

Общероссийский математический портал

Н. Н. Корнеева, Степени асинхронно автоматных преобразований, *Изв. вузов. Матем.*, 2011, номер 3, 30–40

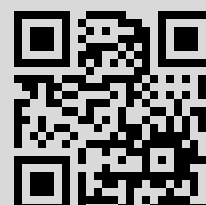
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.213.240.13

14 января 2016 г., 16:14:55



Н.Н. КОРНЕЕВА

СТЕПЕНИ АСИНХРОННО АВТОМАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Аннотация. В работе изучается частично упорядоченное множество степеней асинхронно автоматных преобразований. Показано существование в нем континуума атомов, вложимость конечного линейно упорядоченного множества как начального сегмента и невозможность продолжения вложения частично упорядоченных множеств.

Ключевые слова: степени асинхронно автоматных преобразований, частично-упорядоченные множества, атом, начальный сегмент, покрытие степеней.

УДК: 519.71

Abstract. In this paper we study the partially ordered set of degrees of asynchronous automata transformability. We prove that it contains a continuum of atoms, that every finite linearly ordered set is embeddable into that structure as an initial segment, and that the extending property of the embeddability of partially ordered finite sets is false.

Keywords: degrees of asynchronous automata transformability, partially ordered sets, atom, initial segment, cover for degrees.

В работе Г. Рейны [1] определены отношение эквивалентности на бесконечных последовательностях над некоторыми конечными алфавитами при помощи конечных автоматов Мили и частичный порядок на классах эквивалентности. Напомним эти определения.

Определение 1. Конечным автоматом Мили называется пятерка

$$T = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega),$$

где S, Σ, Σ' — конечные множества состояний входных и выходных символов соответственно, $\delta : S \times \Sigma \rightarrow S$ — функция переходов, $\omega : S \times \Sigma \rightarrow \Sigma'$ — функция выходов. Если выделено начальное состояние s_0 , то автомат (T, s_0) называется инициальным.

Определение 2 ([1]). Пусть x, y — бесконечные последовательности, каждая над конечным алфавитом (не обязательно над одним и тем же). Последовательность x эквивалентна последовательности y тогда и только тогда, когда существуют конечные инициальные автоматы (T, s) , (T', s') и блоки $A \in \Sigma_T^*$, $A' \in \Sigma_{T'}^*$ (которые определяют некоторые конечные задержки) такие, что

$$\omega_T(s, x) = Ay, \quad \omega_{T'}(s', y) = A'x.$$

Класс эквивалентности, который содержит последовательность x , обозначается $[x]$ и называется степенью автоматных преобразований последовательности x .

Поступила 04.09.2009

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00399-а).

На множестве степеней автоматных преобразований определяется частичный порядок: $[x] \geq [y]$ ($[y]$ сводится к $[x]$) тогда и только тогда, когда существуют конечный инициальный автомат (T, s) и блок $A \in \Sigma_T^*$ такие, что $\omega_T(s, x) = Ay$.

Полученный частичный порядок обозначается $V([1])$.

Г. Рейна [1] доказал, что частичный порядок V является верхней полурешеткой, и построил атом в V . В.Р. Байрашева [2] обобщила результаты [1], в частности, показав вложимость в V любого конечного линейно упорядоченного множества как начального сегмента [2] и существование континуума атомов. В данной работе обобщаются результаты Г. Рейны и В.Р. Байрашевой на случай асинхронных автоматов. Доказательства теорем 1, 2 существенно используют доказательства соответствующих утверждений из [1], [2] с необходимыми изменениями на случай асинхронных автоматов.

Определение 3 ([3], с. 35). Конечным асинхронным автоматом называется пятерка

$$T = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega),$$

где S, Σ, Σ' — конечные множества состояний, входных и выходных символов соответственно, $\delta : S \times \Sigma \rightarrow S$ — функция переходов, $\omega : S \times \Sigma \rightarrow (\Sigma')^*$ — функция выходов.

Единственное отличие конечного асинхронного автомата от обычного конечного автомата Мили в том, что областью значений функции выхода являются не только символы выходного алфавита, но и слова из символов выходного алфавита произвольной длины (в том числе и пустое слово).

Аналогично определению Г. Рейны вводятся понятия эквивалентности последовательностей и частичного порядка на классах эквивалентности последовательностей.

Определение 4. Пусть x, y — бесконечные последовательности над конечными алфавитами (каждая над своим алфавитом). Последовательность x эквивалентна последовательности y тогда и только тогда, когда существуют конечные асинхронные инициальные автоматы $(T, s), (T', s')$ такие, что

$$\omega_T(s, x) = y, \quad \omega_{T'}(s', y) = x.$$

Обозначим класс эквивалентности последовательности x через $[x]^*$ и назовем $[x]^*$ степенью асинхронно автоматных преобразований.

Аналогично для частичного порядка: $[x]^* \geq^* [y]^*$ ($[y]^*$ сводится к $[x]^*$) тогда и только тогда, когда существует конечный асинхронный инициальный автомат (T, s) такой, что $\omega_T(s, x) = y$.

Полученное таким образом частично упорядоченное множество степеней асинхронно автоматных преобразований обозначим через V^* .

Предложение 1. *Имеют место следующие соотношения между степенями автоматных преобразований и степенями асинхронно автоматных преобразований:*

- 1) если $[x] \leq [y]$, то $[x]^* \leq^* [y]^*$;
- 2) существуют последовательности x, y такие, что $[x][y]$ и $[x]^* =^* [y]^*$;
- 3) для любой последовательности x ее степень асинхронно автоматных преобразований есть объединение степеней автоматных преобразований: $[x]^* = \bigcup_{j \in J} [y_j]$.

