ГЛАВА 11. СТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

§1. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Пусть дан линейный оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}.$$

Подпространство

$$L \subset \mathbf{X}$$

называется *инвариантным подпространством* оператора $\mathcal{A}$, если оператор $\mathcal{A}$ отображает всякий вектор x из L в вектор, также принадлежащий подпространству L:

$$\mathcal{A} : L \to L.$$

Тривиальные подпространства, т. е.

$$L = \{0\},$$

$$L = \mathbf{X},$$

являются инвариантными подпространствами любого оператора:

$$\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X},$$

$$\mathcal{A} : \{0\} \to \{0\}.$$

Пусть пространство $\mathbf{X}$ — прямая сумма подпространств L и M,

$$\mathbf{X} = L \dotplus M,$$

$\mathcal{P}$ — оператор проектирования на подпространство L параллельно подпространству M. Тогда

$$\mathcal{P}x = x \quad \forall\, x \in L,$$

$$\mathcal{P}x = 0 \quad \forall\, x \in M,$$

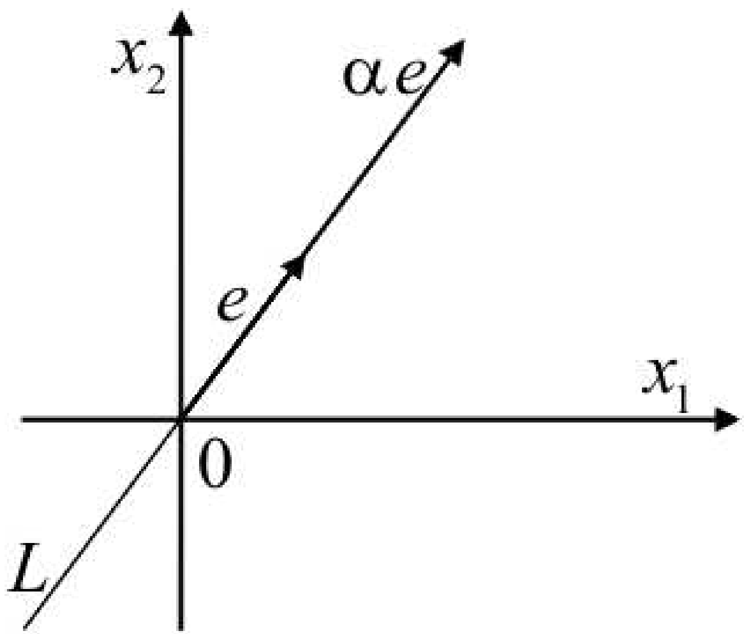
т. е. L и M — инвариантные подпространства оператора $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} : L \to L,$$

$$\mathcal{P} : M \to \{0\} \subset M.$$

.

Приведем пример оператора, не имеющего нетривиальных инвариантных подпространств.

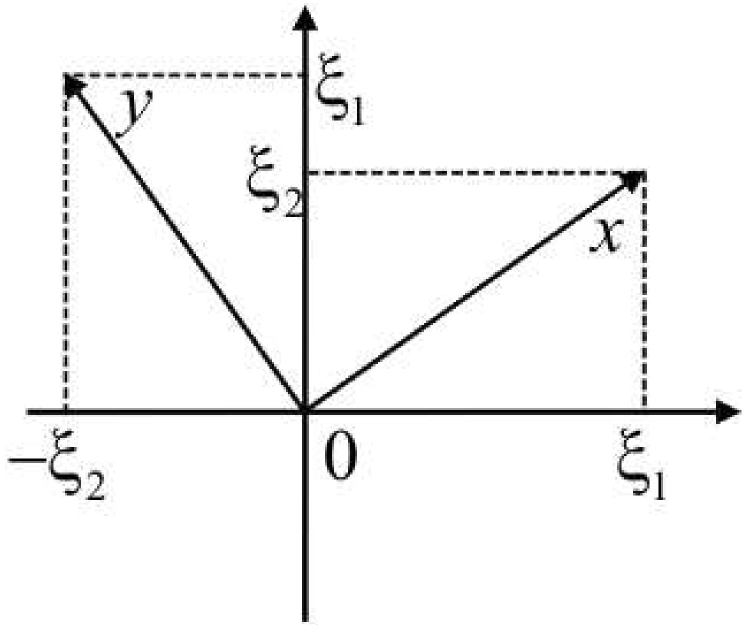


Пусть $\mathbf{X}_2$ — двумерное вещественное евклидово пространство.

Любое нетривиальное подпространство $L \subset \mathbf{X}_2$ — множество вида

$$L = \{x \in \mathbf{X}_2 : \; x = \alpha e, \; 0 \neq e \in L, \; \alpha \in \mathbb{R}\},$$

т. е. L — прямая на двумерной плоскости, проходящая через начало координат параллельно фиксированному вектору $e \in L$.



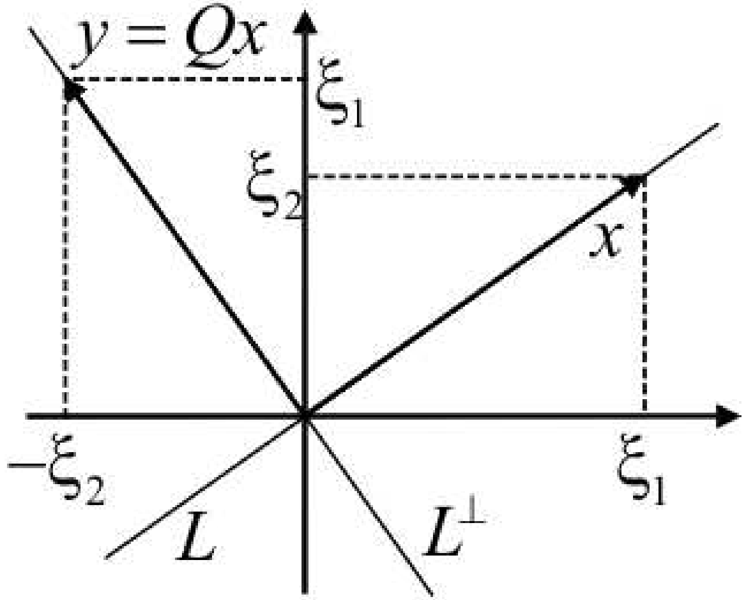
Введем в $\mathbf{X}_2$ ортонормированный базис e^1, e^2. Пусть

$$\mathcal{Q} : \mathbf{X}_2 \to \mathbf{X}_2$$

есть оператор, отображающий каждый вектор

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 \quad \text{в вектор} \quad y = -\xi_2 e^1 + \xi_1 e^2.$$

.



