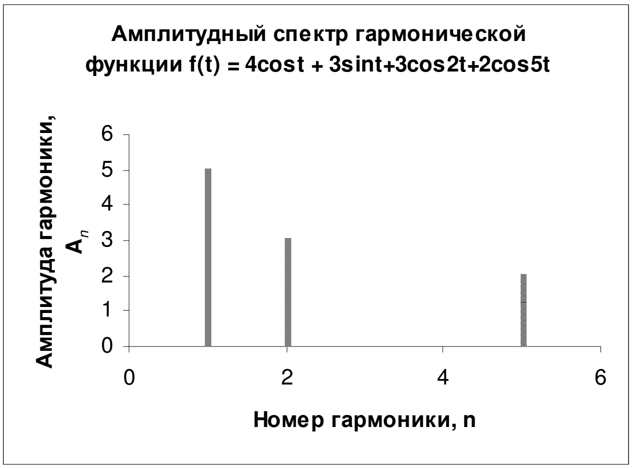
Задание. Изобразить на графике множество точек комплексной области, удовлетворяющих условию: Re z>1; Im z< -2; |z-4i|=7; |(z-1)/(z-4)|=3;|z-4+i|=5.

Лабораторная работа №17. Численный спектральный анализ и синтез.

Спектр периодической функции.

Спектром периодической функции f(t) называется совокупность ее гармонических составляющих, образующих ряд Фурье данной функции. Ряд Фурье представляет собой сумму постоянной составляющей (колебание с нулевой частотой) и гармонических колебаний (гармоник) с кратными частотами (ω, 2ω, 3ω, … и т.д.), образующих дискретный спектр. Каждая гармоника определяется тремя параметрами: амплитудой, частотой и фазой. Для графического представления амплитудного спектра функции (амплитудно-частотной характеристики спектра), каждая гармоника на диаграмме изображается перпендикуляром к оси абсцисс (ω), проведенным из точки с координатами (ω_n, A_n), здесь $\omega_n = n\omega$. Иногда спектр изображается в координатах (n, A_n), здесь n – номер гармоники. Аналогично строится и фазовый спектр функции в координатах (ω_n, φ_n) или (n, φ_n). Ниже на рисунке приведен график функции и амплитудный спектр ее гармонических составляющих: . $A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$ =5; $A_2 = \sqrt{a_2^2} = \sqrt{3^2} = 3; A_5 = \sqrt{a_5^2} = \sqrt{2^2} = 2$.





Численный спектральный анализ.

Численный спектральный анализ заключается в нахождении коэффициентов a_0, a_1, ..., a_n, ...; b_1, b_2, ..., b_n, ... (или A_1, A_2, ..., A_n, ...; φ_1, φ_2, ..., φ_n ...;) для периодической функции $y = y(t)$, заданной на отрезке [0, T] дискретными отсчетами в виде таблицы или графика, что часто является необходимым этапом исследования природных явлений. Восстановление функции по известным коэффициентам ее ряда Фурье называется Фурье-синтезом. Пусть периодическая функция $y = y(t) = y(t+T)$ задана на отрезке [0, T] в виде таблицы для N+1 отсчетов, измеренных через равные промежутки времени Δt = T/N, так что $t_k = k\Delta t$:

Номер, k	0	1	2	…	k	…	N
t	t_0	t_1	t_2	…	t_k	…	t_N
y=y(t)	y_0	y_1	y_2	…	y_k	…	y_N

Для определения спектра временной зависимости y = y(t) нужно вычислить коэффициенты ряда Фурье по формулам (1) или (4). Поскольку для функции, заданной табличным способом, невозможно аналитически вычислить интегралы в формулах (4), необходимо прибегнуть к вычислению коэффициентов Фурье по формулам численного интегрирования, например, приближенное вычисление интеграла $\int_0^T y(t)dt$ можно осуществить по формулам *правых прямоугольников*: $\int_0^T y(t)dt \approx \Delta t\ (y_1 + y_2 + \ldots + y_N)$ или *левых прямоугольников*: $\int_0^T y(t)dt \approx \Delta t\ (y_0 + y_1 + \ldots + y_{N-1})$.

