Образ оператора. Ядро оператора. Ранг матрицы.

Пусть $A: X \to Y$ - линейный оператор.
Множество всех векторов y из пр-а Y таких, что $y = Ax$ для $x \in X$ называется областью значений или образом оператора и обозначается $Im(A)$

Множество $Im(A)$ - линейное подпространство простр-а Y.
Размерность подпространства $Im(A)$ наз-я рангом оператора A $(rank(A))$
Множество всех векторов $x \in X$ таких, что $Ax = 0$ наз-я ядром опер-а A и обозначается $Ker(A)$

Размерность подпростр-а $Ker(A)$ наз-я дефектом оператора A $(def(A))$

Для $\forall$ лин. опер. $A: X_n \to Y_m$

$$rank(A) + def(A) = n$$

Пусть в простр-е X дана некоторая система в. $\{a_i\}_{i=1}^{m}$ $(\neq 0)$
Эта система обя. содержит линейно незав. подсистему векторов. В частности она сама может быть линейно независимой.

Подсистема векторов $\{a^{i_k}\}_{k=1}^{r} \subset \{a^i\}_{i=1}^{m}$, состоящая из линейно нез-х векторов наз-я **максимальной**, если добавление к ней ∀ нового вектора из $\{a^i\}_{i=1}^{m}$ приводит к линейно зависимой системе.

∀ 2 макс. лин. незав. подсист. данной системы содержат одно и то же кол-во векторов.

Ранг системы наз-я кол-во векторов ее макс. лин. незав. подсист.

Пусть $A(m,n)$ - произв. прямоуг. матрица. Ее столбцы - система векторов пр-а C^m. Ранг этой системы - ранг матрицы $A(m,n)$ ($\text{rank}(A)$). Матрицу $A(m,n)$ можно трактовать как систему строк из пр-а C^n.

Для ∀ матрицы $A(m,n)$ ранг этой систем равен рангу системы ее столбцов

Пусть $A: X_n \to Y_m$, A_{eq} - матрица опер-а A относительно произвольн. пары ординиров. базисов $\{e_k\}_{k=1}^{n} \subset X_n$ и $\{q_k\}_{k=1}^{m} \subset Y_m$ $\Rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A_{eq})$

Ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, выбираемых при ее построении, и можно было бы дать эквивал-ое опер-а как определени ранга его матрицы.

§3

1) Согласно $\ker(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$. Пусть x, y - произвольные векторы из $\ker(A)$, α, β - $\forall$ числа. Тогда $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$ т.е линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ $\in$ множеству $\ker(A)$

2) Обозначим $C = AB$. Столбцы матрицы C линейно выражаются из столбцов матрицы A, которые в свою очередь линейно выражаются из максимальн. подсистему линейно независимых столбцов матрицы A. Число столбцов в этой системе равно $\operatorname{rank}(A)$ назовем столбцы этой подсистемы базисными. Можно сказать что столбцы матрицы C $\in$ подпрос-ву натянутому на базисные столбцы матрицы A. $\Rightarrow$ число ~~ч~~ линейно независимых столбцов матрицы C не может превышать $\operatorname{rank}(A)$. С др. стороны строки матрицы C линейно выражаются из строки матрицы B. Проводя аналогичные рассужд., заключаем, что $\operatorname{rank}(C) \le \operatorname{rank}(B)$

3) Рассмотрим систему векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

простр-а R^3. Вектора a^1, a^2 линейно независим. Они образуют максим-но линейно независимую подсистему, т.к. определители, составленные из компонентов векторов a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 соотв-но равно 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ вектора a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 линейно зависимы. Это не единств-ая максимальная линейно независимая подсистема. Таким же свойством обладают, например, пары векторов a^1, a^3 и a^1, a^4. Любая из указанных пар линейно независимых векторов образует базис подпространства, натянутого на вектора a^1, a^2, a^3, a^4. Rank этой системы векторов равен двум

4. Решение. Пусть $y \in Im(A)$. Тогда $y = Ax$ для некоторого вектора $x \in X_n$ т.е.

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in L(Ae^1, \ldots Ae^n)$$

С другой стороны, если $y \in L(Ae^1, \ldots Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax,$$

где $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т.е. $y \in Im(A)$. Значит, $Im(A) = L(Ae^1 \ldots Ae^n)$

5. a) $rank(A) = 1$, базис образа – $(1,1,1)$; $\det(A) = 2$

b) $\operatorname{rank}(A) = 2$, базис образа – $(2,1,1), (-1,-2,1)$; $\operatorname{def}(A)$

c) $\operatorname{rank}(A) = 3$, базис образа – $(-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,$
дефект оператора равен нулю.

Указание. Построить векторы A_i^1, A_i^2, A_i^3. Найти среди них максимальную линейно независимую подсистему и воспользоваться результатом упр.4. Дефект вычислить по формуле (1).