Векторы x и y ортогональны, поэтому ясно, что если L — нетривиальное подпространство $\mathbf{X}_2$, то для $x \in L$ вектор

$$\mathcal{Q}x \in L^{\perp}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{Q}x \notin L, \quad \text{если} \quad x \neq 0.$$

.

Если известен базис инвариантного подпространства, вид матрицы оператора существенно упрощается.

.

Именно, пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbf{X}_n$, L — подпространство $\mathbf{X}_n$, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A}$ и имеющее размерность m. Пусть

$$\{e^k\}_{k=1}^m \subset L.$$

Тогда $\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L.

Итак, $\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L,

$$\mathcal{A} : L \to L, \quad e^k \in L, \quad k = 1, \ \ldots, \ m.$$

Тогда

$$\mathcal{A}e^k \in L, \quad k = 1, \ \ldots, \ m,$$

и

$$\mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = 1, \ \ldots, \ m.$$

Для остальных векторов базиса пространства $\mathbf{X}_n$ имеем

$$e^k \notin L, \quad k = m+1, \ \ldots, \ n.$$

Тогда

$$\mathcal{A}e^k \in \mathbf{X}_n, \quad k = m+1, \ \ldots, \ n,$$

и

$$\mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = m+1, \ \ldots, \ n.$$

Равенства

$$\mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = 1, \ \ldots, \ m,$$

$$\mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = m+1, \ \ldots, \ n,$$

показывают, что матрица A_e **может быть записана как блочная** 2×2**:**

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

$A_{11}(m,m)$, $A_{22}(n-m,n-m)$ — **квадратные матрицы,**

$0(n-m,m)$ — **нулевая матрица,**

$A_{12}(m,n-m)$ — **прямоугольная матрица.**

Еще большее упрощение матрицы A_e достигается, когда пространство $\mathbf{X}_n$ представимо в виде прямой суммы инвариантных подпространств L и M оператора $\mathcal{A}$, т. е.

$$\mathbf{X}_n = L \dotplus M \quad (L \cap M = \{0\})$$

и базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ пространства $\mathbf{X}_n$ выбран так, что векторы $\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L. Следовательно, векторы $\{e^k\}_{k=m+1}^n$ — базис подпространства M.

.

Тогда

$$L \ni \mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = 1, \ \ldots, \ m,$$

$$M \ni \mathcal{A}e^k = \sum_{j=m+1}^{n} a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = m+1, \ \ldots, \ n.$$

т. е. матрица A_e принимает блочно диагональный вид

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11}(m,m)$, $A_{22}(n-m, n-m)$ — квадратные матрицы.

.

Очевидно, верно и обратное, а именно, если матрица оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

в некотором базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$ имеет блочную структуру вида

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11}(m,m)$, $A_{22}(n-m,n-m)$ — квадратные матрицы, то

$$\mathbf{X}_n = L \dotplus M \quad (L \cap M = \{0\}),$$

$\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L,

$\{e^k\}_{k=m+1}^n$ — базис подпространства M.

Вообще говоря, и подпространства L и M могут распадаться на прямые суммы инвариантных подпространств меньшей размерности. Тогда количество блоков, стоящих на диагонали матрицы

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

будет увеличиваться, а их размеры будут уменьшаться.

Наиболее простым является случай, когда пространство $\mathbf{X}_n$ может быть представлено в виде прямой суммы n <u>одномерных</u> инвариантных подпространств оператора $\mathcal{A}$. Тогда матрица A_e становится диагональной:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Однако, такое представление возможно лишь для некоторых специальных классов операторов.

<u>Лемма.</u> Пусть

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

есть невырожденный оператор, а

$$L \subset \mathbf{X}_n$$

есть инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$. Тогда для любого $x \in L$ найдется, и при том только один, вектор $y \in L$ такой, что

$$\mathcal{A}y = x.$$

.

Доказательство. Подпространство L инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, поэтому можно ввести в рассмотрение оператор

$$\mathcal{A}_L : L \to \ L,$$

полагая

$$\mathcal{A}_L x = \mathcal{A}x, \quad x \in L.$$

Оператор $\mathcal{A}$ не вырожден, значит, и $\mathcal{A}_L$ не вырожден. Действительно, из

$$\mathcal{A}_L x = \mathcal{A} x = 0,$$

следует, что

$$x = 0,$$

а мы знаем, что однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение, тогда и только тогда, когда оператор не вырожден.

Итак, существует обратный оператор

$$\mathcal{A}_L^{-1} : L \to L,$$

следовательно, уравнение

$$\mathcal{A}_L y = x$$

при любом

$$x \in L$$

имеет единственное решение

$$y = A_L^{-1} x \in L. \ \square$$

Оператор

$$\mathcal{A}_L : L \to \ L,$$

определенный равенством

$$\mathcal{A}_L x = \mathcal{A}x, \quad x \in L,$$

называют *суженением оператора* $\mathcal{A}$ на его инвариантное подпространство L.

§2. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Говорят, что вектор $x \in \mathbf{X}_n$ есть ***собственный вектор*** оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n,$$

если $x \neq 0$ и существует число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Число λ при этом называется ***собственным числом*** оператора $\mathcal{A}$.

Говорят, что собственный вектор x *соответствует* (отвечает) собственному числу λ:

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Собственный вектор и соответствующее ему собственное число называют *собственной парой* оператора $\mathcal{A}$.