Применяя эту формулу правых прямоугольников к нашей задаче, получим:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)dt \approx \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{N} y_k \Delta t = \frac{2\Delta t}{T}\sum_{k=1}^{N} y_k = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos n\omega t dt \approx \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{N} y_k \cos(n\omega k\Delta t)\Delta t = \frac{2\Delta t}{T}\sum_{k=1}^{N} y_k \cos(n\omega k\Delta t) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \cos(n\omega k\Delta t),$$ и

аналогично

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin n\omega t dt \approx \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \sin(n\omega k\Delta t) \qquad (6)$$

Для удобства вычислений из формул (6) можно исключить частоту ω и шаг Δt, используя соотношения: ω = 2π/T = 2π/(N Δt) и ω·Δt = 2π/N, что дает:

$$a_n \approx \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \cos(n\frac{2\pi}{N}k) \text{ и } b_n \approx \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \sin(n\frac{2\pi}{N}k) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Формулы (7) составляют основу процедуры численного спектрального анализа. Рациональный выбор значений N осуществляется, исходя из неравенства $\Delta t \le 0{,}4\pi/\omega_{max}$, где ω_{max} –частота наивысшей гармоники, амплитуду которой мы хотим вычислить.

Пример. Функция y(t) задана на отрезке [0,150] своими 31 значениями, измеренными в точках 0, 5, 10, 15 …140, 145, 150:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_k	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_k	14.5	14.5	13.1	11.0	9.2	8.5	9.0	10.6	12.4	13.6	13.5

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t_k	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
y_k	11.7	8.7	5.2	2.2	0.5	0.5	1.9	4.0	5.8	6.5

k	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
t_k	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
y_k	6.0	4.4	2.6	1.4	1.5	3.3	6.3	9.8	12.8	14.5

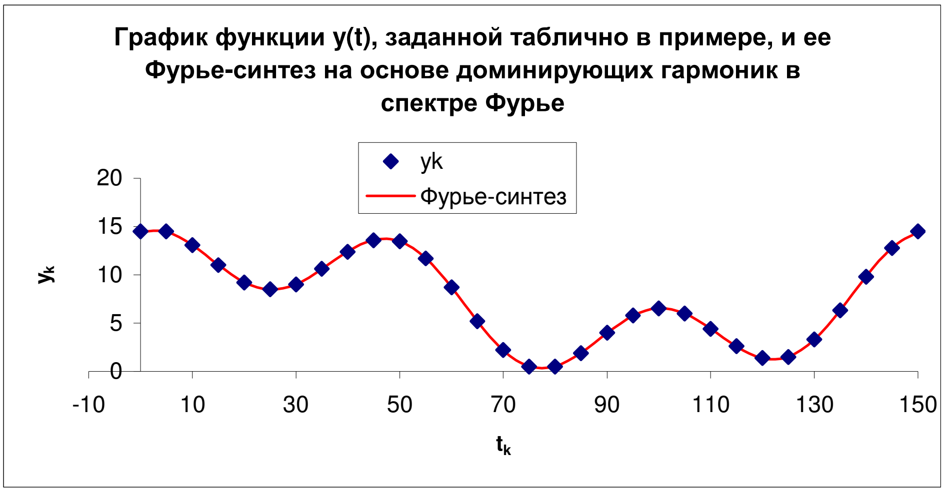
В рабочем листе MS Excel создадим таблицу исходных данных (см. рисунок). Для вычисления a_0 в ячейке E6 запишем формулу для y_k =C6 и скопируем ее в ячейки E7:E36, для вычисления a_n в ячейке F6 запишем формулу для $y_k \cos(n\frac{2\pi}{N}k)$ =$C6*COS(F$1*2*ПИ()*$A6/$B$2) и скопируем ее в диапазон G7:O36, для вычисления b_n в ячейке P6 запишем формулу для $y_k \sin(n\frac{2\pi}{N}k)$ =$C6*SIN(F$1*2*ПИ()*$A6/$B$2), и скопируем ее в диапазон Q7:Y36. В ячейках E3-Y3 вычислим суммы (7) для a_0, a_n, и b_n, например, в ячейке E3 вычислим $a_0 \approx \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k$ =(2/$B$2)*СУММ(E7:E36) и скопируем эту формулу в остальные ячейки.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	T=	150		n=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	N=	30		a_n, b_n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
3	Δt=	5		$_{k=1}\Sigma^N =$	15	2.98	0	4	0	0.02	-0	-0	0	0	-0	4.01	-0	-0	-0	0.01	-0	0.01	-0	0	-0
4				A_n=	15	5	0	4	0	0.02	0	0.01	0	0	0										
5	k	t_k	y_k																						
6	0	0	14.5		14.5	14.5	14.5	14.5	14.5	14.5	14.5	14.5	14.5	14.5	14.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	5	14.5		14.5	14.2	13.2	11.7	9.7	7.25	4.48	1.52	-1.5	-4.5	-7.3	3.01	5.9	8.52	10.8	12.6	13.8	14.4	14.4	13.8	12.6
8	2	10	13.1		13.1	12	8.77	4.05	-1.4	-6.6	-11	-13	-13	-11	-6.6	5.33	9.74	12.5	13	11.3	7.7	2.72	-2.7	-7.7	-11

