КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Киясов С. Н., Шурыгин В. В.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ, МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Часть 2

Казань — 2017

УДК 517.9

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Протокол № 1 от 28 сентября 2017 г.

заседания кафедры теории функций и приближений Протокол № 1 от 31 августа 2017 г.

Научный редактор:
доктор физ.-мат. наук, проф. И.А. Бикчантаев

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф. КФУ Н.Б. Плещинский
канд. физ.-мат. наук, проф. КВТККУ Л.К. Астафьева

Киясов Сергей Николаевич, Шурыгин Вадим Вадимович.

Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач. Часть 2 (системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, краевые задачи, теория устойчивости, особые точки, нелинейные системы, линейные уравнения с частными производными первого порядка): Учебное пособие / С.Н. Киясов, В.В. Шурыгин. – Казань: Казанский федеральный университет, 2017. – 80 с.

Учебное пособие предназначено для студентов II курса Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского КФУ.

§1. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1.1. Общая линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Метод исключения

Эта система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^j(p)x_i(t) = f_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Здесь t — независимая переменная, $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ — неизвестные функции, $L_i^j(p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, — многочлены от оператора дифференцирования p с постоянными действительными коэффициентами (см. Часть 1, п. 10.1), а $f_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, — заданные, достаточное число раз дифференцируемые функции. Число уравнений системы равно числу неизвестных функций. Таким образом, каждое слагаемое $L_i^j(p)x_i$ представляет собой линейную комбинацию функции $x_i(t)$ и ее производных с постоянными коэффициентами:

$$L_i^j(p)x_i \equiv a_{0,i}^j x_i^{(s_i)} + a_{1,i}^j x_i^{(s_i-1)} + \ldots + a_{s_i-1,i}^j x_i' + a_{s_i,i}^j x_i, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где s_i — *порядок системы* (1.1) *относительно неизвестной функции* x_i (порядок наивысшей производной функции x_i, входящей в уравнения системы). Тогда число $m = s_1 + \ldots + s_n$ называется *порядком* этой системы.

Обозначим через $L(p)$ матрицу этой системы:

$$L(p) = \begin{pmatrix} L_1^1(p) & \cdots & L_n^1(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1^n(p) & \cdots & L_n^n(p) \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Пусть $D(p) = \det L(p)$ — определитель матрицы системы (1.1). Он является многочленом от p с постоянными действительными коэффициентами некоторой степени q, где $q \leqslant m$. *Решением системы* (1.1) называется набор достаточное число раз дифференцируемых функций $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, которые при подстановке в уравнения системы, обращают их в тождества. Обозначим через $M_j^i(p)$ алгебраическое дополнение (т.е., минор, взятый с надлежащим знаком) элемента $L_i^j(p)$ матрицы (1.2). Справедливо следующее тождество:

$$\sum_{j=1}^{n} M_j^i(p)L_k^j(p) = \delta_k^i D(p),$$

где δ_k^i — символ Кронекера ($\delta_i^i = 1$, $\delta_k^i = 0$ при $i \neq k$). Пусть набор функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ есть решение системы (1.1). Применяя к уравнениям системы дифференциальные операторы $M_1^i(p)$, $M_2^i(p)$, $\ldots$, $M_n^i(p)$ соответственно и складывая полученные уравнения получим, что функция $x_i(t)$ этого набора будет решением уравнения с постоянными коэффициентами

$$D(p)x_i = \sum_{j=1}^{n} M_j^i(p) f_j(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Обратное неверно. Если взять произвольные решения $x_i(t)$ уравнений (1.3) и составить набор функций $x_1(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$, то этот набор, вообще говоря, не будет решением системы (1.1). Для того чтобы найти *общее* решение системы (1.1), нужно найти общее решение $x_i(t)$ каждого из уравнений (1.3), $i = 1, \ldots, n$, из них составить набор функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ и выяснить, при каких соотношениях между постоянными интегрирования этот набор функций будет решением системы (1.1).

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \dot{y} & = t, \\ \ddot{x} - x - \dot{y} + y & = \cos t. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в операторном виде (1.1):

$$\begin{cases} (p^2+1)x - py & = t \\ (p^2-1)x + (-p+1)y & = \cos t. \end{cases}$$

Определителем $D(p)$ матрицы (1.2) этой системы является многочлен

$$D(p) = \begin{vmatrix} p^2+1 & -p \\ p^2-1 & -p+1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p + 1,$$

а соответствующие алгебраические дополнения равны

$$M_1^1(p) = -p+1, \quad M_2^1(p) = p, \quad M_1^2(p) = -p^2+1, \quad M_2^2(p) = p^2+1.$$

Применяя к первому уравнению дифференциальный оператор $M_1^1(p)$, а к второму — $M_2^1(p)$, получим для $x(t)$ уравнение

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t - 1 - \sin t.$$

Применяя дифференциальные операторы $M_1^2(p)$ и $M_2^2(p)$ соответственно, придем к уравнению (1.3) для $y(t)$:

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = t.$$

Общие решения этих уравнений (их можно найти используя метод неопределенных коэффициентов, см. Часть 1, п. 10.2) имеют вид

$$x = (at+b)e^t + t + 1 - \frac{1}{2}\cos t, \quad y = (ct+d)e^t + t + 2.$$

Подставив эти функции в уравнения системы, и сократив на e^t, придем к тождествам:

$$(2a-c)t + 2a + 2b - d - c = 0, \quad 2a - c = 0.$$

Откуда $c = 2a$, $d = 2b$. Полагая $a = C_1$, $b = C_2$, общее решение системы запишем следующим образом:

$$x = (C_1 t + C_2)e^t + t + 1 - \frac{1}{2}\cos t, \quad y = 2(C_1 t + C_2)e^t + t + 2.$$

Рассмотрим однородную систему

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^j(p)x_i(t) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

В том случае, когда набор функций $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ является решением системы (1.4), каждая функция $x_i(t)$ этого набора будет некоторым решением линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$D(p)x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

порядка q. Однако, если составить набор из n произвольных решений уравнения (1.5), то такой набор $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, как и в случае системы (1.1), также не будет решением системы (1.4).

Пусть $p = \lambda$ — корень многочлена $D(p)$ кратности k. Тогда решение системы (1.4) ищут в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(t)e^{\lambda t}, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — искомая вектор-функция, а $\mathbf{g}$ — векторный многочлен, компонентами которого служат многочлены степени $k-1$ с неопределенными коэффициентами. Любое решение системы (1.4) вида (1.6) называется решением, *соответствующим корню* λ. Подставив (1.6) в (1.4), сократив на $e^{\lambda t}$ и приравняв нулю коэффициенты при всех степенях t многочленов, стоящих в левых частях полученных тождеств, придем к линейной однородной алгебраической системе nk уравнений для определения такого же числа коэффициентов многочлена $\mathbf{g}(t)$. Обозначив через r ранг матрицы этой системы, получим, что решение, соответствующее корню λ будет линейно зависеть от $nk - r$ произвольных постоянных.

Пусть, теперь $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — совокупность всех различных корней многочлена $D(p)$ кратностей $k_1, \ldots, k_m$ соответственно, так, что $k_1 + \ldots + k_m = q$. Если $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ — решения системы (1.4), соответствующие корням $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, то общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_m. \tag{1.7}$$

Пусть λ — вещественный корень $D(p)$. Так как коэффициенты многочлена $D(p)$ вещественные, то решение вида (1.6), соответствующее этому корню, будет вещественным, если входящие в него произвольные постоянные считать вещественными. Если λ — комплексный корень многочлена $D(p)$, то сопряженное число $\overline{\lambda}$ также будет корнем этого многочлена, причем той же кратности. Пусть

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(t)e^{\lambda t}$$

есть решение, соответствующее корню λ. Считая входящие в него произвольные постоянные комплексными, получим комплексное решение системы (1.4), соответствующее этому корню. Так как система (1.4) имеет вещественные коэффициенты, то ее решением, соответствующим корню $\overline{\lambda}$, будет

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \overline{\mathbf{g}}(t)e^{\overline{\lambda} t}.$$

Тогда сумма $\mathbf{x} + \overline{\mathbf{x}} = 2\,\mathrm{Re}(\mathbf{x})$, входящая в (1.7), будет вещественной. Поэтому в случае комплексного корня λ решение, соответствующее корню $\overline{\lambda}$, искать необязательно. Достаточно найти лишь комплексное решение, соответствующее корню λ, и взять его вещественную часть (множитель 2 можно опустить).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} - 2x + \ddot{y} - y &= 0, \\ \dot{x} + \dot{y} + y &= 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в операторном виде (1.4):

$$\begin{cases} (p^2 + p - 2)x + (p^2 - 1)y &= 0 \\ px + (p+1)y &= 0. \end{cases}$$

Многочлен

$$D(p) = \begin{vmatrix} p^2 + p - 2 & p^2 - 1 \\ p & p + 1 \end{vmatrix} = 2p^2 - 2$$

имеет два простых вещественных корня $p_1 = 1,\ p_2 = -1$. Решение, соответствующее корню $p_1 = 1$, ищем в виде:

$$x = ae^t, \quad y = be^t.$$

Подставляя это решение во второе уравнение исходной системы, после сокращения на e^t получим $a + 2b = 0$ или $b = -C_1,\ a = 2C_1$ (подстановка в первое уравнение системы дает тот же результат). Тогда решение, соответствующее этому корню, запишется так:

$$x_1 = 2C_1 e^t, \quad y_1 = -C_1 e^t.$$

Решение, соответствующее корню $p_2 = -1$, ищем в виде:

$$x = ae^{-t}, \quad y = be^{-t},$$

что, после аналогичных вычислений, дает $(a = 0,\ b = C_2)$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = C_2 e^{-t}.$$

Поэтому, согласно (1.7), общее решение системы дается формулой

$$x = x_1 + x_2 = 2C_1 e^t, \quad y = y_1 + y_2 = -C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Пример 3. Решим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} + y &= 0, \\ \dot{x} + x + 2y &= 0. \end{cases}$$

Решение. Многочлен $D(p)$ этой системы равен $D(p) = (p-1)^2$ и имеет один двукратный корень $p = 1$. Поэтому решение системы, соответствующее этому корню, ищем в виде (1.6) (при $n = 2,\ k = 2$):

$$x = (at + b)e^t, \quad y = (ct + d)e^t,$$

в котором $a,\ b,\ c,\ d$ — неопределенные коэффициенты. Подставив эти соотношения в исходную систему и сократив на e^t, придем к необходимости выполнения тождеств

$$2(a + c)t + 2a + 2b + c + 2d \equiv 0, \quad 2(a + c)t + a + 2b + 2d \equiv 0.$$

Приравняв к нулю коэффициенты при всех степенях t, получим линейную однородную алгебраическую систему четырех уравнений для определения коэффициентов $a,\ b,\ c,\ d$. Так как ранг матрицы полученной системы равен двум, то, положив $a = 2C_1$, $b = C_2$, найдем $c = -2C_1$, $d = -C_1 - C_2$. Поэтому общее решение исходной системы можно записать в виде

$$x = (2C_1 t + C_2)e^t, \quad y = (-2C_1 t - C_1 - C_2)e^t.$$

Пример 4.

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} + y^{\mathrm{IV}} + y &= 0, \\ x + \ddot{y} + \dot{y} &= 0. \end{cases}$$

Решение. Многочлен $D(p)$ системы имеет два простых комплексных корня $p_1 = i$ и $p_2 = -i$. Решение, соответствующее корню $p = i$, ищем в виде

$$x = ae^{it}, \quad y = be^{it}.$$

Подставив его во второе уравнение системы, найдем $a = (1 - i)b$. Возьмем $b = C_1 + iC_2$. Тогда

$$x = (1 - i)(C_1 + iC_2)e^{it}, \quad y = (C_1 + iC_2)e^{it}$$

есть комплекснозначное решение системы, соответствующее корню $p = i$. Как было сказано выше, решение системы, соответствующее комплексно сопряженному корню $p = -i$, искать нет необходимости, а можно сразу записать ее общее решение:

$$x = \mathrm{Re}\big((1 - i)(C_1 + iC_2)e^{it}\big) = \mathrm{Re}\big((1 - i)(C_1 + iC_2)(\cos t + i \sin t)\big) =$$
$$= (C_1 + C_2)\cos t + (C_1 - C_2)\sin t,$$
$$y = \mathrm{Re}\big((C_1 + iC_2)e^{it}\big) = C_1 \cos t - C_2 \sin t.$$

Задачи.

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \ddot{x} - 2x + 3y &= 0, \\ \ddot{y} - x + 2y &= 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2\dot{x} + x - 5\dot{y} - 4y &= 0, \\ 3\dot{x} - 2x - 4\dot{y} + y &= 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \ddot{x} + 2x - 2\dot{y} &= 0, \\ 3\dot{x} + \ddot{y} - 8y &= 0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \ddot{x} - x + 3\ddot{y} &= 0, \\ \dot{x} + 3\dot{y} - 2y &= 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} - 2x - 2\dot{y} - y &= 0, \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y &= 0. \end{cases}$

Ответы.

1. $x = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t,\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t.$
2. $x = 3C_1e^t + C_2e^{-t},\ y = C_1e^t + C_2e^{-t}.$
3. $x = 2C_1e^{2t} + 2C_2e^{-2t} + 2C_3\cos 2t + 2C_4\sin 2t,\ y = 3C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t} -$
$- C_3\sin 2t + C_4\cos 2t.$
4. $x = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{-t},\ y = (-2C_1 - C_2 - 2C_2t)e^t - 4C_3e^{-t}.$
5. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t} + C_4e^{-2t},\ y = C_1e^t + 5C_2e^{-t} + 2C_3e^{2t} + 2C_4e^{-2t}.$

1.2. Нормальная линейная система с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных неизвестных функций:

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i + f^j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$

Здесь a_i^j, $i, j = 1, \ldots, n$, — некоторые вещественные постоянные, $f^j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, — заданные непрерывные функции. Такая система называется *нормальной линейной системой дифференциальных уравнений порядка* n.

Система

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i, \quad j = 1, \ldots, n \tag{1.9}$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

где $A = (a_i^j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, — постоянная вещественная матрица, называется нормальной линейной однородной системой дифференциальных уравнений, соответствующей неоднородной системе (1.8). Эта система, очевидно, является частным случаем системы (1.4), для которой $L_i^j(p) = a_i^j - \delta_i^j p$, $i, j = 1, \ldots, n$, где δ_i^j — символ Кронекера. Многочлен $D(p)$ системы (1.9) есть характеристический многочлен $\det(A - pE)$ матрицы A, степень которого равна n. Значит, в отличии от системы (1.4), общее решение системы (1.9) всегда содержит n произвольных постоянных интегрирования, а вектор-функции,

$$\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}, \ldots, x_{in}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.10}$$

стоящие при этих постоянных, образуют *фундаментальную систему решений* однородной системы (1.9). Это означает, что *определитель Вронского* системы решений (1.10)

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

отличен от нуля на любом интервале ее определения. Таким образом, общее решение системы (1.9) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + \ldots + C_n\mathbf{x}_n(t)$$

или, в координатной форме,

$$\begin{aligned} &x_1(t) = C_1 x_{11}(t) + \ldots + C_n x_{n1}(t), \\ &\ldots \\ &x_n(t) = C_1 x_{1n}(t) + \ldots + C_n x_{nn}(t). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Решение неоднородной системы (1.8) ищут в том же виде (1.12), что и общее решение соответствующей однородной системы (1.9), но C_i, $i = 1, \ldots, n$, считаются не постоянными, а пока неизвестными функциями переменной t. Для их определения записывают линейную алгебраическую систему (сравнить с (1.12))

$$\begin{aligned} &\dot{C}_1(t)x_{11}(t) + \ldots + \dot{C}_n(t)x_{n1}(t) = f^1(t), \\ &\ldots \\ &\dot{C}_1(t)x_{1n}(t) + \ldots + \dot{C}_n(t)x_{nn}(t) = f^n(t). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Определителем системы (1.13) служит определитель (1.11). Поэтому система имеет единственное решение $\dot{C}_i(t) = \varphi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда, интегрируя, находим

$$C_i(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi_i(t)\,dt + C_i,$$

$i = 1, \ldots, n$, где C_i — произвольные постоянные интегрирования. Подставляя найденные функции $C_i(t)$ в (1.12), получим общее решение системы (1.8), которое в векторной форме можно переписать так:

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + \ldots + C_n\mathbf{x}_n(t) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i(t) \int_{t_0}^{t} \varphi_i(t)\,dt.$$

В этой формуле первая сумма определяет общее решение однородной системы (1.9), а вторая — некоторое частное решение неоднородной системы.

Пример 5. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1, \\ \dot{y} = x + y + t. \end{cases}$$

Решение. Запишем соответствующую однородную систему в операторной форме:

$$\begin{cases} (p-1)x - y = 0, \\ -x + (p+1)y = 0. \end{cases}$$

Многочлен $D(p)$ этой системы имеет двукратный корень $p = 0$. Решение системы, соответствующее этому корню, ищем в виде

$$x = a + bt, \quad y = c + dt.$$

Подставив этот вид решения в систему и приравняв нулю свободные члены и коэффициенты при t, придем к линейной однородной алгебраической системе из четырех уравнений, ранг матрицы которой равен двум. Решив полученную систему, общее решение однородной системы запишем следующим образом:

$$x = C_1 + C_2 t, \quad y = -C_1 + C_2(1-t).$$

Следовательно, фундаментальную систему решений образуют вектор-функции с компонентами

$$x_1 = 1, \quad y_1 = -1; \qquad x_2 = t, \quad y_2 = 1 - t.$$

Система (1.13) в нашем случае принимает вид:

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2 t = 1, \quad -\dot{C}_1 + \dot{C}_2(1-t) = t.$$

Отсюда находим

$$\dot{C}_1 = 1 - t - t^2, \quad \dot{C}_2 = 1 + t.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(t) = t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + C_1, \quad C_2(t) = t + \frac{t^2}{2} + C_2.$$

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$x = C_1 + C_2 t + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}, \quad y = -C_1 + C_2(1-t) - \frac{t^3}{6}.$$

Задачи.

Решить системы уравнений методом вариации постоянных:

1. $\begin{cases} \dot{x} &= y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} &= y + \operatorname{tg} t. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} &= 2y - x, \\ \dot{y} &= 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{x} &= -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} &= 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{x} &= x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} &= 2x - y. \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dot{x} &= 3x - 2y, \\ \dot{y} &= 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$

Ответы.

1. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg}\, t,\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2.$
2. $x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t} \operatorname{arctg} e^t,\ y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} -$
$- e^t \ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t} \operatorname{arctg} e^t.$
3. $x = C_1 + 2C_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln|e^t - 1|,\ y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln|e^t - 1|.$
4. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \ln|\cos t|,$
$y = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t + 2 \cos t \ln|\cos t| + 2t \sin t.$
5. $x = (C_1 + 2C_2 t - 8t^{\frac{5}{2}})e^t,\ y = (C_1 + 2C_2 t - C_2 - 8t^{\frac{5}{2}} + 10t^{\frac{3}{2}})e^t.$

1.3. Метод неопределенных коэффициентов для неоднородных линейных систем с постоянными коэффициентами

В некоторых случаях частное решение системы (1.8) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов. Это можно делать, когда функции $f^j(t)$ состоят из сумм и произведений функций вида $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_k t^k$, $e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$, $\sin \beta t$. Это делается по тем же правилам, что и для линейных уравнений с постоянными коэффициентами, со следующим изменением: если $f^j(t) = P_{m_j}(t) e^{\gamma t}$, где P_{m_j} — многочлен степени m_j, то частное решение системы ищется в виде $x_i = Q^i_{m+s}(t) e^{\gamma t}$, $i = 1, \ldots, n$, где $m = \max(m_j)$, а число s равно кратности γ как корня характеристического уравнения (т.е., если γ не является его корнем, то $s = 0$). Чтобы найти неизвестные коэффициенты многочленов Q^i_{m+s}, нужно подставить эти выражения в исходную систему, и приравнять коэффициенты при одинаковых функциях.

Аналогично определяются степени многочленов в случае, когда $f^j(t) = P_{m_j}(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + R_{m_j}(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$, а число $\gamma = \alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения.

Как правило, том случае, когда можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов, этот метод приводит к решению быстрее, чем метод вариации постоянных, ибо не требует интегрирования.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y + (t+2)e^t + 2\cos t \\ \dot{y} &= x + 2y - t\sin t. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения однородной системы

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0, \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$$

Общее решение однородной системы имеет вид

$$x_0 = C_1e^t + C_2e^{3t}, \quad y_0 = -C_1e^t + C_2e^{3t}.$$

Правая часть неоднородной системы есть сумма двух вектор-функций $f_1(t) + f_2(t)$, где

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} (t+2)e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -t\sin t \end{pmatrix}.$$

Сначала найдем частное решение системы с правой частью $f_1(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y + (t+2)e^t \\ \dot{y} &= x + 2y. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Поскольку $\lambda = 1$ является корнем характеристического уравнения (кратности 1), частное решение системы (1.15) ищем в виде

$$x = (At^2 + Bt + C)e^t, \quad y = (Dt^2 + Et + F)e^t.$$

Подставим эти выражения в (1.15). Получим уравнения

$$\begin{aligned} e^t(At^2 + (B+2A)t + (B+C)) &= 2(At^2 + Bt + C)e^t + \\ &\quad + (Dt^2 + Et + F)e^t + (t+2)e^t \\ e^t(Dt^2 + (E+2D)t + (E+F)) &= (At^2 + Bt + C)e^t + 2(Dt^2 + Et + F)e^t. \end{aligned}$$

Сократим на e^t и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t. Получим систему из 6 уравнений

$$\begin{aligned}
&A = 2A + D,\\
&B + 2A = 2B + E + 1,\\
&B + C = 2C + F + 2,\\
&D = A + 2D,\\
&E + 2D = B + 2E,\\
&E + F = C + 2F.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Первое и четвертое уравнения равносильны: $A + D = 0$. Приводя подобные слагаемые, перепишем систему в виде

$$\begin{aligned}
&A + D = 0,\\
&2A = B + E + 1,\\
&B = C + F + 2,\\
&2D = B + E,\\
&E = C + F.
\end{aligned}$$

Вычтем второе и четвертое уравнение друг из друга, получим $2(A - D) = 1$. Вместе с первым уравнением это дает

$$A = \frac{1}{4}, \quad D = -\frac{1}{4}.$$

Подставим эти значения в систему:

$$\begin{aligned}
&B + E = -\frac{1}{2},\\
&B = C + F + 2,\\
&E = C + F.
\end{aligned}$$

Вычтем третье уравнение из второго: $B - E = 2$. Вместе с первым уравнением это дает

$$B = \frac{3}{4}, \quad E = -\frac{5}{4}.$$

После этого остается одно уравнение:

$$C + F = -\frac{5}{4}.$$

Можно взять, например,

$$C = 0, \; F = -\frac{5}{4}.$$

Отметим, что тот факт, что система (1.16) имеет бесконечно много решений, не случаен. Поскольку в общем решении однородной системы присутствуют слагаемые C_1e^t для $x(t)$ и $-C_1e^t$ для $y(t)$, это означает, что взяв одно частное решение системы (1.15) и прибавив к C любое C_1, а к E — соответственно $-C_1$, мы получим новое частное решение. Поэтому C и F нельзя найти однозначно, но их сумма, очевидно, остается постоянной при таких операциях. Таким образом, частное решение системы (1.15) можно взять в виде

$$x_{\text{ч.}1} = \left(\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t\right)e^t, \quad y_{\text{ч.}1} = -\left(\frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{4}t + \frac{5}{4}\right)e^t.$$

Теперь найдем частное решение системы с правой частью $f_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y + 2\cos t \\ \dot{y} &= x + 2y - t\sin t. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Поскольку число $0+1\cdot i = i$ не является корнем характеристического уравнения, а максимальная степень многочлена, на который умножаются функции $\sin t$ и $\cos t$, равна 1, частное решение системы (1.17) ищем в виде

$$x = (at+b)\sin t + (ct+d)\cos t, \quad y = (et+f)\sin t + (gt+h)\cos t.$$

Подставим эти выражения в (1.17):

$$\begin{aligned} &(a-(ct+d))\sin t + (c+(at+b))\cos t = \\ &\qquad = (2(at+b)+(et+f))\sin t + (2(ct+d)+(gt+h)+2)\cos t, \\ &(e-(gt+h))\sin t + (g+(et+f))\cos t = \\ &\qquad = ((at+b)+2(et+f)-t)\sin t + ((ct+d)+2(gt+h))\cos t. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной t отдельно для синуса и для косинуса (потому что функции $t^k\sin t$ и $t^\ell\cos t$ линейно независимы при $k,\ell = 0,1,2,\dots$). Получим систему из 8 уравнений

$$\begin{aligned} &-c = 2a + e, \\ &a - d = 2b + f, \\ &a = 2c + g, \\ &b + c = 2d + h + 2, \\ &-g = a + 2e - 1, \\ &e - h = b + 2f, \\ &e = c + 2g, \\ &g + f = d + 2h. \end{aligned}$$

Первое, третье, пятое и седьмое уравнения содержат только неизвестные a, c, e, g. Выразим $a = 2c + g$ и подставим в остальные три уравнения. После преобразований получим

$$5c + e + 2g = 0, \quad c + e + g = \frac{1}{2}, \quad c - e + 2g = 0.$$

Решая ее, находим

$$c = -\frac{1}{5}, \quad e = \frac{2}{5}, \quad g = \frac{3}{10},$$

тогда

$$a = -\frac{1}{10}.$$

Подставим найденные значения в оставшиеся уравнения и получим

$$2b + f + d = -\frac{1}{10}, \quad -b + 2d + h = -\frac{11}{5}, \quad b + 2f + h = \frac{2}{5}, \quad d - f + 2h = \frac{3}{10}.$$

Ее решение:

$$b = \frac{16}{25}, \quad d = -\frac{51}{50}, \quad f = -\frac{9}{25}, \quad h = \frac{12}{25}.$$

Таким образом, частное решение системы (1.17) имеет вид

$$x_{\text{ч}.2} = \left(-\frac{1}{10}t + \frac{16}{25}\right)\sin t - \left(\frac{1}{5}t + \frac{51}{50}\right)\cos t,$$
$$y_{\text{ч}.2} = \left(\frac{2}{5}t - \frac{9}{25}\right)\sin t + \left(\frac{3}{10}t + \frac{12}{25}\right)\cos t.$$

Окончательно, решение системы уравнений (1.14) находится по формулам

$$x(t) = x_0 + x_{\text{ч}.1} + x_{\text{ч}.2}, \quad y(t) = y_0 + y_{\text{ч}.1} + y_{\text{ч}.2}.$$

Задачи.

Решить системы уравнений методом неопределенных коэффициентов

1. $\begin{cases} \dot{x} &= y + 2e^t, \\ \dot{y} &= y + t^2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} &= y - 5\cos t, \\ \dot{y} &= 2x + y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} &= 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} &= x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} &= x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} &= 2x - 2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} &= 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} &= 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} &= 2x - y, \\ \dot{y} &= -x + 2y - 5e^t \sin t. \end{cases}$

Ответы.

1. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t - t^2 - 2,\ y = C_1e^t - C_2e^{-t} + (t-1)e^t - 2t.$
2. $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - 2\sin t - \cos t,\ y = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} + \sin t + 3\cos t.$
3. $x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t},\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}.$
4. $x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - (12t+13)e^t,\ y = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t} - (8t+6)e^t.$
5. $x = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + \cos t - 2\sin t,\ y = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t.$
6. $x = C_1e^t + C_2e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t),\ y = C_1e^t - C_2e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t).$

1.4. Решение линейных систем с постоянными коэффициентами с помощью показательной функции от матриц

Пусть задана вещественная или комплексная матрица A размера $n \times n$. Как обычно, будем обозначать единичную матрицу буквой E. *Показательной функцией* (или *матричной экспонентой*) матрицы A называется матрица

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k. \tag{1.18}$$

Легко показать, что ряд (1.18) сходится для любой матрицы A. Отметим ряд свойств этой функции.

I. $e^0 = E$, где нуль обозначает нулевую матрицу.

II. Если матрицы A и B *подобны*, т.е., существует невырожденная матрица C такая, что $B = C^{-1}AC$, то

$$e^B = C^{-1}e^AC. \tag{1.19}$$

Действительно, легко видеть, что $B^k = C^{-1}A^kC$ для любого $k = 0, 1, \ldots$, откуда и следует формула (1.19).

III. Ряд для e^{At} сходится равномерно по t на любом отрезке числовой оси и матричная функция $X(t) = e^{At}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dX(t)}{dt} = A \cdot X(t), \quad X(0) = E, \quad -\infty < t < +\infty.$$

IV. Если матрицы A и B перестановочны: $AB = BA$, то

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.$$

Из свойств I и III вытекает, что решение задачи Коши $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, задается формулой

$$\mathbf{x} = e^{At}\mathbf{x}_0.$$

Чтобы найти экспоненту e^A, матрицу A нужно привести к жордановой форме $J = CAC^{-1}$. Матрица J состоит из жордановых клеток, а каждая жорданова клетка имеет вид $J_i = \lambda E + F$, причем все элементы матрицы F равны нулю, за исключением косого ряда из единиц над главной диагональю. Тогда матрица F нильпотентна, т.е., некоторая ее степень F^m равна нулю. Поэтому ее экспонента легко ищется по формуле (1.18). Отсюда

$$e^{J_i} = e^{\lambda E+F} = e^{\lambda E} \cdot E^F = e^{\lambda} E \cdot e^F = e^{\lambda} \cdot e^F. \tag{1.20}$$

После этого из клеток e^{J_i} нужно составить матрицу e^J, а матрицу e^A найти по формуле $e^A = C^{-1} e^J C$.

В частности, если матрица A порядка n имеет только простые собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то ее жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Легко видеть (см, напр., [1]), что тогда

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

а матрица e^{At} дальше находится по формуле $e^{At} = C^{-1} e^{Jt} C$.

Пример 7. Найти матрицу e^{At}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Собственные числа матрицы A имеют вид $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Найдем такую невырожденную матрицу $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, что $A = C^{-1} J C$, где $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Для определения матрицы C получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} a+2b & a \\ c+2d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}.$$

На параметры a, b, c, d остается два уравнения: $a+b=0$, $c=2d$. Можно взять $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $d=1$, тогда

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$C^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, $e^{At}=C^{-1}e^{Jt}C$, т.е.,

$$e^{At}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t}+2e^{2t} & -e^{-t}+e^{2t} \\ -2e^{-t}+2e^{2t} & 2e^{-t}+e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Пример 8. Решить систему уравнений $\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, вычислив матрицу e^{At}.

Решение. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0, \qquad \lambda^2+2\lambda+1=0.$$

Получаем $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Ранг матрицы

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 1-(-1) & -2 \\ 2 & -3-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

равен 1, поэтому ее жорданова форма имеет вид

$$J=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем такую невырожденную матрицу $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Получаем два уравнения на переменные a, b, c, d:

$$2a + 2b = c, \quad c + d = 0.$$

Одно из решений есть $a = 1,\ b = 0,\ c = 2,\ d = -2$. Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Равенство $A = C^{-1}JC$ запишем в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу e^{Jt} по формуле (1.20). Имеем $J = -E + F$, где $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Легко видеть, что $F^2 = 0$, тогда $F^3 = F^4 = \ldots = 0$ и

$$e^{Ft} = E + Ft + \frac{1}{2}(Ft)^2 + \ldots = E + Ft = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $e^{Jt} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}(2t+1) & -2te^{-t} \\ 2te^{-t} & -e^{-t}(2t-1) \end{pmatrix}.$$

Наконец, любое решение $\mathbf{x}(t)$ данной системы, проходящее при $t = 0$ через точку $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$, запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}(2t+1) & -2te^{-t} \\ 2te^{-t} & -e^{-t}(2t-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}.$$

Пример 9. Решить задачу Коши

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Собственные числа матрицы A равны $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$, следовательно, ее жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}.$$

Найдем невырожденную матрицу $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ такую, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

После преобразований получаем систему уравнений

$$a(2-i) = b, \quad c(2+i) = d.$$

В качестве ее решения возьмем $a = c = 1$, $b = 2 - i$, $d = 2 + i$. Тогда

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - i & \frac{1}{2} + i \\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

Находим

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{t+2it} & 0 \\ 0 & e^{t-2it} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t & 0 \\ 0 & \cos 2t - i \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Далее, вычисляем

$$e^{At} = C^{-1} e^{Jt} C =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - i & \frac{1}{2} + i \\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \cdot e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t & 0 \\ 0 & \cos 2t - i \sin 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} =$$

$$e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos 2t + \sin 2t + i(\frac{1}{2}\sin 2t - \cos 2t) & \frac{1}{2}\cos 2t + \sin 2t + i(-\frac{1}{2}\sin 2t + \cos 2t) \\ -\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}i\cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}i\cos 2t \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\cos 2t + 2\sin 2t) & 5e^t \sin 2t \\ -e^t \sin 2t & e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) \end{pmatrix}.$$

Умножая последнюю матрицу на столбец $\mathbf{x}(0)$, находим решение задачи Коши

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos 2t + 2\sin 2t) & 5e^t \sin 2t \\ -e^t \sin 2t & e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 3\cos 2t + 16\sin 2t \\ 2\cos 2t - 7\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Другой способ нахождения матрицы e^{At}, связанный с использованием вещественной жордановой формы вида

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

см. в книге [7].

Пример 10. Решить систему уравнений $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

вычислив матрицу e^{At}.

Решение. Собственные числа матрицы A равны $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Ранг матрицы $A - \lambda_2 E = A - E$ равен 2, следовательно, жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

для которой $A = C^{-1}JC$, ищем из матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Запишем эквивалентную этому уравнению систему линейных алгебраических уравнений относительно c_{ij}:

$$\begin{array}{lll} c_{12} - c_{13} = 0, & c_{11} + c_{12} = 0, & c_{11} + c_{13} = 0, \\ c_{22} - c_{23} = c_{21} + c_{31}, & c_{21} + c_{22} = c_{22} + c_{32}, & c_{21} + c_{23} = c_{23} + c_{33}, \\ c_{32} - c_{33} = c_{31}, & c_{31} + c_{32} = c_{32}, & c_{31} + c_{33} = c_{33}. \end{array}$$

Она равносильна системе

$$c_{31} = 0, \quad c_{21} = c_{32} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{13} = -c_{11}, \quad c_{22} = c_{21} + c_{23}.$$

Выбрав $c_{11} = c_{21} = 1$, $c_{23} = 0$, получим $c_{22} = c_{32} = c_{33} = 1$, $c_{12} = c_{13} = -1$. Матрицы C и C^{-1} имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично примеру 7, находим матрицу

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^t \\ -1 & e^t & (t-1)e^t \\ 1 & -e^t & e^t(2-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 & e^t - 1 \\ e^t - 1 & e^t(t+1) & 1 + (t-1)e^t \\ 1 - e^t & -1 + e^t(1-t) & -1 + e^t(2-t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Умножив эту матрицу на столбец $\mathbf{x}_0 = (C_1, C_2, C_3)^T$, получим ответ

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ e^t - 1 \\ 1 - e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ e^t(t+1) \\ -1 + e^t(1-t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ 1 + (t-1)e^t \\ -1 + e^t(2-t) \end{pmatrix}.$$

Задачи.

Решить системы в векторной форме $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — вектор, A — данная матрица.

1. $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти решение, удовлетворяющее условию $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$

4. $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

5. $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

6. $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Ответы.

1. $\mathbf{x} = C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$

2. $\mathbf{x} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ t \end{pmatrix}.$

3. $\mathbf{x} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

4. $\mathbf{x} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$

5. $\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

6. $\mathbf{x} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ 2t + 1 \end{pmatrix}.$

§2. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами

2.1. Преобразование Лапласа

Функцией-оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t) = 0$, если $t < 0$;

2) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t;

3) $f(t)$ растет не быстрее показательной функции, т.е., существуют постоянные $M > 0$ и $s_0 \geqslant 0$ такие, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)| < Me^{s_0 t}$.

Очевидно, условиям 2), 3) удовлетворяют многие элементарные функции: t^n, $e^{\alpha t}$, $\sin \alpha t$ и другие. Условие 1) кажется несколько искуственным и вызвано, в первую очередь, тем, что излагаемый метод был предложен для решения дифференциальных уравнений и систем, описывающих некоторые физические процессы, в частности, в задачах радиофизики, в которых за независимую переменную берется время $t \geqslant 0$ от начала процесса, а правые части могут иметь конечное число точек разрыва первого рода и быть заданными графически. С другой стороны, если умножить функцию, удовлетворяющую условиям 2), 3) на *единичную функцию Хевисайда*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

то получится функция-оригинал. Поэтому мы будем заранее предполагать, что такое домножение уже произведено и функцию $\eta(t)f(t)$ будем считать функцией-оригиналом $f(t)$.

Изображением функции-оригинала по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt. \tag{2.1}$$

Функция $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией, причем $F(\infty) = 0$. Тот факт, что функция $F(p)$ есть изображение функции-оригинала $f(t)$, мы будем символически записывать следующим образом:

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad (\text{или } F(p) \doteqdot f(t)).$$

Свойства преобразования Лапласа.