Пусть x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем

$$\mathcal{A}\alpha x = \lambda\alpha x,$$

т. е. αx — тоже собственный вектор, отвечающий λ.

Равенство

$$\mathcal{A}\alpha x = \lambda\alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

означает, что одномерное подпространство

$$L = \{y \in \mathbf{X}_n : y = \alpha x,\, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

пространства $\mathbf{X}_n$, натянутое на собственный вектор x оператора $\mathcal{A}$, инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} : L \to L.$$

Пусть λ — собственное число оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}x = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

Ядро оператора $\mathcal{A} - \lambda I$ будем обозначать через

$$L_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I)$$

и называть *собственным подпространством* оператора $\mathcal{A}$.

Понятно, что

$$L_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I) \neq \{0\},$$

действительно, всякий вектор $0 \neq x \in L_\lambda$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу λ:

$$(\mathcal{A} - \lambda I)x = 0.$$

<u>Примеры</u>

1) Для нулевого оператора всякий ненулевой вектор пространства $\mathbf{X}_n$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу, равному нулю:

$$0x = 0x \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbf{X}_n.$$

.

2) Для оператора αI, где $\alpha \in \mathbb{C}$, всякий ненулевой вектор пространства — собственный вектор, отвечающий собственному числу, равному α:

$$(\alpha I)x = \alpha x \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbf{X}_n.$$

.

3) Пусть пространство $\mathbf{X}$ есть прямая сумма

$$\mathbf{X} = L \dotplus M$$

и пусть $\mathcal{P}$ — оператор проектирования пространства $\mathbf{X}$ на подпространство L параллельно подпространству M. Тогда

$$\mathcal{P}x = x \quad \forall\, 0 \neq x \in L,$$

и

$$\mathcal{P}x = 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in M.$$

Равенство

$$\mathcal{P}x = x \quad \forall\, 0 \neq x \in L$$

означает, что все ненулевые векторы из L — собственные векторы оператора $\mathcal{P}$, отвечающие собственному числу

$$\lambda = 1.$$

.

Равенство

$$\mathcal{P}x = 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in M,$$

означает, что все ненулевые векторы из M — собственные векторы оператора $\mathcal{P}$, отвечающие собственному числу

$$\lambda = 0.$$

В <u>вещественном</u> пространстве $\mathbf{X}_n$ не всякий оператор имеет собственные векторы.

.

Например, оператор

$$\mathcal{Q} : \mathbf{X}_2 \to \mathbf{X}_2,$$

отображающий каждый вектор

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 \quad \text{в вектор} \quad y = -\xi_2 e^1 + \xi_1 e^2.$$

не имеет собственных векторов в пространстве $\mathbf{X}_2$. Действительно,

$$\mathcal{Q}x \perp x \quad \forall x \in \mathbf{X}_2,$$

а если (λ, x) — собственная пара оператора $\mathcal{Q}$, то

$$\mathcal{Q}x = \lambda x.$$

.

Теорема. Всякий оператор $\mathcal{A}$, действующий в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, имеет собственные векторы.

.

Доказательство. Достаточно убедиться, что существует

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

такое, что линейное уравнение

$$(\mathcal{A} - \lambda I)x = 0$$

имеет нетривиальное решение.

Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ некоторый базис $\mathcal{E}_n$. Пусть A_e — матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Рассмотрим уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0.$$

.

Определитель $\det(A_e - \lambda I)$ **есть полином порядка** n **относительно** λ**:**

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = c_0 + c_1\lambda + \dots + (-1)^n \lambda^n.$$

.

Поэтому уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0$$

можно записать в виде

$$c_0 + c_1\lambda + \cdots + (-1)^n\lambda^n = 0.$$

Оно имеет n корней:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ \ldots,\ \lambda_n.$$

.

Убедимся, что всякий корень λ_k уравнения

$$\det(A_e - \lambda I) = 0$$

есть собственное число оператора $\mathcal{A}$:

$$(\mathcal{A} - \lambda_k I)x = 0.$$

В самом деле, если

$$\det(A_e - \lambda_k I) = 0,$$

то

$$(A_e - \lambda_k I)\xi = 0$$

есть однородная система уравнений с вырожденной матрицей. Следовательно, она имеет нетривиальное решение.

Обозначим ненулевое решение системы

$$(A_e - \lambda_k I)\xi = 0$$

через ξ^k**. Покажем, что не равный нулю вектор**

$$x^k = \mathcal{E}_n \xi^k$$

будет решением уравнения

$$(\mathcal{A} - \lambda_k I)x^k = 0.$$

.

Действительно, из

$$A_e\xi^k = \lambda_k \xi^k, \quad \xi^k = \mathcal{E}^{-1}x^k$$

имеем

$$A_e\mathcal{E}^{-1}x^k = \lambda_k\mathcal{E}^{-1}x^k.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}A_e\mathcal{E}^{-1}x^k = \lambda_k x^k,$$

т. е.

$$\mathcal{A}x^k = \lambda_k x^k. \ \square$$

.

Упражнение. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, действующий в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, $L \neq \{0\}$ — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$. Показать, что у оператора $\mathcal{A}$ есть собственный вектор, принадлежащий L.

.

Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующие в линейном пространстве $\mathbf{X}$, называются *перестановочными*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}.$$

Лемма. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — перестановочные преобразования линейного пространства $\mathbf{X}$ и пусть

$$L_\lambda \subset \mathbf{X}$$

есть собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$. Тогда L_λ — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{B}$.

Доказательство. Пусть $x \in L_\lambda$. Тогда

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

следовательно,

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x = \lambda \mathcal{B}x,$$

но

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B},$$

поэтому

$$\mathcal{A}\mathcal{B}x = \lambda \mathcal{B}x.$$

Это означает, что вектор $\mathcal{B}x$ принадлежит подпространству L_λ. $\square$

§3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Полином

$$\det(A - \lambda I)$$

называется ***характеристическим полиномом*** матрицы A.

.

Корни характеристического полинома матрицы A

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n: \quad \det(A - \lambda_k I) = 0$$

называются ее <u>*характеристическими (собственными) числами*</u>.

