



Строительные материалы и изделия

Construction Materials and Products








ISSN
2618-7183

journal homepage: <https://bstu-journals.ru>

DOI: 10.58224/2618-7183-2023-6-2-104-120



Метод расчета массивных элементов конструкций на прочность в общем случае их напряженно-деформированного состояния (параметрические уравнения поверхности прочности)

Новоселов О.Г.*¹, Сабитов Л.С.¹, Сибгатуллин К.Э.¹, Сибгатуллин Э.С.¹,
Клюев А.В.², Клюев С.В.², Шорстова Е.С.²

¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия,

² Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, Россия

**Ответственный автор E-mail: OIGNovoselov@mail.ru*

Аннотация: в механике деформируемого твердого тела различают стержни (один габаритный размер которых существенно больше двух других), пластины и оболочки (один размер которых существенно меньше двух других), массивы (все три размера которых имеют одинаковый порядок). Сложность соответствующих расчетных моделей растет в том же порядке: относительно простыми являются расчетные модели для стержней и стержневых систем, наиболее сложными – расчетные модели для массивных элементов конструкций.

В работе получены параметрические уравнения поверхности прочности в пространстве внутренних силовых факторов (ВСФ) – 9-ти сил и 9-ти моментов для однородных анизотропных тел. Как частные случаи приведены аналогичные уравнения для изотропных тел, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, для изотропных тел, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Предложен алгоритм А1 построения искомых сечений поверхностей прочности, заданных параметрическими уравнениями. Предложен алгоритм А2 определения коэффициентов запаса по несущей способности, оставаясь в пространстве ВСФ. Приведены некоторые примеры расчетов, произведенные с использованием предложенных уравнений, алгоритмов и составленных на их основе соответствующих программ для ЭВМ.

Предлагаемый метод расчета массивных тел позволяет реалистичнее оценивать несущую способность массивных элементов конструкций.

Ключевые слова: массивные тела, поверхность прочности, пространство сил и моментов, параметрические уравнения, коэффициент запаса несущей способности, сечения предельной поверхности прочности.

Для цитирования: Новоселов О.Г., Сабитов Л.С., Сибгатуллин К.Э., Сибгатуллин Э.С., Клюев А.В., Клюев С.В., Шорстова Е.С. Метод расчета массивных элементов конструкций на прочность в общем случае их напряженно-деформированного состояния (параметрические уравнения поверхности прочности) // Строительные материалы и изделия. 2023. Том 6. № 2. С. 104 – 120. DOI: 10.58224/2618-7183-2023-6-2-104-120

Method for calculating the strength of massive structural elements in the general case of their stress-strain state (parametric equations of the strength surface).

Novoselov O.G.*¹, Sabitov L.S.¹, Sibgatullin K.E.¹, Sibgatullin E.S.¹,
Klyuev A.V.², Klyuev S.V.², Shorstova E.S.²

¹ Kazan (Volga region) Federal University, Russia,

² Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Russia

*Corresponding author E-mail: OIGNovoselov@mail.ru

Abstract: in the mechanics of a deformable solid, there are rods (one overall dimension of which is significantly larger than the other two), plates and shells (one dimension of which is significantly smaller than the other two), arrays (all three dimensions of which are of the same order). The complexity of the corresponding calculation models grows in the same order: the calculation models for rods and rod systems are relatively simple, the most complex are the calculation models for massive structural elements.

In the work, parametric equations of the strength surface in the space of internal force factors (IFF) are obtained – 9 forces and 9 moments for homogeneous anisotropic bodies. As special cases, similar equations are given for isotropic bodies that resist tension and compression differently, for isotropic bodies that equally resist tension and compression. Algorithm A1 for constructing the desired sections of strength surfaces given by parametric equations is proposed. Algorithm A2 is proposed for determining the safety factors for the bearing capacity, remaining in the space of the IFF. Some examples of calculations made using the proposed equations, algorithms and the corresponding computer programs compiled on their basis are given.

The proposed method for calculating massive bodies allows a more realistic assessment of the bearing capacity of massive structural elements.

Keywords: massive bodies, strength surface, space of forces and moments, parametric equations, load-carrying capacity factor, sections of ultimate strength surface.

Please cite this article as: Novoselov O.G., Sabitov L.S., Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S., Klyuev A.V., Klyuev S.V., Shorstova E.S. Method for calculating the strength of massive structural elements in the general case of their stress-strain state (parametric equations of the strength surface). Construction Materials and Products. 2023. 6 (2). P. 104 – 120. DOI: 10.58224/2618-7183-2023-6-2-104-120

ВВЕДЕНИЕ

Метод расчета элементов конструкций по предельному равновесию берет свое начало с работы А.А. Гвоздева [1]. Применительно к стержневым системам этот метод был развит, в частности, в работах А.Р. Ржаницына [2] и А.А. Чираса [3], Э.С. Сибгатуллина, К.Э. Сибгатуллина [4-7], для пластин и оболочек – в работах Э.С. Сибгатуллина, К.Ф. Исламова [8-11] и др.

В настоящей работе предложены применения этого метода для массивных элементов конструкций в общем случае их напряженно-деформированного состояния (НДС). Рассматриваются однородные материалы. В работе Г.А. Гениева, А.С. Курбатова [12] были разработаны условия прочности бетона при объемном напряженном состоянии, которые имеют хорошую сходимость с эмпирическими исследованиями. В частности, эти результаты были использованы для проверки достоверности расчетных результатов, получаемых с использованием предлагаемого нами метода.

МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ

1. Вывод параметрических уравнений поверхностей прочности в пространстве ВСФ для однородных анизотропных массивных тел

Уравнение поверхности прочности для однородного материала в пространстве напряжений $\sigma_{ik} = (i, k = \overline{1,3})$ примем в виде

$$\Phi(\vec{\sigma}) \equiv \vec{\sigma}^T A \vec{\sigma} + 2\vec{B}^T \vec{\sigma} - 1 = 0 \quad (1)$$

Здесь $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_6\}^T$ – «вектор» напряжений; $A = \|a_{ik}\|$ – симметрическая матрица $(i, k = \overline{1,6})$, $\vec{B} = \{b_1, \dots, b_6\}^T$; индекс T означает транспонирование. Компоненты матрицы A и вектора \vec{B} подлежат определению на основе экспериментальных данных. Критерий прочности (1) является частным случаем критерия Малмейстера [13].

Используя ассоциированный с условием (1) закон изменения скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_i$ [14], находим:

$$\dot{\epsilon}_i = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} \equiv 2\lambda(\vec{A}_i \vec{\sigma} + b_i), \quad i = \overline{1,6}. \quad (2)$$

Здесь $\lambda(\dot{\epsilon}_i) \geq 0$; \vec{A}_i – i -я строка матрицы A ; b_i – i -й элемент вектора \vec{B} .

Решая систему уравнений (2) относительно σ_i , находим:

$$\sigma_i = [(1/2\lambda) \sum_{k=1}^6 \delta_{ik} \dot{\epsilon}_k - \Delta_i] / \Delta. \quad (3)$$

Здесь $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ – алгебраические дополнения элемента a_{ik} матрицы A ; Δ – детерминант матрицы A ; Δ_i – детерминант, который получен при замене i -го столбца Δ на вектор \vec{B} .

Подставляя (3) в (1), получаем:

$$\lambda^2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 \delta_{ik} \dot{\epsilon}_i \dot{\epsilon}_k / 4(\sum_{i=1}^6 b_i \Delta_i + \Delta). \quad (4)$$

Далее рассматриваем элемент тела в форме куба с ребрами единичной длины. Используем подвижную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, оси которой параллельны ребрам куба, сохраняют свои направления, а ее начало совпадает с центром рассматриваемой грани куба. Примем следующие гипотезы кинематического характера:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\chi}_{21}\xi_2 - \dot{\chi}_{31}\xi_3; & \dot{\epsilon}_{12} &= 1/2(\dot{\gamma}_{12} - \dot{\chi}_{11}\xi_3 + \dot{\chi}_{22}\xi_3); \\ \dot{\epsilon}_{22} &= \dot{\epsilon}_{22} - \dot{\chi}_{12}\xi_3 + \dot{\chi}_{32}\xi_1; & \dot{\epsilon}_{23} &= 1/2(\dot{\gamma}_{23} - \dot{\chi}_{22}\xi_1 + \dot{\chi}_{33}\xi_1); \\ \dot{\epsilon}_{33} &= \dot{\epsilon}_{33} + \dot{\chi}_{13}\xi_2 - \dot{\chi}_{23}\xi_1; & \dot{\epsilon}_{31} &= 1/2(\dot{\gamma}_{31} - \dot{\chi}_{33}\xi_2 + \dot{\chi}_{11}\xi_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее между двойными и одинарными индексами соответствующих величин установлены следующие зависимости: 11→1; 22→2; 33→3; 12→4; 23→5; 31→6.

Согласно (5) грани куба перемещаются поступательно, поворачиваются относительно соответствующих осей ξ_1, ξ_2, ξ_3 , а также испытывают сдвиги. Скорости обобщенных перемещений $\dot{\epsilon}_{ik}, \dot{\chi}_{ik}, \dot{\gamma}_{ik}$ остаются постоянными в пределах рассматриваемой грани куба.

Подставив (5) в (3), получаем:

$$\sigma_i = \frac{1}{2\lambda\Delta} \left\{ \sum_{k=1}^6 \delta_{ik} \dot{\epsilon}_k + \xi_1 [\delta_{i2}\dot{\chi}_{32} - \delta_{i3}\dot{\chi}_{23} + 1/2\delta_{i5}(\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + \xi_2 [\delta_{i1}\dot{\chi}_{21} + \delta_{i3}\dot{\chi}_{13} + 1/2\delta_{i6}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + \xi_3 [-\delta_{i1}\dot{\chi}_{31} - \delta_{i2}\dot{\chi}_{12} + 1/2\delta_{i4}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] \right\} - \Delta_i / \Delta. \quad (6)$$

Здесь $i = \overline{1,6}$; приняты обозначения: $\dot{e}_1 \equiv \dot{e}_{11}; \dot{e}_2 \equiv \dot{e}_{22}; \dot{e}_3 \equiv \dot{e}_{33}; \dot{e}_4 \equiv 1/2 \dot{\gamma}_{12}; \dot{e}_5 \equiv 1/2 \dot{\gamma}_{23}; \dot{e}_6 \equiv 1/2 \dot{\gamma}_{31}$.

Подставив (5) в (4), получим:

$$\lambda^2 = \frac{1}{s_0} \left[P_e + 2 \left(\xi_1 P_{eX}^{\xi_1} + \xi_2 P_{eX}^{\xi_2} + \xi_3 P_{eX}^{\xi_3} + \xi_1 \xi_2 P_X^{\xi_1 \xi_2} + \xi_2 \xi_3 P_X^{\xi_2 \xi_3} + \xi_3 \xi_1 P_X^{\xi_3 \xi_1} \right) + \xi_1^2 P_X^{\xi_1} + \xi_2^2 P_X^{\xi_2} + \xi_3^2 P_X^{\xi_3} \right]. \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_e &= \delta_{11} \dot{e}_{11}^2 + \delta_{22} \dot{e}_{22}^2 + \delta_{33} \dot{e}_{33}^2 + 1/4 (\delta_{44} \dot{\gamma}_{12}^2 + \delta_{55} \dot{\gamma}_{23}^2 + \delta_{66} \dot{\gamma}_{31}^2) \\ &\quad + 2 \{ \delta_{12} \dot{e}_{11} \dot{e}_{22} + \delta_{23} \dot{e}_{22} \dot{e}_{33} + \delta_{31} \dot{e}_{33} \dot{e}_{11} \\ &\quad + 1/2 [\dot{e}_{11} (\delta_{14} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{15} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{16} \dot{\gamma}_{31}) + \dot{e}_{22} (\delta_{24} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{25} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{26} \dot{\gamma}_{31}) \\ &\quad + \dot{e}_{33} (\delta_{34} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{35} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{36} \dot{\gamma}_{31})] + 1/4 (\delta_{45} \dot{\gamma}_{12} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{56} \dot{\gamma}_{23} \dot{\gamma}_{31} + \delta_{64} \dot{\gamma}_{31} \dot{\gamma}_{12}) \} \\ P_{eX}^{\xi_1} &= \dot{e}_{11} [\delta_{12} \dot{\chi}_{32} - \delta_{13} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{15} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + \dot{e}_{22} [\delta_{22} \dot{\chi}_{32} - \delta_{23} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{25} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] \\ &\quad + \dot{e}_{33} [\delta_{32} \dot{\chi}_{32} - \delta_{33} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{35} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + 1/2 [\dot{\chi}_{32} (\delta_{24} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{25} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{26} \dot{\gamma}_{31}) \\ &\quad + \dot{\chi}_{23} (\delta_{43} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{53} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{63} \dot{\gamma}_{31})] + 1/4 (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) (\delta_{45} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{55} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{65} \dot{\gamma}_{31}) \\ P_{eX}^{\xi_2} &= \dot{e}_{11} [\delta_{11} \dot{\chi}_{21} + \delta_{13} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{16} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + \dot{e}_{22} [\delta_{12} \dot{\chi}_{21} + \delta_{23} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{26} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] \\ &\quad + \dot{e}_{33} [\delta_{13} \dot{\chi}_{21} + \delta_{33} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{36} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + 1/2 [\dot{\chi}_{21} (\delta_{14} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{15} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{16} \dot{\gamma}_{31}) + \\ &\quad + \dot{\chi}_{13} (\delta_{34} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{35} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{36} \dot{\gamma}_{31})] + 1/4 (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) (\delta_{46} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{56} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{66} \dot{\gamma}_{31}) \\ P_{eX}^{\xi_3} &= \dot{e}_{11} [1/2 \delta_{14} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) - \delta_{11} \dot{\chi}_{31} - \delta_{12} \dot{\chi}_{12}] + \dot{e}_{22} [1/2 \delta_{24} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) - \delta_{12} \dot{\chi}_{31} - \delta_{22} \\ &\quad + \dot{e}_{33} [1/2 \delta_{34} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) - \delta_{13} \dot{\chi}_{31} - \delta_{23} \dot{\chi}_{12}] - 1/2 [\dot{\chi}_{31} (\delta_{14} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{15} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{16} \dot{\gamma}_{31}) + \\ &\quad + \dot{\chi}_{12} (\delta_{24} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{25} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{26} \dot{\gamma}_{31})] + 1/4 (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) (\delta_{44} \dot{\gamma}_{12} + \delta_{45} \dot{\gamma}_{23} + \delta_{46} \dot{\gamma}_{31}) \\ P_X^{\xi_1 \xi_2} &= \dot{\chi}_{32} (\delta_{12} \dot{\chi}_{21} + \delta_{23} \dot{\chi}_{13}) - \dot{\chi}_{23} (\delta_{13} \dot{\chi}_{21} + \delta_{33} \dot{\chi}_{13}) + 1/2 (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) (\delta_{15} \dot{\chi}_{21} + \delta_{35} \dot{\chi}_{13}) \\ &\quad + 1/2 (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) (\delta_{26} \dot{\chi}_{32} + \delta_{36} \dot{\chi}_{23}) + 1/4 \delta_{56} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) \\ P_X^{\xi_2 \xi_3} &= -\dot{\chi}_{21} (\delta_{11} \dot{\chi}_{31} + \delta_{12} \dot{\chi}_{12}) - \dot{\chi}_{13} (\delta_{13} \dot{\chi}_{31} + \delta_{23} \dot{\chi}_{12}) + 1/2 (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) (\delta_{14} \dot{\chi}_{21} + \delta_{34} \dot{\chi}_{13}) \\ &\quad + 1/2 (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{11}) (\delta_{16} \dot{\chi}_{31} + \delta_{26} \dot{\chi}_{12}) + 1/4 \delta_{46} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{22}) (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{11}) \\ P_X^{\xi_3 \xi_1} &= -\dot{\chi}_{32} (\delta_{12} \dot{\chi}_{31} + \delta_{22} \dot{\chi}_{12}) + \dot{\chi}_{23} (\delta_{13} \dot{\chi}_{31} + \delta_{23} \dot{\chi}_{12}) + 1/2 (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{33}) (\delta_{15} \dot{\chi}_{31} + \delta_{25} \dot{\chi}_{12}) \\ &\quad + 1/2 (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) (\delta_{24} \dot{\chi}_{32} - \delta_{34} \dot{\chi}_{23}) + 1/4 \delta_{45} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{22}) (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{33}) \\ P_X^{\xi_1} &= \delta_{22} \dot{\chi}_{32}^2 - 2 \delta_{23} \dot{\chi}_{32} \dot{\chi}_{23} + \delta_{33} \dot{\chi}_{23}^2 + 1/4 \delta_{55} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{33})^2 + (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) (\delta_{25} \dot{\chi}_{32} - \delta_{35} \dot{\chi}_{23}) \\ P_X^{\xi_2} &= \delta_{11} \dot{\chi}_{21}^2 + 2 \delta_{13} \dot{\chi}_{21} \dot{\chi}_{13} + \delta_{33} \dot{\chi}_{13}^2 + 1/4 \delta_{66} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})^2 + (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) (\delta_{16} \dot{\chi}_{21} + \delta_{36} \dot{\chi}_{13}) \\ P_X^{\xi_3} &= \delta_{11} \dot{\chi}_{31}^2 + 2 \delta_{12} \dot{\chi}_{31} \dot{\chi}_{12} + \delta_{22} \dot{\chi}_{12}^2 + 1/4 \delta_{44} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{22})^2 + (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{22}) (\delta_{14} \dot{\chi}_{31} + \delta_{24} \dot{\chi}_{12}) \end{aligned}$$

Внутренние силы и моменты, действующие на грани куба (рис.1), определяем по формулам (9):

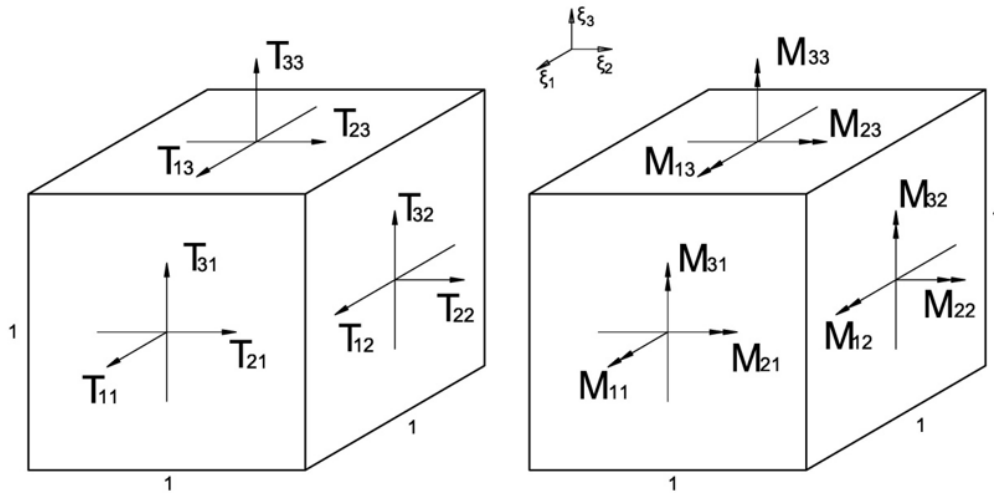


Рис. 1. Внутренние силовые факторы, действующие на грани куба
 Fig. 1. Internal force factors acting on the face of the cube

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_{11} &= \frac{T_{11}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{11} dA; & \tilde{M}_{11} &= \frac{M_{11}}{A} = \frac{1}{A} \int_A (\sigma_{31} \xi_2 - \sigma_{21} \xi_3) dA; \\
 \tilde{T}_{12} &= \frac{T_{12}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{12} dA; & \tilde{M}_{12} &= \frac{M_{12}}{A} = -\frac{1}{A} \int_A \sigma_{22} \xi_3 dA; \\
 \tilde{T}_{13} &= \frac{T_{13}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{13} dA; & \tilde{M}_{13} &= \frac{M_{13}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{33} \xi_2 dA; \\
 \tilde{T}_{21} &= \frac{T_{21}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{21} dA; & \tilde{M}_{21} &= \frac{M_{21}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{11} \xi_3 dA; \\
 \tilde{T}_{22} &= \frac{T_{22}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{22} dA; & \tilde{M}_{22} &= \frac{M_{22}}{A} = \frac{1}{A} \int_A (\sigma_{12} \xi_3 - \sigma_{32} \xi_1) dA; \\
 \tilde{T}_{23} &= \frac{T_{23}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{23} dA; & \tilde{M}_{23} &= \frac{M_{23}}{A} = -\frac{1}{A} \int_A \sigma_{33} \xi_1 dA; \\
 \tilde{T}_{31} &= \frac{T_{31}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{31} dA; & \tilde{M}_{31} &= \frac{M_{31}}{A} = -\frac{1}{A} \int_A \sigma_{11} \xi_2 dA; \\
 \tilde{T}_{32} &= \frac{T_{32}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{32} dA; & \tilde{M}_{32} &= \frac{M_{32}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{22} \xi_1 dA; \\
 \tilde{T}_{33} &= \frac{T_{33}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{33} dA; & \tilde{M}_{33} &= \frac{M_{33}}{A} = \frac{1}{A} \int_A (\sigma_{23} \xi_1 - \sigma_{13} \xi_2) dA.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь T_{11}, T_{22}, T_{33} – нормальные силы, T_{12}, T_{23}, T_{31} – касательные силы, M_{11}, M_{22}, M_{33} – «крутящие» моменты, $M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{23}, M_{31}, M_{32}$ – «изгибающие» моменты, A – площади граней куба. Внутренние элементарные силы $\sigma_{ik} dA (i, k = \overline{1,3})$ приводятся к центрам площадей соответствующих граней.

В работе использована, по сути, моментная теория напряжений, когда рассматривается бесконечно малый куб с размерами ребер, равными ds . Напряжения на гранях этого куба распределены неравномерно; они приводятся к центрам соответствующих граней. Главные векторы и главные моменты этих напряжений отнесены к площади $A = (ds)^2$. Так как в диссертации интегралы в формулах (9) определяются численно, использован куб с размерами ребер в 1 м (аналогия с теорией тонких оболочек). Далее полагаем, что интегрирование в (9) производится по единичным площадям A и знаки « \sim » опускаем.

Подставив (6) в (9), получаем параметрические уравнения (10) для предельных комбинаций внутренних силовых факторов (ВСФ), действующих на грани единичного куба (рис. 1).

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \frac{1}{2\Delta} \\
 \{I_{11} \sum_{k=1}^6 \delta_{1k} \dot{e}_k + I_{21} [\delta_{12} \dot{\chi}_{32} - \delta_{13} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{15} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + I_{31} [\delta_{11} \dot{\chi}_{21} + \delta_{13} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{16} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + I_{41} [-\delta_{11} \dot{\chi}_{31} - \delta_{12} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{14} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_1 A\}; \\
 T_{22} &= \frac{1}{2\Delta} \\
 \{I_{12} \sum_{k=1}^6 \delta_{2k} \dot{e}_k + I_{22} [\delta_{22} \dot{\chi}_{32} - \delta_{23} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{25} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + I_{32} [\delta_{21} \dot{\chi}_{21} + \delta_{23} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{26} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + I_{42} [-\delta_{21} \dot{\chi}_{31} - \delta_{22} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{24} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_2 A\}; \\
 T_{33} &= \frac{1}{2\Delta} \\
 \{I_{13} \sum_{k=1}^6 \delta_{3k} \dot{e}_k + I_{23} [\delta_{32} \dot{\chi}_{32} - \delta_{33} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{35} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + I_{33} [\delta_{31} \dot{\chi}_{21} + \delta_{33} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{36} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + I_{43} [-\delta_{31} \dot{\chi}_{31} - \delta_{32} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{34} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_3 A\}; \\
 ; \\
 T_{12} &= \frac{1}{2\Delta} \\
 \{I_{12} \sum_{k=1}^6 \delta_{4k} \dot{e}_k + I_{22} [\delta_{42} \dot{\chi}_{32} - \delta_{43} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{45} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + I_{32} [\delta_{41} \dot{\chi}_{21} + \delta_{43} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{46} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + I_{42} [-\delta_{41} \dot{\chi}_{31} - \delta_{42} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{44} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_4 A\} = T_{21}; \\
 T_{23} &= \frac{1}{2\Delta} \\
 \{I_{13} \sum_{k=1}^6 \delta_{5k} \dot{e}_k + I_{23} [\delta_{52} \dot{\chi}_{32} - \delta_{53} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{55} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + I_{33} [\delta_{51} \dot{\chi}_{21} + \delta_{53} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{56} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + I_{43} [-\delta_{51} \dot{\chi}_{31} - \delta_{52} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{54} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_5 A\} = T_{32}; \\
 T_{31} &= \frac{1}{2\Delta} \\
 \{I_{11} \sum_{k=1}^6 \delta_{6k} \dot{e}_k + I_{21} [\delta_{62} \dot{\chi}_{32} - \delta_{63} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{65} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + I_{31} [\delta_{61} \dot{\chi}_{21} + \delta_{63} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{66} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + I_{41} [-\delta_{61} \dot{\chi}_{31} - \delta_{62} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{64} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_6 A\} = T_{13}; \\
 M_{11} &= \frac{1}{2\Delta} \{ \tilde{I}_{51} \sum_{k=1}^6 \delta_{6k} \dot{e}_k + \tilde{I}_{61} [\delta_{62} \dot{\chi}_{32} - \delta_{63} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{65} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + \tilde{I}_{71} [\delta_{61} \dot{\chi}_{21} + \delta_{63} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{66} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + \tilde{I}_{81} [-\delta_{61} \dot{\chi}_{31} - \delta_{62} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{64} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_6 S_{31} \} - \\
 &\frac{1}{2\Delta_j} \{ \tilde{I}_{91} \sum_{k=1}^6 \delta_{4k} \dot{e}_k + \tilde{I}_{10,1} [\delta_{42} \dot{\chi}_{32} - \delta_{43} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{45} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + \tilde{I}_{11,1} [\delta_{41} \dot{\chi}_{21} + \delta_{43} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{46} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + \tilde{I}_{12,1} [-\delta_{41} \dot{\chi}_{31} - \delta_{42} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{44} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_4 S_{21} \}; \\
 M_{22} &= \frac{1}{2\Delta} \{ \tilde{I}_{13,2} \sum_{k=1}^6 \delta_{4k} \dot{e}_k + \tilde{I}_{14,2} [\delta_{42} \dot{\chi}_{32} - \delta_{43} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{45} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + \tilde{I}_{15,2} [\delta_{41} \dot{\chi}_{21} + \delta_{43} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{46} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + \tilde{I}_{16,2} [-\delta_{41} \dot{\chi}_{31} - \delta_{42} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{44} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_4 S_{12} \} \\
 &\frac{1}{2\Delta} \{ \tilde{I}_{17,2} \sum_{k=1}^6 \delta_{5k} \dot{e}_k + \tilde{I}_{18,2} [\delta_{52} \dot{\chi}_{32} - \delta_{53} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{55} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + \tilde{I}_{19,2} [\delta_{51} \dot{\chi}_{21} + \delta_{53} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{56} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + \tilde{I}_{20,2} [-\delta_{51} \dot{\chi}_{31} - \delta_{52} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{54} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_5 S_{32} \}; \\
 M_{33} &= \frac{1}{2\Delta} \{ \tilde{I}_{21,3} \sum_{k=1}^6 \delta_{5k} \dot{e}_k + \tilde{I}_{22,3} [\delta_{52} \dot{\chi}_{32} - \delta_{53} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{55} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + \tilde{I}_{23,3} [\delta_{51} \dot{\chi}_{21} + \delta_{53} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{56} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + \tilde{I}_{24,3} [-\delta_{51} \dot{\chi}_{31} - \delta_{52} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{54} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_5 S_{23} \} \\
 &\frac{1}{2\Delta} \{ \tilde{I}_{25,3} \sum_{k=1}^6 \delta_{6k} \dot{e}_k + \tilde{I}_{26,3} [\delta_{62} \dot{\chi}_{32} - \delta_{63} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{65} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + \tilde{I}_{27,3} [\delta_{61} \dot{\chi}_{21} + \delta_{63} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{66} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + \tilde{I}_{28,3} [-\delta_{61} \dot{\chi}_{31} - \delta_{62} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{64} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_6 S_{13} \} \\
 ; \\
 M_{21} &= \frac{1}{2\Delta} \{ J_{11} \sum_{k=1}^6 \delta_{1k} \dot{e}_k + J_{21} [\delta_{12} \dot{\chi}_{32} - \delta_{13} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{15} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + J_{31} [\delta_{11} \dot{\chi}_{21} + \delta_{13} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{16} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + J_{41} [-\delta_{11} \dot{\chi}_{31} - \delta_{12} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{14} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_1 \tilde{S}_1 \};
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

$$M_{32} = \frac{1}{2\Delta} \{J_{12} \sum_{k=1}^6 \delta_{2k} \dot{e}_k + J_{22} [\delta_{22} \dot{\chi}_{32} - \delta_{23} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{25} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + J_{32} [\delta_{21} \dot{\chi}_{21} + \delta_2 1/2 \delta_{26} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + J_{42} [-\delta_{21} \dot{\chi}_{31} - \delta_{22} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{24} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_2 \bar{S}_2\};$$

$$M_{13} = \frac{1}{2\Delta} \{J_{13} \sum_{k=1}^6 \delta_{3k} \dot{e}_k + J_{23} [\delta_{32} \dot{\chi}_{32} - \delta_{33} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{35} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + J_{33} [\delta_{31} \dot{\chi}_{21} + \delta_3 1/2 \delta_{36} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + J_{43} [-\delta_{31} \dot{\chi}_{31} - \delta_{32} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{34} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_3 \bar{S}_3\};$$

$$M_{31} = -\frac{1}{2\Delta} \{J_{54} \sum_{k=1}^6 \delta_{1,k} \dot{e}_k + J_{64} [\delta_{12} \dot{\chi}_{32} - \delta_{13} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{15} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + J_{74} [\delta_{11} \dot{\chi}_{21} + 1/2 \delta_{16} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + J_{84} [-\delta_{11} \dot{\chi}_{31} - \delta_{12} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{14} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_1 \bar{S}_4\};$$

$$M_{12} = -\frac{1}{2\Delta} \{J_{55} \sum_{k=1}^6 \delta_{2k} \dot{e}_k + J_{65} [\delta_{22} \dot{\chi}_{32} - \delta_{23} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{25} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + J_{75} [\delta_{21} \dot{\chi}_{21} + 1/2 \delta_{26} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + J_{85} [-\delta_{21} \dot{\chi}_{31} - \delta_{22} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{24} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_2 \bar{S}_5\};$$

$$M_{23} = -\frac{1}{2\Delta} \{J_{56} \sum_{k=1}^6 \delta_{3k} \dot{e}_k + J_{65} [\delta_{32} \dot{\chi}_{32} - \delta_{33} \dot{\chi}_{23} + 1/2 \delta_{35} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] + J_{76} [\delta_{31} \dot{\chi}_{21} + \delta_{33} \dot{\chi}_{13} + 1/2 \delta_{36} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] + J_{86} [-\delta_{31} \dot{\chi}_{31} - \delta_{32} \dot{\chi}_{12} + 1/2 \delta_{34} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] - 2\Delta_3 \bar{S}_6\}.$$

Здесь, например,

$$I_{11} = \int_A \frac{dA}{\lambda}; \quad I_{21} = \int_A \frac{\xi_1 dA}{\lambda}; \quad I_{31} = \int_A \frac{\xi_2 dA}{\lambda}; \quad I_{41} = \int_A \frac{\xi_3 dA}{\lambda};$$

$$I_{56} = \int_A \frac{\zeta_6}{\lambda} dA; \quad I_{65} = \int_A \frac{\zeta_5 \xi_1 dA}{\lambda}; \quad I_{76} = \int_A \frac{\zeta_6 \xi_2 dA}{\lambda}; \quad I_{86} = \int_A \frac{\zeta_6 \xi_3 dA}{\lambda};$$

Параметрические уравнения (10) описывают предельную поверхность прочности для единичного куба из анизотропного материала в пространстве ВСФ, действующих на грани куба. Здесь параметрами являются отношения скоростей обобщенных перемещений $\dot{e}_{11}, \dots, \dot{\chi}_{33}$. Исключив эти параметры из уравнений (10), можно, в принципе, получить уравнение предельной поверхности в пространстве T_{11}, \dots, M_{33} .

Когда напряжения σ_{ij} имеют размерность в МПа, силы T_{ij} также имеют размерность в МПа, моменты M_{ij} – в МПа·м. Когда напряжения отнесены к σ_0 , т.е. безразмерные, то T_{ij} – безразмерные, M_{ij} – в м.

2. Поверхности прочности для тел из однородных изотропных материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Рассмотрим единичный куб из однородного изотропного материала, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию. Уравнение предельной поверхности в пространстве напряжений для такого материала можно записать в следующем виде:

$$\Phi \equiv a(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 2c(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + d(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 1. \quad (11)$$

Уравнение (11) является частным случаем уравнения (1). Здесь напряжения отнесены к σ_0 , имеющей размерность напряжений. В данном случае

$$\delta_{ii} = 27a^2 d^3 \quad (i = \overline{1,3}); \quad \delta_{ii} = 9a^3 d^2 \quad (i = \overline{4,6}); \quad \delta_{ik} = 0 \quad (i \neq k);$$

$$\Delta = 27a^3 d^3; \Delta_i = 27ac d^3 \quad (i = \overline{1,3}); \Delta_i = 9a^2 c d^2 \quad (i = \overline{4,6});$$

$$S_\Delta = 108d^3(3ac^2 + a^2 c^2 + a^3).$$

В рассматриваемом случае формулы (8) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P_e &= \delta_{11}\dot{e}_{11}^2 + \delta_{22}\dot{e}_{22}^2 + \delta_{33}\dot{e}_{33}^2 + 1/4(\delta_{44}\dot{\gamma}_{12}^2 + \delta_{55}\dot{\gamma}_{23}^2 + \delta_{66}\dot{\gamma}_{31}^2); \\
 P_{eX}^{\xi_1} &= \delta_{22}\dot{e}_{22}\dot{\chi}_{32} - \delta_{33}\dot{e}_{33}\dot{\chi}_{23} + 1/4\dot{\gamma}_{23}\delta_{55}(\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}); \\
 P_{eX}^{\xi_2} &= \delta_{11}\dot{e}_{11}\dot{\chi}_{21} + \delta_{33}\dot{e}_{33}\dot{\chi}_{13} + 1/4\dot{\gamma}_{31}\delta_{66}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}); \\
 P_{eX}^{\xi_3} &= -\delta_{11}\dot{e}_{11}\dot{\chi}_{31} - \delta_{22}\dot{e}_{22}\dot{\chi}_{12} + 1/4\dot{\gamma}_{12}\delta_{44}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}); \\
 P_X^{\xi_1\xi_2} &= -\delta_{33}\dot{\chi}_{13}\dot{\chi}_{23}; \\
 P_X^{\xi_2\xi_3} &= -\delta_{11}\dot{\chi}_{31}\dot{\chi}_{21}; \\
 P_X^{\xi_3\xi_1} &= -\delta_{22}\dot{\chi}_{12}\dot{\chi}_{32}; \\
 P_X^{\xi_1} &= \delta_{22}\dot{\chi}_{32}^2 + \delta_{33}\dot{\chi}_{23}^2 + 1/4\delta_{55}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{33})^2; \\
 P_X^{\xi_2} &= \delta_{11}\dot{\chi}_{21}^2 + \delta_{33}\dot{\chi}_{13}^2 + 1/4\delta_{66}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})^2; \\
 P_X^{\xi_3} &= \delta_{11}\dot{\chi}_{31}^2 + \delta_{22}\dot{\chi}_{12}^2 + 1/4\delta_{44}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{22})^2.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Вместо уравнений (10) имеем:

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{11}\delta_{11}\dot{e}_1 + I_{31}\delta_{11}\dot{\chi}_{21} - I_{41}\delta_{11}\dot{\chi}_{31} - 2\Delta_1 A]; \\
 T_{12} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{12}\delta_{44}\dot{e}_4 + 1/2I_{42}\delta_{44}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) - 2\Delta_4 A]; \\
 T_{22} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{12}\delta_{22}\dot{e}_2 + I_{22}\delta_{22}\dot{\chi}_{32} - I_{42}\delta_{22}\dot{\chi}_{12} - 2\Delta_2 A]; \\
 T_{23} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{13}\delta_{55}\dot{e}_5 + 1/2I_{23}\delta_{55}(\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) - 2\Delta_5 A]; \\
 T_{31} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{11}\delta_{66}\dot{e}_6 + 1/2I_{31}\delta_{66}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) - 2\Delta_6 A]; \\
 T_{33} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{13}\delta_{33}\dot{e}_3 - I_{23}\delta_{33}\dot{\chi}_{23} + I_{33}\delta_{33}\dot{\chi}_{13} - 2\Delta_3 A]; \\
 M_{11} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{31}\delta_{66}\dot{e}_6 - I_{41}\delta_{44}\dot{e}_4 + 1/2J_{74}\delta_{66}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) - 1/2J_{41}\delta_{44}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})]; \\
 M_{12} &= -\frac{1}{2\Delta} [I_{42}\delta_{22}\dot{e}_2 + J_{42}\delta_{22}\dot{\chi}_{32} - J_{85}\delta_{22}\dot{\chi}_{12} - 2\Delta_2\tilde{S}_5]; \\
 M_{13} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{33}\delta_{33}\dot{e}_3 - J_{23}\delta_{33}\dot{\chi}_{23} + J_{33}\delta_{33}\dot{\chi}_{13} - 2\Delta_3\tilde{S}_3]; \\
 M_{21} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{41}\delta_{11}\dot{e}_1 + J_{31}\delta_{11}\dot{\chi}_{21} - J_{41}\delta_{11}\dot{\chi}_{31} - 2\Delta_1\tilde{S}_1]; \\
 M_{22} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{42}\delta_{44}\dot{e}_4 - I_{22}\delta_{55}\dot{e}_5 + 1/2J_{85}\delta_{44}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) - 1/2I_{22}\delta_{55}(\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})]; \\
 M_{23} &= -\frac{1}{2\Delta} [I_{23}\delta_{33}\dot{e}_3 - J_{66}\delta_{33}\dot{\chi}_{23} + J_{23}\delta_{33}\dot{\chi}_{13} - 2\Delta_3\tilde{S}_6]; \\
 M_{31} &= -\frac{1}{2\Delta} [I_{31}\delta_{11}\dot{e}_1 + J_{74}\delta_{11}\dot{\chi}_{21} - J_{31}\delta_{11}\dot{\chi}_{31} - 2\Delta_1\tilde{S}_4]; \\
 M_{32} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{22}\delta_{22}\dot{e}_2 + J_{22}\delta_{22}\dot{\chi}_{32} - J_{42}\delta_{22}\dot{\chi}_{12} - 2\Delta_2\tilde{S}_2]; \\
 M_{33} &= \frac{1}{2\Delta} [I_{23}\delta_{55}\dot{e}_5 - I_{33}\delta_{66}\dot{e}_6 + 1/2I_{66}\delta_{55}(\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) - 1/2I_{33}\delta_{66}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь, например,

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \int_A \frac{dA}{\lambda}; & I_{31} &= \int_A \frac{\xi_2 dA}{\lambda}; & I_{41} &= \int_A \frac{\xi_3 dA}{\lambda}; & I_{22} &= \int_A \frac{\xi_2 dA}{\lambda}; \\
 I_{22} &= \int_A \frac{\xi_1^2 dA}{\lambda}; & I_{42} &= \int_A \frac{\xi_1 \xi_3 dA}{\lambda}; & \tilde{S}_2 &= \int_A \xi_1 dA;
 \end{aligned}$$

3. Поверхности прочности для тел из однородных изотропных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию

Уравнение предельной поверхности в пространстве напряжений для таких материалов можно записать в виде:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 3d(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 1. \tag{14}$$

Здесь напряжения отнесены к σ_0 , имеющей размерность напряжений. В данном случае $\delta_{ii} = 27d^3$ ($i = \overline{1,3}$); $\delta_{ii} = 9d^2$ ($i = \overline{4,6}$); $\delta_{ik} = 0$ ($i \neq k$); $\Delta = 27d^3$; $\Delta_i = 0$ ($i = \overline{1,3}$); $\Delta_i = 0$ ($i = \overline{4,6}$); $S_\Delta = 27d^3$.

Вместо (12) имеем:

$$\begin{aligned}
 P_e &= 27d^3(\dot{e}_{11}^2 + \dot{e}_{22}^2 + \dot{e}_{33}^2) + 2.25d^2(\dot{\gamma}_{12}^2 + \dot{\gamma}_{23}^2 + \dot{\gamma}_{31}^2); \\
 P_{eX}^{\xi_1} &= 27d^3(\dot{e}_{22}\dot{\chi}_{32} - \dot{e}_{33}\dot{\chi}_{23}) + 2.25\dot{\gamma}_{23}(\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}); \\
 P_{eX}^{\xi_2} &= 27d^3(\dot{e}_{11}\dot{\chi}_{21} + \dot{e}_{33}\dot{\chi}_{13}) + 2.25\dot{\gamma}_{31}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}); \\
 P_{eX}^{\xi_3} &= 27d^3(-\dot{e}_{11}\dot{\chi}_{31} - \dot{e}_{22}\dot{\chi}_{12}) + 2.25\dot{\gamma}_{12}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}); \\
 P_X^{\xi_1\xi_2} &= -27d^3\dot{\chi}_{13}\dot{\chi}_{23}; \\
 P_X^{\xi_2\xi_3} &= -27d^3\dot{\chi}_{31}\dot{\chi}_{21}; \\
 P_X^{\xi_3\xi_1} &= -27d^3\dot{\chi}_{12}\dot{\chi}_{32}; \\
 P_X^{\xi_1} &= 27d^3(\dot{\chi}_{32}^2 + \dot{\chi}_{23}^2) + 2.25d^2(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{33})^2; \\
 P_X^{\xi_2} &= 27d^3(\dot{\chi}_{21}^2 + \dot{\chi}_{13}^2) + 2.25d^2(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})^2; \\
 P_X^{\xi_3} &= 27d^3(\dot{\chi}_{31}^2 + \dot{\chi}_{12}^2) + 2.25d^2(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{22})^2.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Параметрические уравнения для рассматриваемых тел принимают вид:

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= 1/2(I_{11}\dot{e}_{11} + I_{31}\dot{\chi}_{21} - I_{41}\dot{\chi}_{31}); \\
 T_{22} &= 1/2(I_{12}\dot{e}_{22} + I_{22}\dot{\chi}_{32} - I_{42}\dot{\chi}_{12}); \\
 T_{33} &= 1/2(I_{13}\dot{e}_{33} - I_{23}\dot{\chi}_{23} + I_{33}\dot{\chi}_{13}); \\
 T_{12} &= \frac{1}{6d}[I_{12}\dot{e}_{12} + 1/2I_{42}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})]; \\
 T_{23} &= \frac{1}{6d}[I_{13}\dot{e}_{23} + 1/2I_{23}(\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})]; \\
 T_{31} &= \frac{1}{6d}[I_{11}\dot{e}_{31} + 1/2I_{31}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})]; \\
 M_{12} &= -1/2(I_{42}\dot{e}_{22} + J_{42}\dot{\chi}_{32} - J_{41}\dot{\chi}_{12}); \\
 M_{23} &= -1/2(I_{23}\dot{e}_{33} - J_{22}\dot{\chi}_{23} + J_{23}\dot{\chi}_{13}); \\
 M_{31} &= -1/2(I_{31}\dot{e}_{11} + J_{33}\dot{\chi}_{21} - J_{31}\dot{\chi}_{31}); \\
 M_{21} &= 1/2(I_{41}\dot{e}_{11} + J_{31}\dot{\chi}_{21} - J_{41}\dot{\chi}_{31}); \\
 M_{32} &= 1/2(I_{22}\dot{e}_{22} + J_{22}\dot{\chi}_{32} - J_{42}\dot{\chi}_{12}); \\
 M_{13} &= 1/2(I_{33}\dot{e}_{33} - J_{23}\dot{\chi}_{23} + J_{33}\dot{\chi}_{13}); \\
 M_{11} &= \frac{1}{6d}[I_{31}\dot{e}_{31} - I_{41}\dot{e}_{12} + 1/2J_{33}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) - 1/2J_{41}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})]; \\
 M_{22} &= \frac{1}{6d}[I_{42}\dot{e}_{12} - I_{22}\dot{e}_{23} + 1/2J_{41}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) - 1/2J_{22}(\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})]; \\
 M_{33} &= \frac{1}{6d}[I_{23}\dot{e}_{23} - I_{33}\dot{e}_{31} + 1/2J_{22}(\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) - 1/2J_{33}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь, например,

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \int_A \frac{dA}{\lambda}, & I_{31} &= \int_A \frac{\xi_2 dA}{\lambda}, & I_{41} &= \int_A \frac{\xi_3^2 dA}{\lambda}, \\
 I_{22} &= \int_A \frac{\xi_1 dA}{\lambda}, & I_{22} &= \int_A \frac{\xi_1^2 dA}{\lambda}, & I_{42} &= \int_A \frac{\xi_1 \xi_3 dA}{\lambda}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Приведенные выше параметрические уравнения (10), (13) и (16) предельных поверхностей были подвергнуты критическому анализу на предмет их достоверности и отсутствия в них формальных ошибок.

4. Определение коэффициента запаса прочности в пространстве ВСФ для массивных тел при объемном напряженном состоянии.

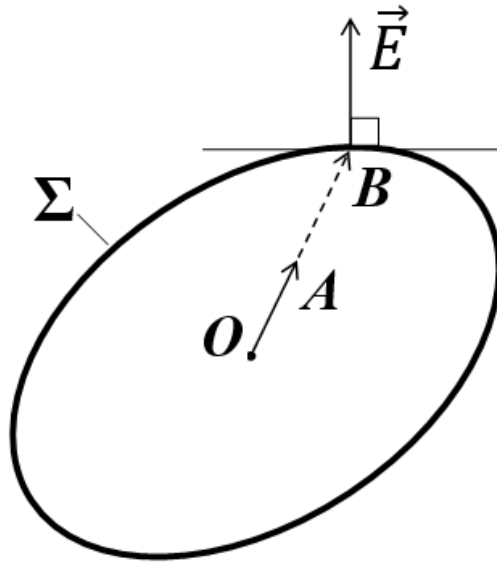


Рис. 2. Σ-схематическая предельная поверхность прочности
Fig. 2. Σ-schematic ultimate strength surface

Пусть вектор ВСФ $\overline{OA} = \overline{R}^* = \{T_{11}^*, T_{12}^*, T_{22}^*, T_{23}^*, T_{31}^*, T_{33}^*, M_{11}^*, M_{12}^*, M_{13}^*, M_{21}^*, M_{22}^*, M_{23}^*, M_{31}^*, M_{32}^*, M_{33}^*\}^T$ нам известен (рис. 2).

Необходимо определить соответствующий ему вектор прочности $\overline{OB} = \overline{R} = \{T_{11}, T_{12}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{33}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33}\}^T$ и определить коэффициент запаса прочности

$$k = |\overline{R}|/|\overline{R}^*|. \tag{18}$$

Начала векторов \overline{R}^* и \overline{R} совпадают с началом координат O в пространстве ВСФ (рис.2); эти векторы имеют одинаковые направления. Здесь Σ – поверхность прочности в пространстве сил и моментов. Компоненты коллинеарных векторов \overline{R}^* и \overline{R} удовлетворяют следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \frac{T_{11}}{T_{11}^*} &= \frac{T_{12}}{T_{12}^*} = \frac{T_{22}}{T_{22}^*} = \frac{T_{23}}{T_{23}^*} = \frac{T_{31}}{T_{31}^*} = \frac{T_{33}}{T_{33}^*} = \\ &= \frac{M_{11}}{M_{11}^*} = \frac{M_{12}}{M_{12}^*} = \frac{M_{13}}{M_{13}^*} = \frac{M_{21}}{M_{21}^*} = \frac{M_{22}}{M_{22}^*} = \frac{M_{23}}{M_{23}^*} = \frac{M_{31}}{M_{31}^*} = \frac{M_{32}}{M_{32}^*} = \frac{M_{33}}{M_{33}^*} = k. \end{aligned} \tag{19}$$

Используя (19), можно записать следующую систему уравнений:

$$T_{12}^* T_{11} - T_{11}^* T_{12} = 0; \dots; M_{33}^* M_{32} - M_{32}^* M_{33} = 0. \tag{20}$$

Подставив (13) в (20), получим уравнения для изотропных тел, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию:

$$\begin{aligned} T_{12}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{11} \delta_{11} \dot{\epsilon}_1 + I_{31} \delta_{11} \dot{\chi}_{21} - I_{41} \delta_{11} \dot{\chi}_{31} - 2\Delta_1 A] \right\} \\ - T_{11}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{12} \delta_{44} \dot{\epsilon}_4 + 1/2 I_{42} \delta_{44} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) - 2\Delta_4 A] \right\} = 0; \\ T_{22}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{12} \delta_{44} \dot{\epsilon}_4 + 1/2 I_{42} \delta_{44} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) - 2\Delta_4 A] \right\} - T_{12}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{12} \delta_{22} \dot{\epsilon}_2 + I_{22} \delta_{22} \dot{\chi}_{32} - I_{42} \delta_{22} \dot{\chi}_{32}] \right\} = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. T_{23}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{12} \delta_{22} \dot{e}_2 + I_{22} \delta_{22} \dot{\chi}_{32} - I_{42} \delta_{22} \dot{\chi}_{12} - 2\Delta_2 A] \right\} \right. \\
 & \quad \left. - T_{22}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{13} \delta_{55} \dot{e}_5 + 1/2 I_{23} \delta_{55} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) - 2\Delta_5 A] \right\} = 0; \right. \\
 & T_{31}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{13} \delta_{55} \dot{e}_5 + 1/2 I_{23} \delta_{55} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) - 2\Delta_5 A] \right\} \\
 & \quad \left. - T_{23}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{11} \delta_{66} \dot{e}_6 + 1/2 I_{31} \delta_{66} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) - 2\Delta_6 A] \right\} = 0; \right. \\
 & T_{33}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{11} \delta_{66} \dot{e}_6 + 1/2 I_{31} \delta_{66} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) - 2\Delta_6 A] \right\} - T_{31}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{13} \delta_{33} \dot{e}_3 - I_{23} \delta_{33} \dot{\chi}_{23} + I_{33} \delta_{33} \dot{\chi}_{13} - 2\Delta_3 A] \right\} = 0 \\
 & \left. M_{11}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{13} \delta_{33} \dot{e}_3 - I_{23} \delta_{33} \dot{\chi}_{23} + I_{33} \delta_{33} \dot{\chi}_{13} - 2\Delta_3 A] \right\} - T_{33}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{31} \delta_{66} \dot{e}_6 - I_{41} \delta_{44} \dot{e}_4 + 1/2 J_{74} \delta_{66} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) - 1/2 J_{41} \delta_{44} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] \right\} = 0 \right. \\
 & \left. M_{12}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{31} \delta_{66} \dot{e}_6 - I_{41} \delta_{44} \dot{e}_4 + 1/2 J_{74} \delta_{66} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33}) - 1/2 J_{41} \delta_{44} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] \right\} - \right. \\
 & \left. M_{11}^* \left\{ -\frac{1}{2\Delta} [I_{42} \delta_{22} \dot{e}_2 + J_{42} \delta_{22} \dot{\chi}_{32} - J_{85} \delta_{22} \dot{\chi}_{12} - 2\Delta_2 \tilde{S}_5] \right\} = 0 \right. \\
 & \left. M_{13}^* \left\{ -\frac{1}{2\Delta} [I_{42} \delta_{22} \dot{e}_2 + J_{42} \delta_{22} \dot{\chi}_{32} - J_{85} \delta_{22} \dot{\chi}_{12} - 2\Delta_2 \tilde{S}_5] \right\} - M_{12}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{33} \delta_{33} \dot{e}_3 - J_{23} \delta_{33} \dot{\chi}_{23} + I_{33} \delta_{33} \dot{\chi}_{13} - 2\Delta_3 \tilde{S}_3] \right\} = 0 \right. \\
 & \left. M_{21}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{33} \delta_{33} \dot{e}_3 - J_{23} \delta_{33} \dot{\chi}_{23} + J_{33} \delta_{33} \dot{\chi}_{13} - 2\Delta_3 \tilde{S}_3] \right\} - M_{13}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{41} \delta_{11} \dot{e}_1 + J_{31} \delta_{11} \dot{\chi}_{21} - I_{41} \delta_{11} \dot{\chi}_{31} - 2\Delta_1 \tilde{S}_1] \right\} = 0 \right. \\
 & \left. M_{22}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{41} \delta_{11} \dot{e}_1 + J_{31} \delta_{11} \dot{\chi}_{21} - J_{41} \delta_{11} \dot{\chi}_{31} - 2\Delta_1 \tilde{S}_1] \right\} - M_{21}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{42} \delta_{44} \dot{e}_4 - I_{22} \delta_{55} \dot{e}_5 + 1/2 J_{85} \delta_{44} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) - 1/2 I_{22} \delta_{55} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] \right\} = 0 \right. \\
 & \left. M_{23}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{42} \delta_{44} \dot{e}_4 - I_{22} \delta_{55} \dot{e}_5 + 1/2 J_{85} \delta_{44} (\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11}) - 1/2 I_{22} \delta_{55} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22})] \right\} - \right. \\
 & \left. M_{22}^* \left\{ -\frac{1}{2\Delta} [I_{23} \delta_{33} \dot{e}_3 - J_{66} \delta_{33} \dot{\chi}_{23} + J_{23} \delta_{33} \dot{\chi}_{13} - 2\Delta_3 \tilde{S}_6] \right\} = 0 \right. \\
 & \left. M_{31}^* \left\{ -\frac{1}{2\Delta} [I_{23} \delta_{33} \dot{e}_3 - J_{66} \delta_{33} \dot{\chi}_{23} + J_{23} \delta_{33} \dot{\chi}_{13} - 2\Delta_3 \tilde{S}_6] \right\} - M_{23}^* \left\{ -\frac{1}{2\Delta} [I_{31} \delta_{11} \dot{e}_1 + J_{74} \delta_{11} \dot{\chi}_{21} - I_{31} \delta_{11} \dot{\chi}_{31} - 2\Delta_1 \tilde{S}_4] \right\} = 0 \right. \\
 & \left. M_{32}^* \left\{ -\frac{1}{2\Delta} [I_{31} \delta_{11} \dot{e}_1 + J_{74} \delta_{11} \dot{\chi}_{21} - J_{31} \delta_{11} \dot{\chi}_{31} - 2\Delta_1 \tilde{S}_4] \right\} - M_{31}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{22} \delta_{22} \dot{e}_2 + J_{22} \delta_{22} \dot{\chi}_{32} - I_{42} \delta_{22} \dot{\chi}_{12} - 2\Delta_2 \tilde{S}_2] \right\} = 0 \right. \\
 & \left. M_{33}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{22} \delta_{22} \dot{e}_2 + J_{22} \delta_{22} \dot{\chi}_{32} - I_{42} \delta_{22} \dot{\chi}_{12} - 2\Delta_2 \tilde{S}_2] \right\} - M_{32}^* \left\{ \frac{1}{2\Delta} [I_{23} \delta_{55} \dot{e}_5 - I_{33} \delta_{66} \dot{e}_6 + 1/2 I_{66} \delta_{55} (\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) - 1/2 I_{33} \delta_{66} (\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] \right\} = 0 \right.
 \end{aligned}$$

Если подставить (16) в (20), получим уравнения для однородных изотропных тел, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию:

$$\begin{aligned} T_{12}^* \{1/2(I_{11}\dot{e}_{11} + I_{31}\dot{\chi}_{21} - I_{41}\dot{\chi}_{31})\} - T_{11}^* \left\{ \frac{1}{6d} [I_{12}\dot{e}_{12} + 1/2I_{42}(\dot{\chi}_{22} - \dot{\chi}_{11})] \right\} = 0; \dots; \\ M_{33}^* \{1/2(I_{22}\dot{e}_{22} + J_{22}\dot{\chi}_{32} - J_{42}\dot{\chi}_{12})\} - M_{32}^* \left\{ \frac{1}{6d} [I_{23}\dot{e}_{23} - I_{33}\dot{e}_{31} + 1/2J_{22}(\dot{\chi}_{33} - \dot{\chi}_{22}) - \right. \\ \left. 1/2J_{33}(\dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{33})] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

1. Алгоритм построения сечений поверхности прочности для массивного тела, когда она задана параметрическими уравнениями (алгоритм А1).

Во многих случаях определения несущей способности массивных тел возникает необходимость в построении сечений поверхности прочности, описываемой уравнениями (10), (13) и (16). Рассмотрим алгоритм построения сечения поверхности прочности(10), (13) и (16)на примере их пересечения с плоскостью $T_{11}OT_{22}$:

1. Задать последовательность значений $\dot{e}_{11}^i, \dot{e}_{22}^i$ ($i=1, 2, \dots$).

2. Решить систему из 13 нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} T_{12}=0; T_{23}=0; T_{31}=0; T_{33}=0; M_{11}=0; \\ M_{12}=0; M_{13}=0; M_{21}=0; M_{22}=0; M_{23}=0; M_{31}=0; M_{32}=0; M_{33}=0 \end{aligned} \quad (23)$$

относительно $\dot{e}_{33}^i, \dot{\gamma}_{12}^i, \dot{\gamma}_{23}^i, \dot{\gamma}_{31}^i, \dot{\chi}_{11}^i, \dot{\chi}_{12}^i, \dot{\chi}_{13}^i, \dot{\chi}_{21}^i, \dot{\chi}_{22}^i, \dot{\chi}_{23}^i, \dot{\chi}_{31}^i, \dot{\chi}_{32}^i, \dot{\chi}_{33}^i$, задавая при этом $\dot{e}_{11}^i, \dot{e}_{22}^i$. Здесь левые части уравнений (23) записаны с использованием уравнений(10), (13) и (16).

3. По известным значениям $\dot{e}_{11}^i, \dot{e}_{22}^i, \dot{e}_{33}^i, \dot{\gamma}_{12}^i, \dot{\gamma}_{23}^i, \dot{\gamma}_{31}^i, \dot{\chi}_{11}^i, \dot{\chi}_{12}^i, \dot{\chi}_{13}^i, \dot{\chi}_{21}^i, \dot{\chi}_{22}^i, \dot{\chi}_{23}^i, \dot{\chi}_{31}^i, \dot{\chi}_{32}^i, \dot{\chi}_{33}^i$, используя (10), (13) и (16), определяем $T_{11}^i, T_{12}^i, T_{22}^i, T_{23}^i, T_{31}^i, T_{33}^i, M_{11}^i, M_{12}^i, M_{13}^i, M_{21}^i, M_{22}^i, M_{23}^i, M_{31}^i, M_{32}^i, M_{33}^i$. Точка, координаты которой равны этим значениям, лежит одновременно на соответствующих поверхностях (10), (13) и (16) и на плоскости $T_{11}OT_{22}$, то есть принадлежит искомому сечению.

4. Повторяя данную процедуру для различных комбинаций $\dot{e}_{11}^i = \sin\alpha, \dot{e}_{22}^i = \cos\alpha$ (угол α пробегает сегмент от 0^0 до 360^0 с определенным шагом $\Delta\alpha$), получаем ряд точек, принадлежащих предельной кривой на плоскости $T_{11}OT_{22}$. Найдя достаточное число таких точек, строим искомую кривую.

Для решения систем уравнений, аналогичных (23), были использованы известные стандартные процедуры (в среде Matlab).

Ниже приведены некоторые результаты, полученные с использованием алгоритма А1 для тела из легкого бетона (рис. 3). Каждая кривая построена с использованием координат 60 различных точек.

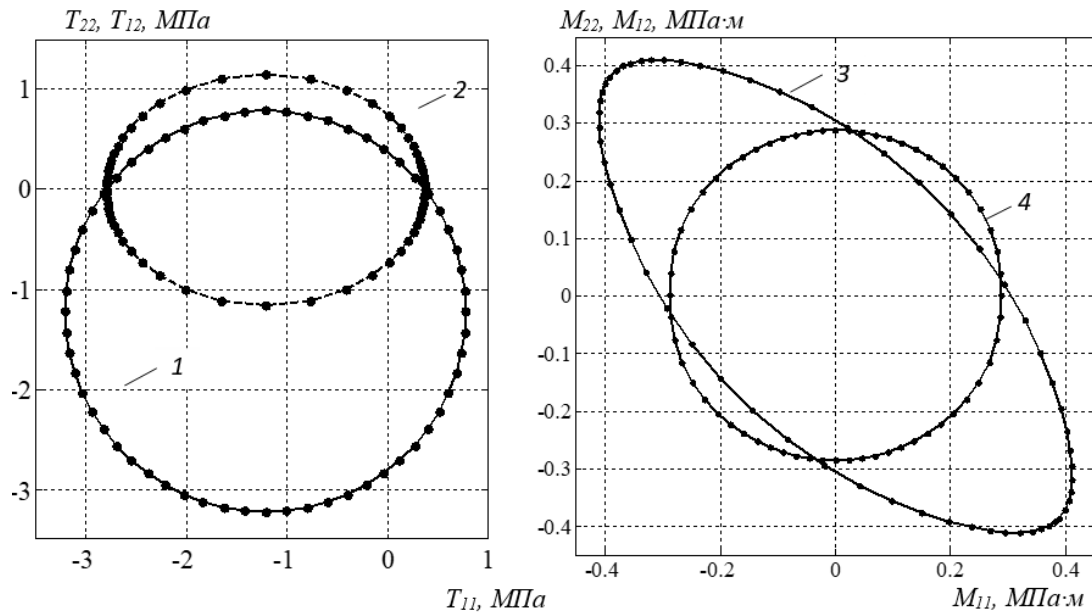


Рис. 3. Предельные кривые для тела из бетона В5 предельные кривые: 1 – в осях T_{11}, T_{22} ; 2 – в осях T_{11}, T_{12} ; 3 – в осях M_{11}, M_{22} ; 4 – в осях M_{11}, M_{12} .
Fig. 3. Limit curves for concrete body B5 limit curves: 1 – in axes T_{11}, T_{22} ; 2 – in axes T_{11}, T_{12} ; 3 – in axes M_{11}, M_{22} ; 4 – in axes M_{11}, M_{12} .

Примеры построения сечений предельных поверхностей для изотропного массивного тела из углеродистой стали марки 8, по ГОСТ 1050-2013, прочностные характеристики $R_{bt} = 80$ МПа, $R_{st} = 45$ МПа. Каждая кривая построена с использованием координат 60 различных точек.

Результаты вычислений в графическом виде представлены на рис. 4.

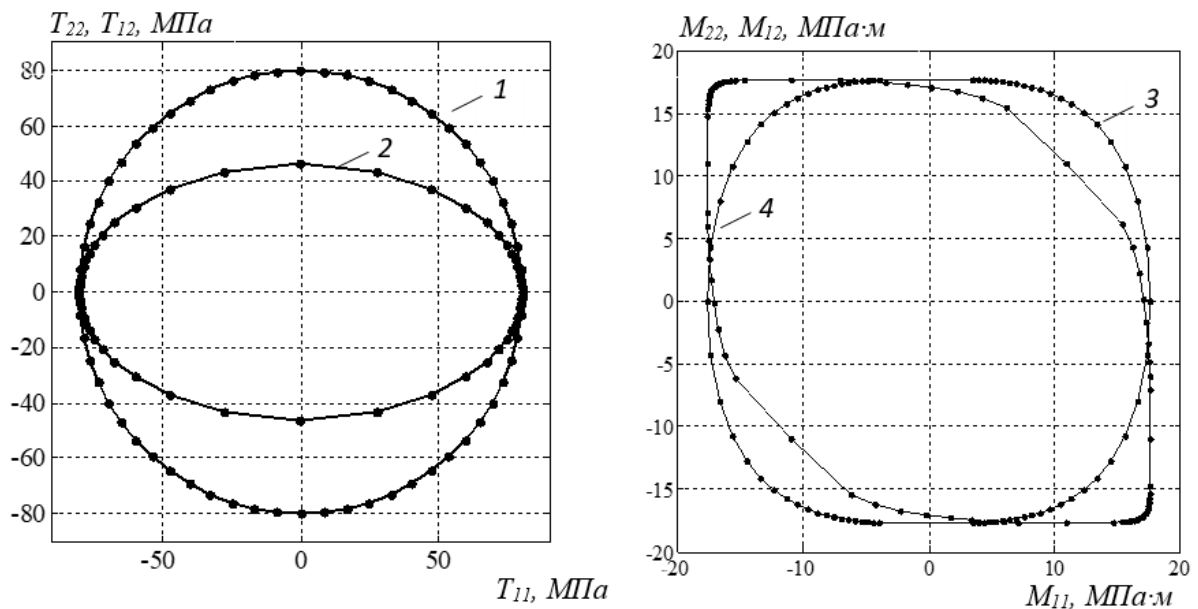


Рис. 4. Предельные кривые для тела из углеродистой стали марки 8 предельные кривые: 1 – в осях T_{11}, T_{22} ; 2 – в осях T_{11}, T_{12} ; 3 – в осях M_{11}, M_{22} ; 4 – в осях M_{11}, M_{12} .
Fig. 4. Limit curves for grade 8 carbon steel body limit curves: 1 – in axes T_{11}, T_{22} ; 2 – in axes T_{11}, T_{12} ; 3 – in axes M_{11}, M_{22} ; 4 – in axes M_{11}, M_{12} .

2. Алгоритм определения коэффициента запаса прочности в пространстве ВСФ для массивных тел при объемном напряженном состоянии (Алгоритм А2).

В рассматриваемом случае существенное значение имеет только направление вектора $\vec{E} = \{\dot{e}_{11}, \dot{e}_{22}, \dot{e}_{33}, \dot{\gamma}_{12}, \dot{\gamma}_{23}, \dot{\gamma}_{31}, \dot{\chi}_{11}, \dot{\chi}_{12}, \dot{\chi}_{13}, \dot{\chi}_{21}, \dot{\chi}_{22}, \dot{\chi}_{23}, \dot{\chi}_{31}, \dot{\chi}_{32}, \dot{\chi}_{33}\}^T$ (рис.2), который связан ассоциированным законом с искомым вектором прочности \vec{R} , а длина вектора \vec{E} может быть произвольной. В качестве дополнительного к системе (20) примем уравнение

$$\begin{aligned} \dot{e}_{11}^2 + \dot{e}_{22}^2 + \dot{e}_{33}^2 + \dot{\gamma}_{12}^2 + \dot{\gamma}_{21}^2 + \dot{\gamma}_{31}^2 + \dot{\chi}_{11}^2 + \dot{\chi}_{12}^2 + \\ + \dot{\chi}_{13}^2 + \dot{\chi}_{21}^2 + \dot{\chi}_{22}^2 + \dot{\chi}_{23}^2 + \dot{\chi}_{31}^2 + \dot{\chi}_{32}^2 + \dot{\chi}_{33}^2 = 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Алгоритм определения коэффициента запаса прочности в пространстве ВСФ при объемном напряженном состоянии массивного элемента:

1. Определить вектор ВСФ $\vec{R}^* = \{T_{11}^*, T_{12}^*, T_{22}^*, T_{23}^*, T_{31}^*, T_{33}^*, M_{11}^*, M_{12}^*, M_{13}^*, M_{21}^*, M_{22}^*, M_{23}^*, M_{31}^*, M_{32}^*, M_{33}^*\}^T$ в рассматриваемом элементе массивного тела, как результат решения соответствующей краевой задачи.
2. Решая систему уравнений (20), (24) относительно $\dot{e}_{11}, \dot{e}_{22}, \dot{e}_{33}, \dot{\gamma}_{12}, \dot{\gamma}_{23}, \dot{\gamma}_{31}, \dot{\chi}_{11}, \dot{\chi}_{12}, \dot{\chi}_{13}, \dot{\chi}_{21}, \dot{\chi}_{22}, \dot{\chi}_{23}, \dot{\chi}_{31}, \dot{\chi}_{32}, \dot{\chi}_{33}$, найти вектор \vec{E} , связанный с вектором прочности \vec{R} ассоциированным законом.
3. Подставляя найденные в п. 2 компоненты вектора \vec{E} в уравнения (10), (13) или (16), определить компоненты соответствующего вектора прочности $\vec{R} = \{T_{11}, T_{12}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{33}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33}\}^T$.
4. Проверить выполнение условий (20).
5. По формуле (19) определить коэффициент запаса прочности.

В табл. 1 приведены некоторые результаты, полученные с использованием программы для ЭВМ, составленной на основе вышеописанного алгоритма А2.

Таблица 1. Результаты использования алгоритма А2.
Table 1. Results of using the algorithm А2

Вид материала	$\frac{T_{11}}{T_{11}^*}$	$\frac{T_{12}}{T_{12}^*}$	$\frac{T_{22}}{T_{22}^*}$	k
Класс бетона В5	2.808/2.8	0	0	1.0028
	0	0.3701/0.37	0	1.00027
	0	0	0.738/0.74	0.99729
Марка стали 8	80/80	0	0	1,0
	0	46.19/45	0	1.0264

ВЫВОДЫ

Полученные параметрические уравнения поверхностей прочности для массивных тел в дальнейшем положены в основу кинематического метода теории предельного равновесия.

Полученные результаты могут быть использованы при оценке предельных нагрузок на такие массивные элементы конструкций, как насыпь земляного полотна автомобильной дороги, гидротехнические сооружения (дамбы), контрфорс подпорных стен и в таких работах как [15-17].

Определения коэффициента запаса по предельным нагрузкам дает более реальное значения этого коэффициента, чем его определения по опасным напряжениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия. М.: Стройиздат, 1949. 280 с.
- [2]. Ржаницын А.Р. Строительная механика. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.
- [3]. Чирас А.А. Строительная механика. М.: Стройиздат, 1989. 255 с.
- [4]. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S. Safety Factor of Anisotropic Bars in the Space of Generalized Forces // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. Vol. 52. № 6. P. 781 – 788. DOI 10.1007/s11029-017-9629-0
- [5]. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S. The determining of the coefficient of safety of bearing ability of anisotropic bars in the general case of their complex resistance // *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 2014. Vol. 69, 012041. P. 1 – 5. DOI 10.1088/1757-899X/69/1/012041
- [6]. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S. Estimate of strength of anisotropic bars of arbitrary cross-section in the general case of their combined stress // *Mechanics of Solids*. 2010. Vol. 45. № 1. P. 67 – 73. DOI 10.3103/S0025654410010103
- [7]. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S. A technique of analyzing critical forces and moments for isotropic rods of arbitrary cross-section in the general case of their complex resistance // *Russian Aeronautics* 2008. Vol. 51. № 2. P. 126 – 129. DOI 10.3103/S1068799808020049
- [8]. Batnidge N.A., Sibgatullin E.S. Study of isotropic shell survivability by the analytical method // *Russian Aeronautics*. 2013. Vol. 56. № 2. P. 126 – 130. DOI 10.3103/S1068799813020037
- [9]. Исламов К.Ф., Сибгатуллин Э.С. Рациональное армирование железобетонного купола с вырезами // «Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки». 2006. Т. 11. № 4. С. 579 – 582.
- [10]. Sibgatullin E.S. The alternative fracture criterion for the energy-based theory of strength // *Strength of Materials*. 2001. № 2. P. 28 – 34.
- [11]. Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С., Маркин О.А. Предельное состояние многослойных композитных оболочек // *Механика композитных материалов*. 1988. № 4. С. 715 – 720.
- [12]. Geniev G.A., Kurbatov A.S. Strength criteria of anisotropic materials with regard for different failure mechanisms // *Strength problems*. 1991. № 12. P. 2 – 6.
- [13]. Малмейстер А.К. Геометрия теорий прочности // *Механика полимеров*. 1966. № 4. С. 519 – 534.
- [14]. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
- [15]. Mailyan L., Yaziev S., Sabitov L. Et al. Stress-strain state of the «combined tower-reinforced concrete foundation-foundation soil» system for high-rise structure // *E3S Web of Conferences: Topical Problems of Green Architecture, Civil and Environmental Engineering, TPACEE 2019, Moscow*, Vol. 164. Moscow: EDP Sciences, 2020. P. 02035. – DOI 10.1051/e3sconf/202016402035
- [16]. Izotov V.S., Mukhametrakhimov R.Kh., Sabitov L.S. Experimental research of efficiency of disperse reinforcement of stretched zone of flexural concrete elements // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2011. № 1 (9). P. 78 – 85.
- [17]. Каратаев О.Р., Сабитов Л.С., Кашапов Н.Ф. Численное моделирование совместной работы опор из тонкостенных стержней оболочек закрытого профиля со сборным железобетонным фундаментом в ПК Ansys // *Вестник технологического университета* 2018. Т. 21. № 12. С. 120 – 123.

REFERENCES

- [1]. Gvozdev A.A. Calculation of the load-bearing capacity of the structure by the method of limiting equilibrium. M.: Stroyizdat, 1949. 280 p.(rus.)
- [2]. Rzhantsyn A.R. Construction mechanics. M.: Higher School, 1991. 439 p. (rus.)
- [3]. Chiras A.A. Construction mechanics. M.: Stroyizdat, 1989. 255 p. (rus.)

- [4]. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S. Safety Factor of Anisotropic Bars in the Space of Generalized Forces. *Mechanics of Composite Materials*. 2017. 52 (6). P. 781 – 788. DOI 10.1007/s11029-017-9629-0
- [5]. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S. The determining of the coefficient of safety of bearing ability of anisotropic bars in the general case of their complex resistance. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 2014. 69, 012041. P. 1 – 5. DOI 10.1088/1757-899X/69/1/012041
- [6]. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S. Estimate of strength of anisotropic bars of arbitrary cross-section in the general case of their combined stress. *Mechanics of Solids*. 2010. 45 (1). P. 67 – 73. DOI 10.3103/S0025654410010103
- [7]. Sibgatullin K.E., Sibgatullin E.S. A technique of analyzing critical forces and moments for isotropic rods of arbitrary cross-section in the general case of their complex resistance *Russian Aeronautics* 2008. 51 (2). P. 126 – 129. DOI 10.3103/S1068799808020049
- [8]. Batnidze N.A., Sibgatullin E.S. Study of isotropic shell survivability by the analytical method. *Russian Aeronautics*. 2013. 56 (2). P. 126-130. DOI 10.3103/S1068799813020037
- [9]. Islamov K.F., Sibgatullin E.S. Rational reinforcement of a reinforced concrete dome with cutouts. “*Bulletin of the Tambov University. Series: Natural and Technical Sciences*”. 2006. 11 (4). P. 579 – 582. (rus.)
- [10]. Sibgatullin E.S. The alternative fracture criterion for the energy-based theory of strength. *Strength of Materials*. 2001. 2. P. 28 – 34.
- [11]. Teregulov I.G., Sibgatullin E.S., Markin O.A. Limiting state of multilayer composite shells. *Mechanics of composite materials*. 1988. 4. S. 715 – 720.
- [12]. Geniev G.A., Kurbatov A.S. Strength criteria of anisotropic materials with regard for different failure mechanisms. *Strength problems*. 1991. 12. P. 2 – 6.
- [13]. Malmeister A.K. Geometry of strength theories. *Mechanics of polymers*. 1966. 4. P. 519 – 534. (rus.)
- [14]. Kachanov L.M. Fundamentals of the theory of plasticity. Moscow: Nauka, 1969. 420 s. (rus.)
- [15]. Mailyan L., Yaziev S., Sabitov L. Et al. Stress-strain state of the «combined tower-reinforced concrete foundation-foundation soil» system for high-rise structure. *E3S Web of Conferences: Topical Problems of Green Architecture, Civil and Environmental Engineering, TPACEE 2019, Moscow*, 164. Moscow: EDP Sciences, 2020. P. 02035. – DOI 10.1051/e3sconf/202016402035
- [16]. Izotov V.S., Mukhametrakhimov R.Kh., Sabitov L.S. Experimental research of efficiency of disperse reinforcement of stretched zone of flexural concrete elements. *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2011. 1 (9). P. 78 – 85.
- [17]. Karataev O.R., Sabitov L.S., Kashapov N.F. Numerical modeling of joint work of supports made of thin-walled rods of shells of closed profile with precast reinforced concrete foundation in PC Ansys. *Bulletin of the Technological University* 2018. 21 (12). P. 120 – 123. (rus.)

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Новоселов О.Г., e-mail: OIGNovoselov@mail.ru, тел. +7(917)265-65-80, ORCID ID: 0000-0001-8810-0732, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57193998871>, Набережночелнинский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, кафедра «Технологии строительства и управления недвижимостью», старший преподаватель

Сабитов Л.С., e-mail: l.sabitov@bk.ru, тел. +7(937)774-07-00, ORCID ID: 0000-0001-7381-9752, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57079229700>, Казанский (Приволжский) федеральный университет, кафедра «Конструктивно-дизайнерское проектирование», Казанский государственный энергетический университет, кафедра «Энергообеспечение предприятий, строительство зданий и сооружений», доктор технических наук, профессор

Novoselov O.G., e-mail: OIGNovoselov@mail.ru, tel.: +7(917)265-65-80, ORCID ID: 0000-0001-8810-0732, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57193998871>, Naberezhnye Chelny Branch of Kazan (Volga Region) Federal University, Senior Lecturer

Sabitov L.S., e-mail: l.sabitov@bk.ru, tel.: +7(937)774-07-00, ORCID ID: 0000-0001-7381-9752, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57079229700>, Kazan (Volga Region) Federal University, Department of Structural and Design Engineering, Doctor of Engineering Sciences (Advanced Doctor), Professor

Сибгатуллин К.Э., e-mail: KESibgatullin@ksu.ru, тел. +7(855)271-25-77, ORCID ID: 0000-0001-5147-5485, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=24512656900>, Набережночелнинский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, кафедры «Промышленного, гражданского строительства и строительных материалов», кандидат технических наук, доцент

Сибгатуллин Э.С., e-mail: ESSibgatullin@ksu.ru, тел. 7(8552)712577, ORCID ID: 0000-0002-2080-4140, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6507564800>, Набережночелнинский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, кафедры «Промышленного, гражданского строительства и строительных материалов», доктор физико-математических наук, профессор

Клюев А.В., e-mail: Klyuyevav@yandex.ru, тел. +7(929)003-58-18, ORCID ID: 0000-0003-0845-8414, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56567996100>, Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, кафедра теоретической механики и сопротивления материалов, кандидат технических наук, доцент

Клюев С.В., e-mail: Klyuyev@yandex.ru, тел. +7(951)139-63-27, ORCID ID: 0000-0002-1995-6139, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57212454175>, Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, кафедра теоретической механики и сопротивления материалов, кандидат технических наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ведущий научный сотрудник

Шорстова Е.С., e-mail: kuzik_alena@mail.ru, тел. +7(915)525-41-33, ORCID ID: 0000-0003-4031-0989, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57200376413>, Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, кафедра теоретической механики и сопротивления материалов, кандидат технических наук, ассистент

Sibgatullin K.E., e-mail: KESibgatullin@ksu.ru, тел. +7(855)271-25-77, ORCID ID: 0000-0001-5147-5485, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=24512656900>, Naberezhnye Chelny Branch of Kazan (Volga Region) Federal University, Candidate of Engineering Sciences (Ph.D.), Associate Professor

Sibgatullin E.S., e-mail: ESSibgatullin@ksu.ru, тел. 7(8552)712577, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-2080-4140>, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6507564800>, Naberezhnye Chelny Branch of Kazan (Volga Region) Federal University, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (Advanced Doctor), Professor

Klyuev A.V., e-mail: Klyuyevav@yandex.ru, tel.: +7(929)003-58-18, ORCID ID: 0000-0003-0845-8414, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56567996100>, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Department of Theoretical Mechanics and Resistance of Materials, Candidate of Engineering Sciences (Ph.D.), Associate Professor

Klyuev S.V., e-mail: Klyuyev@yandex.ru, tel. +7(951)139-63-27, ORCID ID: 0000-0002-1995-6139, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57212454175>, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Department of Theoretical Mechanics and Resistance of Materials, Candidate of Engineering Sciences (Ph.D.), Associate Professor, Kazan (Volga Region) Federal University, Leading Research Officer

Shorstova E.S., e-mail: kuzik_alena@mail.ru, tel. +7(915)525-41-33, ORCID ID: 0000-0003-4031-0989, SCOPUS ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57200376413>, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Department of Theoretical Mechanics and Resistance of Materials, Candidate of Engineering Sciences (Ph.D.), Assistant Professor

Поступила в редакцию 12 января 2023 г.
Принята в доработанном виде 6 марта 2023 г.
Одобрена для публикации 3 апреля 2023 г.

Received: January 12, 2023
Revised: March 6, 2023
Accepted: April 3, 2023