Всюду в дальнейшем мы считаем, что

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \text{и} \quad g(t) \doteqdot G(p).$$

I. *Свойство линейности.* Для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p).$$

II. *Теорема подобия.* Для любого постоянного $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

III. *Дифференцирование оригинала.* Если $f'(t)$ — функция-оригинал, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0).$$

Обобщение. Если функция $f(t)$ n раз непрерывно дифференцируема при $t > 0$ и $f^{(n)}(t)$ — оригинал, то

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

IV. *Дифференцирование изображения.*

$$F'(p) \doteqdot -tf(t)$$

(дифференцирование изображения равносильно умножению оригинала на $-t$).

Обобщение.

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t).$$

V. *Интегрирование оригинала.*

$$\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$$

(интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p).

VI. *Интегрирование изображения.*

$$\int\limits_p^\infty F(p_1)\, dp_1 \doteqdot \frac{f(t)}{t},$$

если $\int_p^\infty F(p_1)\, dp_1$ сходится.

VII. *Теорема запаздывания.* Для любого $\tau > 0$ имеет место

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p).$$

VIII. *Теорема смещения.* Для любого комплексного λ имеет место

$$e^{\lambda t} f(t) \doteqdot F(p-\lambda).$$

IX. *Теорема умножения* (Э. Борель).

$$F(p)G(p) \doteqdot \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau.$$

Два последних интеграла называются сверткой функций f и g. Таким образом, умножение изображений равносильно свертке оригиналов.

Если изображение $F(p)$ есть правильная рациональная дробь: $F(p) = A(p)/B(p)$, где $A(p)$, $B(p)$ — многочлены и p_k, $k = 1, \ldots, m$, — полюсы функции $F(p)$ порядка n_k (то есть, нули многочлена $B(p)$ кратности n_k), то оригинал $f(t)$ может быть найден по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(n-1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} [F(p)(p-p_k)^{n_k} e^{pt}]. \tag{2.2}$$

В частном случае, когда все p_k, $k = 1, \ldots, m$, — простые полюсы ($n_k = 1$), формула (2.2) упрощается и принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{2.3}$$

Пример 1. Найти изображения следующих функций-оригиналов $f(t)$:

1) t^n; 2) $e^{\lambda t}$; 3) $\cos\omega t$; 4) $\sin\omega t$; 5) $\operatorname{ch}\omega t$; 6) $\operatorname{sh}\omega t$; 7) $e^{\lambda t}\cos\omega t$; 8) $t^n \sin\omega t$.

Решение. Непосредственным вычислением интеграла (2.1) при $f(t) \equiv 1$, находим, что $1 \doteqdot 1/p$. Согласно IV, $(-1)^n t^n \doteqdot (1/p)^{(n)}$, откуда 1) $t^n \doteqdot n!/p^{n+1}$.

Применяя VIII, получим 2) $e^{\lambda t} \doteqdot 1/(p-\lambda)$.

Так как $\cos\omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$, то, используя свойство I и найденное изображение функции $e^{\lambda t}$, получаем, что 3)

$$\cos\omega t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Аналогично, 4) $\sin\omega t = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i \risingdotseq \omega/(p^2+\omega^2)$, 5) $\operatorname{ch}\omega t = (e^{\omega t} + e^{-\omega t})/2 \risingdotseq p/(p^2-\omega^2)$, 6) $\operatorname{sh}\omega t = (e^{\omega t} - e^{-\omega t})/2 \risingdotseq \omega/(p^2-\omega^2)$.

Применяя VIII для функции $f(t) = \cos\omega t$, найдем 7) $e^{\lambda t}\cos\omega t \risingdotseq (p-\lambda)/[(p-\lambda)^2+\omega^2]$.

Аналогично, свойства IV и I для функции $f(t) = \sin\omega t$, приводят к 8) $t^n\sin\omega t \risingdotseq (-1)^n[\omega/(p^2+\omega^2)]^{(n)}$.

Пример 2. Найти оригиналы следующих изображений $F(p)$:

1) $(p+3)/(p^2+4)$; 2) $1/p(p^2-1)$; 3) $(p-1)/(p^2+2p+1)$; 4) $1/(p^2+1)^2$.

Решение. 1) Имеем

$$\frac{p+3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} + \frac{3}{2}\frac{2}{p^2+4} \risingdotseq \cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t;$$

2) Первый способ. Так как $1/(p^2-1) \risingdotseq \operatorname{sh} t$, то, согласно V, $1/p(p^2-1) \risingdotseq \int_0^t \operatorname{sh}\tau d\tau = \operatorname{ch} t - 1$;

Второй способ. Применяя формулу (2.3) при $m=3$, $A(p)\equiv 1$, $B(p) = p^3-p$, $p_1 = 0$, $n_1 = 1$, $p_2 = 1$, $n_2 = 1$, $p_3 = -1$, $n_3 = 1$, $B'(p) = 3p^2-1$, получим

$$f(t) = \frac{1}{-1} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \operatorname{ch} t - 1;$$

3) Имеем

$$\frac{p-1}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2} \risingdotseq e^{-t} + te^{-t} \quad \left(\frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq te^{-t} \ \ \text{(см. IV)}\right);$$

4) Первый способ. Так как $1/(p^2+1) \risingdotseq \sin t$, то, согласно IV, $t\sin t \risingdotseq 2p/(p^2+1)^2$, а применяя V и I, получим

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \frac{1}{2}\int\limits_0^t \tau\sin\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t.$$

Второй способ. Применяя формулу (2.2) при $m=2$, $A(p)\equiv 1$, $B(p) = (p^2+1)^2$, $p_1 = i$, $n_1 = 2$, $p_2 = -i$, $n_2 = 2$, получим

$$f(t) = \lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left[\frac{(p-i)^2e^{pt}}{(p^2+1)^2}\right] + \lim_{p\to -i}\frac{d}{dp}\left[\frac{(p+i)^2e^{pt}}{(p^2+1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{(p+i)^2}\right] + \lim_{p\to -i}\frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{(p-i)^2}\right] = \lim_{p\to i} e^{pt}\left[\frac{t}{(p+i)^2} - \frac{2}{(p+i)^3}\right] +$$

$$+\lim_{p\to -i} e^{pt}\left[\frac{t}{(p-i)^2} - \frac{2}{(p-i)^3}\right] = 2\operatorname{Re}\left(e^{it}\left[\frac{t}{(2i)^2} - \frac{2}{(2i)^3}\right]\right) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t.$$

2.2. Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_nx = f(t), \tag{2.4}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \tag{2.5}$$

Будем считать, что функция $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с его производными до $(n-1)$-го порядка включительно являются функциями-оригиналами. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. По правилу дифференцирования оригинала (свойство III) с учетом (2.5) найдем

$$\begin{aligned}
&x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0,\\
&x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - px_0 - x_1,\\
&\ldots\\
&x^{(n)}(t) \risingdotseq p^nX(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0) =\\
&\qquad\qquad\qquad = p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_1 - \ldots - x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Применяя к обеим частям уравнения (2.4) преобразование Лапласа и пользуясь свойством линейности преобразования, получаем операторное уравнение

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p),$$

в котором $A(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$, а $B(p)$ — некоторый многочлен степени $n-1$ от p, который получается при переносе в правую часть операторного уравнения слагаемых, не содержащих искомого изображения $X(p)$:

$$\begin{aligned}
B(p) = a_0x_0p^{n-1} &+ (a_1x_0 + a_0x_1)p^{n-2} + (a_2x_0 + a_1x_1 + a_0x_2)p^{n-3} + \ldots +\\
&+(a_{n-2}x_0 + a_{n-3}x_1 + \ldots + a_0x_{n-2})p + (a_{n-1}x_0 + a_{n-2}x_1 + \ldots + a_0x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Тогда $X(p) = (F(p) + B(p))/A(p)$ и решение задачи Коши сводится к отысканию оригинала $x(t)$ по известному изображению $X(p)$.

Пример 3. Рассмотрим задачу $\ddot{x} + x = t$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, тогда $\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - 1$, $\ddot{x}(t) \risingdotseq p^2X(p) - p$. Так как $t \risingdotseq 1/p^2$, то операторное уравнение принимает вид

$$(p^2+1)X(p) = \frac{1}{p^2} + p,$$

откуда

$$X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Переходя к оригиналам, получим (см. Пример 1) $x(t) = \cos t - \sin t + t$.

2.3. Решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Ограничимся лишь рассмотрением систем дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + b_{ik}\dot{x}_k + c_{ik}x_k) = f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.6}$$

с начальными условиями

$$x_k(0) = \alpha_k, \quad \dot{x}_k(0) = \beta_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Считая неизвестные функции $x_k(t)$, а также заданные функции $f_i(t)$, $i, k = 1, \ldots, n$, функциями-оригиналами и обозначая через $X_k(p)$ и $F_i(p)$ соответствующие им изображения, от системы (2.6), учитывая свойство III и начальные условия (2.7), придем к операторной системе

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik}p^2 + b_{ik}p + c_{ik}\right) X_k(p) =$$
$$= F_i(p) + \sum_{k=1}^{n} \left[\left(a_{ik}p + b_{ik}\right)\alpha_k + a_{ik}\beta_k\right], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Эта система является линейной алгебраической системой уравнений для определения изображений $X_1(p), \ldots, X_n(p)$, соответствующие оригиналы которых $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ будут решениями задачи Коши (2.6), (2.7).

Пример 4. Решим задачу

$$\ddot{x} + \dot{y} = t, \qquad \dot{x} + \ddot{y} = 1,$$
$$x(0) = y(0) = 1, \qquad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда $\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - 1$, $\ddot{x}(t) \risingdotseq p^2X(p) - p$; $\dot{y}(t) \risingdotseq pY(p) - 1$, $\ddot{y}(t) \risingdotseq pY(p) - p$. Записывая изображения правых частей системы, придем к операторной системе:

$$p^2X(p) + pY(p) = 1 + p + 1/p^2,$$
$$pX(p) + p^2Y(p) = 1 + p + 1/p,$$

решая которую, найдем

$$X(p) = \frac{1}{p}, \quad Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3},$$

откуда

$$x(t) = 1, \quad y(t) = 1 + \frac{t^2}{2}.$$

Задачи.

Решить операционным методом уравнения и системы уравнений:

1. $x'' - x' = 1,\ x(0) = -1,\ x'(0) = -1.$
2. $x'' + 6x' = 12t + 2,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$
3. $x'' + x = 2\cos t,\ x(0) = -1,\ x'(0) = 1.$
4. $x'' - x' = 2\sin t,\ x(0) = 2,\ x'(0) = 0.$
5. $x'' + 2x' + 3x = t\cos t,\ x(0) = -\frac{1}{4},\ x'(0) = 0.$
6. $\begin{cases} \dot{x} + y &= 0, \\ \dot{y} + x &= 0,\ x(0) = 2,\ y(0) = 0. \end{cases}$
7. $\begin{cases} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= 2(y + x),\ x(0) = 1,\ y(0) = 1. \end{cases}$
8. $\begin{cases} \dot{x} &= -x + y + e^t, \\ \dot{y} &= x - y + e^t,\ x(0) = 1,\ y(0) = 1. \end{cases}$
9. $\begin{cases} \dot{x} - \dot{y} &= -\sin t, \\ \dot{x} + \dot{y} &= \cos t,\ x(0) = \frac{1}{2},\ y(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$
10. $\begin{cases} \ddot{x} &= y, \\ \ddot{y} &= x,\ x(0) = y(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

Ответы.

1. $x = -1 - t.$
2. $x = t^2.$
3. $x = (t + 1)\sin t - \cos t.$
4. $x = e^t + \cos t - \sin t.$
5. $x = \frac{1}{4}(t - 1)(\sin t + \cos t).$
6. $x = e^t + e^{-t},\ y = -e^t + e^{-t}.$

7. $x = e^t(\cos t - 2\sin t),\ y = e^t(\cos t + 3\sin t)$.

8. $x = e^t,\ y = e^t$.

9. $x = \dfrac{1}{2}(\cos t + \sin t),\ y = \dfrac{1}{2}(-\cos t + \sin t)$.

10. $x = e^t + \sin t,\ y = e^t - \sin t$.

§3. Краевые задачи. Функция Грина

Рассмотрим следующую задачу. Найти решение уравнения

$$a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = f(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} &\alpha_{10}\dot{x}(t_0) + \alpha_{11}x(t_0) + \beta_{10}\dot{x}(t_1) + \beta_{11}x(t_1) = \gamma_1, \\ &\alpha_{20}\dot{x}(t_0) + \alpha_{21}x(t_0) + \beta_{20}\dot{x}(t_1) + \beta_{21}x(t_1) = \gamma_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь α_{ij}, β_{ij}, γ_i, $i, j = 1, 2$, — заданные постоянные. Коэффициенты уравнения (3.1) и его правую часть $f(t)$ будем считать непрерывными на отрезке $[t_0, t_1]$. Поставленная задача называется *краевой* или *граничной* задачей, а условия (3.2) называется *краевыми* (*граничными*) условиями. Отметим, что эти условия не позволяют определить значения $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ ни при $t = t_0$, ни при $t = t_1$. Поэтому краевая задача не сводится к задаче Коши и картина ее разрешимости может быть любой: краевая задача может иметь единственное решение, может иметь бесчисленное множество решений, а может не иметь решений. Отметим также, что если подобрать любую функцию $\omega(t)$, удовлетворяющую краевым условиям (3.2) (ее ищут, как правило, в виде многочлена) и сделать замену искомой функции $x(t) = y(t) + \omega(t)$, то относительно новой неизвестной функции $y(t)$ получится уравнение (3.1) с правой частью $f_1(t) = f(t) - a_0(t)\ddot{\omega}(t) - a_1(t)\dot{\omega}(t) - a_2(t)\omega(t)$ с однородным граничным условиям ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$). Поэтому, в дальнейшем, мы будем предполагать, что такая замена уже сделана, и будем искать решение уравнения (3.1), удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\begin{aligned} &\alpha_{10}\dot{x}(t_0) + \alpha_{11}x(t_0) + \beta_{10}\dot{x}(t_1) + \beta_{11}x(t_1) = 0, \\ &\alpha_{20}\dot{x}(t_0) + \alpha_{21}x(t_0) + \beta_{20}\dot{x}(t_1) + \beta_{21}x(t_1) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Функцией Грина краевой задачи (3.1), (3.3) называется функция двух переменных $G(t, s)$, для которой выполняются следующие условия:

I. При $t \neq s$ функция $G(t, s)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0. \tag{3.4}$$

II. При $t = t_0$ и $t = t_1$ функция $G(t, s)$ удовлетворяет соответственно первому и второму краевым условиям (3.3).

III. При $t = s$ функция $G(t, s)$ непрерывна:

$$G(t, s)|_{t=s+0} = G(t, s)|_{t=s-0}.$$

IV. При $t = s$ ее частная производная $G'_t(t, s)$ имеет скачок, равный $1/a_0(s)$:

$$G'_t(t, s)|_{t=s+0} - G'_t(t, s)|_{t=s-0} = \frac{1}{a_0(s)}.$$

Если краевая задача (3.1), (3.3) имеет единственное решение, то условия I–IV однозначно определяют ее функцию Грина, а решение краевой задачи дается формулой

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t, s) f(s)\, ds. \tag{3.5}$$

Метод функции Грина удобен в том случае, когда приходится многократно решать краевую задачу (3.1), (3.3), изменяя лишь правую часть уравнения (3.1). Тогда, построив функцию Грина, решение каждой такой задачи запишем по формуле (3.5).

Введем следующие обозначения:

$$V_{i,t_0}[x] = \alpha_{i0}\dot{x}(t_0) + \alpha_{i1}x(t_0), \quad V_{i,t_1}[x] = \beta_{i0}\dot{x}(t_1) + \beta_{i1}x(t_1), \quad i = 1, 2.$$

В этих обозначениях краевые условия (3.3) запишутся так:

$$V_i[x] = V_{i,t_0}[x] + V_{i,t_1}[x] = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.6}$$

Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (3.4) и $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ — его общее решение (C_1, C_2 — произвольные постоянные). Так как краевая задача (3.1), (3.6) имеет единственное решение, то однородная краевая задача (3.4), (3.6) не имеет нетривиальных решений. Поэтому условия

$$V_i[C_1x_1 + C_2x_2] = C_1V_i[x_1] + C_2V_i[x_2] = 0, \quad i = 1, 2,$$

могут выполняться лишь при $C_1 = C_2 = 0$, и определитель этой системы Δ отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} V_1[x_1] & V_1[x_2] \\ V_2[x_1] & V_2[x_2] \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.7}$$

Согласно свойству I, будем искать функцию Грина в виде

$$G(t,s) = \begin{cases} A_1(s)x_1(t) + A_2(s)x_2(t), & t_0 \leqslant t \leqslant s; \\ B_1(s)x_1(t) + B_2(s)x_2(t), & s \leqslant t \leqslant t_1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Тогда, в силу III, при $t = s$ должно выполняться равенство

$$B_1(s)x_1(s) + B_2(s)x_2(s) = A_1(s)x_1(s) + A_2(s)x_2(s).$$

Подставив частную производную функции Грина по переменной t

$$G'_t(t,s) = \begin{cases} A_1(s)x'_1(t) + A_2(s)x'_2(t), & t_0 \leqslant t \leqslant s; \\ B_1(s)x'_1(t) + B_2(s)x'_2(t), & s \leqslant t \leqslant t_1, \end{cases}$$

в условие IV, получим

$$B_1(s)x'_1(s) + B_2(s)x'_2(s) - (A_1(s)x'_1(s) + A_2(s)x'_2(s)) = 1/a_0(s).$$

Вводя новые неизвестные функции $C_i(s) = B_i(s) - A_i(s)$, $i = 1, 2$, придем к системе равенств

$$\begin{aligned} &C_1(s)x_1(s) + C_2(s)x_2(s) = 0, \\ &C_1(s)x'_1(s) + C_2(s)x'_2(s) = 1/a_0(s), \end{aligned} \tag{3.9}$$

которая имеет единственное решение $\{C_1(s), C_2(s)\}$, так как ее определителем является определитель Вронского фундаментальной системы решений $x_1(s)$, $x_2(s)$.

Удовлетворяя, наконец, условиям II и учитывая (3.6), (3.8), получим

$$A_1(s)V_{i,t_0}[x_1] + A_2(s)V_{i,t_0}[x_2] + B_1(s)V_{i,t_1}[x_1] + B_2(s)V_{i,t_1}[x_2] = 0, \quad i = 1, 2.$$

Положив в этих равенствах $B_i(s) = C_i(s) + A_i(s)$, $i = 1, 2$, мы придем к системе равенств

$$\begin{aligned} A_1(s)V_1[x_1] + A_2(s)V_1[x_2] &= -C_1(s)V_{1,t_1}[x_1] - C_2(s)V_{1,t_1}[x_2], \\ A_1(s)V_2[x_1] + A_2(s)V_2[x_2] &= -C_1(s)V_{2,t_1}[x_1] - C_2(s)V_{2,t_1}[x_2], \end{aligned} \tag{3.10}$$

которая, согласно (3.7), однозначно разрешима. Определив отсюда $A_i(s)$, а затем, по найденным ранее $C_i(s)$, и коэффициенты $B_i(s)$, $i = 1, 2$, функцию Грина краевой задачи (3.1), (3.3) получим по формуле (3.8).

Пример 1. Решим задачу

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + x = f(t), \\ &x(0) + \dot{x}(\pi) = 1, \quad \dot{x}(0) - x(\pi) = -1. \end{aligned}$$

Решение. Краевые условия задачи неоднородные. Будем искать функцию $\omega(t)$, удовлетворяющую этим условиям, в виде многочлена: $\omega(t) = at+b$. Подставив ее в краевые условия, найдем $\omega(t) \equiv 1$. Полагая $x(t) = y(t) + \omega(t) = y(t) + 1$, где $y(t)$ — новая неизвестная функция, придем к краевой задаче с однородными краевыми условиями:

$$\ddot{y} + y = f_1(t),$$
$$y(0) + \dot{y}(\pi) = 0, \quad \dot{y}(0) - y(\pi) = 0,$$

где $f_1(t) = f(t) - 1$.

Фундаментальную систему решений однородного уравнения $\ddot{y} + y = 0$ составляют функции $y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = \sin t$. Поэтому функцию Грина, согласно (3.8), ищем в виде

$$G(t,s) = \begin{cases} A_1(s)\cos t + A_2(s)\sin t, & 0 \leqslant t \leqslant s; \\ B_1(s)\cos t + B_2(s)\sin t, & s \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решив соответствующую систему (3.9):

$$C_1(s)\cos s + C_2(s)\sin s = 0,$$
$$-C_1(s)\sin s + C_2(s)\cos s = 1,$$

получим $C_1(s) = -\sin s$, $C_2(s) = \cos s$.

Чтобы записать систему (3.10), удобнее воспользоваться видом функций $G(t,s)$ и $G'_t(t,s)$ и потребовать выполнения для них свойства II:

$$G(0,s) + G'_t(\pi,s) = 0, \quad G'_t(0,s) - G(\pi,s) = 0.$$

Тогда получим $A_1(s) - B_2(s) = 0$, $A_2(s) + B_1(s) = 0$. Полагая $B_i = A_i + C_i$, $i = 1,2$, где C_i определены выше, придем к соответствующей системе (3.10):

$$A_1(s) - A_2(s) = \cos s, \quad A_1(s) + A_2(s) = \sin s.$$

Решив эту систему, найдем

$$A_1 = (\sin s + \cos s)/2, \quad A_2 = (\sin s - \cos s)/2.$$

Тогда

$$B_1 = A_1 + C_1 = -(\sin s - \cos s)/2, \quad B_2 = A_2 + C_2 = (\sin s + \cos s)/2.$$

Таким образом,

$$G(t,s) = \begin{cases} (\cos(t-s) - \sin(t-s))/2, & 0 \leqslant t \leqslant s; \\ (\cos(t-s) + \sin(t-s))/2, & s \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение задачи с однородными краевыми условиями запишем по формуле (3.5):

$$y(t) = \int\limits_0^\pi G(t,s) f_1(s)\, ds.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, нужно разбить его точкой $s = t$ на два интеграла и записать функцию Грина как функцию переменной s:

$$G(t,s) = \begin{cases} (\cos(t-s) + \sin(t-s))/2, & 0 \leqslant s \leqslant t; \\ (\cos(t-s) - \sin(t-s))/2, & t \leqslant s \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение исходной краевой задачи тогда запишется в следующем виде:

$$x(t) = 1 + \int\limits_0^t G(t,s) f(s)\, ds + \int\limits_t^\pi G(t,s) f(s)\, ds - \int\limits_0^\pi G(t,s)\, ds.$$

Задачи.

Построить функцию Грина следующих краевых задач:

1. $x'' = f(t),\ x(0) = 0,\ x(1) = 0.$
2. $x'' + x = f(t),\ x'(0) = 0,\ x(\pi) = 0.$
3. $x'' + x = f(t),\ x(0) = 0,\ x'(1) = 0.$
4. $x'' - x = f(t),\ x'(0) = 0,\ x'(2) + x(2) = 0.$
5. $x'' + x = f(t),\ x(0) = x(\pi),\ x'(0) = x'(\pi).$

Ответы.

1. $G = (s-1)t,\ t \in [0,s],\ G = s(t-1),\ t \in [s,1].$
2. $G = \sin s \cos t,\ t \in [0,s],\ G = \cos s \sin t,\ t \in [s,\pi].$
3. $G = e^s(e^{-t} - 1),\ t \in [0,s],\ G = 1 - e^s,\ t \in [s,1].$
4. $G = -e^{-s} \operatorname{ch} t,\ t \in [0,s],\ G = -e^{-t} \operatorname{ch} s,\ t \in [s,2].$
5. $G = \dfrac{1}{2} \sin |t-s|.$

§4. Устойчивость

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

или, в векторной записи

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n). \tag{4.2}$$

Вектор-функцию $f(t, \mathbf{x})$ будем считать удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши на открытом множестве $G : t > \alpha,\ \mathbf{x} \in D$, где D – некоторое открытое множество пространства переменных $x_1, \ldots, x_n$.

В дальнейшем будем считать, что функции f_i и $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ непрерывны при $t \geqslant t_0$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Определение. Решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ системы (4.2), определенное на промежутке $[t_0, +\infty)$, называется *устойчивым* по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

1) любое решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, удовлетворяющее условию

$$|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta, \tag{4.3}$$

определено в промежутке $[t_0, +\infty)$;

2) для всех этих решений выполняется неравенство

$$|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0. \tag{4.4}$$

Иными словами, решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ устойчиво, если все достаточно близкие к нему в любой заранее выбранный начальный момент $t = t_0$ решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ целиком содержатся в сколь угодно узкой ε-трубке, построенной вокруг решения $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$.

Если же для некоторого ε такого δ не существует, то решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ называется *неустойчивым.*

Определение. Решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ системы (4.2) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того, для всех решений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, удовлетворяющих условию (4.3) выполняется

$$|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| \to 0, \quad t \to +\infty. \tag{4.5}$$

Ясно, что условие (4.5) сильнее, чем условие (4.4), потому что оно означает, что решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ не просто содержится в ε-трубке, а еще и стремится к решению $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$.

Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора точки t_0. Из неравенств (4.3)–(4.4) следует, что всегда следует выбирать $\delta \leqslant \varepsilon$.

Вопрос исследования устойчивости некоторого решения $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ системы (4.2) всегда можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения $\mathbf{y}(t) \equiv 0$ другой системы уравнений, получаемой из (4.2) заменой $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\varphi}(t)$. На рисунке ниже показана устойчивость нулевого решения в двумерном случае.

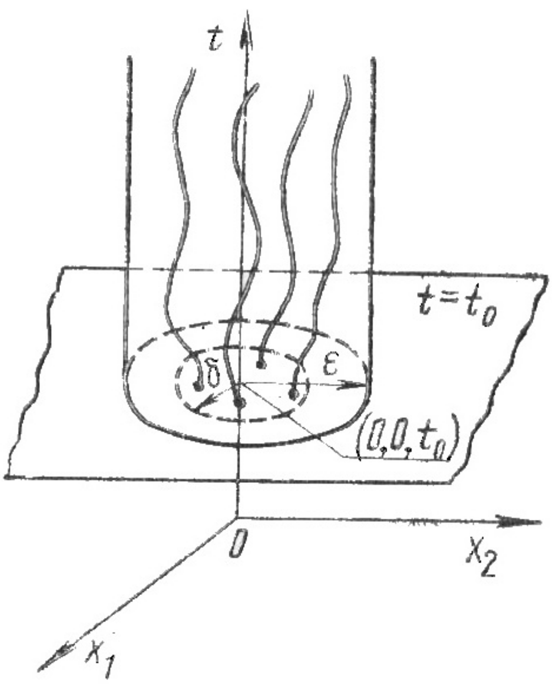

Рис. 1.

Пример 1. Выяснить, устойчиво ли решение уравнения $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$ с начальным условием $y(0) = 0$?

Решение. Общее решение этого уравнения имеет вид $y = \sin x + C \cos x$. Подставив сюда начальное условие, получим $C = 0$. Таким образом, на устойчивость требуется исследовать решение $\varphi(x) = \sin x$.

Разность $y(x) - \varphi(x) = C \cos x$. Выберем $x_0 = 0$. Запишем условие (4.3): $|y(x_0) - \varphi(x_0)| = |C| < \delta$. Неравенство (4.4) принимает вид $|C \cos x| < \varepsilon$. Легко видеть, что для его выполнения при всех $x \geqslant x_0 = 0$ достаточно выбрать любое положительное $\delta \leqslant \varepsilon$. Следовательно, решение $\varphi(x) = \sin x$ исходного уравнения устойчиво.

Поскольку выражение $|y(x) - \varphi(x)| = |C \cos x|$ не стремится к нулю при

$x \to +\infty$ и малых $C \neq 0$, это решение не будет асимптотически устойчивым.

Пример 2. Выяснить, устойчиво ли решение уравнения $x' = 3\sqrt[3]{x^2}$ с начальным условием $x(0) = 1$?

Решение. Общее решение данного уравнения с разделяющимися переменными имеет вид $x = (t - C)^3$, кроме того, есть еще решение $x = 0$. Решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, получается при $C = -1$ и имеет вид $\varphi(t) = (t + 1)^3$.

Разность $x(t) - \varphi(t) = -3t^2(C+1) + 3t(C^2 - 1) - (C^3+1)$. Возьмем $t_0 = 0$. Условие (4.3) примет вид $|C^3 + 1| < \delta$. Отсюда $\sqrt[3]{-1-\delta} < C < \sqrt[3]{-1+\delta}$. Это означает, что C принадлежит некоторому открытому интервалу, содержащему точку -1.

Запишем теперь условие (4.4): $|-3t^2(C + 1) + 3t(C^2 - 1) - (C^3 + 1)| < \varepsilon$. Под знаком модуля стоит многочлен от t, не равный константе при всех $C \neq -1$. Ясно, что модуль этого многочлена не может быть ограничен сверху никаким числом ε при $t \to +\infty$. Поэтому решение $\varphi(t) = (t+1)^3$ не является устойчивым.

4.1. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим один из методов исследования на устойчивость нулевого решения системы (4.1). Разложим функции f_i в ряд Тейлора в точке $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ с точностью до слагаемых первой степени:

$$f_i(t, \mathbf{x}) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + \psi_i(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.6}$$

где a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, — постоянные числа, а функции $\psi_i(t, \mathbf{x})$ — бесконечно малые порядка выше первого, то есть,

$$\lim_{|\mathbf{x}| \to 0} \frac{|\psi_i(t, \mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0 \tag{4.7}$$

равномерно по $t \geqslant t_0$ (здесь $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$). Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица из коэффициентов разложений (4.6).

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. *Если вещественные части всех собственных значений матрицы A отрицательны, а функции f_i, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют равенству (4.7), то нулевое решение системы (4.1) асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно собственное значение матрицы A имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение неустойчиво.*

Эта теорема, таким образом, позволяет исследовать лишь случай асимптотической устойчивости или неустойчивости. Если же собственные значения матрицы A имеют как отрицательные, так и нулевые вещественные части (но нет собственных значений с положительной вещественной частью), то теорема не дает ответа об устойчивости (неустойчивости) нулевого решения. В этом случае необходимо дополнительное исследование (см. п. 4.2).

Пример 3. Рассмотрим пример, иллюстрирующий эту теорему. Пусть дана система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -3y. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Решение. Эта система легко решается: $x = C_1e^{-t}$, $y = C_2e^{-3t}$. Исключив отсюда t и обозначив $k = C_2/C_1^3$, получим $y = kx^3$. Таким образом, траекториями системы уравнений (4.8) являются всевозможные кубические параболы, а также прямые $x = 0$ и $y = 0$ (при $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$). Из того, что $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, следует, что движение по траектории осуществляется в сторону начала координат. Поэтому, если взять решение системы, достаточно близкое к нулевому, то это решение будет стремиться к нулю при $t \to +\infty$. Таким образом, нулевое решение системы (4.8) асимптотически устойчиво.

Матрица A в рассматриваемом случае имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Ее собственные значения равны -1 и -3 и асимптотическая устойчивость нулевого решения следует также из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Пример 4. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{9 - x + 2y} - 3\cos 2y, \\ \dot{y} &= e^x - e^{2y} + \ln(1 - 5x). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Решение. Разложим в ряд Тейлора с точностью до $o(\sqrt{x^2+y^2})$ все входящие в правые части функции: $\sqrt{9 - x + 2y} = 3\sqrt{1 - x/9 + 2y/9} \approx 3 - x/6 + y/3$; $3\cos 2y \approx 3$; $e^x \approx 1 + x$; $e^{2y} \approx 1 + 2y$; $\ln(1 - 5x) \approx -5x$.

Следовательно, с точностью до $o(\sqrt{x^2+y^2})$ система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y, \\ \dot{y} &= -4x - 2y, \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -1/6-\lambda & 1/3 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\frac{13}{6}\lambda+\frac{5}{3}=0.$$

Корнями этого уравнения являются числа $\lambda_{1,2}=-\dfrac{13}{12}\pm\dfrac{\sqrt{71}}{12}$. Они вещественны и отрицательны, следовательно, нулевое решение системы (4.9) асимптотически устойчиво.

Задачи.

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение следующих систем:

1. $\begin{cases} \dot{x} &= e^{x+2y}-\cos 3x, \\ \dot{y} &= \sqrt{4+8x}-2e^y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} &= \ln(3e^y-2\cos x), \\ \dot{y} &= 2e^x-(8+12y)^{1/3}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} &= \ln(4y+e^{-3x}), \\ \dot{y} &= 2y-1+(1-6x)^{1/3}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} &= -10x+4e^y-4\cos y^2, \\ \dot{y} &= 2e^x-2-y+x^4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} &= 7x+2\sin y-y^4, \\ \dot{y} &= e^x-3y-1+\dfrac{5}{2}x^2. \end{cases}$

Ответы.

1. неустойчиво.
2. неустойчиво.
3. асимптотически устойчиво.
4. асимптотически устойчиво.
5. неустойчиво.

4.2. Исследование на устойчивость с помощью теоремы Ляпунова

В случае, когда у матрицы A нет положительных собственных значений, но есть собственные значения, равные нулю, теорема об устойчивости по первому приближению оказывается неприменима.

Рассмотрим функцию $V(t,\mathbf{x})$, непрерывно дифференцируемую в области

$$D=\{||\mathbf{x}||<\varepsilon,\quad t\geqslant t_0\}.$$

Определение. Функция $V(t,\mathbf{x})$ называется *знакопостоянной (знакоположительной* или *знакоотрицательной)* в области D, если

$$V(t,\mathbf{x}) \geqslant 0 \quad (\text{или } V(t,\mathbf{x}) \leqslant 0) \quad \text{при} \quad (t,\mathbf{x}) \in D.$$

Определение. Функция $V(t,\mathbf{x})$ называется *положительно определенной* в области D, если существует непрерывная функция $W(\mathbf{x})$, $||\mathbf{x}|| < \varepsilon$ такая, что

$$V(t,\mathbf{x}) \geqslant W(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq 0; \qquad V(t,0) = W(0) = 0.$$

Функция $V(t,\mathbf{x})$ называется *отрицательно определенной* в области D, если существует непрерывная функция $W(\mathbf{x})$, $||\mathbf{x}|| < \varepsilon$ такая, что

$$V(t,\mathbf{x}) \leqslant -W(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq 0; \qquad V(t,0) = W(0) = 0.$$

Положительно или отрицательно определенная функция называется *знакоопределенной* в D.

В качестве функции $W(\mathbf{x})$ иногда можно взять $W(\mathbf{x}) = \inf\limits_t |V(t,\mathbf{x})|$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n), \quad i = 1,\ldots,n, \quad (t,\mathbf{x}) \in G. \tag{4.10}$$

Функцию

$$\dot{V}(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t,\mathbf{x})$$

называют *производной по t в силу системы* (4.10). Если $\mathbf{x}(t)$ есть решение системы (4.10), то $\dot{V}(t,\mathbf{x})$ представляет собой полную производную по t сложной функции $V(t,\mathbf{x}(t))$.

Теорема Ляпунова об устойчивости. *Если для системы уравнений* (4.10) *существует положительно определенная в области D функция $V(t,\mathbf{x})$, производная $\dot{V}(t,\mathbf{x})$ которой в силу системы* (4.10) *является знакоотрицательной на G, то нулевое решение системы устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$.*

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. *Если для системы уравнений* (4.10) *существует положительно определенная в области D функция $V(t,\mathbf{x})$, производная $\dot{V}(t,\mathbf{x})$ которой в силу системы* (4.10) *является отрицательно определенной на G, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$.*

Функция V в этом случае называется *функцией Ляпунова.* Общего метода построения функции Ляпунова не существует. При $n = 2$ иногда удается построить ее в виде суммы одночленов вида $ax^{2k}y^{2\ell}$, $a > 0$.

Теорема Четаева о неустойчивости. *Пусть система уравнений* (4.10) *обладает нулевым решением. Пусть существуют область U пространства переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ и функция $V(t, \mathbf{x})$, определенная при $\mathbf{x} \in U$, $t \geqslant t_0$, такие, что:*

1) *точка $\mathbf{x} = 0$ принадлежит границе области U;*

2) *функция $V(t, \mathbf{x})$ равна нулю на границе области U при $||\mathbf{x}|| < \varepsilon$;*

3) *внутри области U при $t > t_0$ функция V положительна, а ее производная $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ в силу системы* (4.10) *положительно определенная.*

Тогда нулевое решение системы неустойчиво.

Пример 5. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y^3 - 2x^3 - x^2y^3, \\ &\dot{y} = -x + x^3 - y^5. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Решение. Попытаемся применить теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Матрица A из п. 4.1 имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, и ее собственные значения равны нулю, поэтому теорема об устойчивости по первому приближению ответа не дает.

Построим функцию Ляпунова V. Ее производная в силу системы (4.11) имеет вид

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(y^3 - 2x^3 - x^2y^3) + \frac{\partial V}{\partial y}(-x + x^3 - y^5).$$

Попытаемся уничтожить слагаемые, входящие в это выражение со знаком «+». Если V будет содержать слагаемое вида ax^{2k}, то ее производная будет содержать слагаемое $y^3 \cdot (ax^{2k})' = akx^{2k-1}y^3$. Его можно взаимно уничтожить только со слагаемым $-\frac{\partial V}{\partial y} \cdot x$. Этого можно добиться, если $2k - 1 = 1$, откуда $k = 1$. Аналогично, если V будет содержать слагаемое $by^{2\ell}$, то $\dot{V}$ будет содержать слагаемое $x^3 \cdot (by^{2\ell})' = 2b\ell x^3y^{2\ell-1}$. От него можно избавиться за счет слагаемого $-\frac{\partial V}{\partial x} \cdot x^2y^3$, откуда необходимо $\ell = 2$. Итак, посмотрим, что будет, если функция V будет содержать слагаемые $ax^2 + by^4$. В этом случае в выражении для $\dot{V}$ будет присутствовать $2ax(y^3 - 2x^3 - x^2y^3) + 4by^3(-x + x^3 - y^5) = 2axy^3 - 4ax^4 - 2ax^3y^3 - 4bxy^3 + 4bx^3y^3 - 4by^8$. Легко видеть, что при $a = 2$, $b = 1$, функция $\dot{V} = -8x^4 - 4y^8$ будет отрицательно определенной в окрестности начала координат.

Таким образом, функция $V(t, x, y) = 2x^2 + y^4$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и нулевое решение системы (4.11) будет асимптотически устойчивым.

Пример 6. Показать, что нулевое решение системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + xy, \\ \dot{y} &= 2y^2 + x^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

неустойчиво.

Решение. Покажем, что функция $V(x, y) = y - x^2/2$ удовлетворяет условиям теоремы Четаева. Действительно, рассмотрим область $U = \{(x, y) \mid y \geqslant x^2/2\}$. Точка $(0, 0)$ принадлежит ее границе, а функция V равна нулю на этой границе и положительна внутри области. Производная в силу системы $\dot{V} = -x(-x + xy) + 2y^2 + x^2 = 2y(y - x^2/2)$ положительно определена внутри области U, так как $y \geqslant x^2/2 \geqslant 0$.

Задачи.

Построив функцию Ляпунова и применяя теоремы Ляпунова или теорему Четаева, исследовать на устойчивость нулевое решение следующих систем:

1. $\begin{cases} \dot{x} &= x^3 - y, \\ \dot{y} &= x + y^3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} &= -3y - 2x^3, \\ \dot{y} &= 2x - 3y^3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} &= -xy^4, \\ \dot{y} &= x^4 y. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} &= x^5 + y^3, \\ \dot{y} &= x^3 - y^5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} &= xy - x^3 + y, \\ \dot{y} &= x^4 - x^2 y - x^3. \end{cases}$

Ответы.

1. неустойчиво ($V = x^2 + y^2$).
2. асимптотически устойчиво ($V = 2x^2 + 3y^2$).
3. устойчиво ($V = x^4 + y^4$).
4. неустойчиво ($V = x^4 - y^4$).
5. устойчиво ($V = x^4 + 2y^2$).

4.3. Условия отрицательности вещественных частей корней многочлена

Левая часть характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ для нахождения собственных значений матрицы A представляет собой многочлен. Таким образом, чтобы найти собственные значения, приходится искать корни этого многочлена, а это зачастую сделать не очень просто. Естественным образом возникает вопрос: нельзя ли выяснить, будут ли вещественные части корней заданного многочлена

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad (4.13)$$

отрицательны (такие многочлены называют устойчивыми), не вычисляя самих корней? Ответ на этот вопрос дают следующие условия.

Необходимое условие. *Все коэффициенты a_i должны быть положительны.* Отметим, что в случае, когда $n \leqslant 2$, это условие одновременно является и достаточным. Действительно, если $n = 1$, то $\lambda = -a_1/a_0 < 0$. Если же $n = 2$, то необходимо рассмотреть два случая. 1) Дискриминант D уравнения отрицателен. Тогда корни имеют вид $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm i\sqrt{|D|}}{2a_0}$, и их вещественные части, равные $-\dfrac{a_1}{2a_0}$, отрицательны. 2) Дискриминант уравнения неотрицателен. Тогда оно имеет два вещественных корня, сумма которых отрицательна (она равна $-\dfrac{a_1}{a_0}$), а произведение положительно (оно равно $\dfrac{a_2}{a_0}$). Поэтому оба эти корня отрицательны.

Достаточные условия Рауса-Гурвица. Составим из коэффициентов уравнения (4.13) матрицу размера $n \times n$, называемую *матрицей Гурвица*:

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Строится она следующим образом: по главной диагонали записываются числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. После этого в каждой строке числа a_i расставляются вправо по убыванию индексов, а влево по возрастанию, пока не закончатся индексы, либо не закончится строка. Оставшиеся свободными места заполняются нулями. После этого необходимо вычислить все главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

Условия Рауса-Гурвица состоят в том, что *все эти миноры должны быть положительны.*

Достаточные условия Льенара-Шипара. Эти условия равносильны условиям Рауса-Гурвица и состоят в том, что *достаточно того, чтобы были* *положительны миноры* Δ_{n-1}, Δ_{n-3}, Δ_{n-5}, *и т.д.* Эти условия удобнее для практического применения, так как содержат фактически вдвое меньше определителей.

Пример 7. Будет ли нулевое решение системы уравнений

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -3x_1 - 2x_3 - x_5,\\
\dot{x}_2 &= -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4,\\
\dot{x}_3 &= -2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5,\\
\dot{x}_4 &= -x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4,\\
\dot{x}_5 &= -3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

устойчиво?

Решение. Собственные значения матрицы системы находятся из уравнения

$$
\begin{vmatrix}
-3-\lambda & 0 & -2 & 0 & -1\\
-1 & -3-\lambda & -1 & -1 & 0\\
-2 & -2 & -1-\lambda & 0 & -1\\
-1 & -3 & -1 & -2-\lambda & 0\\
-3 & -2 & 1 & -1 & -1-\lambda
\end{vmatrix}
= \lambda^5+10\lambda^4+27\lambda^3+23\lambda^2+24\lambda+15 = 0.
$$

Все коэффициенты последнего уравнения положительны, так что необходимое условие выполнено. Вместо того, чтобы решать это уравнение, запишем матрицу Гурвица и условия Льенара-Шипара:

$$
G = \begin{pmatrix}
10 & 1 & 0 & 0 & 0\\
23 & 27 & 10 & 1 & 0\\
15 & 24 & 23 & 27 & 10\\
0 & 0 & 15 & 24 & 23\\
0 & 0 & 0 & 0 & 15
\end{pmatrix},
\qquad
\Delta_4 = \begin{vmatrix}
10 & 1 & 0 & 0\\
23 & 27 & 10 & 1\\
15 & 24 & 23 & 27\\
0 & 0 & 15 & 24
\end{vmatrix},
\quad
\Delta_2 = \begin{vmatrix}
10 & 1\\
23 & 27
\end{vmatrix}.
$$

Вычисляя определители, получаем $\Delta_4 = -14316$, $\Delta_2 = 247$. Поскольку Δ_4 отрицателен, нулевое решение системы (4.14) неустойчиво.

Приближенное решение уравнения дает

$$
x_1 \approx -6.093, \quad x_2 \approx -3.174, \quad x_3 \approx -0.822, \quad x_{4,5} \approx 0.045 \pm 0.97i.
$$

Два последних корня имеют положительные вещественные части.

Задачи.

Исследовать устойчивость нулевого решения уравнений:

1. $y''' + y'' + y' + 2y = 0.$
2. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$
3. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$
4. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$
5. $y^{\mathrm{V}} + 2y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$

Ответы.

1. неустойчиво.
2. устойчиво.
3. устойчиво.
4. неустойчиво.
5. неустойчиво.

§5. Особые точки

Особой точкой системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{5.1}$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \tag{5.2}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы, называется точка, в которой эти функции одновременно обращаются в нуль. Особая точка системы (5.1) называется также *положением равновесия* этой системы.

Чтобы исследовать поведение траекторий системы (5.1) или интегральных кривых уравнения (5.2) вблизи особой точки (x_0, y_0), осуществляют замену переменных

$$x = x_1 + x_0, \quad y = y_1 + y_0 \tag{5.3}$$

и полученные в результате такой замены систему или уравнение исследуют вблизи особой точки $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что такая замена уже сделана и исследовать особую точку $(0,0)$.

Рассмотрим сначала линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \tag{5.4}$$

Соответствующее этой системе уравнение (5.2) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}. \tag{5.5}$$

Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ системы (5.4), т.е., корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ограничимся случаем $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ или $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Если числа λ_1, λ_2 — различные и одного знака, то особая точка $(0,0)$ называется *узлом* (устойчивым при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и неустойчивым при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$). Чтобы выяснить поведение траекторий системы (5.4) (интегральных кривых уравнения (5.5)), нужно занумеровать собственные значения так, чтобы выполнялось неравенство $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ и найти собственные векторы $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ матрицы $\mathbf{A}$, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно:

$$\mathbf{A}\mathbf{h_i} = \lambda_1 \mathbf{h_i}, \quad i = 1, 2.$$

Эти векторы образуют, вообще говоря, лишь аффинный базис и определяют новую систему координат x_1, y_1 в направлении векторов $\mathbf{h_1}$ и $\mathbf{h_2}$ соответственно. Траекториями системы в случае устойчивого узла будут положение равновесия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, полуоси осей x_1 и y_1 (направление движения точки по полуосям с ростом параметра t к особой точке $(0,0)$). Остальные траектории с ростом t входят в начало координат касаясь оси x_1 и неограниченно удаляются от него, оставаясь в том же квадранте системы координат x_1, y_1 при убывании параметра t. Для неустойчивого узла траектории те же, но направление движения по траекториям с ростом параметра t меняется на обратное.

Если числа λ_1, λ_2 имеют разные знаки, то особая точка $(0,0)$ называется *седлом.* Полагая $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ и определяя собственные векторы $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ матрицы $\mathbf{A}$ с собственными значениями λ_1, λ_2, соответственно, получим, что траекториями системы (5.4) будут положение равновесия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, полуоси осей x_1 и y_1 в направлении векторов $\mathbf{h_1}$ и $\mathbf{h_2}$ соответственно (направление движения точки по полуосям оси x_1 с ростом параметра t к особой точке $(0,0)$, а по полуосям оси y_1 — от нее). Остальные траектории с ростом параметра t неограниченно приближаются из соответствующих квадрантов к оси y_1, а с убыванием t — к оси x_1.

Пусть собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ комплексные (на самом деле, комплексно-сопряженные, т.к. $\mathbf{A}$ — вещественная матрица):

$$\lambda_1 = \mu + i\nu, \quad \lambda_2 = \mu - i\nu \quad (\nu > 0).$$

Тогда собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$ также будут комплексно-сопряженными: $\mathbf{H} = \mathbf{h_1} + i\mathbf{h_2}$, $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{h_1} - i\mathbf{h_2}$. Вещественные векторы $\mathbf{h_1}$ и $\mathbf{h_2}$ образуют базис, что вытекает из линейной независимости векторов $\mathbf{H}$ и $\overline{\mathbf{H}}$ как соответствующих различным собственным значениям. Все вещественные решения системы (5.4) даются формулой

$$\mathbf{x} = re^{\mu t}\cos(\nu t + \alpha)\mathbf{h_1} + re^{\mu t}\sin(\nu t + \alpha)\mathbf{h_2}, \tag{5.6}$$

где $r \geqslant 0$ и α — вещественные постоянные.

Если $\mu \neq 0$, то особая точка $(0, 0)$ называется *фокусом* (устойчивым при $\mu < 0$ и неустойчивым при $\mu > 0$). Траекториями системы будут спирали, закручивающиеся вокруг начала координат, а также положение равновесия $x = 0$, $y = 0$. Чтобы выяснить направление закручивания спиралей, нужно найти вектор скорости $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ в любой точке плоскости (x_0, y_0):

$$\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = (ax_0 + by_0, cx_0 + dy_0). \tag{5.7}$$

Этот вектор в случае устойчивого фокуса определяет направление закручивания спиралей, а в случае неустойчивого фокуса — направление их раскручивания.

Если $\mu = 0$, то особая точка $(0, 0)$ называется *центром.* Траекториями в аффинной системе координат x_1, y_1 в направлении векторов $\mathbf{h_1}$ и $\mathbf{h_2}$ соответственно при $r > 0$ являются эллипсы с центром в начале координат (см. (5.6) при $\mu = 0$), отсекающие на полуосях осей x_1, y_1 отрезки $r|\mathbf{h_1}|$ и $r|\mathbf{h_2}|$ соответственно, а при $r = 0$ — положение равновесия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Направление обхода эллипсов с ростом параметра t определяется направлением вектора скорости (5.7).

Пусть матрица $\mathbf{A}$ имеет единственное собственное значение ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$). В этом случае особая точка $(0, 0)$ может быть либо *дикритическим узлом,* либо *вырожденным узлом.* В случае дикритического узла система (5.4) имеет вид

$$\dot{x} = ax, \quad \dot{y} = ay.$$

Траекториями будут лучи, исходящие из начала координат и положение равновесия $x = 0$, $y = 0$. Направление движения по траекториям с ростом параметра t в случае устойчивого дикритического узла ($\lambda_1 < 0$) к особой точке, а в случае неустойчивого дикритического узла ($\lambda_1 > 0$) — от нее.

Если особая точка — вырожденный узел, то матрица $\mathbf{A}$ имеет вещественный собственный вектор $\mathbf{h_1}$ с собственным значением λ_1. Дополняя этот вектор произвольным вектором $\mathbf{h_2}$ до базиса, придем к разложению

$$\mathbf{Ah_2} = \mu\mathbf{h_1} + \lambda_1\mathbf{h_2}, \tag{5.8}$$

из которого значение μ определяется однозначно. Новый базис $\mathbf{H_1} = \mu\mathbf{h_1}$, $\mathbf{H_2} = \mathbf{h_2}$ определит систему координат x_1, y_1 в направлении этих векторов и соответствующие квадранты аффинной системы координат. Траекториями системы (5.4) в случае устойчивого вырожденного узла ($\lambda_1 < 0$) будут положение равновесия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и полуоси оси x_1 (направление движения с ростом параметра t к особой точке). Остальные траектории с ростом t будут входить в начало координат, касаясь оси x_1 из первого и третьего квадрантов новой системы координат и неограниченно удаляться от него с убыванием t соответственно во второй и четвертый квадранты. В случае неустойчивого вырожденного узла ($\lambda_1 > 0$) направление движения по полуосям оси x_1 меняется на обратное. Остальные траектории с ростом параметра t будут выходить из начала координат, касаясь оси x_1 из второго и четвертого квадрантов, неограниченно удаляясь соответственно в первый и третий квадранты аффинной системы координат.

Пример 1. Исследовать поведение траекторий в окрестности особой точки системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -11x + 3y, \\ \dot{y} &= -2x - 4y. \end{aligned}$$

Решение. Собственные значения матрицы данной системы есть $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -10$ ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$). Особая точка $(0,0)$ — устойчивый узел. Собственный вектор $\mathbf{h_1} = (h_1^1, h_1^2)$ с собственным значением $\lambda_1 = -5$ находится из условия

$$\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_1^2 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_1^2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы получающейся отсюда линейной однородной алгебраической системы равен 1. Поэтому, приравняв, например, первые компоненты этих векторов, найдем $6h_1^1 = 3h_1^2$. Так как все собственные векторы, отвечающие одному и тому же собственному значению, коллинеарны, то, положив $h_1^1 = 1$, получим $\mathbf{h_1} = (1, 2)$. Собственный вектор $\mathbf{h_2} = (h_2^1, h_2^2)$ с собственным значением $\lambda_2 = -10$ находится из условия

$$\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2^1 \\ h_2^2 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} h_2^1 \\ h_2^2 \end{pmatrix}.$$

Откуда $h_2^1 = 3h_2^2$ и $\mathbf{h_2} = (3, 1)$. Траектории системы изображены на рис. 2.

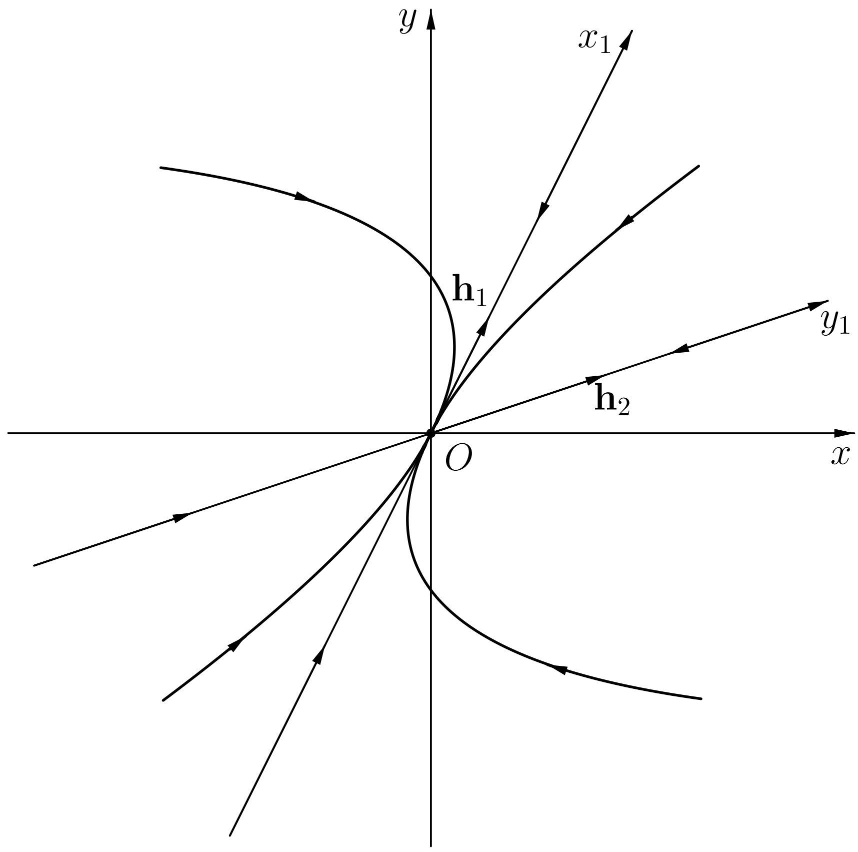

Рис. 2.

Пример 2. Исследовать поведение интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x - 3y}{y + 2x}$$

вблизи его особой точки.

Решение. Соответствующая этому уравнению система (5.4) имеет вид

$$\dot{x} = 2x + y,$$
$$\dot{y} = -4x - 3y.$$

Собственные значения матрицы системы $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ $(\lambda_1 < 0 < \lambda_2)$. Особая точка $(0, 0)$ — седло. Собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$ соответственно, равны $\mathbf{h_1} = (1, -4)$, $\mathbf{h_2} = (1, -1)$. См. рис. 3.

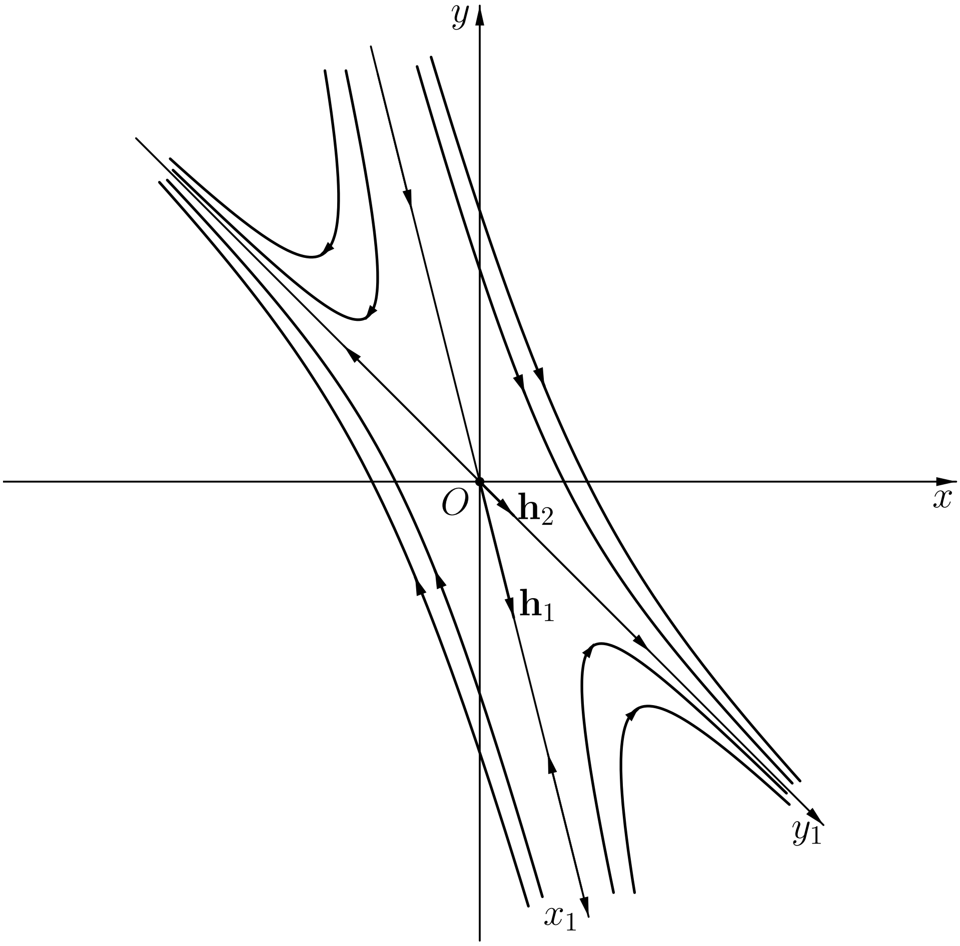

Рис. 3.

Пример 3. Исследовать поведение траекторий системы уравнений

$$\dot{x} = x - y,$$
$$\dot{y} = x + y$$

вблизи особой точки.

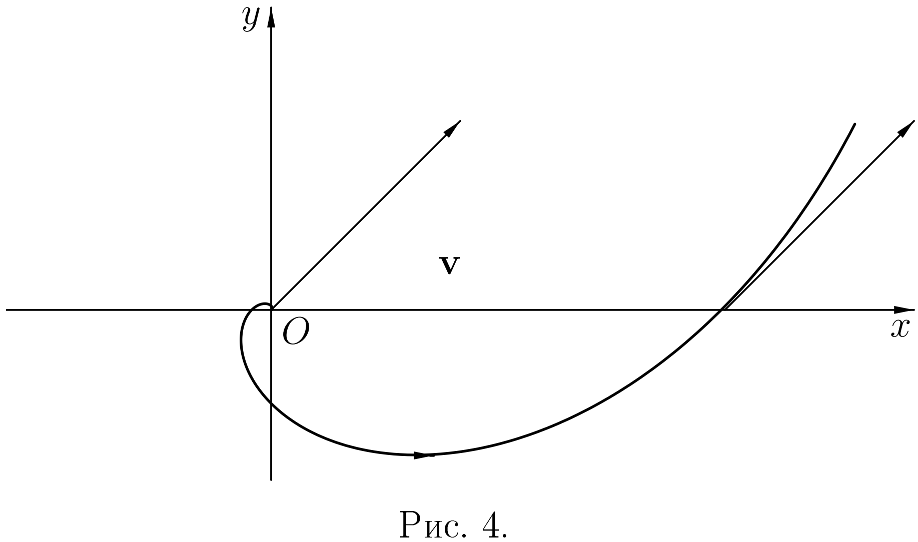

Рис. 4.

Решение. Собственные значения комплексно-сопряженные: $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$. Особая точка — неустойчивый фокус. Вектор скорости (5.7) в точке $(1, 0)$ равен вектору $\mathbf{v} = (1, 1)$. Спирали с ростом параметра t раскручиваются против часовой стрелки (закручиваются по часовой стрелке с убыванием t). Одна из траекторий системы показана на рис. 4.

Пример 4. Исследовать поведение интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{5y - x}$$

вблизи особой точки.

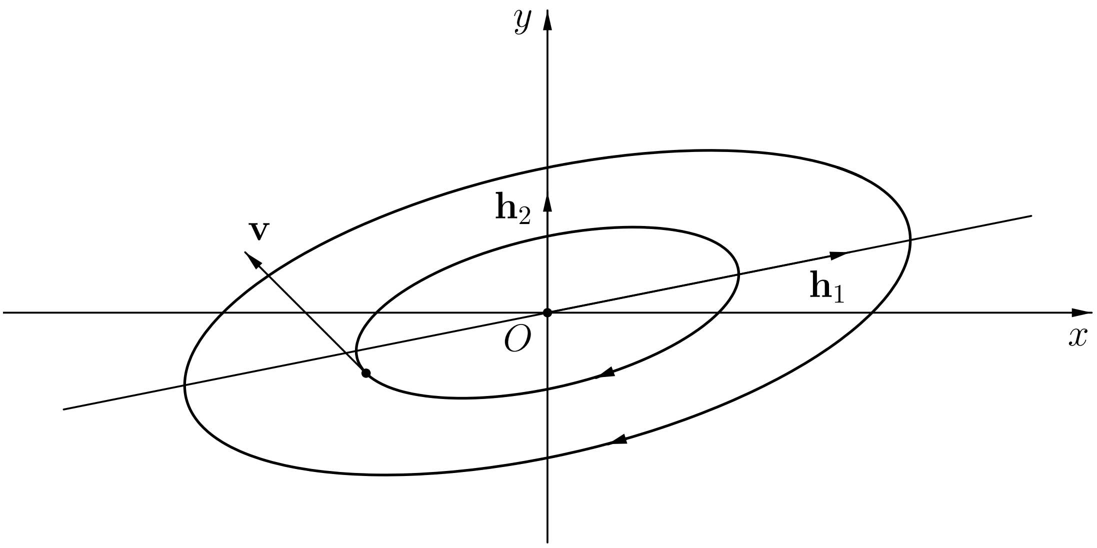

Рис. 5.

Решение. Соответствующая система (5.4) имеет вид:

$$\dot{x} = -x + 5y,$$
$$\dot{y} = -x + y.$$

Собственные значения $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 = 2i$. Особая точка $(0, 0)$ — центр. Собственный вектор матрицы системы с собственным значением $\lambda_1 = 2i$ есть $\mathbf{H} = (5, 1 + 2i)$. Откуда $\mathbf{h_1} = (5, 1)$, $\mathbf{h_2} = (0, 2)$. Эллипсы отсекают на полуосях x_1, y_1 в направлении векторов $(5, 1)$ и $(0, 2)$ отрезки $2\sqrt{6}r$ и $2r$, $r > 0$ соответственно. Вектор скорости в точке $(-3, -1)$ равен вектору $\mathbf{v} = (-2, 2)$ (эллипсы обходятся по часовой стрелке). См. рис. 5.

Пример 5. Исследовать поведение траекторий системы

$$\dot{x} = x,$$
$$\dot{y} = x + y$$

вблизи особой точки.

Решение. Матрица системы имеет единственное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Особая точка $(0,0)$ — неустойчивый вырожденный узел. Собственный вектор $\mathbf{h_1} = (h_1^1, h_1^2)$ находится из условий $h_1^1 = h_1^2$, $h_1^1 + h_1^2 = h_1^2$. Можно взять вектор $\mathbf{h_1} = (0,1)$. Дополнив этот вектор вектором $\mathbf{h_2} = (1,0)$ до базиса и записав разложение (5.8), получим $\mu = 1$ и $\mathbf{H_1} = \mathbf{h_1} = (0,1)$, $\mathbf{H_1} = \mathbf{h_2} = (1,0)$. Первый и третий квадранты новой системы координат совпадают с декартовыми, а второй и четвертый меняются местами. Траекториями будут положение равновесия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и полуоси оси x_1 (ось y декартовой системы координат). Направление движения с ростом параметра t — от особой точки. Остальные траектории с ростом t выходят из второго и четвертого квадрантов системы координат x_1, y_1 (соответственно четвертого и второго квадрантов декартовой системы x, y) и неограниченно удаляются в первый и третий квадранты системы координат x_1, y_1. Траектории системы показаны на рис. 6.

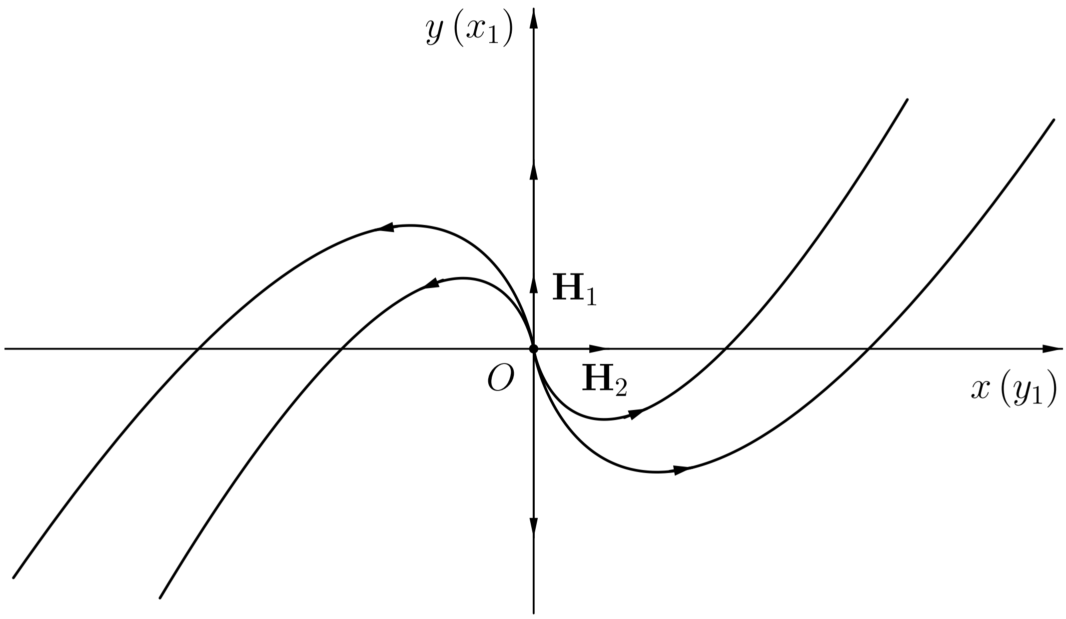

Рис. 6.

Для исследования особой точки $(0,0)$ общей системы (5.1) нужно разложить функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в окрестности этой точки по формуле Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (5.1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + r_1(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + r_2(x,y), \tag{5.9}$$

где $r_i = o(\sqrt{x^2+y^2})$, $i = 1,2$, т. е., в окрестности начала координат имеют порядок малости выше, чем линейная часть (мы предполагаем, что P и Q по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемы в этой окрестности). Тогда особая точка $(0,0)$ системы (5.9) будет того же типа, что и особая точка соответствующей системы (5.4), если для последней она является узлом, седлом, фокусом, дикритическим или вырожденным узлом. При этом траекториям системы (5.4), являющимся полуосями оси x_1 и (или) y_1, могут соответствовать кривые для системы (5.9), но угловые коэффициенты направлений, по которым эти траектории входят в особую точку, сохраняются, а в случае фокуса сохраняются направления закручивания траекторий.

В том случае, когда для системы (5.4) особая точка — центр, для системы (5.9) она может быть центром или фокусом. Для наличия центра достаточно (но не необходимо), чтобы траектории системы (5.9) имели ось симметрии, проходящую через исследуемую точку. Наличие оси симметрии $y = kx$ означает, что уравнение (5.2) не меняется при замене x и y на $[(1-k^2)x + 2ky]/(1+k^2)$ и $[2kx - (1-k^2)y]/(1+k^2)$, соответственно. В общем случае отыскание оси симметрии сводится к нахождению общего корня алгебраических уравнений относительно k достаточно высокой степени. Поэтому рекомендуется проверять наличие оси симметрии лишь для некоторых значений k. Так, при $k = 0$ (ось симметрии — ось x) уравнение (5.2) не должно меняться при замене y на $-y$; при $k = \infty$ (ось симметрии — ось y) — при замене x на $-x$; при $k = 1$ уравнение не должно меняться при замене x на y и y на x, а при $k = -1$ — при замене x на $-y$ и y на $-x$. Для наличия фокуса необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы (5.9) было асимптотически устойчивым при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Исследование на устойчивость можно провести с помощью функции Ляпунова (см. п. 4.2).

Пример 6.

$$\dot{x} = x + 2y + xy,$$
$$\dot{y} = -2x - y - xy.$$

Решение. Приравнивая правые части системы нулю, найдем два положения равновесия системы: $x = 0$, $y = 0$ и $x = -3$, $y = -3$. Функции $r_i(x,y) = \pm xy$, $i = 1,2$, имеют порядок малости в окрестности точки $(0,0)$ выше, чем у линейной части. Для соответствующей системы (5.4):

$$\dot{x} = x + 2y,$$
$$\dot{y} = -2x - y$$

особая точка $(0,0)$ — центр ($\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$). Нетрудно проверить, что соответствующее уравнение (5.2):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y + xy}{x + 2y + xy}$$

не меняется при замене x на y и y на x. Значит, траектории исходной системы имеют ось симметрии $y = x$ и особая точка $(0, 0)$ для нее будет центром.

Чтобы исследовать особую точку $(-3, -3)$, перенесем начало координат в нее, сделав замену переменных (5.3): $x = x_1 - 3$, $y = y_1 - 3$. Тогда мы придем к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - y_1 + x_1 y_1, \\ \dot{y}_1 &= x_1 + 2y_1 - x_1 y_1, \end{aligned}$$

для которой $r_i = o(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})$, $i = 1, 2$, при $(x_1, y_1) \to (0, 0)$. Особая точка $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ для соответствующей линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - y_1, \\ \dot{y}_1 &= x_1 + 2y_1 \end{aligned}$$

является седлом ($\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$). Поэтому особая точка $(-3, -3)$ для исходной системы также будет седлом.

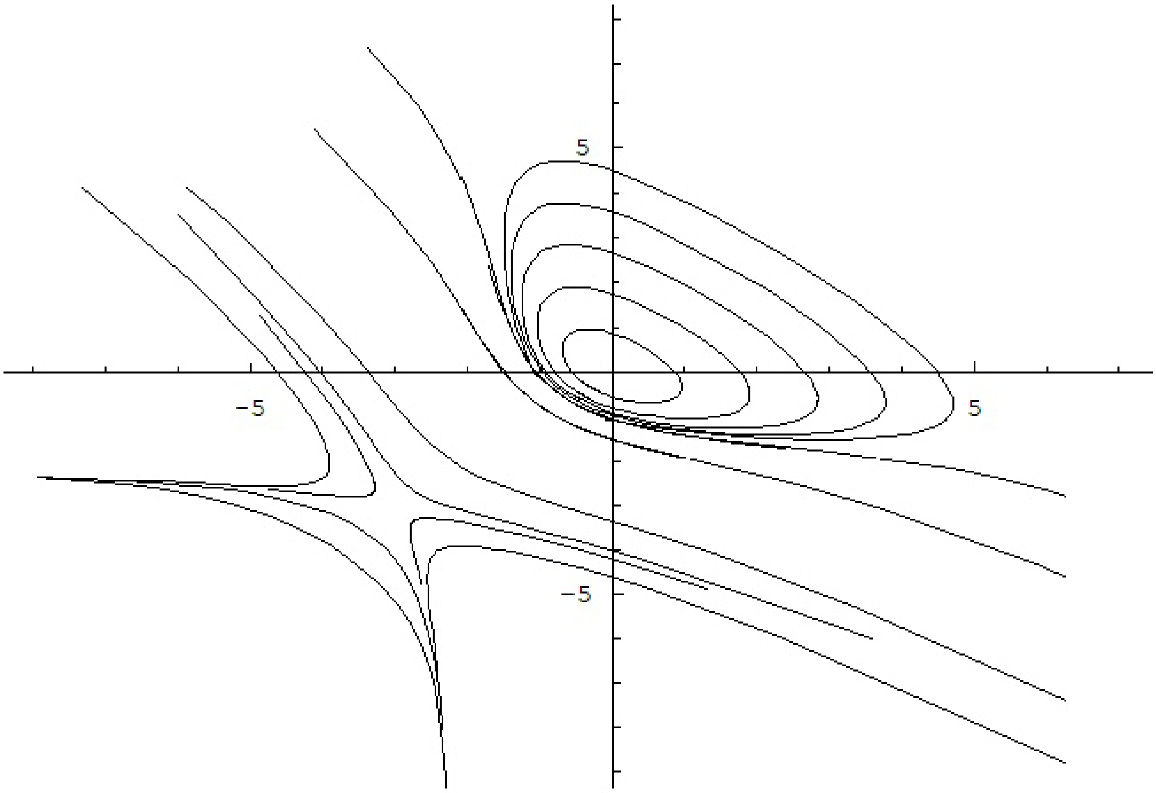

Рис. 7.

Примерный вид траекторий этой системы, построенный в одном из пакетов символьных вычислений, показан на рис. 7.

Задачи.

Изобразить схематично вблизи нулевого положения равновесия поведение траекторий следующих систем:

$$1.\ \begin{cases} \dot{x} &= 3x, \\ \dot{y} &= 2x + y. \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} \dot{x} &= 2x - y, \\ \dot{y} &= x. \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} \dot{x} &= x + 3y, \\ \dot{y} &= -6x - 5y. \end{cases} \qquad 4.\ \begin{cases} \dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= 2x - y. \end{cases}$$

$$5.\ \begin{cases} \dot{x} &= -2x - 5y, \\ \dot{y} &= 2x + 2y. \end{cases}$$

Ответы.

1. неустойчивый узел.
2. неустойчивый вырожденный узел.
3. устойчивый фокус.
4. седло.
5. центр.

§6. Нелинейные системы

Определение. *Нормальной системой* обыкновенных дифференциальных уравнений называется система уравнений, разрешенных относительно производных, вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{6.1}$$

где $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — неизвестные функции, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, — заданные функции от t, x_1, …, x_n, непрерывные в некоторой области. Число n называется *порядком системы.* Совокупность функций $x_1 = x_1(t)$, …, $x_n = x_n(t)$, определенных и непрерывно дифференцируемых в некотором интервале (a, b), называется *решением* системы (6.1) в интервале (a, b), если эти функции обращают все уравнения системы в тождества при любом $t \in (a,b)$. Задача нахождения решения $x_1 = x_1(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_1^{(0)},\ \dots,\ x_n(t_0) = x_n^{(0)},$$

где $t_0 \in (a,b)$, $x_i^{(0)} \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$, — заданные числа, называется *задачей Коши*. Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы функции f_i, $i = 1,\dots,n$, были непрерывны в окрестности точки $(t_0, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Непрерывно дифференцируемая функция $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ (отличная от постоянной) называется *первым интегралом* системы (6.1), если она тождественно обращается в постоянную вдоль любого решения этой системы ($\psi(t, x_1, \dots, x_n) = C$). Это означает, что дифференциал $d\psi$, составленный в силу системы обращается в нуль при всех $t \in (a,b)$:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t}\,dt + \frac{\partial\psi}{\partial x_1} f_1\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} f_n\,dx_n \equiv 0.$$

Нормальная система из n уравнений не может иметь больше n функционально независимых первых интегралов. Таким образом, если ψ_1, ..., ψ_n — функционально независимые первые интегралы (якобиан $\dfrac{D(\psi_1,\dots,\psi_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} \neq 0$), то всякий другой первый интеграл будет функцией от ψ_1, ..., ψ_n.

Совокупность n независимых первых интегралов системы называется *общим интегралом*. Задача интегрирования системы считается решенной, если найдено ее общее решение, либо общий интеграл.

6.1. Метод исключения

Один из методов решения таких систем заключается в том, чтобы подстановкой и исключением неизвестных свести систему к одному или нескольким уравнениям, содержащим только одну неизвестную функцию.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2}{y}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Решение. Заметим, что уравнения системы не содержат явно переменной x. Это наводит на мысль поделить их друг на друга и перейти к уравнению, содержащему только y и z. Это уравнение будет иметь вид $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{y}{z}$.

Его решение имеет вид $z = C_1 y$. Подставив его в первое уравнение системы, получим $y' = C_1 y$, откуда $y = C_2 e^{C_1 x}$. Тогда $z = y' = C_1 C_2 e^{C_1 x}$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = \Big(-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x} - 1\Big) y + \Big(-\dfrac{2}{x} - 1\Big) z. \end{cases} \tag{6.3}$$

Решение. Выразим из первого уравнения $z = y' - y$ и подставим во второе уравнение. После приведения подобных слагаемых получим уравнение $y'' - \dfrac{2}{x} y' + \dfrac{2}{x^2} y = 0$ или $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$. Это — линейное уравнение с переменными коэффициентами (см. Часть 1, пример 1 из п. 9.1). Его решение ищем в виде многочлена $y = x^n + \ldots$. Для показателя степени n получаем уравнение $n^2 - 3n + 2 = 0$, откуда $n = 1$ или $n = 2$. Этим значениям n соответствуют два решения $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$, следовательно, общее решение имеет вид $y = C_1 x + C_2 x^2$. После этого находим $z = y' - y = -C_2 x^2 + (2C_2 - C_1) x + C_1$.

6.2. Системы уравнений в симметрической форме

Система вида

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{F_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{F_n(x_1, \ldots, x_n)} \tag{6.4}$$

называется *системой дифференциальных уравнений в симметрической форме.* Если в некоторой точке $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ хотя бы один из знаменателей (скажем, F_n) отличен от нуля, то в окрестности этой точки систему (6.4) можно записать в виде нормальной системой из $n-1$ уравнения

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{F_1}{F_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{F_2}{F_n}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Таким образом, система (6.4) в некоторой окрестности выбранной точки имеет $n-1$ независимых первых интегралов. Всякую нормальную систему (6.1) можно записать в виде системы в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{dt}{1}. \tag{6.5}$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений, как правило, облегчается, если удается найти один или несколько независимых первых интегралов, так как это позволяет понизить порядок системы. Действительно, если найдено $m < n$ независимых первых интегралов системы (6.1), то выражая m неизвестных функций через $n - m$ остальных и подставляя их в уравнения системы, придем к системе $n - m$ независимых уравнений вида (6.1), а остальные уравнения этой системы либо обратятся в тождества, либо будут следствием остальных. Преимущество симметрической формы (6.5) системы уравнений (6.1) заключается в том, что все переменные, входящие в систему, становятся равноправными, что зачастую облегчает ее решение. Кроме того, к такой системе можно применять *метод интегрируемых комбинаций.* Под интегрируемой комбинацией понимается легко интегрируемое дифференциальное уравнение, полученное из данной системы какими-либо преобразованиями. Для получения интегрируемой комбинации пользуются свойством равных дробей: если имеются равные дроби

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n},$$

то для любых $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$ справедливо равенство

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n}.$$

Так, в примере 1, если записать систему в симметрической форме:

$$dx = \frac{dy}{z} = \frac{y\,dz}{z^2},$$

то один первый интеграл $z/y = C_1$ находится без труда. Подставив эту функцию в первое уравнение системы, придем к уравнению $y' = C_1 y$, решив которое, получим $y = C_2 e^{C_1 x}$. Разрешив последнее равенство относительно C_2 и подставив в него (вместо C_1) левую часть найденного первого интеграла, получим еще один первый интеграл системы: $ye^{-zx/y} = C_2$.

Пример 3. Найти общий интеграл системы уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}. \tag{6.6}$$

Решение. Первые две дроби образуют интегрируемую комбинацию

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

из которой получаем $x = C_1 y$, следовательно, один первый интеграл имеет вид

$$\frac{x}{y} = C_1. \tag{6.7}$$

Чтобы найти еще один первый интеграл, воспользуемся свойством равных дробей и запишем соотношение

$$\frac{dx+dy}{x+y} = \frac{dz}{x+y},$$

из которого следует, что $x+y = z + C_2$. Поэтому еще один первый интеграл системы (6.6) имеет вид

$$x + y - z = C_2. \tag{6.8}$$

Покажем, что первые интегралы (6.7), (6.8) функционально независимы. Для этого составим якобиан $\dfrac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(u,v)}$, где $\psi_1 = \dfrac{x}{y}$, $\psi_2 = x+y-z$, а в качестве u и v можно взять любые две из трех переменных x, y, z. Например,

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} = \frac{x+y}{y^2} \not\equiv 0,$$

следовательно, эти два интеграла независимы. Эту же проверку можно было сделать и по-другому: ψ_1 не содержит переменную z, а ψ_2 содержит, поэтому они не могут быть функционально зависимы.

Пример 4. Найти общий интеграл системы уравнений

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \tag{6.9}$$

Решение. Сложим в системе (6.9) числители и знаменатели:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

Отсюда с необходимостью следует, что

$$dx + dy + dz = 0, \quad \text{или} \quad d(x+y+z) = 0,$$

следовательно,

$$x + y + z = C_1. \tag{6.10}$$

Теперь домножим в системе (6.9) числители и знаменатели дробей на $2x$, $2y$ и $2z$ соответственно, и сложим. Получим

$$\frac{2x\,dx}{2x(z-y)} = \frac{2y\,dy}{2y(x-z)} = \frac{2z\,dz}{2z(y-x)} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0},$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{6.11}$$

Легко проверить, что первые интегралы (6.10) и (6.11) независимы, поэтому вместе они образуют общий интеграл системы (6.9).

Пример 5. Найти общий интеграл системы уравнений

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}.$$

Решение. Из первого равенства имеем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \text{или} \quad x = C_1 y.$$

Таким образом, один первый интеграл имеет вид

$$\frac{x}{y} = C_1.$$

Теперь, чтобы найти еще один, подставим $x = C_1 y$ во второе равенство:

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{x\sqrt{z^2+1}}, \qquad \frac{dy}{z} = \frac{dz}{C_1 y\sqrt{z^2+1}}, \qquad C_1 y\, dy = \frac{z\, dz}{\sqrt{z^2+1}},$$

откуда $C_1 y^2/2 = \sqrt{z^2+1} + C_2$. Подставив в последнее равенство $C_1 = x/y$, получим $xy = 2\sqrt{z^2+1} + C_2$, или

$$xy - 2\sqrt{z^2+1} = C_2.$$

Пример 6. Проверить, являются ли функции $\varphi_1 = t^2 + 2xy$, $\varphi_2 = x^2 - ty$ первыми интегралами системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t}{y}, \quad \frac{dy}{dt} = -x\ ?$$

Решение. Каждая из функций φ_1, φ_2 является непрерывно дифференцируемой. Вычислим их производные в силу системы. Имеем:

$$1)\ \frac{d\varphi_1}{dt} = 2y \cdot \frac{dx}{dt} + 2x \cdot \frac{dy}{dt} + 2t = \frac{2y(x^2 - t)}{y} - 2x^2 + 2t = 0,$$
$$2)\ \frac{d\varphi_2}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} - t \cdot \frac{dy}{dt} - y = 2x \cdot \frac{x^2 - t}{y} + tx - y \not\equiv 0.$$

Таким образом, функция φ_1 является первым интегралом исходной системы уравнений, а функция φ_2 — не является.

Задачи.

Решить системы уравнений:

1. $y' = \dfrac{x}{z},\ z' = -\dfrac{x}{y}.$

2. $y' = y^2 z,\ z' = \dfrac{z}{x} - yz^2.$

3. $x' = y^2 + \sin t,\ y' = x/2y.$

4. $\dfrac{dx}{2y - z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

5. $\dfrac{dx}{z^2 - y^2} = \dfrac{dy}{z} = -\dfrac{dz}{y}.$

6. $\dfrac{dx}{x + y^2 + z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

7. $\dfrac{dx}{\cos y} = \dfrac{dy}{\cos x} = \dfrac{dz}{\cos x \cos y}.$

8. $\dfrac{dx}{mz - ny} = \dfrac{dy}{nx - kz} = \dfrac{dz}{ky - mx}$, где k, m, n — заданные константы.

Проверить, являются ли первыми интегралами системы уравнений функции φ_1, φ_2.

9. $\dfrac{dx}{dt} = xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2,\ \varphi_1 = x \ln y - x^2 y,\ \varphi_2 = \dfrac{y^2}{x^2} - 2 \ln x.$

10. $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{t}, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2x^2 - ty}{t^2},\ \varphi_1 = tx,\ \varphi_2 = ty + x^2.$

Ответы.

1. $y = C_2 e^{C_1 x^2},\ z = \dfrac{1}{2C_1 C_2} e^{-C_1 x^2}.$

2. $y = C_2 e^{C_1 x^2},\ z = \dfrac{2C_1}{C_2} x e^{-C_1 x^2};\ y = 0,\ z = Cx.$

3. $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t,\ y^2 = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \sin t.$

4. $y = C_1 x,\ x = 2y - z + C_2.$

5. $y^2 + z^2 = C_1,\ x - yz = C_2.$

6. $y = C_1 z,\ x - y^2 - z^2 = C_2 z.$

7. $\sin x - \sin y = C_1,\ \sin x - z = C_2.$

8. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1,\ kx + my + nz = C_2.$

9. φ_1 — нет, φ_2 — да.

10. φ_1 — да, φ_2 — да.

§7. Линейные уравнения в частных производных первого порядка

Пусть искомая функция z зависит от нескольких переменных $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 2$. Уравнение, связывающее независимые переменные, искомую функцию и частные производные от искомой функции, называется *уравнением в частных производных*. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется *порядком уравнения*. Мы ограничимся рассмотрением *линейных уравнений в частных производных первого порядка*, то есть, уравнений вида

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b, \tag{7.1}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b$ — функции от $x_1, \ldots, x_n, z$. Чтобы решить такое уравнение, необходимо записать соответствующую характеристическую систему обыкновенных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b}, \tag{7.2}$$

и найти n ее независимых первых интегралов

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z) = C_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = C_n. \end{aligned} \tag{7.3}$$

После этого общее решение уравнения (7.1) может быть записано в виде

$$F(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z)) = 0, \tag{7.4}$$

где F — произвольная дифференцируемая функция. В частности, если z входит только в один из первых интегралов, например, в φ_n, то соотношение (7.3) можно разрешить относительно φ_n и записать в виде

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \tag{7.5}$$

где f — произвольная дифференцируемая функция. Если удается разрешить равенство (7.5) относительно z, то можно записать ответ в явном виде.

Уравнение вида

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{7.6}$$

называется *однородным линейным уравнением в частных производных первого порядка.* Для этого уравнения один из первых интегралов соответствующей характеристической системы имеет вид $\varphi_n \equiv z$. Поэтому для нахождения общего решения достаточно найти $(n-1)$ независимых первых интегралов системы

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n},$$

в которой переменную z (если она входит в коэффициенты уравнения) нужно заменить на постоянную C_n, а затем в полученных первых интегралах осуществить обратную замену.

Если же функции $a_1, \ldots, a_n$ не зависят от z, то общее решение уравнения (7.6) имеет вид

$$z = F(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)),$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ — остальные независимые первые интегралы характеристической системы, а F — произвольная дифференцируемая функция.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}. \tag{7.7}$$

Решение. Запишем соответствующую систему уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\,dz.$$

Ее первые интегралы имеют вид $\sqrt{x}-\sqrt{y} = C_1$ и $\sqrt{y}-z = C_2$. Следовательно, общее решение можно записать либо в виде

$$F(\sqrt{x} - \sqrt{y}, \sqrt{y} - z) = 0,$$

либо в виде $z - \sqrt{y} = f(\sqrt{x} - \sqrt{y})$. Разрешив последнее равенство относительно z, получим решение уравнения (7.7) в явном виде

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Пример 2. Найти общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z)\frac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{7.8}$$

Решение. Запишем характеристическую систему уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-(y + 2z)} = \frac{dz}{3y + 4z}. \tag{7.9}$$

Вторая и третья дроби образуют интегрируемую комбинацию. Решив это однородное уравнение, получим первый интеграл

$$\frac{(3y+2z)^2}{y+z} = C_1.$$

Теперь, воспользовавшись свойством равных дробей, получим

$$\frac{dx}{1} = \frac{d(y+z)}{2(y+z)}.$$

Решив это уравнение, найдем второй первый интеграл, функционально независимый с первым, не содержащем переменную x.

$$e^{-2x}(y+z) = C_2.$$

Следовательно, общее решение уравнения (7.8) будет иметь вид

$$u = F\left(\frac{(3y+2z)^2}{y+z}, e^{-2x}(y+z)\right).$$

Заметим, что решение можно записать в более простом виде, если переписать полученный ранее первый интеграл следующим образом:

$$C_1 = \frac{(3y+2z)^2}{y+z} = \frac{(3y+2z)^2}{C_2 e^{2x}}.$$

Тогда $(3y+2z)e^{-x} = C_3$ — тоже первый интеграл системы (7.9). Поэтому общее решение уравнения (7.8) можно также записать формулой

$$u = F(e^{-x}(3y+2z), e^{-2x}(y+z)).$$

Чтобы найти интегральную поверхность $z = z(x, y)$ дифференциального уравнения

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y,z), \tag{7.10}$$

проходящую через данную линию с параметрическими уравнениями

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t) \tag{7.11}$$

(поставленная задача называется *задачей Коши*), необходимо сначала найти два независимых первых интеграла соответствующей системы

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{b}.$$

Потом в эти интегралы

$$\varphi_1(x,y,z) = C_1, \quad \varphi_2(x,y,z) = C_2 \tag{7.12}$$

нужно подставить вместо x, y, z их выражения (7.11) через параметр t. Затем из полученных соотношений вида $\Phi_1(t) = C_1$, $\Phi_2(t) = C_2$ нужно исключить t и получить уравнение $\Phi(C_1, C_2) = 0$. Подставив сюда вместо C_1 и C_2 их выражения по формулам (7.12), получим уравнение искомой поверхности.

Если же уравнения данной линии даны не в параметрическом виде, а в виде пересечения двух поверхностей

$$\xi(x,y,z) = 0, \quad \eta(x,y,z) = 0, \tag{7.13}$$

то сначала необходимо параметризовать эту линию каким-либо способом.

Пример 3. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$(x^3 + 3xy^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial z}{\partial y} = 2y^2 z, \tag{7.14}$$

и проходящую через линию, заданную уравнениями

$$xyz = 1, \quad x^2 = y.$$

Решение. Запишем соответствующую характеристическую систему уравнений:

$$\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2 z}.$$

Вторая и третья дроби образуют интегрируемую комбинацию $dy/y = dz/z$, откуда находим первый интеграл

$$\frac{y}{z} = C_1.$$

Первая и вторая дроби также образуют интегрируемую комбинацию. Однородное уравнение

$$2y^3\,dx = (x^3 + 3xy^2)\,dy$$

проще решать, считая x функцией от y. Сделав замену $x = ty$, придем к уравнению $2t'y = t^3 + t$, решением которого является соотношение $\dfrac{t^2}{t^2+1} = Cy$. После обратной подстановки получим второй первый интеграл

$$y + \frac{y^3}{x^2} = C_2,$$

функционально независимый с полученным.

Запишем уравнение данной в условии линии в параметрическом виде. Если в качестве параметра взять $x = t$, то $y = t^2$, $z = 1/xy = 1/t^3$. Подставив эти уравнения в первый интеграл $y/z = C_1$, получим $t^5 = C_1$, откуда $t = \sqrt[5]{C_1}$. Теперь подставим уравнения линии в первый интеграл $y + \dfrac{y^3}{x^2} = C_2$. Получим $t^2 + t^4 = C_2$. Заменив t на $\sqrt[5]{C_1}$, придем к равенству

$$\sqrt[5]{C_1^2} + \sqrt[5]{C_1^4} = C_2.$$

Наконец, сделав обратные подстановки для $C_1 = y/z$ и $C_2 = y + \dfrac{y^3}{x^2}$, найдем уравнение искомой поверхности:

$$\sqrt[5]{\frac{y^2}{z^2}} + \sqrt[5]{\frac{y^4}{z^4}} = y + \frac{y^3}{x^2}.$$

Задачи.

Найти общее решение уравнений:

1. $(x+2y)\dfrac{dz}{dx} - y\dfrac{dz}{dy} = 0.$
2. $y\dfrac{dz}{dx} + x\dfrac{dz}{dy} = x - y.$
3. $y\dfrac{dz}{dx} + z\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{y}{x}.$
4. $x^2 z\dfrac{dz}{dx} + y^2 z\dfrac{dz}{dy} = x + y.$
5. $x\dfrac{du}{dx} + y\dfrac{du}{dy} + (z+u)\dfrac{du}{dz} = xy.$

Ответы.

1. $z = F(xy + y^2).$
2. $z = y - x + F(x^2 - y^2).$
3. $F(z - \ln|x|, 2x(z-1) - y^2) = 0.$
4. $F\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}, \ln|xy| - \dfrac{z^2}{2}\right) = 0.$
5. $F\left(\dfrac{x}{y}, xy - 2u, \dfrac{z+u-xy}{x}\right) = 0.$

Найти поверхности, удовлетворяющие уравнениям и проходящие через данную линию:

1. $y^2\dfrac{dz}{dx}+xy\dfrac{dz}{dy}=x;\ x=0,\ z=y^2.$

2. $x\dfrac{dz}{dx}+y\dfrac{dz}{dy}=z-xy;\ x=2,\ z=y^2+1.$

3. $x\dfrac{dz}{dx}-y\dfrac{dz}{dy}=z^2(x-3y);\ x=1,\ zy+1=0.$

4. $z\dfrac{dz}{dx}-xy\dfrac{dz}{dy}=2xz;\ x+y=2,\ yz=1.$

5. $x\dfrac{dz}{dx}+z\dfrac{dz}{dy}=y;\ y=2z,\ x+2y=z.$

Ответы.

1. $z=y^2-x^2-\ln\sqrt{y^2-x^2}+\ln|y|.$
2. $(x+2y)^2=2x(z+xy).$
3. $2xy+1=x+3y+\dfrac{1}{z}.$
4. $[(y^2z-2)^2-x^2+z]y^2z=1.$
5. $x+y+z=0.$

§8. Решение уравнений с помощью рядов

Рассмотрим вопрос о приближенном решении задачи Коши

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}),\quad y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{8.1}$$

Здесь функцию $f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ будем считать аналитической в окрестности точки $(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)})$, то есть, раскладывающейся в сходящийся ряд по степеням $x-x_0$, $y-y_0$, …, $y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}$. Тогда решение поставленной задачи $y(x)$ также будет аналитической функцией и ее можно разложить в ряд в окрестности точки x_0. Поэтому решение можно искать в виде ряда

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k.$$

Пример 1. Найти с точностью до x^5 решение задачи Коши

$$y' = x^2 - \frac{1}{y}, \quad y(0) = -1. \tag{8.2}$$

Решение. Будем искать решение в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

Из начального условия следует, что $a_0 = y(0) = -1$. Подставив в исходное уравнение $x = 0$, получим $y'(0) = -1/y(0)$. Но $y'(0) = a_1$, следовательно, $a_1 = 1$.

Подставив этот ряд в уравнение (8.2), получим

$$1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots \equiv \\ \equiv x^2 + \frac{1}{1 - x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4 - a_5 x^5 - \ldots}. \tag{8.3}$$

Нам необходимо обратить дробь в правой части полученного тождества, т.е. представить ее в виде ряда $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots$, причем, поскольку в левой части равенства (8.3) максимальная степень x — это x^4, достаточно ограничиться вычислением коэффициентов до четвертой степени. Таким образом, мы получаем равенство

$$1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots \equiv x^2 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots, \tag{8.4}$$

в котором коэффициенты b_i нужно искать из условия

$$(1 - x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4 - a_5 x^5 - \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots) \equiv 1. \tag{8.5}$$

Ясно, что свободный член $b_0 = 1$. Приравняв в тождестве (8.5) коэффициенты при x, получим $-b_0 + b_1 = 0$, откуда $b_1 = 1$. Подставив это в соотношение (8.4), найдем $2a_2 = 1$, следовательно, $a_2 = 1/2$.

Теперь приравняем в (8.5) коэффициенты при x^2: $-a_2 b_0 - b_1 + b_2 = 0$, откуда $-1/2 - 1 + b_2 = 0$ и $b_2 = 3/2$. Подставим найденное значение в (8.4) и приравняем коэффициенты при x^2. Найдем $3a_3 = 1 + 3/2$, откуда $a_3 = 5/6$.

Действуя аналогично, приравняем в тождестве (8.5) коэффициенты при x^3 и найдем, что $b_3 = 17/6$. Подставим это значение в (8.4) и приравняем коэффициенты при x^3. Получим, что $a_4 = 17/24$. Наконец, $b_4 = 41/8$ и $a_5 = 41/40$.

Таким образом, с точностью до $o(x^5)$ решение задачи (8.2) имеет вид

$$y = -1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{17}{24}x^4 + \frac{41}{40}x^5.$$

Эту задачу можно было решать и по-другому. Мы нашли $a_0 = y(0) = -1$, $a_1 = y'(0) = 1$. Теперь продифференцируем наше уравнение по x:

$$y'' = 2x + \frac{y'}{y^2}.$$

Подставим $x = 0$ и получим $y''(0) = y'(0)/y^2(0) = 1$. Следовательно, $a_2 = y''(0)/2! = 1/2$. Далее,

$$y''' = 2 + \frac{y''}{y^2} - \frac{2y'^2}{y^3},$$

откуда $y'''(0) = 5$, а $a_3 = y'''(0)/3! = 5/6$. Продолжая аналогично, можно найти коэффициенты a_4 и a_5.

Пример 2. Найти с точностью до x^5 решение задачи Коши

$$y'' = y^2 + x^2 y', \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 2. \tag{8.6}$$

Решение. Будем искать решение в виде $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$. Из начального условия следует, что $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = y'(0) = 2$. Подставив в исходное уравнение $x = 0$, получим $y''(0) = 1$. Но $y''(0) = 2a_2$, следовательно, $a_2 = 1/2$.

Поскольку $y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \ldots$, правую часть уравнения (8.6) достаточно вычислить с точностью до x^3. При этом $y^2 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2)x^2 + (2a_1 a_2 + 2a_0 a_3)x^3 + \ldots$, а $x^2 y' = x^2(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots) = a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + \ldots$ Подставив найденные выражения в исходное уравнение, и отбросив все члены выше третьей степени, придем к тождеству

$$\begin{aligned}
&2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 \equiv \\
&\qquad \equiv a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2 + a_1)x^2 + (2a_1 a_2 + 2a_0 a_3 + 2a_2)x^3.
\end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases}
2a_2 = a_0^2, \\
6a_3 = 2a_0 a_1, \\
12a_4 = a_1^2 + 2a_0 a_2 + a_1, \\
20a_5 = 2a_1 a_2 + 2a_0 a_3 + 2a_2,
\end{cases}$$

из которой последовательно находим $a_2 = a_0^2/2 = 1/2$, $a_3 = a_0 a_1/3 = 2/3$, $a_4 = (a_1^2 + 2a_0 a_2 + a_1)/12 = 7/12$, $a_5 = (2a_1 a_2 + 2a_0 a_3 + 2a_2)/20 = 13/60$.

Следовательно, с точностью до $o(x^5)$, решение задачи (8.6) имеет вид

$$y = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \frac{13}{60}x^5.$$

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{8.7}$$

Эти уравнения важны для приложений, но решить их в элементарных функциях зачастую не удается (см. п. 9.1). В таких случаях можно искать решение уравнения в виде степенного ряда по степеням $x-x_0$, где x_0 — начальное значение. В аналитической теории дифференциальных уравнений доказывается, что если коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ этого уравнения являются многочленами или сходящимися рядами по степеням $x - x_0$, причем $a_0(x_0) \neq 0$, то решения уравнения (8.7) также могут быть выражены в виде сходящихся рядов по степеням $x - x_0$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + xy' + y = 0. \tag{8.8}$$

Решение. Будем искать решение в виде ряда $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Тогда $y' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}$, $y'' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$. Подставим эти выражения в уравнение (8.8), учитывая, что $xy' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k x^k$, и получим тождество

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv 0.$$

Производя в первой сумме замену индекса суммирования $k = m+2$, а также меняя во второй и третьей суммах k на m, получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)c_{m+2}x^m + \sum_{m=0}^{\infty} mc_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \equiv 0.$$

Здесь для удобства, мы полагаем, что во второй сумме суммирование начинается с $m = 0$. Теперь все эти суммы можно объединить в одну. А поскольку сумма полученного ряда равна нулю, все его коэффициенты — нули. Таким образом, мы получаем бесконечную систему уравнений

$$(m+2)(m+1)c_{m+2} + mc_m + c_m = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

После приведения подобных слагаемых и сокращения на ненулевой множитель $m+1$, уравнения принимают вид

$$c_{m+2} = -\frac{c_m}{m+2}. \tag{8.9}$$

Чтобы найти два линейно независимых решения уравнения (8.8), нужно придать определенные значения начальным коэффициентам c_0 и c_1. Обычно для первого решения берут $c_0 = 1$ и $c_1 = 0$, а для второго — наоборот $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

Итак, пусть сначала $c_0 = 1$ и $c_1 = 0$. Из соотношения (8.9) следует, что $c_3 = -c_1/3 = 0$ и, по индукции, все коэффициенты с нечетными номерами $c_5, c_7, \ldots$ равны нулю. Для коэффициентов с четными номерами имеем $c_2 = -c_0/2 = -1/2$, $c_4 = -c_2/4 = 1/(2 \cdot 4)$, $c_6 = -c_4/6 = -1/(2 \cdot 4 \cdot 6)$, и, по индукции,

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!!}.$$

Таким образом, одно решение уравнения (8.8) имеет вид

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!!} x^{2k}.$$

Теперь пусть $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Тогда все коэффициенты с четными номерами $c_{2k} = 0$. Для коэффициентов с нечетными номерами имеем, как и выше $c_3 = -c_1/3 = -1/3$, $c_5 = -c_3/5 = 1/(1 \cdot 3 \cdot 5)$, $c_7 = -c_5/7 = -1/(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$, и, по индукции,

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!}.$$

Следовательно, второе решение уравнения (8.8) имеет вид

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!} x^{2k}.$$

Оба эти ряда сходятся на всей числовой прямой. Это легко установить, например, по формуле Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда $R^{-1} = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$. Поэтому общее решение исходного уравнения можно записать в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!!} x^{2k} + C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!} x^{2k}.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$(1+x^2)y''+4xy'+2y=0.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, будем искать $y=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$. Подставив этот ряд в уравнение, получим

$$(1+x^2)\cdot\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+4x\cdot\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\equiv 0.$$

Раскрыв скобки, учитывая, что во втором и третьем слагаемом можно формально считать индекс суммирования начинающимся с $k=0$, и приводя подобные члены, получим

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(k(k-1)c_k+4kc_k+2c_k\Big)x^k\equiv 0.$$

Сделав, как и в предыдущем примере, в первой сумме замену индекса суммирования $k=m+2$, а во второй $k=m$, придем к тождеству

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big((m+2)(m+1)c_{m+2}+(m(m-1)+4m+2)c_m\Big)x^m\equiv 0.$$

Поскольку $m(m-1)+4m+2=m^2+3m+2=(m+2)(m+1)$, система уравнений для определения коэффициентов ряда принимает вид

$$c_{m+2}=-c_m.$$

Легко видеть, что решение, соответствующее $c_0=1$ и $c_1=0$, имеет вид

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^{2k}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\frac{1}{1+x^2},$$

а решение, соответствующее $c_0=0$ и $c_1=1$, есть

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^{2k+1}=x-x^3+x^5-x^7+\ldots=\frac{x}{1+x^2}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения можно записать в виде

$$y=C_1y_1+C_2y_2=\frac{C_1+C_2x}{1+x^2}.$$

Для уравнения (8.7) точка x_0, в которой коэффициент $a_0(x)$ обращается в нуль, называется *особой точкой*. В окрестности особой точки $x = x_0$ решение в виде степенного ряда может не существовать. В таком случае решение следует искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y = (x - x_0)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k.$$

Мы ограничимся рассмотрением уравнения

$$x^2 y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0. \tag{8.10}$$

Обозначим $p_0 = p(0)$, $q_0 = q(0)$. Число λ ищется из уравнения

$$\lambda(\lambda - 1) + p_0 \lambda + q_0 = 0, \tag{8.11}$$

которое называется *определяющим уравнением*. Пусть λ_1 и λ_2 — корни этого уравнения. Если разность $\lambda_1 - \lambda_2$ не является целым числом, то можно построить два линейно независимых решения

$$y_1 = x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^k \quad \text{и} \quad y_2 = x^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k$$

уравнения (8.10). Если же $\lambda_1 - \lambda_2$ — целое число, то указанным способом можно построить только одно решение y_1, а второе найти, например, применяя формулу Остроградского-Лиувилля (см. Часть 1, (9.8)).

Кроме того, второе решение можно искать в виде

$$y_2 = A y_1(x) \ln x + x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k,$$

где A — некоторая константа, возможно, равная нулю.

Пример 5. Решить уравнение

$$x^2 y'' + \left(-x^2 + \frac{1}{2}x\right) y' - \frac{1}{2} y = 0. \tag{8.12}$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение. Имеем $p_0 = 1/2$, $q_0 = -1/2$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид $\lambda(\lambda - 1) + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$. Его корнями являются числа $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 1$. Их разность не является целым числом, поэтому мы можем построить два линейно независимых решения.

Сначала найдем решение, соответствующее корню $\lambda_1 = -1/2$. Будем искать его в виде

$$y = x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-1/2}.$$

Тогда $y' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right) c_k x^{k-3/2}$, $y'' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) c_k x^{k-5/2}$. Домножим уравнение (8.12) на 2 и подставим в него эти выражения. Получим тождество

$$2\sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) c_k x^{k-1/2} - 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right) c_k x^{k+1/2} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right) c_k x^{k-1/2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-1/2} \equiv 0. \quad (8.13)$$

Соберем отдельно слагаемые, содержащие $x^{k-1/2}$ и $x^{k+1/2}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(2 \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) + \left(k - \frac{1}{2}\right) - 1\right) c_k x^{k-1/2} - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right) c_k x^{k+1/2} \equiv 0$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k-3)k c_k x^{k-1/2} - \sum_{k=0}^{\infty} (2k-1)\, c_k x^{k+1/2} \equiv 0.$$

Заметим, что в первой сумме слагаемое, соответствующее $k = 0$, также равно нулю. Как и в предыдущих примерах, сделаем в первой сумме замену индекса $k = m + 1$, а во второй $k = m$. Получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m-1)(m+1) c_{m+1} x^{m+1/2} - \sum_{m=0}^{\infty} (2m-1)\, c_m x^{m+1/2} \equiv 0.$$

Теперь, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, придем к системе уравнений

$$(2m-1)(m+1)c_{m+1} = (2m-1)c_m, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Выберем $c_0 = 1$. Остальные уравнения системы принимают вид

$$c_{m+1} = \frac{c_m}{m+1},$$

откуда легко находятся $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{6}$, $\ldots$. По индукции устанавливаем, что $c_m = \frac{1}{m!}$. Следовательно, первое решение уравнения (8.12) имеет вид

$$y_1 = x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,.$$

Теперь будем искать решение, соответствующее корню $\lambda_2 = 1$. Пусть $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Подставим этот ряд в уравнение (8.12) и приведем подобные слагаемые. Получим тождество

$$2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k-1)(2k+1) c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2k c_k x^{k+1} \equiv 0.$$

Заметим, что свободный член (коэффициент при x^0) в первой сумме равен $-c_0$, а во второй сумме вообще отсутствует. Это означает, что $c_0 = 0$. Теперь в первой сумме заменим индекс суммирования $k = m+1$, $m = 0, 1, \ldots$. Получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(2m+3) c_{m+1} x^{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} 2m c_m x^{m+1} \equiv 0.$$

Слагаемые, соответствующие $m = 0$, в обеих суммах равны нулю. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x^m, $m = 1, 2, \ldots$. Это приводит к системе уравнений

$$c_{m+1} = \frac{2c_m}{2m+3}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Выберем $c_1 = 1$, тогда $c_2 = \frac{2}{5}$, $c_3 = \frac{2^2}{5 \cdot 7}$, $c_4 = \frac{2^3}{5 \cdot 7 \cdot 9}$, и т.д. По индукции получаем, что

$$c_m = \frac{3 \cdot 2^{m-1}}{(2m+1)!!}.$$

Таким образом, второе независимое решение уравнения (8.12) имеет вид

$$y_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{(2k+1)!!} x^k.$$

Учитывая то, что эта функция нам существенна с точностью до множителя, умножим ее на $2/3$ и запишем общее решение уравнения в виде

$$y = C_1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} + C_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!!} x^k.$$

Задачи.

Найти решение уравнений в виде степенных или обобщенных степенных рядов:

1. $y' - 2xy = 0,\ y(0) = 1.$
2. $y'' - xy' + y = 1,\ y(0) = y'(0) = 0.$
3. $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0.$
4. $y'' - x^2y = 0.$
5. $y'' - xy' - 2y = 0.$
6. $(x^2+1)y'' + 5xy' + 3y = 0.$

Ответы.

1. $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{k!} = e^{x^2}.$
2. $y = \dfrac{x^2}{2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(2k+1)!!}{(2k+4)!}\, x^{2k+4}.$
3. $y_1 = x^{1/2} \cdot \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3 \cdot (2x)^k}{(2k+3)!!}\right), \quad y_2 = \dfrac{1}{x} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = \dfrac{e^x}{x}.$
4. $y_1 = 1 + \dfrac{x^4}{3 \cdot 4} + \dfrac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots, \quad y_2 = x + \dfrac{x^5}{4 \cdot 5} + \dfrac{x^9}{5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots.$
5. $y_1 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k-1)!!}, \quad y_2 = x + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k)!!} = xe^{x^2/2}.$
6. $y_1 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k(2k+1)!!}{(2k)!!} \cdot x^{2k} = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}},$

$y_2 = x + \dfrac{1}{2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k(2k+2)!!}{(2k+1)!!} \cdot x^{2k+1}.$

Литература

[1] Егоров А.И., *Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями.* – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 384 с.

[2] Карташев А.П., Рождественский Б.Л., *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления: учеб. пособие для вузов.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. – 255 с.

[3] Ибрагимов Н.Х., *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования.* – 2-е изд., доп. и испр. – М.: Физматлит, 2012. – 322 с.

[4] Степанов В.В., *Курс дифференциальных уравнений.* – Изд. 8, стер. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 472 с.

[5] Матвеев Н.М., *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.* – 6-е изд. – С-Пб.: «Лань», 2004. – 832 с.

[6] Матвеев Н.М., *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – 7-е изд., доп. – С-Пб.: «Лань», 2002. – 432 с.

[7] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А., *Дифференциальные уравнения: примеры и задачи.* – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.

[8] Филиппов А.Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* – Ижевск: РХД, 2000. – 176 с.

Содержание

§1. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ... 3

§2. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами ... 25

§3. Краевые задачи. Функция Грина ... 32

§4. Устойчивость ... 37

§5. Особые точки ... 47

§6. Нелинейные системы ... 57

§7. Линейные уравнения в частных производных первого порядка 63

§8. Решение уравнений с помощью рядов ... 69

Литература ... 79