Множество всех характеристических чисел матрицы A называется ее ***спектром*** и обозначается через

$$\sigma(A) = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n\}.$$

Для любого числа

$$\lambda \in \sigma(A)$$

существует вектор

$$0 \neq x \in \mathbb{C}^n$$

такой, что

$$Ax = \lambda x.$$

Вектор x называется *собственным вектором матрицы* A, соответствующим характеристическому числу λ этой матрицы.

Теорема. Характеристические полиномы, а следовательно, и спектры подобных матриц совпадают:

$$\sigma(B) = \sigma(A), \quad B = T^{-1}AT.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть T — невырожденная матрица, матрица

$$B = T^{-1}AT$$

подобна матрице A. Тогда

$$B - \lambda I = T^{-1}AT - \lambda I = T^{-1}(A - \lambda I)T.$$

Поскольку

$$\det(T^{-1}) = 1/\det(T),$$

то

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I),$$

и

$$\sigma(B) = \sigma(A). \ \Box$$

Матрицы оператора в различных базисах подобны, поэтому характеристический полином матрицы оператора и его корни не зависят от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$. Характеристический полином матрицы оператора естественно называть поэтому *характеристическим полиномом оператора*.

Характеристические числа матрицы A_e оператора $\mathcal{A}$ называются *характеристическими числами этого оператора*. Они, таким образом, являются инвариантами оператора.

.

Множество всех характеристических чисел оператора $\mathcal{A}$ (часто называемое его ***спектром***) будем обозначать через

$$\sigma(\mathcal{A}).$$

Для оператора, действующего в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, понятия характеристического числа

$$\det(A_e - \lambda I)x = 0,$$

и собственного числа

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

фактически, не различаются, и применительно к таким операторам соответствующие термины используются как синонимы.

§4. ПРИЗНАК ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Любой оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}_n$, имеет не более чем n различных собственных чисел.

<u>Теорема.</u> Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ \ldots, \lambda_p$ — попарно различные собственные числа оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n.$$

Пусть $x^1, x^2, \ \ldots, x^p$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, причем

$$\mathcal{A}x^k = \lambda_k x^k, \quad k = \ 1, \ 2, \ \ \ldots, \ p.$$

Тогда векторы $x^1, x^2, \ \ldots, x^p$ линейно независимы.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в множестве векторов

$$x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^p$$

можно указать максимальную линейно независимую подсистему. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что это — векторы

$$x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^r, \quad r < p.$$

Обозначим через L_r подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, натянутое на линейно независимые собственные векторы

$$x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^r.$$

Оно имеет размерность r и инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, т. к. любое собственное подпространство оператора является его инвариантным подпространством.

Пусть

$$\mathcal{A}_{L_r} : L_r \to L_r$$

есть сужение оператора $\mathcal{A}$ на L_r. Тогда числа

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r$$

есть собственные числа оператора $\mathcal{A}_{L_r}$. Все они различны.

Ненулевой вектор x^{r+1} линейно зависит от

$$x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^r$$

поэтому принадлежит L_r и

$$\mathcal{A}_{L_r} x^{r+1} = \mathcal{A} x^{r+1} = \lambda_{r+1} x^{r+1},$$

т. е. λ_{r+1} — собственное число оператора $\mathcal{A}_{L_r}$, но оператор

$$\mathcal{A}_{L_r} : L_r \to L_r$$

действует в пространстве размерности r и потому не может иметь больше чем r различных собственных чисел. $\square$

Если все собственные числа оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

различны, то соответствующие им собственные векторы

$$x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$$

линейно независимы и образуют <u>базис пространства</u> $\mathbf{X}_n$.

.

По построению

$$\mathcal{A}x^k = \lambda_k x^k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

значит, матрица оператора $\mathcal{A}$ с различными собственными числами

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$$

в базисе $\{x^k\}_{k=1}^n$ имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

.

<u>Пример.</u> Найдем все собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получим

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0.$$

Очевидно,

$$\lambda = 1$$

есть корень уравнения

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0.$$

Нетрудно проверить, что

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13).$$

.

Корни уравнения

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

есть

$$\lambda = 2 \pm 3i.$$

Таким образом,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 + 3i, \quad \lambda_3 = 2 - 3i$$

есть собственные числа матрицы A.

.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Значит координаты собственного вектора, отвечающего

$$\lambda_1 = 1,$$

есть решение однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 \qquad\quad + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

.

Определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому ранг матрицы системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 \qquad\quad + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

равен двум и, следовательно, эта система уравнений может иметь лишь одно линейно независимое решение.

.

Положим

$$x_3 = 1$$

и найдем x_1, x_2, решая систему уравнений

$$3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0,$$

$$x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0.$$

Получим

$$3x_1 - 5x_2 = -7,$$

$$x_1 - 5x_2 = -9,$$

следовательно,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

.

Таким образом, вектор

$$(1, 2, 1)$$

есть решение системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 \qquad\qquad + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу $\lambda_1 = 1$, есть множество векторов вида

$$c(1, 2, 1),$$

где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Значит координаты собственного вектора, отвечающего

$$\lambda_2 = 2+3i,$$

есть решение однородной системы уравнений

$$(2-3i)x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0,$$

$$x_1 - (6+3i)x_2 + 9x_3 = 0,$$

$$-4x_1 + (3-3i)x_3 = 0.$$

.

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2-3i & -5 \\ 1 & -(6+3i) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому координаты собственного вектора найдем, решая систему уравнений

$$(2-3i)x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0,$$

$$x_1 - (6+3i)x_2 + 9x_3 = 0$$

при

$$x_3 = 1.$$

Получим

$$x_1 = (3-3i)/4, \quad x_2 = (5-3i)/4.$$

.

