КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
Кафедра технической физики и энергетики

Файрушин И.И.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ
Часть 1. Моделирование процессов в равновесной пылевой плазме

Методические указания для практических занятий

Казань, 2014

Оглавление

Практикум 1: Расчет состава равновесной пылевой плазмы с помощью обобщенной формулы Саха.

Будем считать, что концентрация макрочастиц равна n_r, средняя концентрация электронов в газе или плазме равна n_e, одна макрочастица имеет заряд в единицах заряда электронов равный N, электронный газ и макрочастицы находятся в состоянии статистического равновесия. Также введем следующие обозначения: z_i и z_a – статистические суммы по электронным состояниям иона и атома, φ_u – потенциал однократной ионизации атома газа, q – абсолютное значение заряда электрона, n_i – концентрация ионов, n_a – концентрация атомов, h – постоянная Планка, θ – статистическая температура, равная kT, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_e – масса электрона.

Из закона действующих масс:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{2z_i}{z_a}\left(\frac{2\pi m_e \theta}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{e_1\varphi_u}{\theta}}, \tag{1.1}$$

и баланса заряженных частиц: $n_r N + n_i = n_e$получим

$$\frac{x_i(n_r N + x_i n)}{1 - x_i^2} = \frac{2z_i}{z_a}\left(\frac{2\pi m_e \theta}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{e_1\varphi_u}{\theta}}, \tag{1.2}$$

где $x_i = \dfrac{n_i}{n_a + n_i}$- степень ионизации плазмы, $n = n_e + n_i + n_a$ – общая концентрация электронов ионов и нейтральных атомов плазмы.

Таким образом, (1.2) является обобщением формулы Саха, учитывающим влияние макрочастиц на степень ионизации плазмы.

Условие статистического равновесия электронного газа в пылевой плазме выражается следующим уравнением

$$\mu_1 + e\varphi_1 = \mu + e\varphi, \tag{1.3}$$

где μ_1 - энергия Ферми для электрона внутри макрочастицы и μ – энергия Ферми для электрона вне макрочастицы, φ_1 и φ - потенциалы электрического поля внутри и вне макрочастицы, e – заряд электрона. Будем считать, что $\varphi = 0$ и внутри макрочастицы $\varphi_1 = const$, $|e| = q$. С учетом этого уравнение (1.3) запишем в виде

$$\mu_1 - \mu = q\varphi_1. \tag{1.4}$$

Потенциальная энергия электрона внутри макрочастицы, заряд которой равен Nq, определяется известным уравнением

$$W_n = -q\varphi_1 = -\frac{q^2 N}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\ , \tag{1.5}$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 – электрическая постоянная.

Концентрация свободных электронов в газе или плазме обычно мала и поэтому в качестве μ нужно использовать энергию Ферми невырожденного электронного газа

$$\mu = \theta \ln(a n_e)\,,\ a = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{2\pi m_e \theta}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{1.6}$$

Здесь h – постоянная Планка, θ – статистическая температура, равная kT, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_e – масса электрона.

В зависимости от концентрации электронов в макрочастицах и температуры возможны два случая. При больших n_{e0} и малых T электронный газ в макрочастицах является вырожденным, а при малых n_{e0} и больших T невырожденным. Рассмотрим более подробно последний случай, тогда энергия Ферми электронного газа в макрочастицах определяется формулой

$$\mu_1 = \theta \ln(a n_{e1})\,, \tag{1.7}$$

где n_{e1} - концентрация электронов в макрочастицах после эмиссии. Подстановка выражений (1.5), (1.6) и (1.7) в (1.4) дает

$$\theta \ln \frac{n_{e1}}{n_e} = bN\,,\quad b = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\,.$$

$$\frac{n_r N + n_i}{n_{e0} - \dfrac{N}{V}} = e^{-\frac{bN}{\theta}} \tag{1.8}$$

С помощью уравнений (1.3) и (1.8) можно провести расчет концентрации электронов и ионов в пылевой плазме в зависимости от радиуса пылевых частиц, их концентрации и температуры плазмы. Результаты расчетов представлены на рис. 1.1-1.6.Здесь принято, что полная объемная доля всех пылевых частиц величина постоянная и составляет 4% от объема всей плазмы, $n_{e0}=10^{19}$ $м^{-3}$, давление газа равна 10^5 Па, φ_u=4,3 эВ, что соответствует аргону.

Как видно, из этих рисунков концентрация электронов плазмы при температуре равной 1000 *К* и 1500 *К* с увеличением радиуса пылинок уменьшается. Данное явление можно объяснить, тем, что выход электронов сильно зависит от радиуса пылевых частиц, более мелкие частицы эффективнее эмитируют и поглощают электроны. Так как, электронов вышедших из пылинок в плазму с ростом R становится меньше, то, как и следовало ожидать, наблюдается рост концентрации ионов, связанный со снижением интенсивности их рекомбинации с электронами (рис.1.2 и 1.4).

Иной характер зависимости наблюдается при температуре 2000 *К*. Это объясняется тем, что при более высокой температуре концентрация собственных электронов плазмы, образующихся в процессе ионизации газа, становится больше, чем начальная концентрация электронов в пылинках. Пылевые частицы с увеличением радиуса меньше захватывают электроны, поэтому концентрация ионов в плазме уменьшается (рис. 1.5-1.6). При меньших значениях радиуса пылинок больше электронов из плазмы заходит внутрь пылевых частиц, следовательно, концентрация ионов увеличивается.

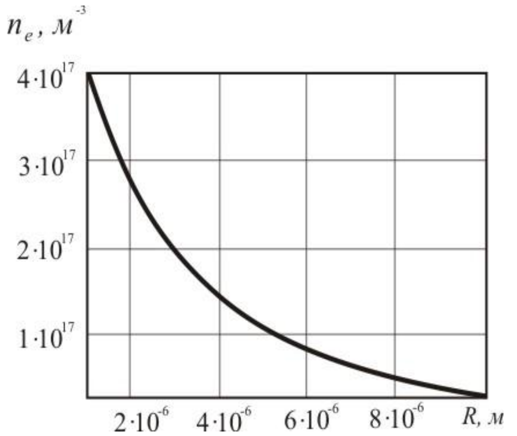


Рис.1. Зависимость концентрации электронов плазмы от радиуса макрочастиц приT=1000 К.