6) Решение. Каждому элементу пространства P_n оператор D ставит в соответствие полином из P_{n-1}. Поэтому $\operatorname{Im}(D) = P_{n-1}$, и можно считать, что $D: P_n \to P_{n-1}$. Любой полином нулевой степени (вещественное число) оператор D обращает в ноль. Полиномы более высоких степеней в результате дифференцирования не могут обратиться в функцию, тождественно равную нулю. Поэтому $\operatorname{Ker}(D) = P_0$.

7) $\operatorname{Im}(P) = L_1$, $\ker(P) = L_2$

8) $\operatorname{Im}(R) = X$, $\ker(R) = \{0\}$

9) Образ – плоскость $(x,a) = 0$, ядро – прямая $[x,a] = 0$.
Указание. Для определения образа воспользуйтесь упр. 4. Постройте базис пространства V_3; в качестве первого вектора выберите a, второго – любой вектор e^1, ортогональный a, третьего – вектор $e^2 = [e^1, a]$. Найдите векторы $[e^1, a]$ и $[e^2, a]$, убедитесь, что они ортогональны, и проведите через начало координат натянутую на них плоскость.

10) Последние $n-r$ столбцов матрицы A_e нулевые, в то время как первые r – линейно независимы.

11) Отличие методом окаймляющих миноров, который можно применять для вычисления

ранга матрицы:

1. Просматриваем элементы матрицы. Если все они нули, полагаем ранг равным нулю и останавливаем процесс.

2. Если найден элемент матрицы, отличный от нуля, то, окаймляем его, т.е. составляем определители второго порядка, присоединяя к нему элементы других строк и столбцов. Если все эти определители второго порядка – нули, то, очевидно, у матрицы только один линейно независимый столбец. Значит ранг матрицы равен единице.

3. Если обнаружен ненулевой определитель второго порядка, то путём окаймления строим определители третьего порядка, пока не получим среди них определитель, отличный от нуля, и т.д. Если на k-ом шаге описанного алгоритма получен определитель не равный нулю, а все определители порядка $k+1$, построенные его окаймлением, – нули, то это означает, что ранг матрицы равен k.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

составлена из столбцов a^1, a^2, a^3, a^4 (см. упр. 3, с. 61). Следовательно, её ранг равен двум. Покажем на примере этой матрицы, как работает метод окаймляющих миноров. Заметим, что в матрице A содержится минор $d = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, не равный нулю. Оба минора третьего порядка (2) и (3), окаймляющие минор d, равны нулю. Следовательно и этим методом мы получим $\operatorname{rank}(A) = 2$

12) Решение. Иногда при вычислении ранга матрицы бывает удобно предварительно выполнить

Элементарные преобразования над её строками или столбцами. Такие преобразования не нарушают линейной зависимости и линейной независимости систем векторов.

Найдём ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

Сразу искать ранг этой матрицы методом окаймляющих миноров достаточно трудоёмко, поэтому сначала упростим матрицу. Выполним следующие преобразования:

1. Из второй строки матрицы вычтем первую, умноженную на два.
2. Из третьей строки матрицы вычтем первую, умноженную на три.
3. Из последней строки матрицы вычтем первую, умноженную на два.

Получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Далее вычтем вторую строку из третьей

строки, и прибавим вторую строку к четвертой, получим.

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что в получившейся матрице минор третьего порядка.

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Оба окаймляющих его минора четвертого порядка равны нулю, так как четвертая строка преобразованной матрицы состоит из нулей. Таким образом, ранг матрицы A равен трем.

13) а) $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$$

в)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

rank(A) = 2

14)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

при $\lambda \neq 0$ rank(A) = 3

при rank(A) = 2

$\downarrow$

$\lambda = 0$

15) а)
$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 31 & 17 & 43 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

rank(A) = 3

$$\begin{matrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 4 \\ & 0 & -8 \\ & 0 & -12 \end{matrix}\Bigg) \sim$$

$(A) = 3$

б)
$$A = \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -4 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 0 & \frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{86}{17} \\ 0 & \frac{581}{17} & -\frac{581}{17} & -\frac{581}{17} & -\frac{1162}{17} \\ 0 & \frac{1072}{17} & -\frac{1072}{17} & -\frac{1072}{17} & -\frac{2144}{17} \\ 0 & \frac{1397}{17} & -\frac{1397}{17} & -\frac{1397}{17} & -\frac{2794}{17} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 0 & \frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{86}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\operatorname{rang}(A) = 2$

б) а)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$$

$\operatorname{rang}(A) = 3$

б)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -5 & -\frac{1}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

при $\lambda = 3$ $\operatorname{rank}(A) = 2$
при $\lambda \neq 3$ $\operatorname{rank}(A) = 3$

18) $A = \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -284 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 0 & \frac{6348}{47} & \frac{171}{47} & -\frac{18044}{47} & \frac{12}{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 3$