В ячейках E4-O4 вычислим $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, например, в ячейке F4 вычисляется A_1= $\boxed{\text{=КОРЕНЬ(F3^2+P3^2)}}$. По данным строк 1 и 3 построим амплитудный спектр:

Полагая, что значимыми являются только те гармоники, амплитуды которых явно доминируют, выделим их: n = 0 (A_0 = 15), n = 1 (A_1 = 5), n = 3 (A_3 = 4). Используя вычисленные значения коэффициентов $a_0 = 15$, $a_1 = 5$, $b_1 = 4$, $a_3 = 3$, запишем приближенное выражение для ряда Фурье (3) заданной функции:

f(t) ≈ $\frac{15}{2} + 5\cos(\frac{2\pi}{T}t) + 4\sin(\frac{2\pi}{T}t) + 3\cos(3\frac{2\pi}{T}t)$, где T = 150 и построим график полученной функции на одной диаграмме с таблично заданной функцией из примера:



Использование встроенных средств MS Excel.

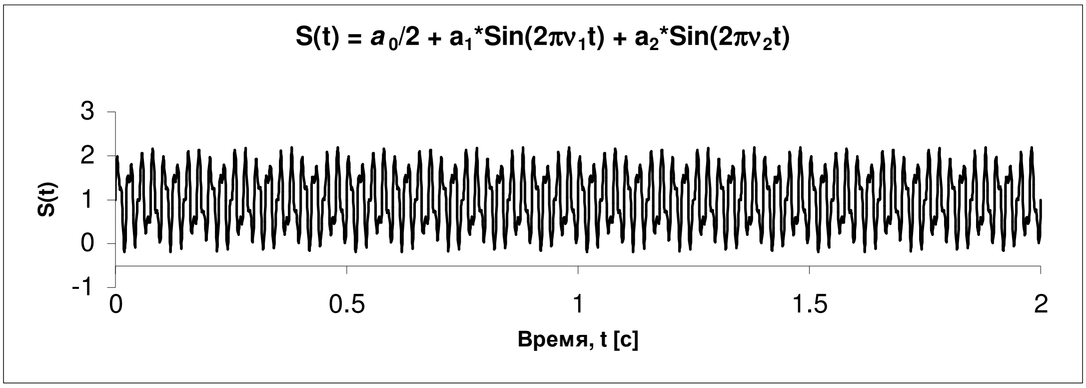
Пусть функция S(t) на интервале [0,2] является суммой гармонических составляющих вида:

$$S(t) = a_0/2 + a_1 \cdot Sin(2\pi\nu_1 t) + a_2 \cdot Sin(2\pi\,\nu_2 t)$$

где $a_0 = 2$, $a_1 = 0{,}8$, $\nu_1 = 40$ Гц, $a_2 = 0{,}4$, $\nu_2 = 90$ Гц. Построим график функции S(t) на заданном интервале изменения от t = 0 до t = 2 по набору из N = 1024 дискретных значений с помощью MS Excel. Заполним таблицу:

A	B	C	D	E	F	G
Дано		i	t	A_1*Sin($2\pi f_1$t)	A_2*Sin($2\pi f_2$t)	S(t)
T=	2	0	0	0	0	1
ν_1=	40	1	0,001953	0,377117389	0,35728972	1,73440711
ν_2=	90	2	0,003906	0,66517569	0,321283013	1,986458702
A_0=	2	…	…	…	…	…
a_1=	0,8	…	…	…	…	…
a_2=	0,4	1022	1,996094	-0,66517569	-0,321283013	0,013541298
N=	1024	1023	1,998047	-0,377117389	-0,35728972	0,26559289
Δt=	0,001953	1024	2	-1,56819E-14	-6,27345E-15	1

Построим график полученной функции, откладывая по горизонтальной оси значения t а по вертикали значения S(t).