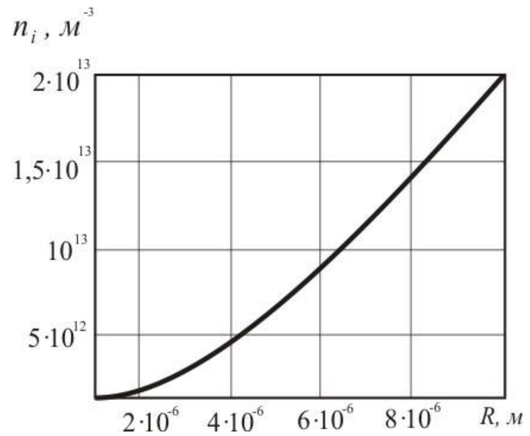


Рис.2. Зависимость концентрации ионов плазмы от радиуса макрочастиц приT=1000 К.

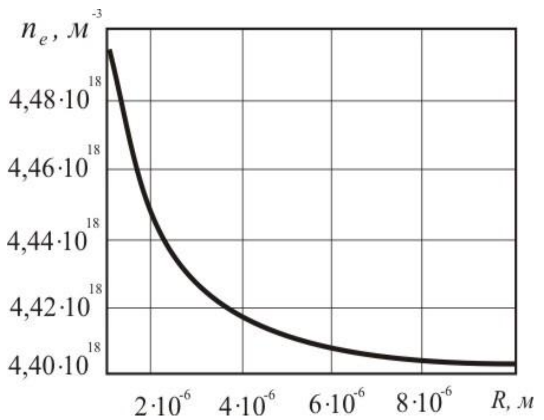


Рис.3. Зависимость концентрации электронов плазмы от радиуса макрочастиц приT=1500 К.

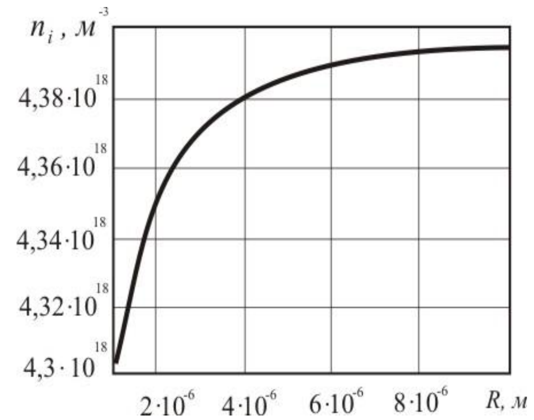


Рис.4. Зависимость концентрации ионов плазмы от радиуса макрочастиц приT=1500 К.

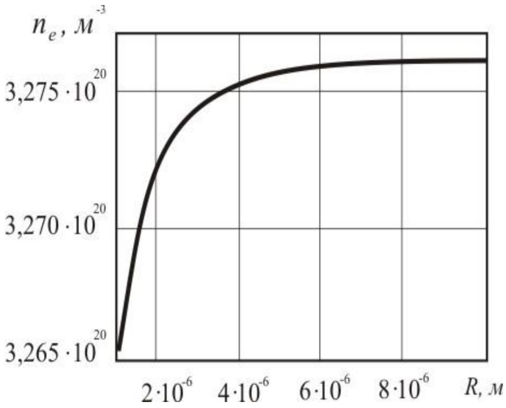


Рис.5. Зависимость концентрации электронов плазмы от радиуса макрочастиц приT=2000 К.

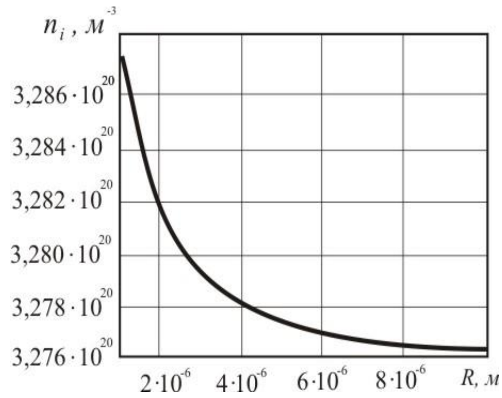


Рис.6. Зависимость концентрации ионов плазмы от радиуса макрочастиц приT=2000 К.

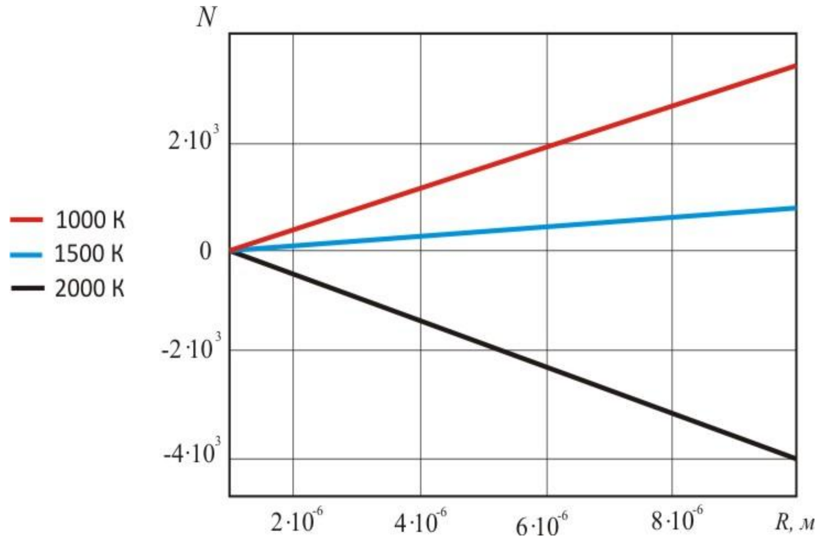


Рис. 1.7. Зависимость заряда пылевых частиц от их радиуса в единицах заряда электрона при различных температурах плазмы

Из рис. 1.7 видно, что заряд пылевых частиц в абсолютном выражении линейно уменьшается в зависимости от их радиуса. Таким образом, удельный заряд частиц с уменьшением R будет расти, что и подтверждает сделанное выше предположение о росте эффективности испускания или поглощения электронов с уменьшением размеров пылинок.