Таким образом, множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу

$$\lambda_2 = 2 + 3i,$$

есть множество векторов вида

$$c(3 - 3i, 5 - 3i, 4),$$

где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Совершенно аналогичные вычисления показывают, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу

$$\lambda_3 = 2 - 3i,$$

есть множество векторов вида

$$c(3 + 5i, 5 + 3i, 4),$$

где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

В рассматриваемом примере все собственные числа различны. Соответствующие им собственные векторы образуют базис пространства $\mathbb{C}^3$. Это видно и из того, что определитель составленный из их координат, не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3-3i & 5-3i & 4 \\ 3+5i & 5+3i & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

.

В случае, когда характеристический полином имеет кратные корни, соответствующих им линейно независимых векторов может оказаться меньше, чем n, и они не будут базисом пространства $\mathbf{X}_n$.

Пример. Найдем все собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение есть

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

.

Система уравнений для отыскания координат собственного вектора имеет, следовательно, вид

$$
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0,\\
5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0,\\
-x_1 \qquad\qquad - x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому ранг матрицы этой системы равен двум, и линейное пространство решений системы одномерно.

.

Нетрудно видеть, что вектор

$$x = (1, 1, -1)$$

есть решение системы

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ -x_1 \qquad\quad - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, множество всех собственных векторов матрицы — это множество векторов вида

$$c(1, 1, -1),$$

где c — произвольное не равное нулю число.

.

Понятно, что собственные векторы матрицы в рассматриваемом случае не образуют базиса в пространстве $\mathbb{C}^3$.

§5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Размерность собственного подпространства оператора $\mathcal{A}$, отвечающего собственному числу λ этого оператора, называется *геометрической кратностью* собственного числа λ.

.

Кратность числа λ как корня характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$ называется *алгебраической кратностью* собственного числа λ.

.

Теорема. Для любого оператора $\mathcal{A}$, действующего в конечномерном пространстве $\mathbf{X}_n$, геометрическая кратность любого собственного числа не превосходит его алгебраической кратности.

<u>Доказательство.</u> Пусть L_{λ_0} — собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее его собственному числу λ_0,

$$\dim(L_{\lambda_0}) = m,$$

и векторы $f^1,\ f^2,\ \ldots,\ f^m$ образуют базис этого подпространства.

Дополним произвольно указанный базис

$$f^1, \quad f^2, \ \ldots, \ f^m \in L_{\lambda_0}$$

векторами

$$g^{m+1}, \quad g^{m+2}, \ \ldots, \ g^n \in \mathbf{X}_n$$

до базиса пространства $\mathbf{X}_n$.

Поскольку

$$\mathcal{A} f^k = \lambda_0 f^k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

то матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе можно представить в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

Λ_0 — диагональная матрица порядка m с числами λ_0 на диагонали.

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

значит, характеристический полином оператора A **имеет вид**

$$\det(\mathcal{A} - \lambda I) = \det((\lambda_0 - \lambda)I)\det(A_{22} - \lambda I) =$$

$$= (\lambda - \lambda_0)^m Q_{n-m}(\lambda),$$

где $Q_{n-m}(\lambda)$ **— некоторый полином порядка** $n - m$**.**

Итак,

$$\det(\mathcal{A} - \lambda I) = (\lambda - \lambda_0)^m Q_{n-m}(\lambda),$$

где $Q_{n-m}(\lambda)$ — **некоторый полином порядка** $n - m$. **Теперь совершенно очевидно, что** m **не может превосходить кратности** λ_0 **как корня уравнения**

$$\det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0. \ \square$$

§6. ОПЕРАТОРЫ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Говорят, что оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

есть оператор ***простой структуры***, если в $\mathbf{X}_n$ существует базис

$$\mathcal{E}_n = \{e^i\}_{i=1}^n,$$

все векторы которого — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}e^i = \lambda_i e^i.$$

Матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе можно записать в виде

$$A_e = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ \ldots,\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\lambda_2,\ \ \ldots,\ \lambda_k,\ \ldots,\lambda_k),$$

где каждое собственное число оператора $\mathcal{A}$

$$\lambda_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

повторяется столько раз, какова его алгебраическая кратность.

Если $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — оператор простой структуры, а

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k, \quad k \leqslant n,$$

есть все попарно различные собственные числа этого оператора,

$$L_{\lambda_i}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k,$$

соответствующие собственные подпространства оператора $\mathcal{A}$, то

$$\mathbf{X}_n = L_{\lambda_1} \dot{+} L_{\lambda_2} \dot{+} \cdots \dot{+} L_{\lambda_k}.$$

Пусть $\mathcal{P}_i$ — оператор проектирования пространства $\mathbf{X}_n$ на L_{λ_i}:

$$\mathcal{P}_i : \mathbf{X}_n \to L_{\lambda_i}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k.$$

Тогда в силу

$$\mathbf{X}_n = L_{\lambda_1} \dotplus L_{\lambda_2} \dotplus \cdots \dotplus L_{\lambda_k}$$

имеем

$$x = \mathcal{P}_1 x + \mathcal{P}_2 x + \cdots + \mathcal{P}_k x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

.

Теперь из

$$x = \mathcal{P}_1 x + \mathcal{P}_2 x + \cdots + \mathcal{P}_k x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n$$

и

$$\mathcal{P}_i x \in L_{\lambda_i}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k,$$

заключаем, что

$$\mathcal{A} x = \lambda_1 \mathcal{P}_1 x + \lambda_2 \mathcal{P}_2 x + \cdots + \lambda_k \mathcal{P}_k x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

т. е.

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathcal{P}_k.$$

Мы получили *спектральное представление оператора* $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathcal{P}_k.$$

.

Теперь из известных равенств

$$I = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \cdots + \mathcal{P}_k,$$

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathcal{P}_k$$

и

$$\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

для любого целого $j \geqslant 0$ имеем

$$\mathcal{A}^j = \lambda_1^j \mathcal{P}_1 + \lambda_2^j \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k^j \mathcal{P}_k.$$

.