Пример анализа. Провести численный Фурье анализ таблично заданной функции S(t) из последнего примера, используя встроенные средства MS Excel.

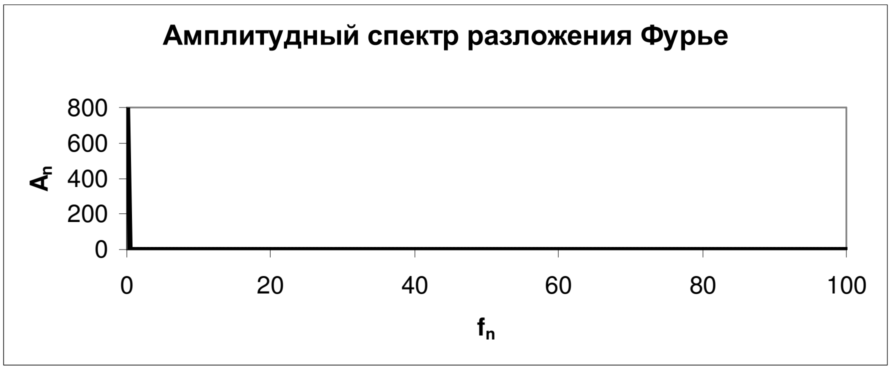
Процедура анализа Фурье включена в пакет анализа. Для выполнения преобразования необходимо

1. Ввести точки анализируемой табличной функции S(t) (в нашем случае они уже представлены в столбце G).
2. Командой **Сервис – Анализ данных** выбрать **Анализ Фурье**.
3. Задать параметры диалогового окна

- **входной интервал** значений - G2:G1026,
- **инверсия** – флажок следует убрать для прямого преобразования Фурье, или поставить для обратного преобразования,
- **выходной интервал** - ввести ссылку на верхнюю ячейку выходного диапазона, например, на ячейку H2.

Результатом анализа является столбец пар коэффициентов a_n и b_n ряда Фурье, заданных в виде комплексных чисел $a_n + b_n\boldsymbol{i}$. Максимальное число номеров гармоник $\max\{n\} = N_{гарм}$ вычисляется при этом автоматически.

Построим амплитудный и фазовый спектр разложения в ряд Фурье. Для этого в ячейки I2:I1025 введем последовательность целых чисел **n**, начиная с 0. Частоты ν_n вычислим в столбце J по формуле $\nu_n = \mathbf{n}\cdot(1/T)$, где 1/T - основная частота по условиям задачи {например, в ячейке J2 запишем =I2/$B$1 и продублируем ее в оставшиеся незаполненными ячейки столбца J). Для того, чтобы вычислить амплитуды A_n соответствующих гармоник введем команду =МНИМ.ABS(H2) (из комплекта **инженерных** функций) в ячейку K2 и продублируем ее в нижерасположенные ячейки. Построим график амплитудного спектра, откладывая по оси аргументов значения частот ν_n из столбца J, а по оси абсцисс значения амплитуд a_n из столбца K.



Для построения фазового спектра гармоник разложения Фурье функции S(t) вычислим в ячейке L2 аргумент комплексного числа =МНИМ.АРГУМЕНТ(H2) и продублируем ее в оставшиеся незаполненными ячейки столбца L. Построим график фазового спектра, откладывая по оси аргументов значения частот ν_n из столбца J, а по оси абсцисс значения фаз φ_n из столбца L.

В принципе, по вычисленным значениям коэффициентов Фурье используя процедуры **Анализ Фурье** в Excel, возможно провести Фурье-синтез. Для этого необходимо активировать опцию **инверсия**, поставив флажок в соответствующем окне.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Физматлит, 2002.
2. Исаков В.Н. Элементы численных методов. - М.: Изд. центр «Академия», 2003.
3. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М.: Изд-во МИКАП, 1994.
4. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. - М.: Физматлит, 2003.