Доказательство. Соотношения 1) и 3) очевидны. Покажем справедливость 2) на примере. Рассмотрим две последовательности x и y над алфавитом $\{0, 1\}$, определенные следующим образом: единицы в последовательностях занумерованы, причем за i -й единицей в последовательности x следует i нулей, а за i -й единицей в последовательности y следует

$2i$ нулей. Очевидно, $[x]^* =^* [y]^*$. Покажем, что $[x] \not\geq [y]$. Во-первых, $[y] \not\geq [x]$, поскольку число подряд идущих нулей в последовательности y превосходит число подряд идущих нулей в соответствующих позициях последовательности x и никакой конечный автомат (допустим с k состояниями) не может преобразовать блок из $k + 1$ нулей в блок, состоящий из k нулей, за которыми следует единица. Осталось показать, что $[x] \not\geq [y]$. Допустим обратное: $[x] \geq [y]$. Тогда согласно теореме из [1] о структуре множества классов, лежащих ниже класса последовательности $[x]$, последовательность y эквивалентна некоторой специальной последовательности, т. е. последовательности, полученной из x заменой на нули тех единиц, чьи номера образуют некоторую периодическую последовательность. Рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, показывают, что это невозможно. \square

Класс $[0]^*$ — класс асинхронно автоматных преобразований, которому принадлежит постоянная нулевая последовательность. Его структура описывается в следующем предложении.

Предложение 2. *Класс $[0]^*$ состоит из почти периодических последовательностей (т. е. периодических последовательностей с предпериодом). Для любой последовательности x $[x]^* \geq^* [0]^*$.*

Доказательство. Пусть x — почти периодическая последовательность. Тогда согласно теореме о структуре наименьшего класса из [1] $[x] = [0]$, а значит, $[x]^* =^* [0]^*$. Из постоянной (в частности, нулевой) последовательности посредством конечных асинхронных автоматов можно получить лишь либо почти периодическую последовательность, либо конечный блок, который также будем считать почти периодической последовательностью. Второе утверждение теоремы следует из соответствующего утверждения из [1]: для любой последовательности x $[x] \geq [0]$, следовательно, $[x]^* \geq^* [0]^*$. \square

Таким образом, наименьшие классы в V и V^* совпадают.

Теорема 1. *Существует континуум атомов V^* .*

Доказательство. Сначала построим атом V^* , а затем покажем как построить континуум атомов используя процедуру построения атома.

Построение атома. Пусть $\Sigma = \Sigma' = \{0, 1\}$. Последовательность x , класс эквивалентности которой будет атомом V^* , строим методом начальных сегментов.

Определим последовательность блоков I_i , где каждый блок I_i — собственный начальный сегмент следующего блока I_{i+1} , и вспомогательных блоков A_i и B_i индукцией по i , удовлетворяя следующим условиям (ср. [1]):

(1) A_1 начинается с 0, B_1 — с 1.

(2) Каждый блок A_{i+1} , B_{i+1} представляет собой последовательность копий блоков A_i и/или B_i , начинающуюся с A_i и B_i соответственно. Блоки имеют длину, большую i . Ни A_i , ни B_i не являются частью никакой периодической последовательности периода i .

(3) I_{i+1} состоит из I_i и следующих за ним копий блоков A_i и/или B_i .

(4) Перенумеруем конечные асинхронные инициальные автоматы (T, s_0) . Если вход I_i переводит i -й автомат (T, s_0) в финальное состояние s , то, начиная работать в состоянии s , T возвращается в финальное состояние s как под действием входного блока A_i , так и под действием входного блока B_i .

Последовательность x определим как предел последовательности блоков I_i . Покажем, что таким образом построенная последовательность x является атомом V^* .

Последовательность x не является почти периодической. Предположим обратное: пусть x имеет конечный период i . Согласно построению, последовательность x можно рассматривать как начальный блок I_{i+1} , за которым следует последовательность копий блоков A_{i+1} и B_{i+1} . Но в силу условия (2) ни A_{i+1} , ни B_{i+1} не являются частью никакой периодической последовательности периода i .

Теперь пусть y такая последовательность, что $[x]^* \geq^* [y]^* \geq^* [0]^*$. Тогда некоторый асинхронный инициальный автомат (T, s_0) выдает последовательность y , если на его вход подана последовательность x . Пусть i — номер этого автомата в нашей нумерации асинхронных инициальных автоматов.

Последовательность x можно рассматривать как содержащую начальный блок I_i , за которым следует последовательность копий блоков A_i и B_i . В силу свойства (4) T находится в одном и том же состоянии s , финальном для блока I_i , как при прочтении блока A_i , так и при прочтении блока B_i . Следовательно, выходная последовательность y , после того как пройден начальный блок I_i входа, содержит последовательность копий только двух блоков: C (ответ на входной блок A_i , когда T начинает работать в состоянии s) и D (ответ на B_i).

Докажем, что либо $[x]^* =^* [y]^*$, либо $[y]^* =^* [0]^*$.

Рассмотрим все случаи.

1. $|C| = |D|$. Если C и D совпадают, то последовательность y почти периодическая, следовательно, $[y]^* =^* [0]^*$. Если C и D не совпадают, то можно описать асинхронный инициальный автомат, заменяющий C на A_i , D на B_i . Следовательно, x и y эквивалентны и $[x]^* =^* [y]^*$.

2. $|C| > |D|$. Распишем C и D следующим образом: $C = C_1C_2$, $D = D_1$, где $|C_1| = |D| = |D_1|$ и $|C_2| > 0$.

Если C_1 и D_1 не совпадают, то можно описать асинхронный инициальный автомат, заменяющий C на A_i , D на B_i . Следовательно, x и y эквивалентны и $[x]^* =^* [y]^*$.