Из равенств

$$\mathcal{A}^j = \lambda_1^j \mathcal{P}_1 + \lambda_2^j \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k^j \mathcal{P}_k, \quad j \geqslant 0,$$

заключаем, что, если

$$Q_m(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + \cdots + a_m t^m$$

есть произвольный полином степени $m \geqslant 0$, **то**

$$Q_m(\mathcal{A}) = Q_m(\lambda_1)\mathcal{P}_1 + Q_m(\lambda_2)\mathcal{P}_2 + \cdots + Q_m(\lambda_k)\mathcal{P}_k.$$

.

Поскольку все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ попарно различны, то можно определить базисные функции Лагранжа:

$$\Phi_j(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_{j-1})(\lambda - \lambda_{j+1})\cdots(\lambda - \lambda_k)}{(\lambda_j - \lambda_1)(\lambda_j - \lambda_2)\cdots(\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j - \lambda_k)},$$

где $j = 1, 2, \ldots, k$. Они являются полиномами степени $k-1$.

Поэтому имеем

$$\Phi_j(\mathcal{A}) = \Phi_j(\lambda_1)\mathcal{P}_1 + \Phi_j(\lambda_2)\mathcal{P}_2 + \cdots + \Phi_j(\lambda_k)\mathcal{P}_k.$$

Кроме того,

$$\Phi_j(\lambda_i) = \delta_{ji}.$$

Отсюда получаем

$$\Phi_j(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Полученную формулу

$$\mathcal{P}_j = \Phi_j(\mathcal{A}), \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k,$$

называют ***формулой Сильвестра***.

Формула Сильвестра

$$\mathcal{P}_j = \Phi_j(\mathcal{A}), \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k,$$

показывает, что каждый из операторов

$$\mathcal{P}_j = \frac{(\mathcal{A}-\lambda_1)(\mathcal{A}-\lambda_2)\cdots(\mathcal{A}-\lambda_{j-1})(\mathcal{A}-\lambda_{j+1})\cdots(\mathcal{A}-\lambda_k)}{(\lambda_j-\lambda_1)(\lambda_j-\lambda_2)\cdots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j-\lambda_k)},$$

есть полином степени $k-1$ от оператора $\mathcal{A}$, причем коэффициенты этого полинома зависят лишь от собственных чисел оператора $\mathcal{A}$.

Джеймс Джозеф Сильвестр (James Joseph Sylvester, 1814 — 1897) — английский математик.

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был оператором простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая кратность каждого собственного числа оператора $\mathcal{A}$ совпадала с его алгебраической кратностью.

<u>Упражнение.</u> Докажите эту теорему.

Упражнение. Пусть операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, действующие в пространстве $\mathbf{X}_n$, есть операторы простой структуры и пусть их характеристические полиномы совпадают. Доказать, что тогда существует невырожденный оператор $\mathcal{Q} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ такой, что

$$\mathcal{B} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1}.$$

§7. ИНВАРИАНТЫ ОПЕРАТОРА

Для любого $x \in \mathbb{C}$ справедливо разложение:

$$d(x) = |A + xI| =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + x \end{vmatrix} = x^2 + x(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$

$$= x^2 + x\,\mathrm{tr}(A) + \det(A).$$

<u>Упражнение.</u> Вычислить определитель

$$d(x) = |A + xI| = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + x \end{vmatrix} =$$

$$= x^3 + x^2 \operatorname{tr}(A) + \ ??? \ + \det(A).$$

Обозначим

$$\Delta(a^1, a^2, a^3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det(A).$$

Тогда

$$\Delta(i^1, i^2, i^3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Запишем <u>*диагональные миноры*</u> второго порядка:

$$\Delta(i^1, a^2, a^3) = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta(a^1, i^2, a^3) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta(a^1, a^2, i^3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Запишем ***диагональные миноры*** первого порядка:

$$\Delta(i^1, i^2, a^3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33},$$

$$\Delta(i^1, a^2, i^3) = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = a_{22},$$

$$\Delta(a^1, i^2, i^3) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}.$$

.

Вычислим

$$d(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix} = \Delta(a^1 + xi^1, a^2 + xi^2, a^3 + xi^3),$$

используя линейность определителя по каждому столбцу:

$$
\begin{aligned}
d(x) &= \Delta(a^1 + xi^1, a^2 + xi^2, a^3 + xi^3) = \\
&= \Delta(a^1, a^2 + xi^2, a^3 + xi^3) + x\Delta(i^1, a^2 + xi^2, a^3 + xi^3) = \\
&= \Delta(a^1, a^2, a^3+xi^3)+x\Delta(a^1, i^2, a^3+xi^3)+x[\Delta(i^1, a^2, a^3+xi^3)+x\Delta(i^1, i^2, a^3+xi^3)] = \\
&= \Delta(a^1, a^2, a^3) + x\underline{\Delta(a^1, a^2, i^3)} + x[\underline{\Delta(a^1, i^2, a^3)} + x\underline{\underline{\Delta(a^1, i^2, i^3)}}]+ \\
&+x[\underline{\Delta(i^1, a^2, a^3)} + x\underline{\underline{\Delta(i^1, a^2, i^3)}}] + x^2[\underline{\underline{\Delta(i^1, i^2, a^3)}} + x\underline{\underline{\underline{\Delta(i^1, i^2, i^3)}}}] = \\
&= \Delta(a^1, a^2, a^3) + x[\Delta(i^1, a^2, a^3) + \Delta(a^1, i^2, a^3) + \Delta(a^1, a^2, i^3)]+ \\
&+x^2[\Delta(i^1, i^2, a^3) + \Delta(i^1, a^2, i^3) + \Delta(a^1, i^2, i^3)] + x^3\Delta(i^1, i^2, i^3).
\end{aligned}
$$

Итак,

$$d(x) = \Delta(a^1, a^2, a^3) + x[\Delta(i^1, a^2, a^3) + \Delta(a^1, i^2, a^3) + \Delta(a^1, a^2, i^3)] +$$

$$+ x^2[\Delta(i^1, i^2, a^3) + \Delta(i^1, a^2, i^3) + \Delta(a^1, i^2, i^3)] + x^3\Delta(i^1, i^2, i^3) =$$

$$= \det(A) + x \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + x^2 \operatorname{tr}(A) + x^3.$$

<u>Лемма.</u> **Для любого $x \in \mathbb{C}$ справедливо разложение**

$$d(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1}x + c_n,$$

где

$$c_k = \sum_{1 \leqslant p_1 < p_2 < \dots < p_k \leqslant n} \begin{vmatrix} a_{p_1,p_1} & a_{p_1,p_2} & \dots & a_{p_1,p_k} \\ a_{p_2,p_1} & a_{p_2,p_2} & \dots & a_{p_2,p_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p_k,p_1} & a_{p_k,p_2} & \dots & a_{p_k,p_k} \end{vmatrix}, \quad k = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Суммируются все <u>***диагональные миноры***</u> **порядка k.**

В каждой сумме $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ слагаемых.