Практикум 2: Расчет выхода электронов из пылевых частиц в приближении прямоугольного потенциального барьера у поверхности частицы.

Условием равновесия электронного газа является уравнение

$$\mu_1 + e\varphi_1 = \mu + e\varphi, \qquad (2.\ 1)$$

где μ_1 - энергия Ферми для электрона внутри макрочастицы и μ – энергия Ферми для электрона вне макрочастицы, φ_1 и φ - потенциалы электрического поля внутри и вне макрочастицы, *e* – заряд электрона. Будем считать, что $\varphi = 0$ и внутри макрочастицы $\varphi_1 = const$, $|e| = q$. С учетом этого уравнение (2.1) запишем в виде

$$\mu_1 - \mu = q\varphi_1. \qquad (2.2)$$

Потенциальная энергия электрона внутри макрочастицы, заряд которой равен Nq, определяется известным уравнением

$$W_n = -q\varphi_1 = -\frac{q^2 N}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}, \qquad (2.3)$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость, ε_0 – электрическая постоянная.

Концентрация свободных электронов в газе или плазме обычно мала и поэтому в качестве μ нужно использовать энергию Ферми невырожденного электронного газа

$$\mu = \theta \ln(a n_e), \quad a = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{2\pi m_e \theta}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (2.4)$$

Здесь *h* – постоянная Планка, θ – статистическая температура, равная *kT*, *k* – постоянная Больцмана, *T* – абсолютная температура, m_e – масса электрона.

В зависимости от концентрации электронов в макрочастицах и температуры возможны два случая. При больших n_{e0} и малых *T* электронный газ в макрочастицах является вырожденным, а при малых n_{e0} и больших *T* невырожденным. Рассмотрим более подробно последний случай. Энергия Ферми электронного газа в макрочастицах определяется формулой

$$\mu_1 = \theta \ln(a n_{e1}), \qquad (2.5)$$

где n_{e1} - концентрация электронов в макрочастицах после эмиссии. Подстановка выражений (2.3), (2.4) и (2.5) в (2.2) дает

$$\theta \ln\frac{n_{e1}}{n_e} = bN, \quad b = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} \qquad (2.6)$$

При низких температурах термическая ионизация газа отсутствует, т.е. $n_i = 0$ и

$$n_r N = n_e \tag{2.7}$$

Из (2.6) находим

$$\frac{n_{e1}}{n_e} = e^{\frac{bN}{\theta}} \tag{2.8}$$

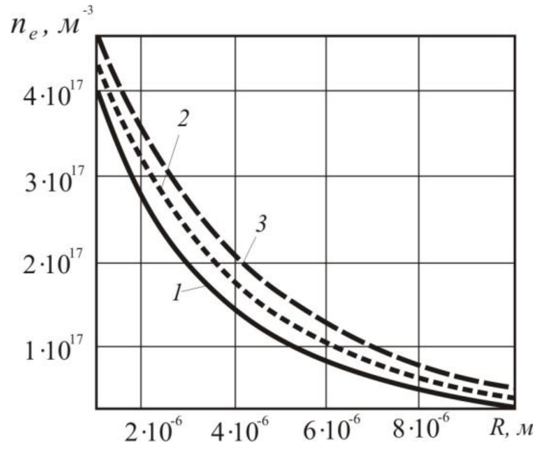
С учетом (2.7) из (2.8) получится

$$\frac{n_r N}{n_{e0} - \frac{N}{V}} = e^{-\frac{bN}{\theta}} \tag{2.9}$$

(2.9) является уравнением, определяющим зависимость N от n_{e0}, R, T и n_r, где V- объем одной макрочастицы. Если $n_{e0} >> \frac{N}{V}$, в приближенных расчетах в знаменателе можно пренебречь величиной $\frac{N}{V}$ по сравнению с n_{e0}. Тогда получается следующая упрощенная формула

$$N = \frac{n_{e0}}{n_r} e^{-\frac{bN}{\theta}} \tag{2.10}$$

С ростом R величина b уменьшается, следовательно, N растет. Как видно из (2.10), с повышением температуры N также растет. При $n_r \cdot R^3 = const$ объем макрочастиц в единице объема плазмы остается постоянным. На рисунке показана зависимость n_e от R при ε=1, n_{e0}=10^{19} м$^{-3}$, $n_r \cdot R^3 = const$ и различных значениях температуры (кривая *1* – T=1000 К, кривая 2 – T=1500 К, кривая *3* – T=2000 К). Как видно, уменьшение R и увеличение T приводит к повышению концентрации электронов в пылевой плазме.



Рассмотрим теперь более подробно случай когда электронный газ внутри макрочастицы вырожден. Энергия Ферми вырожденного электронного газа в макрочастицах определяется формулой

$$\mu_1 = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3n_{e1}}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{2.11}$$

где n_{e1} - концентрация электронов в макрочастицах после эмиссии. Тогда получаем

$$\frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3n_{e1}}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - \theta\ln\left(an_e\right) = bN\ , \quad b = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\ . \tag{2.12}$$

Т.к. термическая ионизация газа отсутствует, то

$$n_r N = n_e\ . \tag{2.13}$$

С учетом (2.13) из (2.12) для N получается уравнение

$$\frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3\left(n_{e0} - \dfrac{3N}{4\pi R^3}\right)}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - \theta\ln\left(an_r N\right) = bN$$

Практикум 3: Расчет зависимости энергии Ферми о температуры и концентрации электронного газа.