Если C_1 и D_1 совпадают, то $C = D_1^{k_1}C'_2$, $D = D_1$, где C'_2 такое, что D_1 не является префиксом C'_2 . Чтобы не загромождать запись, будем опускать штрихи. Тогда $C = D_1^{k_1}C_2$, $D = D_1$.

Возможны несколько вариантов.

а) $C_2 = \lambda$ (пустая строка). Тогда y — почти периодическая последовательность и $[y]^* =^* [0]^*$.

б) $|C_2| > |D_1|$. Тогда можно описать асинхронный инициальный автомат, заменяющий C на A_i , D на B_i . Следовательно, $[x]^* =^* [y]^*$.

в) $|C_2| < |D_1|$. Снова распишем $C = D_1^{k_1}C_2$, $D = D_1 = D_2D_3$, где $|C_2| = |D_2|$ и $|D_3| > 0$.

Если C_2 и D_2 не совпадают, то x , y эквивалентны и $[x]^* =^* [y]^*$.

Если C_2 и D_2 совпадают, то $C = D_1^{k_1}D_2$, $D = D_2D_3$.

Возможны варианты.

i) D_3 не является префиксом $D_1 (= D)$. Тогда x , y эквивалентны и $[x]^* =^* [y]^*$.

ii) D_3 — префикс $D_1 (= D)$. Тогда $C = D_1^{k_1}D_2$, $D = D_1 = D_2^{l_2}D'_3$, где $|D'_3| < |D_2|$ и D'_3 — префикс D_2 (по построению). Снова, как и выше, будем опускать штрихи. Тогда $C = D_1^{k_1}D_2$, $D = D_2^{l_2}D_3$, причем $|D_3| < |D_2| < |D_1| < |C|$.

Если $D_3 = \lambda$, то y — почти периодическая последовательность и $[y]^* =^* [0]^*$. В противном случае ($|D_3| > 0$) расписываем $D_2 = D_3D_4$, $|D_3| < |D_2|$, $|D_4| > 0$. Далее рассматриваем случаи i) и ii) для D_2 , D_4 и получаем представление $D_2 = D_3^{l_3}D_4$, где $|D_4| < |D_3|$.

Продолжая по индукции, на некотором шаге получим либо $[x]^* =^* [y]^*$, либо $[y]^* =^* [0]^*$.

3. $|C| < |D|$. Доказывается так же, как случай 2.

Таким образом, последовательность x является атомом V^* .

Построим по индукции блоки I_i , A_i и B_i (см. [1]).

Шаг 0. Определим I_0 как пустой блок (длины ноль), A_0 как символ 0 и B_0 как символ 1.

Шаг $(i+1)$. К этому времени построены I_i , A_i и B_i . Пусть (T, s_0) — $(i+1)$ -й асинхронный инициальный автомат.

Обозначим через $\langle s \rangle$ множество финальных состояний автомата (T, s) при подаче входных блоков, являющихся последовательностями копий блоков A_i и/или B_i .

Пусть s_1 — финальное состояние автомата (T, s_0) для входного блока I_i . Выберем состояние $s_2 \in \langle s_1 \rangle$ так, чтобы мощность множества $\langle s_2 \rangle$ была минимальна и $s_2 \in \langle s_2 \rangle$. Определим блок I_{i+1} , состоящий из блока I_i и следующей за ним последовательности копий блоков A_i и/или B_i такой, что s_2 — финальное состояние автомата (T, s_0) для входа I_{i+1} .

Далее строим A_{i+1} и B_{i+1} . По предположению индукции A_i и B_i имеют длину не меньше i и отличаются первыми символами. Следовательно, либо $A_i A_i$, либо $A_i B_i$ не образуют периодическую последовательность периода i . Выберем тот блок, который не является периодической последовательностью. Обозначим его $A_i X_i$. Пусть s_A — финальное состояние автомата (T, s_2) для входного блока $A_i X_i$. Тогда $s_A \in \langle s_2 \rangle \subseteq \langle s_1 \rangle$ и в силу минимальности $\langle s_2 \rangle$ $\langle s_A \rangle = \langle s_2 \rangle$. Поэтому $s_2 \in \langle s_A \rangle$. Обозначим через A_{i+1} последовательность копий блоков A_i и/или B_i , начинающуюся с $A_i X_i$, для которой финальное состояние автомата (T, s_2) есть s_2 .

Аналогично строится B_{i+1} . Построенные блоки удовлетворяют условиям (1)–(4).

Континуальность. Доказательство повторяет доказательство соответствующего утверждения для V (лишь с заменой автоматов Мили на асинхронные автоматы), принадлежащее В.Р. Байрашевой. Так как этот результат, насколько известно автору, не опубликован, приведем здесь подробное доказательство.

Строим последовательности, степени которых будут атомами структуры V^* , методом начальных сегментов по шагам.

Шаг 0. Положим $I_0 = \emptyset$, $A_0 = 0$, $B_0 = 1$.

Шаг 1. Положим $A_0^1 = A_0 A_0 = 00$, $B_0^1 = B_0 A_0 = 10$. Строим слова I_1^1 , A_1^1 , B_1^1 из слов A_0^1 , B_0^1 , удовлетворяя условиям (1)–(4) с асинхронным автоматом $T_1 = (T, s_0)$.

Аналогично положим $A_0^2 = A_0 B_0 = 01$, $B_0^2 = B_0 B_0 = 11$. Строим слова I_1^2 , A_1^2 , B_1^2 из слов A_0^2 , B_0^2 , удовлетворяя условиям (1)–(4) с асинхронным автоматом $T_1 = (T, s_0)$.

Очевидно, что слово I_1^1 отличается от слова I_1^2 , A_1^1 — от A_1^2 , B_1^1 — от B_1^2 .

Шаг n . К этому шагу уже построены I_{n-1}^i , A_{n-1}^i , B_{n-1}^i , $i = \overline{1, 2^{n-1}}$, причем по построению A_{n-1}^{2k-1} (B_{n-1}^{2k-1}) отличается от A_{n-1}^{2k} (B_{n-1}^{2k}) хотя бы в одной точке при $k = \overline{1, 2^{n-2}}$.

Для всех $i = \overline{1, 2^{n-1}}$ поступаем аналогично шагу 1. Положим $A_{n-1}^{i,1} = A_{n-1}^i A_{n-1}^i$, $B_{n-1}^{i,1} = B_{n-1}^i A_{n-1}^i$ и $A_{n-1}^{i,2} = A_{n-1}^i B_{n-1}^i$, $B_{n-1}^{i,2} = B_{n-1}^i B_{n-1}^i$.

Строим I_n^{2i-1} из I_{n-1}^i , слов $A_{n-1}^{i,1}$, $B_{n-1}^{i,1}$ и слова A_n^{2i-1} , B_n^{2i-1} из слов $A_{n-1}^{i,1}$, $B_{n-1}^{i,1}$, удовлетворяя условиям (1)–(4) с асинхронным автоматом $T_n = (T, s_0)$.

Затем строим слово I_n^{2i} из I_{n-1}^i , слов $A_{n-1}^{i,2}$, $B_{n-1}^{i,2}$ и слова A_n^{2i} , B_n^{2i} из слов $A_{n-1}^{i,2}$, $B_{n-1}^{i,2}$, удовлетворяя условиям (1)–(4) с асинхронным автоматом $T_n = (T, s_0)$.

Так как слова $A_{n-1}^{i,1}$ ($B_{n-1}^{i,1}$) отличаются от слов $A_{n-1}^{i,2}$ ($B_{n-1}^{i,2}$) хотя бы в одной точке, то построенные I_n^j , A_n^j , B_n^j ($j = \overline{1, 2^n}$) попарно отличаются друг от друга, т. е. $I_n^j \neq I_n^k$, $A_n^j \neq A_n^k$, $B_n^j \neq B_n^k$ при $j \neq k$. Шаг n завершен.

Последовательности x_n определим как пределы последовательностей блоков I_m^k ($m \rightarrow \infty$) при подходящих k . Степень каждой такой последовательности является атомом по построению.

В ходе построения получаем 2^{χ_0} различных последовательностей. Но поскольку в каждом атоме (как в любой степени) не более счетного числа последовательностей, то получаем континуум атомов. \square

Определение 5. Степень $[x]^*$ будем называть покрытием над степенью $[y]^*$ и обозначать $[x]^* \succ^* [y]^*$, если $[x]^* >^* [y]^*$ и не существует степени $[z]^*$ такой, что $[x]^* >^* [z]^* >^* [y]^*$.

Обозначим через $\langle (A_1|A_2|\dots|A_n)^* \rangle$ множество конечных непустых слов, состоящих из копий блоков A_1 и/или A_2 и/или \dots и/или A_n .

Теорема 2. Любое конечное линейно упорядоченное множество вложимо как начальный сегмент V^* .

Доказательство. Покажем, что для любого натурального числа n найдется $n+1$ последовательность x_1, x_2, \dots, x_{n+1} такая, что $[x_1]^* \succ^* [x_2]^* \succ^* \dots \succ^* [x_n]^* \succ^* [x_{n+1}]^* =^* [0]^*$.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Возьмем произвольное $k > \log_2(n+1)$. Выберем произвольно различные $n+1$ слова длины k в алфавите Σ . Это возможно сделать в силу выбора k . Обозначим выбранные слова через a_1, a_2, \dots, a_{n+1} .

Рассмотрим следующие $n-1$ инициальных автомата $\overline{T}^i = (S_i, \Sigma, \Sigma, \delta_i, \omega_i, t_i)$ ($i = \overline{1, n-1}$), где S_i — конечное множество состояний, Σ — входной и выходной алфавит, t_i — начальное состояние \overline{T}^i , δ_i и ω_i — соответственно функции переходов и выходов, определенные формулами

$$\begin{aligned} \delta_i(t_i, a_j) &= t_i^j, \quad \omega_i(t_i, a_j) = a_1 \quad (j = \overline{1, n+1}), \\ \delta_i(t_i^j, a_k) &= t_i^k, \quad \omega_i(t_i^j, a_k) = \begin{cases} a_1, & j = \overline{1, i+1}, \\ a_j, & j = \overline{i+2, n+1} \end{cases} \quad (k = \overline{1, n+1}). \end{aligned}$$

Другими словами, i -й автомат \overline{T}^i склеивает с фиксированной задержкой слова a_1, \dots, a_{i+1} в одно слово a_1 , а остальные слова a_{i+2}, \dots, a_{n+1} оставляет без изменения.

Определим последовательность блоков I_j , где каждый блок I_j — собственный начальный сегмент следующего блока I_{j+1} , и вспомогательных блоков A_j^1, \dots, A_j^{n+1} индукцией по j , удовлетворяя следующим условиям (ср. [2]).

(1) $A_0^i = a_i$ ($i = \overline{1, n+1}$).

(2) Каждый блок A_{j+1}^i ($i = \overline{2, n+1}$) представляет собой последовательность копий меньших блоков A_j^1 и/или A_j^2 и/или \dots и/или A_j^i , начинающуюся с A_j^i , а блок A_{j+1}^1 состоит из блоков A_j^1 и/или A_j^2 и начинается с A_j^1 .

(3) I_{j+1} состоит из I_j и следующим за ним словом из множества $\langle (A_j^1|A_j^2|\dots|A_j^{n+1})^* \rangle$.

(4) Перенумеруем асинхронные инициальные автоматы (T, s_0) , исключая \overline{T}^i ($i = \overline{1, n-1}$). Пусть (T, s_0) — j -й асинхронный инициальный автомат T_j в этой нумерации. Если вход I_j переводит T_j в финальное состояние s , то, начиная работать в состоянии s , T_j возвращается в финальное состояние s под действием входных блоков A_j^i ($i = \overline{1, n+1}$).

(5) Для всякого j $T_j(0^\infty) \neq \overline{T}^i(I_j)$ ($i = \overline{1, n-1}$).

(6) Для всякого j $T_j(\overline{T}^i(I_j)) \neq \overline{T}^{i-1}(I_j)$ ($i = \overline{2, n-1}$) на той части, на которой они оба определены, или $T_j(\overline{T}^i(I_j B))$ эквивалентна нулевой последовательности для любого $B \in \langle (A_j^1|A_j^2|\dots|A_j^{n+1})^* \rangle$.

(7) Для всякого j автомат T_j либо отображает все A_j^i ($i = \overline{1, n+1}$) в различные блоки, либо склеивает их в один блок, либо склеивает первые k блоков (т. е. действует как автомат \overline{T}^{k-1}).

Построим требуемые последовательности.

Шаг 0. Положим $I_0 = \emptyset$, $A_0^i = a_i$ ($i = \overline{1, n+1}$).

Шаг $j+1$. К этому времени уже построены блоки $I_j, A_j^1, \dots, A_j^{n+1}$. Пусть (T, s_0) — $(j+1)$ -й асинхронный автомат. Обозначим через $\langle s \rangle^k$ множество финальных состояний автомата (T, s) при подаче входных блоков из множества $\langle (A_j^1 | A_j^2 | \dots | A_j^{k+1})^* \rangle$.

Пусть \bar{s}_0 — финальное состояние автомата (T, s_0) для входного блока I_j . Найдем множество $\langle \bar{s}_0 \rangle^n$ и выберем состояние $s_1 \in \langle \bar{s}_0 \rangle^n$ так, чтобы мощность множества $\langle s_1 \rangle^n$ была минимальна и $s_1 \in \langle s_1 \rangle^n$.

Аналогично для $i = \overline{n-1, 1}$ находим $\langle s_{n-i} \rangle^i$ и выбираем s_{n-i+1} так, чтобы мощность множества $\langle s_{n-i+1} \rangle^i$ была минимальной и $s_{n-i+1} \in \langle s_{n-i+1} \rangle^i$.

В итоге выделится некоторое состояние s_n . Очевидно, если $i \leq j$, то $s_j \in \langle s_i \rangle^{n-i+1}$.

Пусть I_{j+1}^1 состоит из I_j и следующего за ним такого блока из множества $\langle (A_j^1 | A_j^2 | \dots | A_j^{n+1})^* \rangle$, что s_n — финальное состояние автомата (T, s_0) для входа I_{j+1}^1 .

Пусть $s_{A_j^1}$ — финальное состояние автомата (T, s_n) для входного блока A_j^1 . Очевидно, что $s_{A_j^1} \in \langle s_n \rangle^1$, и в силу минимальности $\langle s_n \rangle^1 \langle s_{A_j^1} \rangle^1 = \langle s_n \rangle^1$. Поэтому $s_n \in \langle s_{A_j^1} \rangle^1$.

Обозначим через $A_{j+1,1}^1$ блок, состоящий из блока A_j^1 и следующего за ним такого блока из множества $\langle (A_j^1 | A_j^2)^* \rangle$, что финальное состояние автомата (T, s_n) для $A_{j+1,1}^1$ есть s_n .

Аналогично для $i = \overline{2, n+1}$ определяем блок $A_{j+1,1}^i$ как блок из множества $\langle (A_j^1 | \dots | A_j^i)^* \rangle$, который начинается с последовательности A_j^i такой, что финальное состояние автомата (T, s_n) при подаче $A_{j+1,1}^i$ есть s_n .

Далее следует n подшагов, удовлетворяющих условию (5).

Подшаг 0. Блок I_{j+1}^1 уже построен.

Подшаг l . Пусть построено слово I_{j+1}^l . Строим I_{j+1}^{l+1} . Рассмотрим автомат (\bar{T}^l, t_l) . Проверим выполняется ли равенство

$$T(s_0, 0^\infty) = \bar{T}^l(I_{j+1}^l).$$

Если $|\omega_T(s_0, 0^\infty)| < |\omega_l(t_l, I_{j+1}^l)|$, то, очевидно, $T(s_0, 0^\infty) \neq \bar{T}^l(I_{j+1}^l)$, и полагаем $I_{j+1}^{l+1} = I_{j+1}^l$.

Если $|\omega_T(s_0, 0^\infty)| \geq |\omega_l(t_l, I_{j+1}^l)|$, то возможны следующие случаи.

Если равенства нет, то полагаем $I_{j+1}^{l+1} = I_{j+1}^l$.

Если равенство есть, то существует k ($1 \leq k \leq n+1$) такое, что $T(s_0, 0^\infty) \neq \bar{T}^l(I_{j+1}^l A_{j+1,1}^k)$.

Тогда полагаем $I_{j+1}^{l+1} = I_{j+1}^l A_{j+1,1}^k$.

После шага $n-1$ получим I_{j+1}^n .

Следующие $n-1$ подшагов удовлетворяют условию (6).

Подшаг $n-1$. Блок I_{j+1}^n уже построен.

Подшаг $l = m+n-2$ ($m = \overline{2, n-1}$). Пусть построено слово I_{j+1}^l . Строим I_{j+1}^{l+1} . Подадим на вход автомата (\bar{T}^m, t_m) слово $I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \dots A_{j+1,1}^{m+1} A_0^1$. На выходе имеем $a_1 B_l H$, где $|B_l| = |I_{j+1}^l|$, $|H| = |A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \dots A_{j+1,1}^{m+1}|$, причем H имеет вид $(A_0^1)^k$.

Подадим получившееся слово на вход автомата (T, s_0) .

Проверим выполняется ли равенство

$$\omega_T(s_0, a_1 B_l H) = \omega_{m-1}(t_{m-1}, I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \dots A_{j+1,1}^{m+1} A_0^1)$$

на той части, на которой оба они определены.

Если равенства нет, то положим $I_{j+1}^{l+1} = I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \cdots A_{j+1,1}^{m+1}$.

Если равенство есть, то рассмотрим следующие варианты.

1) Если $|\omega_T(s_0, a_1 B_l H)| \geq |\omega_{m-1}(t_{m-1}, I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \cdots A_{j+1,1}^{m+1} A_0^1)|$, то полагаем $I_{j+1}^{l+1} = I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 \cdots A_{j+1,1}^{m-1} A_{j+1,1}^{m+1} A_{j+1,1}^m$.

2) Если $|\omega_T(s_0, a_1 B_l H)| < |\omega_{m-1}(t_{m-1}, I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \cdots A_{j+1,1}^{m+1} A_0^1)|$, то будем рассматривать слова вида $I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \cdots A_{j+1,1}^{m+1} B$, где $B \in \langle (A_{j+1,1}^1 | A_{j+1,1}^2 | \cdots | A_{j+1,1}^{n+1})^* \rangle$. Если существует B такое, что

$$|\omega_T(s_0, \omega_m(t_m, I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \cdots A_{j+1,1}^{m+1} B))| \geq |\omega_{m-1}(t_{m-1}, I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \cdots A_{j+1,1}^{m+1} A_0^1)|,$$

то $I_{j+1}^{l+1} = I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \cdots A_{j+1,1}^{m+1} B$ или $I_{j+1}^{l+1} = I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 \cdots A_{j+1,1}^{m-1} A_{j+1,1}^{m+1} A_{j+1,1}^m B$ в зависимости от того, для какого из них не будет равенства.

Если такого B не существует, то $|\omega_T(s_0, \omega_m(t_m, I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \cdots A_{j+1,1}^{m+1} B))| \leq K$ для любого блока $B \in \langle (A_{j+1,1}^1 | A_{j+1,1}^2 | \cdots | A_{j+1,1}^{n+1})^* \rangle$, и поэтому последовательность

$$\omega_T(s_0, \omega_m(t_m, I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \cdots A_{j+1,1}^{m+1} B))$$

эквивалентна нулевой последовательности. Тогда $I_{j+1}^{l+1} = I_{j+1}^l A_{j+1,1}^1 A_{j+1,1}^2 \cdots A_{j+1,1}^{m+1}$.

После шага с номером $2n - 3$ получим I_{j+1}^{2n-2} .

Положим $I_{j+1} = I_{j+1}^{2n-2}$. Очевидно, что I_{j+1} переводит автомат (T, s_0) из состояния s_0 в состояние s_n .

Теперь будем строить блоки $A_{j+1}^1, \dots, A_{j+1}^{n+1}$. Осталось удовлетворить условию (7).

Подадим на вход автомата (T, s_n) блоки $A_{j+1,1}^i$ ($i = \overline{1, n+1}$) и проанализируем получившиеся выходы. Пусть длина выходного блока $\omega_T(s_n, A_{j+1,1}^i)$ равна l_i ($i = \overline{1, n+1}$). Найдем L — наименьшее общее кратное чисел l_i ($i = \overline{1, n+1}$). Положим $A_{j+1,2}^i = (A_{j+1,1}^i)^{L/l_i}$. Тогда длины всех выходных блоков $\omega_T(s_n, A_{j+1,2}^i)$ равны L .

Для получившихся блоков возможны следующие 4 варианта (см. [2]):

1) $\omega_T(s_n, A_{j+1,2}^i) \neq \omega_T(s_n, A_{j+1,2}^k)$ при $i \neq k$,
 2) $\omega_T(s_n, A_{j+1,2}^i) = \omega_T(s_n, A_{j+1,2}^k)$ для $i, k = \overline{1, n+1}$,
 3) $\omega_T(s_n, A_{j+1,2}^i) = \cdots = \omega_T(s_n, A_{j+1,2}^k)$ и $\omega_T(s_n, A_{j+1,2}^i) \neq \omega_T(s_n, A_{j+1,2}^l)$ при $i \neq l$ ($i, l = \overline{k+1, n+1}$), т. е. T_{j+1} склеивает блоки с номерами $\overline{1, k}$ (как автомат \overline{T}^{k-1}),

4) T_{j+1} склеивает блоки иначе, чем автоматы \overline{T}^i ($i = \overline{1, n-1}$).

В случаях 1)–3) положим $A_{j+1}^i = A_{j+1,2}^i$ ($i = \overline{1, n+1}$).

В случае 4) будем изменять блоки $A_{j+1,2}^i$ ($i = \overline{1, n+1}$) так, чтобы получить случаи 1)–3). Для того, чтобы не изменились свойства (1)–(6), к каждому блоку можно добавлять только блоки с номерами, не большими, чем его собственный номер.

Разобьем индексы $1, \dots, n+1$ на группы склеек $(i_1^1, \dots, i_{k_1}^1), (i_2^1, \dots, i_{k_2}^1), \dots, (i_r^1, \dots, i_{k_r}^1)$.

Сначала рассмотрим группу индексов, которая не содержит 1 или 2. Допустим, это группа $(i_1^1, \dots, i_{k_1}^1)$. Так как $i_1^1 \neq 1$ или $i_1^1 \neq 2$, то к $A_{j+1,2}^{i_1^1}$ можно добавить $A_{j+1,2}^1$. Получим $A_{j+1,2}^{i_1^1} A_{j+1,2}^1$, а все остальные блоки просто удвоим, не изменяя индексы. Поскольку $\omega_T(s_n, A_{j+1,2}^1)$ не принадлежит данной группе склеек, то, следовательно, блок с номером i_1^1 отделился от других блоков с номерами из этой группы. Теперь i_1^1 не входит ни в какую группу склеек. (Если же $i_1^1 = 1$, то добавляем $A_{j+1,2}^2$ ко всем блокам кроме первого, а первый удваиваем, дальнейшие рассуждения аналогичны.) Так же поступаем с другими номерами этой группы и с другими группами.

Остался случай, когда группа склеек имеет вид $(1, 2, \dots, k, i_{k+1}^\beta, \dots, i_{k\beta}^\beta)$. Отделим сначала блоки с номерами $i_{k+1}^\beta, \dots, i_{k\beta}^\beta$, а оставшиеся блоки с номерами $1, 2, \dots, k$ останутся склеенными.

В итоге получим либо отсутствие склеенных блоков (1 вариант), либо склеивание первых k блоков (3 вариант).

Окончательные варианты блоков $A_{j+1,2}^l$ обозначим через A_{j+1}^l ($l = \overline{1, n+1}$).

Очевидно, построенные блоки I_{j+1} и A_{j+1}^l ($l = \overline{1, n+1}$) обладают свойствами (1)–(7).

Положим $x_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} I_j$, $x_{i+1} = \overline{T^i}(x_1)$ ($i = \overline{1, n-1}$), $x_{n+1} = (A_0^1)^\infty$ (т.е. x_{n+1} — почти периодическая последовательность и, следовательно, $[x_{n+1}]^* = [0]^*$). По построению получаем $[x_1]^* \geq^* [x_i]^*$ ($i = \overline{2, n}$) и $[x_1]^* \geq^* [x_{n+1}]^*$. В силу свойств автоматов $\overline{T^i}$ имеем $[x_i]^* \geq^* [x_{i+1}]^*$ ($i = \overline{1, n}$).

Докажем, что все неравенства строгие. Допустим существует асинхронный автомат T_p такой, что $T_p(x_{i+1}) = x_i$. Следовательно, $T_p(\overline{T^i}(x_1)) = \overline{T^{i-1}}(x_1)$. Но в силу (6) $T_p(\overline{T^i}(I_p)) \neq \overline{T^{i-1}}(I_p)$ в той части, где они оба определены, или $T_p(\overline{T^i}(x_1))$ эквивалентна нулевой последовательности. Получили противоречие: в первом случае явное, во втором — со свойством (5). Следовательно, $[x_i]^* >^* [x_{i+1}]^*$.

Пусть теперь существует $[y]^*$ такой, что $[x_i]^* >^* [y]^* >^* [x_{i+1}]^*$. Значит, существует асинхронный автомат T такой, что $T(x_i) = y$. Обозначим $T' = T \circ \overline{T^{i-1}}$. Тогда $T'(x_1) = T(\overline{T^{i-1}}(x_1)) = T(x_i) = y$. Пусть T' имеет номер k . На вход автомата T_k подадим последовательность x_1 , которую можно рассматривать как содержащую начальный блок I_k , за которым следует последовательность копий блоков A_k^1, \dots, A_k^{n+1} . В силу (7) $T_k(x_1)$ может лежать лишь в степенях $[x_1]^*, [x_i]^* (i = \overline{2, n}), [0]^*$. Следовательно, такого y не существует и $[x_i]^* >^* [x_{i+1}]^* \quad \forall i = \overline{1, n}$. \square

Многие алгоритмические проблемы степенной структуры \mathcal{L} решаются положительно ([4], гл. II), если в \mathcal{L} положительно решается следующая проблема расширения вложений конечных частично упорядоченных множеств. Пусть частично упорядоченные множества \mathcal{P} и \mathcal{Q} таковы, что \mathcal{Q} является расширением \mathcal{P} . Если \mathcal{P} вложимо в \mathcal{L} с сохранением отношения \leq , то существует ли вложение \mathcal{Q} в \mathcal{L} , расширяющее это вложение \mathcal{P} ? Следующая теорема (вместе с теоремой 3 из [2] и теоремой 2 из данной работы) дает отрицательный ответ на эту проблему для структуры степеней V и V^* .

Теорема 3. *Как в V , так и в V^* справедливо следующее утверждение: для любых двух последовательностей a и x таких, что $[a] < [x]$ (соответственно $[a]^* <^* [x]^*$) существует последовательность c такая, что $[c] > [a]$ и $[c] \parallel [x]$ (соответственно $[c]^* >^* [a]^*$ и $[c]^* \parallel^* [x]^*$).*

Доказательство. Сначала докажем теорему для множества степеней V . Пусть $\Sigma = \Sigma' = \{0, 1\}$. Перенумеруем инициальные автоматы Мили (T, t_0) (с входным алфавитом Σ) и (S, s_0) (с входным алфавитом $\Sigma \times \Sigma$). Наряду с этой нумерацией будем рассматривать нумерацию пар (T_i, d) и (S_i, d) , где T_i, S_i — i -й автомат в нумерации инициальных автоматов, d — натуральное число.

Будем строить последовательность c по индукции так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} \forall i \forall d \forall A (|A| = d \rightarrow T_i(x) \neq Ac), \\ \forall i \forall d \forall A (|A| = d \rightarrow T_i(c) \neq Ax), \\ \forall i \forall d \forall A (|A| = d \rightarrow S_i((a, c)) \neq Ax). \end{aligned}$$

Обозначим через c_i начальный сегмент c , строящийся на i -м шаге.