Заметим, что $c_1 = \mathrm{tr}(A)$, $c_n = \det(A)$.

<u>Доказательство.</u> Вычислим

$$d(x) = \Delta(a^1 + xi^1, a^2 + xi^2, \ldots, a^n + xi^n),$$

используя линейность определителя по каждому столбцу:

$$\begin{aligned} d(x) = {} & \Delta(a^1, a^2, \ldots, a^n) + \\ & + x(\Delta(i^1, a^2, \ldots, a^n) + \Delta(a^1, i^2, \ldots, a^n) + \cdots + \Delta(a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}, i^n)) + \\ & + x^2(\Delta(i^1, i^2, a^3 \ldots, a^n) + \cdots + \Delta(a^1, a^2, \ldots, a^{n-2}, i^{n-1}, i^n)) + \\ & + \cdots + x^n \Delta(i^1, i^2, \ldots, i^n). \end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta(a^1, a^2, \ldots, a^n) = \det(A)$, $\Delta(i^1, i^2, \ldots, i^n) = 1$.

Заменяя k столбцов в $\Delta(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ на единичные векторы с теми же номерами, мы получаем диагональный минор порядка $n-k$ матрицы A. $\square$

.

<u>Инвариантами оператора</u> $\mathcal{A}$ **называются коэффициенты**

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k(\mathcal{A}), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

полинома

$$\det(\lambda I - A_e) = \lambda^n - \mathcal{I}_1\lambda^{n-1} + \mathcal{I}_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n\mathcal{I}_n.$$

Они не зависят от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$.

По доказанной лемме имеем

$$d(x) = \det(A_e + xI) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n.$$

Тогда

$$d(-\lambda) = \det(A_e - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + c_1(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_n.$$

С другой стороны

$$\det(A_e - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A_e).$$

Следовательно,

$$(-1)^n \det(\lambda I - A_e) = (-1)^n \lambda^n + c_1(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_n.$$

Умножим обе части этого равенства на $(-1)^n$, получим

$$\det(\lambda I - A_e) = \lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n.$$

Итак,

$$\det(\lambda I - A_e) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n,$$

а по определению

$$\det(\lambda I - A_e) = \lambda^n - \mathcal{I}_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \mathcal{I}_n.$$

Следовательно, инварианты оператора равны суммам диагональных миноров его матрицы:

$$\mathcal{I}_k(\mathcal{A}) = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n} \begin{vmatrix} a^e_{i_1,i_1} & a^e_{i_1,i_2} & \dots & a^e_{i_1,i_k} \\ a^e_{i_2,i_1} & a^e_{i_2,i_2} & \dots & a^e_{i_2,i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^e_{i_k,i_1} & a^e_{i_k,i_2} & \dots & a^e_{i_k,i_k} \end{vmatrix}, \quad k = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

в частности,

$$\mathcal{I}_1(\mathcal{A}) = \operatorname{tr}(A_e), \quad \mathcal{I}_n(\mathcal{A}) = \det(A_e).$$

Вспомним формулы Вьета для коэффициентов полинома $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ и его корней α_1, α_2, $\ldots$, α_n:

$$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),$$

$$a_0 = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

Для полинома

$$\det(\lambda I - A_e) = \lambda^n - \mathcal{I}_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \mathcal{I}_n$$

имеем

$$\mathcal{I}_1(\mathcal{A}) = \mathrm{tr}(A_e), \quad \mathcal{I}_n(\mathcal{A}) = \det(A_e).$$

Следовательно,

$$\mathrm{tr}(A_e) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \quad \det(A_e) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

где λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n — характеристические числа оператора $\mathcal{A}$.

Всякая квадратная матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ порождает линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$. Ей можно отнести величины $\mathcal{I}_k(A)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, вычисляемые по формулам

$$\mathcal{I}_k(A) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \ldots & a_{i_1,i_k} \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \ldots & a_{i_2,i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k,i_1} & a_{i_k,i_2} & \ldots & a_{i_k,i_k} \end{vmatrix}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

Эти величины не меняются ни при каком подобном преобразовании матрицы A и потому называются *инвариантами матрицы* A.

<u>Теорема.</u> Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, действующий в конечномерном пространстве $\mathbf{X}_n$. Тогда существует положительное число ε_0 такое, что если $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и $\varepsilon \neq 0$, то оператор $\mathcal{A} + \varepsilon I$ обратим.

.

<u>Доказательство.</u> Имеем

$$\det(\mathcal{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

где λ_k — характеристическое число оператора $\mathcal{A}$. Пусть λ_l — наименьшее по модулю, отличное от нуля число. Обозначим

$$\varepsilon_0 = |\lambda_l|.$$

Характеристические числа оператора

$$\mathcal{A} + \varepsilon I$$

имеют вид

$$\lambda_k + \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon \neq 0$, удовлетворяющего условию

$$|\varepsilon| < \varepsilon_0$$

ни одно из чисел $\lambda_k + \varepsilon$ не равно нулю, значит оператор $\mathcal{A} + \varepsilon I$ обратим. $\square$

.