Энергия Ферми электронного газа определяется из условия нормировки

$$n=\int_0^\infty dn(\varepsilon)=\int_0^\infty \frac{4\pi(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}}{h^3\{1+\exp[(\varepsilon-\mu)/kT]\}}d\varepsilon. \qquad (3.1)$$

При $\theta=0$ получается

$$n=\int_0^{\mu_0}\frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon=\frac{2}{3}\cdot 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\mu_0^{3/2},$$

$$\mu_0=\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}, \qquad (3.2)$$

где μ_0 - энергия Ферми вырожденного электронного газа.

На рис.3.1 показаны результаты расчета зависимости энергии Ферми от концентрации электронов при различных температурах, где $F(\mu)$ - расчет энергии Ферми для вырожденного электронного газа по упрощенной формуле (3.2); $\psi(\mu)$, $\chi(\mu)$, $\varphi(\mu)$ – расчеты по общей формуле (3.1).

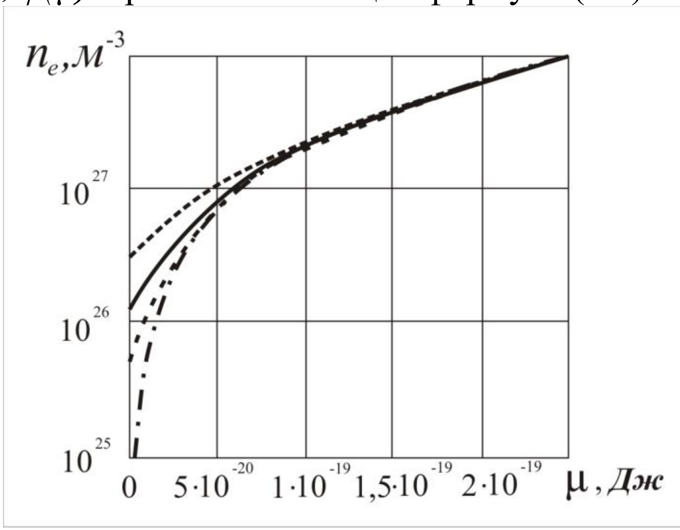


Рис. 3.1. Зависимость энергии Ферми от концентрации:
$\psi(\mu)$ при $T=1000$ K, $\chi(\mu)$ при $T=2000$ K, $\varphi(\mu)$ при $T=500$ K.

Энергия Ферми для невырожденного электронного газа определяется из уравнения

$$\exp[\mu/kT]=\frac{n}{2}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2},$$

Отсюда следует известное выражение

$$\mu=kT\cdot\ln\frac{n}{2}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (3.3)$$

На рис.3.2 и 3.3 показаны зависимости энергии Ферми от концентрации электронов при различных температурах, где $\varphi(\mu)$ - расчет энергии Ферми для невырожденного электронного газа по упрощенной формуле (3.17); $\psi(\mu)$

и $\chi(\mu)$ – расчеты по общей формуле (3.1)

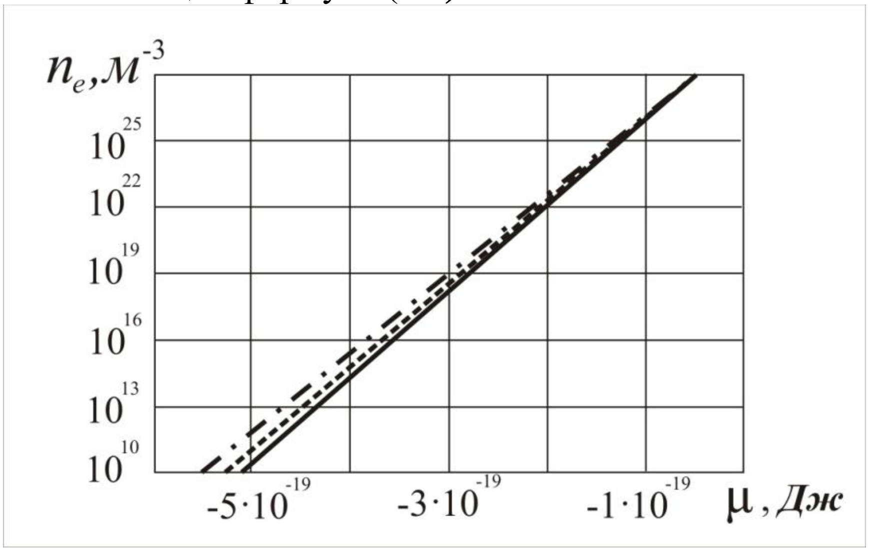


Рис. 3.2. Зависимость энергии Ферми от концентрации:
$\chi(\mu)$ при *T=1000* K, $\psi(\mu)$ при *T=1025* K, $\varphi(\mu)$ при *T=1050* K.

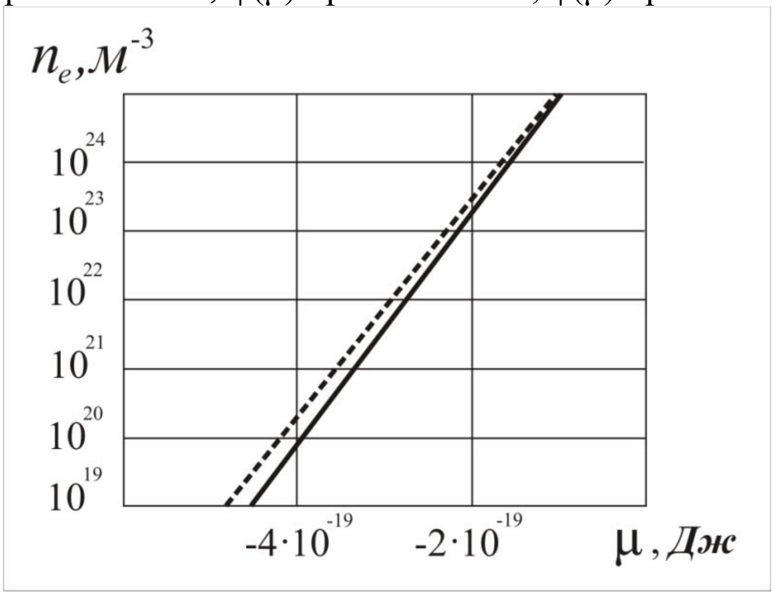


Рис. 3.3. Зависимость энергии Ферми от концентрации:
$\chi(\mu)$ при *T*=2000 K, $\psi(\mu)$ при *T*=2050 K.