Шаг 0. $c_0 = \emptyset$.

Шаг $k + 1$. Пусть $k + 1$ — номер пары $\langle i, d \rangle$. К этому шагу уже построено c_k . Для него проверяем условие

$$\exists A(|A| = d \wedge T_i(x) = Ac_k y), \quad (1)$$

где y — подходящая последовательность.

Если (1) истинно, то полагаем $c'_{k+1} = c_k a$, где a — символ, отличный от первого символа последовательности y . Если ложно, то $c'_{k+1} = c_k$.

Если $|c'_{k+1}| \leq d$, то произвольно приписываем к нему справа символы алфавита Σ так, чтобы длина получившегося блока (его также обозначаем c'_{k+1}) была больше d .

Теперь для c'_{k+1} проверяем условие

$$\exists A(|A| = d \wedge T_i(c'_{k+1}) = Ax_{k+1}), \quad (2)$$

где x_{k+1} — такой начальный сегмент x , что $|Ax_{k+1}| = |c'_{k+1}|$.

Если (2) истинно, то существует блок b_{k+1} некоторой длины такой, что $T_i(c'_{k+1} b_{k+1}) \neq Ax'_{k+1}$, где x'_{k+1} — начальный сегмент x такой, что $|c'_{k+1} b_{k+1}| = |Ax'_{k+1}|$. Иначе, если такого b_{k+1} не существует, x — почти периодическая последовательность, что противоречит условию. В этом случае полагаем $c''_{k+1} = c'_{k+1} b_{k+1}$. Если условие ложно, то $c''_{k+1} = c'_{k+1}$.

Теперь для c''_{k+1} проверяем условие

$$\exists A(|A| = d \wedge S_i((a''_{k+1}, c''_{k+1})) = Ax''_{k+1}), \quad (3)$$

где x''_{k+1} — такой начальный сегмент x , что $|Ax''_{k+1}| = |c''_{k+1}| = |a''_{k+1}|$.

Если оно истинно, то существует блок b_{k+1} некоторой длины такой, что $S_i(a'_{k+1}, c''_{k+1} b_{k+1}) \neq Ax'''_{k+1}$, где x'''_{k+1} — начальный сегмент x такой, что $|Ax'''_{k+1}| = |c''_{k+1} b_{k+1}| = |a'_{k+1}|$. Иначе $[a] \geq [x]$, что противоречит условию. В этом случае полагаем $c_{k+1} = c''_{k+1} b_{k+1}$. Если условие ложно, то $c_{k+1} = c''_{k+1}$.

Теперь переходим к следующему шагу.

Последовательность c построена. Она несравнима с последовательностью x (это следует из первого и второго требований построения c). Необходимо определить, как последовательность c соотносится с последовательностью a .

Рассмотрим различные варианты.

1) $[c] \leq [a]$. Тогда $[c] \leq [x]$, что невозможно, поскольку по построению $[c] \parallel [x]$.

2) $[c] > [a]$. В этом случае построено то, что требовалось.

3) $[c] \parallel [a]$. В этом случае рассмотрим последовательность $\tilde{c} = (a, c)$ ($[\tilde{c}] > [a]$). Посмотрим, как соотносятся последовательности \tilde{c} и x .

Если $[\tilde{c}] \leq [x]$. Тогда $[c] \leq [x]$, что невозможно.

Если $[\tilde{c}] > [x]$, то $[(a, c)] > [x]$, что невозможно в силу построения последовательности c (противоречит третьему требованию).

Остается лишь один возможный случай, когда $[\tilde{c}] \parallel [x]$. В этом случае построенная последовательность \tilde{c} удовлетворяет условиям теоремы: $[\tilde{c}] > [a]$ и $[\tilde{c}] \parallel [x]$. Что и требовалось.

Теперь докажем теорему для множества V^* . Перенумеруем асинхронные инициальные автоматы (T, t_0) (с входным алфавитом Σ) и (S, s_0) (с входным алфавитом $\Sigma \times \Sigma$).

Строим последовательность c , удовлетворяя условиям

$$\begin{aligned} \forall i T_i(x) &\neq c, \\ \forall i T_i(c) &\neq x, \\ \forall i S_i((a, c)) &\neq x. \end{aligned}$$

Последовательность c строится по индукции так же, как в предыдущем случае, при этом на $(k+1)$ -м шаге для $(k+1)$ -го асинхронного инициального автомата вместо условий (1)–(3) проверяются последовательно условия

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= c_k y, \\ T_{k+1}(c'_{k+1}) &= x_{k+1}, \\ S_{k+1}((a_{k+1}, c''_{k+1})) &= x''_{k+1}. \end{aligned}$$

Теперь либо построенная последовательность c , либо последовательность $\tilde{c} = (a, c)$ удовлетворяет требованиям теоремы. \square

Автор выражает свою благодарность научному руководителю М.М. Арсланову за постановку задачи и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рейна Г. *Степени автоматных преобразований*, Кибернетический сб., № 14, 95–106 (1977).
- [2] Байрашева В.Р. *Структурные свойства автоматных преобразований*, Изв. вузов. Математика, № 7, 34–39 (1988).
- [3] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. *Введение в теорию автоматов* (Наука, М., 1985).
- [4] Lerman M. *Degrees of unsolvability. Local and global theory*, Perspectives in mathematical logic (Springer-Verlag XIII, Berlin etc., 1983).

Н.Н. Корнеева

*аспирант, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008,*

e-mail: Natalia.Korneeva@ksu.ru

N.N. Korneeva

*Postgraduate, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan (Volga region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: Natalia.Korneeva@ksu.ru