Величину $\mathrm{tr}(A_e)$ называют ***следом оператора*** $\mathcal{A}$ и обозначают через $\mathrm{tr}(\mathcal{A})$. Отметим следующие полезные формулы:

$$\mathrm{tr}(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}) = \alpha\,\mathrm{tr}(\mathcal{A}) + \beta\,\mathrm{tr}(\mathcal{B}),$$

$$\mathrm{tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathrm{tr}(\mathcal{B}\mathcal{A}).$$

Здесь $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — произвольные линейные операторы, действующие в конечномерном линейном пространстве, α, β — любые числа.

Первое равенство непосредственно вытекает из определения следа оператора, второе — легко проверяется прямыми вычислениями величин, записанных в его правой и левой частях.

§9. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРА В ВЕЩЕСТВЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует в <u>вещественном</u> пространстве $\mathbf{X}_n$. Матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе вещественна. Уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0$$

есть алгебраическое уравнение порядка n с <u>вещественными</u> коэффициентами. Оно может иметь как вещественные, так и комплексные корни.

Если λ — вещественный корень уравнения

$$\det(A_e - \lambda I) = 0,$$

то, система уравнений

$$(A_e - \lambda I)\xi = 0$$

имеет нетривиальное вещественное решение ξ, и для вектора

$$x = \mathcal{E}_n \xi$$

выполнено равенство

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

т. е. x — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$.

Таким образом, все <u>вещественные</u> характеристические числа матрицы A_e — собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

.

Если λ — комплексный корень уравнения

$$\det(A_e - \lambda I) = 0,$$

то уравнение

$$A_e\xi = \lambda\xi$$

не может иметь вещественных нетривиальных решений ξ.

В случае <u>вещественного</u> пространства $\mathbf{X}_n$ все характеристические числа оператора $\mathcal{A}$ разбиваются на два класса.

<u>Вещественные</u> характеристические числа можно назвать собственными числами, поскольку каждому из них соответствует собственный вектор.

Но никакому <u>комплексному</u> характеристическому числу оператора не соответствует ни один собственный вектор.

.

Значит, если все корни уравнения

$$\det(A_e - \lambda I) = 0,$$

комплексные числа, то оператор $\mathcal{A}$ не имеет собственных векторов.

.

Таким образом, оператор, действующий в вещественном пространстве, может не иметь одномерных собственных подпространств, но он имеет двумерные собственные подпространства.

Каждому комплексному характеристическому числу матрицы A_e соответствует двумерное инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$.

Действительно, если $\lambda = \alpha + i\beta$ — комплексное характеристическое число оператора, то

$$\det(A_e - \lambda I) = 0$$

и система уравнений

$$(A_e - \lambda I)\xi = 0$$

имеет нетривиальное комплексное решение

$$\xi = \zeta + i\eta.$$

Поясним, что ζ и η — ненулевые вещественные векторы из $\mathbb{R}^n$.

.

Более подробная запись системы

$$A_e \xi = \lambda \xi$$

с учетом того, что A_e — вещественная матрица,

$$\xi = \zeta + i\eta,$$

$$\lambda = \alpha + i\beta,$$

приводит к следующим равенствам:

$$A_e \zeta + i A_e \eta = (\alpha + i\beta)(\zeta + i\eta) = \alpha\zeta - \beta\eta + i(\beta\zeta + \alpha\eta).$$

.

Приравнивая в

$$A_e\zeta + iA_e\eta = \alpha\zeta - \beta\eta + i(\beta\zeta + \alpha\eta)$$

вещественные и мнимые части, получим

$$A_e\zeta = \alpha\zeta - \beta\eta,$$

$$A_e\eta = \beta\zeta + \alpha\eta.$$

Полагая

$$x = \mathcal{E}_n \zeta, \quad y = \mathcal{E}_n \eta,$$

получим равенства

$$\mathcal{A}x = \alpha x - \beta y,$$

$$\mathcal{A}y = \beta x + \alpha y,$$

эквивалентные

$$A_e \zeta = \alpha \zeta - \beta \eta,$$

$$A_e \eta = \beta \zeta + \alpha \eta.$$

Образуем подпространство L, натянутое на векторы x, y. Пусть

$$z \in L.$$

Это означает, что

$$z = \gamma x + \delta y$$

для некоторых γ, $\delta \in \mathbb{R}$.

.

Покажем, что

$$\mathcal{A}z \in L.$$

В самом деле,

$$z = \gamma x + \delta y,$$

$$\mathcal{A}x = \alpha x - \beta y,$$

$$\mathcal{A}y = \beta x + \alpha y.$$

Значит

$$\mathcal{A}z = \mathcal{A}(\gamma x + \delta y) = \gamma \mathcal{A}x + \delta \mathcal{A}y = \gamma(\alpha x - \beta y) + \delta(\beta x + \alpha y) =$$
$$= (\alpha\gamma + \beta\delta)x + (\alpha\delta - \beta\gamma)y \in L.$$

Итак, L — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$.

.

Покажем, что векторы x, y, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathcal{A}x = \alpha x - \beta y,$$

$$\mathcal{A}y = \beta x + \alpha y$$

линейно независимы, т. е. L — двумерное подпространство.

Предположим, что x, y линейно зависимые ненулевые векторы вещественного пространства, тогда $x = cy$, $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$, и из

$$\mathcal{A}x = \alpha x - \beta y,$$

$$\mathcal{A}y = \beta x + \alpha y$$

получим

$$c\mathcal{A}y = \alpha c y - \beta y,$$

$$\mathcal{A}y = \beta c y + \alpha y.$$

Умножим второе равенство на c и вычтем из него первое,

$$c\mathcal{A}y = \alpha c y - \beta y,$$

$$c\mathcal{A}y = \beta c^2 y + \alpha c y,$$

получим $\beta(1 + c^2)y = 0$, чего не может быть, т. к. $\beta \neq 0$, $y \neq 0$, $c^2 > 0$.

.

Упражнение Пусть $\mathbf{X}_n$ — вещественное евклидово пространство. Показать, что в любом подпространстве

$$L_m \subset \mathbf{X}_n, \quad \text{размерности} \quad m \geqslant 2,$$

инвариантном относительно оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n,$$

оператор $\mathcal{A}$ имеет либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство.