№ 2649

$S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} u_n = \int\limits_1^{k+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$. Так как несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ сходится, то существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \int\limits_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$, т.е. исследуемый ряд сходится.

Сходимость интеграла можно доказать, просто его вычислив; можно — сравнив с $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

№ 2646

Оценим: $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \le \sqrt{1/n}$ при $0 \le x \le 1/n$. Поэтому $\int\limits_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx \le \int\limits_0^{1/n} \sqrt{1/n}\,dx = \frac{1}{n^{3/2}}$, и так как ряд с общим членом $\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то сходится и ряд с общим членом $u_n = \int\limits_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$.