($\psi(\mu)$ - расчет энергии Ферми для невырожденного электронного газа по упрощенной формуле (3.3))

Практикум 4: Аналитическое решение уравнения Пуассона-Больцмана для равновесной пылевой плазмы.

Уравнение Пуассона – Больцмана

$$\Delta\varphi = \frac{n_{e0}e^{\frac{q\varphi}{\theta}} - n_i}{\varepsilon_0\varepsilon_1}q\,. \qquad (4.1)$$

Имея решение этого уравнения, можно определить и распределение концентрации электронов. Рассмотрим простейшую задачу, когда пылевыми частицами являются одинаковые шарики, концентрация которых постоянна в пространстве.

В случае сферической симметрии уравнение (4.1) записывается так

$$\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \left(n_{e0}e^{\frac{q\varphi}{\theta}} - n_i\right)q\,.$$

Отсюда введением безразмерных величин $\frac{r}{R} = x$, $\frac{q\varphi}{kT} = \phi$, $\frac{n_i}{n_{e0}} = \overline{n_i}$ получим

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\phi}{dx}\right) - b^2\left(e^{\phi} - \overline{n_i}\right) = 0\,,\ b^2 = \frac{q^2R^2n_{e0}}{kT\varepsilon_1\varepsilon_0}\,. \qquad (4.2)$$

Здесь *R*- радиус пылевой частицы n_{e0}- концентрация электронов в центре сферы, $n_i = const$ в области $0 \le x \le 1$ и $n_i = 0$ в области $x>1$. Особенность этого уравнения заключается в том, что здесь n_i является неизвестной величиной. Часть электронов из пылевой частицы выходит и поэтому $n_i > n_{e0}$. Уравнение (11) решается при условиях

$$\phi(0) = 0,\ \phi'(0) = 0\,,\ \phi'(\lambda) = 0\,,$$

где $\lambda = l/R$, $2l$ – расстояние между центрами двух соседних пылевых частиц. Последнее граничное условие означает равенство нулю полного электрического заряда в объеме, ограниченной сферой радиусом l и используется для определения значения n_i.

В случае $|\phi| << 1$ величину e^{ϕ} можно разложить в ряд и ограничиться первыми двумя членами $e^{\phi} = 1 + \phi$. С учетом этого выражения уравнение (4.2) принимает вид

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\phi_1}{dx}\right) = a^2\left(1 + \phi_1 - \overline{n_i}\right).$$

Если ввести функции $xy = W$, $1 + \phi - \overline{n_i} = y$, это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2W}{dx^2} - a^2W = 0\ . \qquad (4.3)$$

Общими решением этого уравнения является

$$W = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}.$$

Отсюда находим

$$\phi_1(x) = \overline{n_i} - 1 + \frac{C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}}{x} \quad . \qquad (4.4)$$

Выберем C_1 и C_2 с учетом условия

$$\phi_1(0) = 0 \quad . \qquad (4.5)$$

Из (4.4) видно, что величина $\phi_1(0)$ будет ограниченной только тогда, когда функция

$$y(x) = \frac{C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}}{x}$$

в точке x=0 будет представлять неопределенность вида 0:0.

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} = C_1 + C_2 = 0, \; C_1 = -C_2 .$$

Найдем значение $\phi_1(x)$ при x=0:

$$\lim_{x \to 0} \phi_1(x) = \overline{n_i} - 1 + \lim_{x \to 0} \frac{C_1 \left(e^{ax} - e^{-ax}\right)}{x} = \overline{n_i} - 1 + \frac{C_1(a+a)}{1} = \overline{n_i} - 1 + 2C_1 a$$

Отсюда и из условия (4.5) находим

$$\overline{n_i} = 1 - 2C_1 a \quad . \qquad (4.6)$$

Таким образом,

$$\phi_1(x) = C_1 \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x} - 2a \right) \quad . \qquad (4.7)$$

Введем величину $\lambda = \dfrac{l}{R}$, где $2l$ -расстояние между двумя соседними частицами. В области $1 \le x \le \lambda$ ионы отсутствуют: $\overline{n_i} = 0$.

Тогда формула (4.4) для случая $1 \le x \le \lambda$ имеет вид.

$$\phi_2(x) = -1 + \frac{D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax}}{x}. \qquad (4.8)$$

Отсюда следует

$$\phi_2'(x) = \frac{\left(D_1 a e^{ax} - D_2 a e^{-ax}\right)x - \left(D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax}\right)}{x^2} \; . \qquad (4.9)$$

Одним из граничных условий для $\phi_2(x)$ является

$$\phi'_2(\lambda) = 0, \qquad (4.10)$$

Из (12), (13) находим

$$\phi_2'(\lambda) = \frac{\left(D_1 a e^{a\lambda} - D_2 a e^{-a\lambda}\right)\lambda - \left(D_1 e^{a\lambda} + D_2 e^{-a\lambda}\right)}{\lambda^2},$$

$$D_2 = D_1 \frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} e^{2a\lambda}. \qquad (4.11)$$

Таким образом, распределение безразмерного потенциала в этой области описывается формулой

$$\phi_2(x) = -1 + D_1 \frac{e^{ax} + \left(\dfrac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - x)}}{x}. \tag{4.12}$$

При x=1 должны выполняться граничные условия:

$$\phi_1(1) = \phi_2(1), \quad \phi'_1(1) = \phi'_2(1). \tag{4.13}$$

Из (10) и (15) находим

$$\phi_1(1) = C_1\left(e^a - e^{-a} - 2a\right), \phi_2(1) = -1 + D_1\left(e^a + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - 1)}\right),$$

$$\phi'_1(1) = C_1\left[e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)\right], \qquad \phi'_2(1) = D_1\left(e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - 1)}(a+1)\right), \tag{4.14}$$

$$C_1 = \frac{D_1\left(e^a(a-1) - \left(\dfrac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - 1)}(a+1)\right)}{\left[e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)\right]},$$

$$D_1 = \frac{e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)}{2a\left(e^a(a-1) - (a+1)\left(\dfrac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - 1)} + 1 + \left(\dfrac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{2a\lambda}\right)}, \tag{4.15}$$

$$C_1 = \frac{e^a(a-1) - \left(\dfrac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - 1)}(a+1)}{2a\left(e^a(a-1) - (a+1)\left(\dfrac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - 1)} + 1 + \left(\dfrac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{2a\lambda}\right)}. \tag{4.16}$$

Используя выражение (3), можно записать формулу для распределения концентрации электронов

$$n_e = n_{e0} \exp\left[C_1\left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x} - 2a\right)\right], \qquad 0 \le x \le 1, \tag{4.17}$$

$$n_e = n_{e0} \exp\left[-1 + D_1 \frac{e^{ax} + \left(\dfrac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - x)}}{x}\right], \; 1 \le x \le \lambda, \tag{4.18}$$

где D_1 и C_1 определяются из (18) и (19) соответственно.

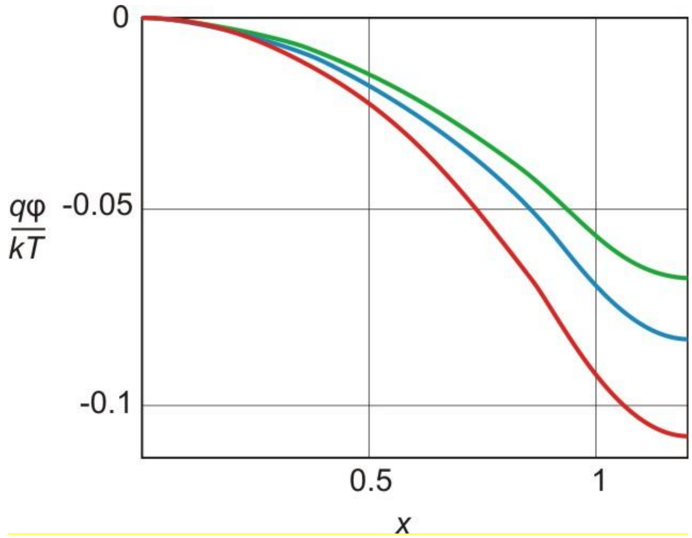


Рис. 1. Распределение безразмерного потенциала при $R = 10^{-6}$ $м$, $n_i = 10^{19}$ $м^{-3}$ и различных температурах (1500 K – красная линия, 2000 K – синяя линия, 2500 K – зеленая линия)

Поскольку потенциал и концентрация электронов непосредственно связаны формулой Больцмана (9), с ростом x в области $x \approx 1$ величина n_e резко уменьшается. С удалением от частицы скорость изменения n_e снижается и в точке $x = \lambda$ выполняется условие $\frac{dn_e}{dx} = 0$ (рис. 2).

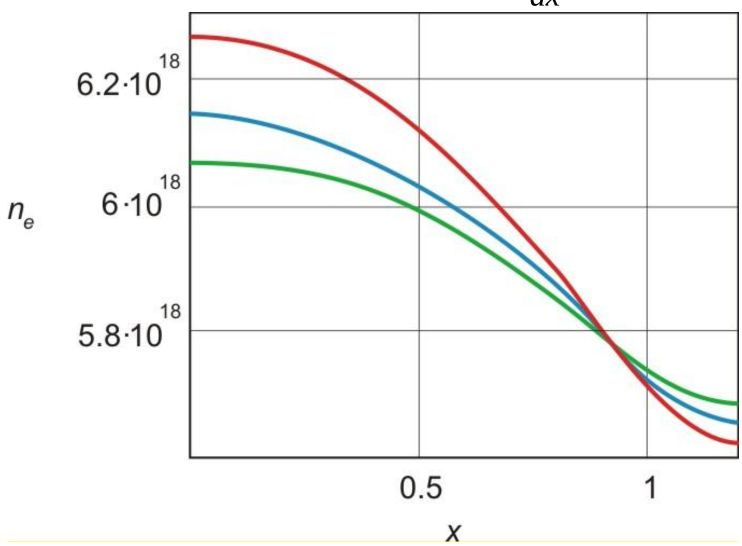


Рис. 1. Распределение концентрации электронов при $R = 10^{-6}$ $м$, $n_i = 10^{19}$ $м^{-3}$ и различных температурах (1500 K – красная линия, 2000 K – синяя линия, 2500 K – зеленая линия).

Практикум 5: Расчет эмиссии электронов из пылевых частиц с помощью полученного аналитического решения уравнения Пуассона-Больцмана.

Из вышеприведенных формул видно, что распределение безразмерной концентрации электронов и безразмерного потенциала являются функциями безразмерных величин a, λ, x, т.е.

$$\phi_1 = f_1(a,\lambda,x),\ \phi_2 = f_2(a,\lambda,x),\ \overline{n_e} = \frac{n_e}{n_{eo}} = f_3(a,\lambda,x). \tag{5.1}$$

Таким образом, величины

$$a = R\cdot q\sqrt{\frac{n_{e0}}{kT\varepsilon\varepsilon_0}},\qquad \lambda = \frac{l}{R} \tag{5.2}$$

являются критериями подобия для данной задачи. Следовательно, при $a = const$, $\lambda = const$ обобщенные распределения $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\overline{n_e}(x)$ совпадают.

Рассчитаем количество электронов, вышедших за пределы частицы. Запишем теорему Гаусса для частицы с радиусом R

$$E\cdot 4\pi\cdot R^2 = \frac{N_e\cdot q}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon},$$

где N_e количество электронов, вышедших за пределы частицы.
Отсюда получим

$$N_e = \frac{-4\pi\cdot R\cdot\varepsilon_0\cdot k\cdot T}{q^2}\phi_1'(1), \tag{5.3}$$

где $\phi_1'(1)$ определяется по формуле (4.7). Т.е. получаем

$$\phi_1'(1) = \frac{\left(e^a(a-1)-\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-1)}(a+1)\right)\left[e^a(a-1)+e^{-a}(a+1)\right]}{2a\left(e^a(a-1)-(a+1)\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-1)}+1+\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{2a\lambda}\right)} \tag{5.4}$$

Из рисунков 5.1-5.3 видно, что при указанных параметрах частица испускает порядка $10^4 - 10^5$ электронов. Это говорит о высокой эффективности использования твердых частиц с целью повышения электропроводности плазмы при низких температурах.

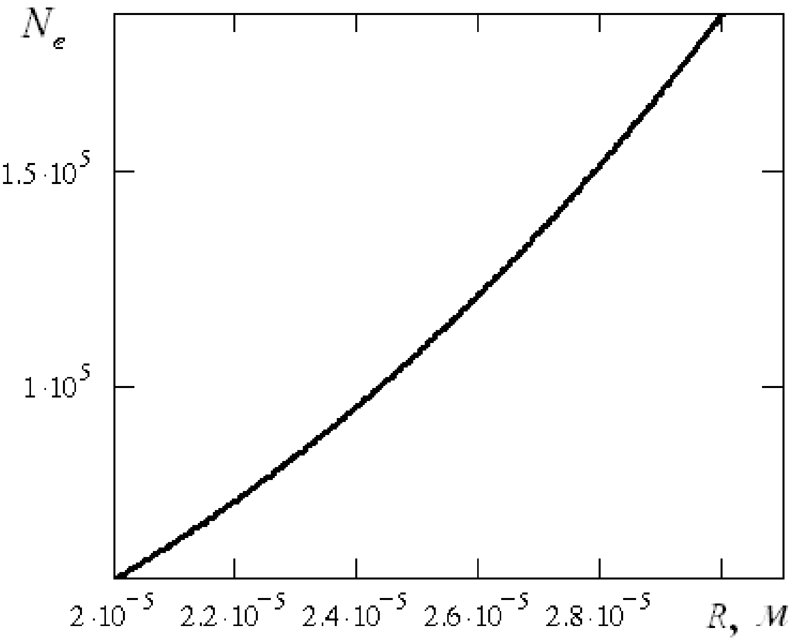


Рис. 5.1. Зависимость количества электронов, вышедших за пределы частицы, от радиуса частицы при $T = 1000\,K$, $n_{e0} = 10^{18}$ $м^{-3}$.

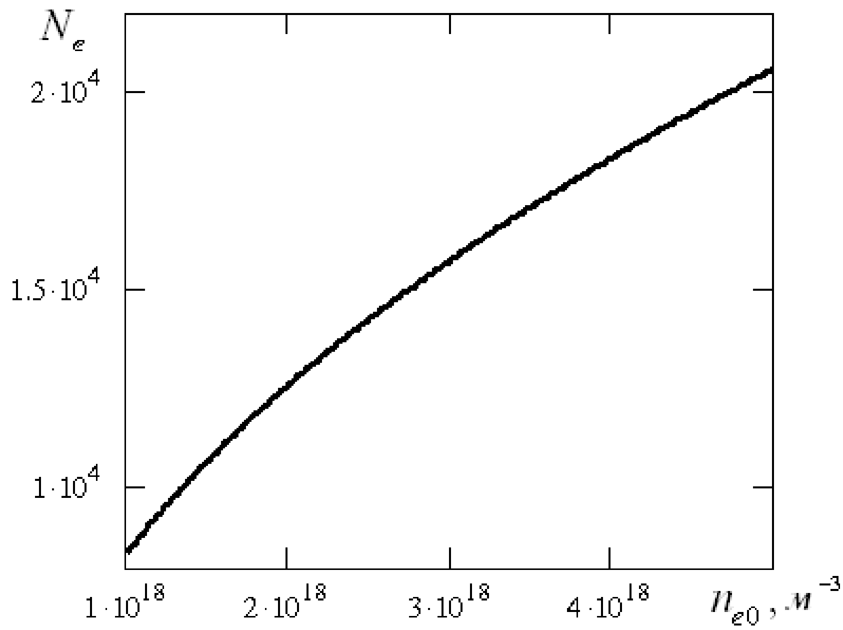


Рис. 5.2. Зависимость количества электронов, вышедших за пределы частицы, от начальной концентрации электронов при $R = 20 \cdot 10^{-6}$ $м$, $T = 1000\,K$.

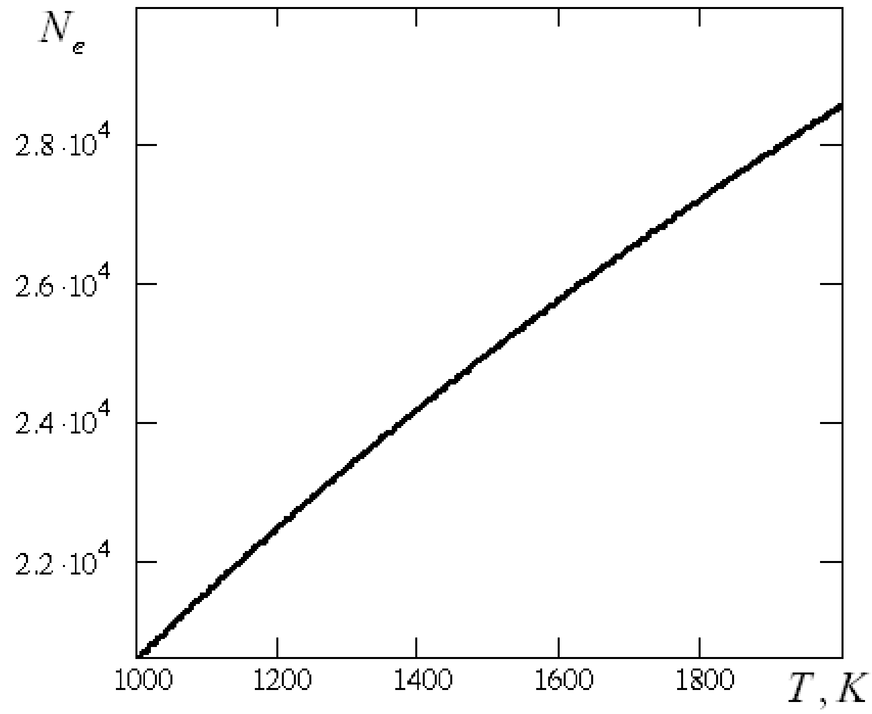


Рис. 5.3. Зависимость количества электронов, вышедших за пределы частицы, от абсолютной температуры при $R = 20 \cdot 10^{-6}$ $м$, $n_{e0} = 10^{18}$ $м^{-3}$.

Практикум 6: Расчет распределений потенциала и концентрации электронов в равновесной пылевой плазме содержащей полые сферические частицы.

Пусть расстояние между центрами двух соседних частиц радиуса R равно $2l$,R_1–радиус полости частицы, а r–текущая координата, отсчитываемая от центра частицы (рис. 1).

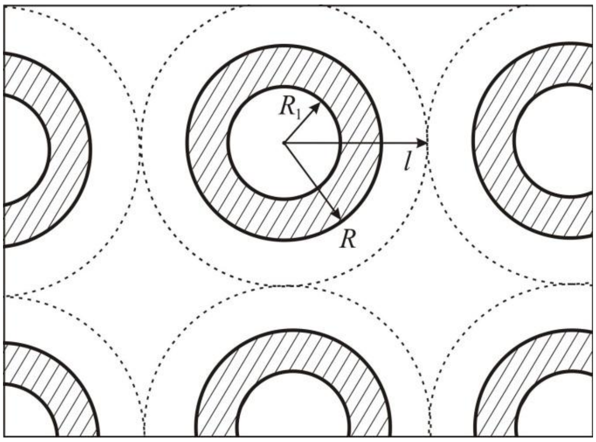


Рис. 6.1.

Найдем распределения потенциала $\varphi(r)$ и концентрации электронов $n_e(r)$ в области $0 \le r \le l$ при следующих условиях:

$$n_i(r) = \begin{cases} 0, \text{ при } r < R_1 \text{ и } r > R \\ \text{const, при } R_1 \le r \le R \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=0. \tag{6.2}$$

Для этого случая полученное точное решение записывается в виде

$$\psi = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2ax} - 1, \text{ при } 0 \le x < x_1 \tag{6.3}$$

$$\psi = \bar{n}_i - 1 + \frac{C_3 e^{ax} - C_4 e^{-ax}}{x}, \text{ при } x_1 \le x \le 1 \tag{6.4}$$

$$\psi = \frac{C_5 e^{ax} - C_6 e^{-ax}}{x} - 1, \text{ при } 1 < x \le \lambda \tag{6.5}$$

Здесь

$$x_1 = \frac{R_1}{R},\quad \lambda = \frac{R}{l} \tag{6.6}$$

$$\mathrm{C}_3 = \frac{1 - \bar{n}_i e^{-ax_1}\left(1 + ax_1\right)}{2a} \tag{6.7}$$

$$\mathrm{C}_4 = \frac{\bar{n}_i e^{ax_1}\left(1 - ax_1\right) - 1}{2a} \tag{6.8}$$

$$\mathrm{C}_5=\frac{1-\overline{n}_i e^{-ax_1}\left(1+ax_1\right)+\left(a+1\right)\overline{n}_i e^{-a}}{2a} \tag{6.9}$$

$$\mathrm{C}_6=\frac{\overline{n}_i e^{ax_1}\left(1-ax_1\right)-1+\left(a-1\right)\overline{n}_i e^{a}}{2a} \tag{6.10}$$

$$\overline{n}_i=\frac{e^{-2a\lambda}\left(a\lambda+1\right)+a\lambda-1}{e^{-2a\lambda}\left(a\lambda+1\right)\left(e^{ax_1}\left(1-ax_1\right)+e^{a}\left(a-1\right)\right)+\left(a\lambda-1\right)\left(e^{-ax_1}\left(ax_1+1\right)+e^{-a}\left(a+1\right)\right)} \tag{15}$$

Из (6.3)-(6.10) с учетом распределения Больцмана можно получить формулы для расчета распределения концентрации электронов:

$$n_e=n_{e0}\exp\left[\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2ax}-1\right],\ \text{при}\ 0\le x<x_1 \tag{6.11}$$

$$n_e=n_{e0}\exp\left[\overline{n}_i-1+\frac{C_3e^{ax}-C_4e^{-ax}}{x}\right],\ \text{при}\ x_1\le x\le 1 \tag{6.12}$$

$$n_e=n_{e0}\exp\left[\frac{C_5e^{ax}-C_6e^{-ax}}{x}-1\right],\ \text{при}\ 1<x\le\lambda \tag{6.13}$$

Из выше приведенных формул видно, что распределения безразмерной концентрации электронов $\overline{n_e}=\frac{n_e}{n_{e0}}$ и безразмерного потенциала ψ являются функциями безразмерных величин a, λ, x, x_1,т.е.

$$\psi=f_1\left(a,\lambda,\lambda_1,x\right),\ \overline{n_e}=f_2\left(a,\lambda,\lambda_1,x\right)$$

Таким образом, величины

$$a=qR\sqrt{\frac{n_{e0}}{kT\text{æ}_0}},\quad \lambda=\frac{l}{R},\ x_1=\frac{R_1}{R}\ ,\quad x=\frac{r}{R}$$

являются собственными значениями этих функций, а также критериями подобия для данной задачи. Следовательно, при a=const,λ=const, x_1=const обобщенные распределения и $\psi(x)$, и $\overline{n_e}(x)$совпадают.

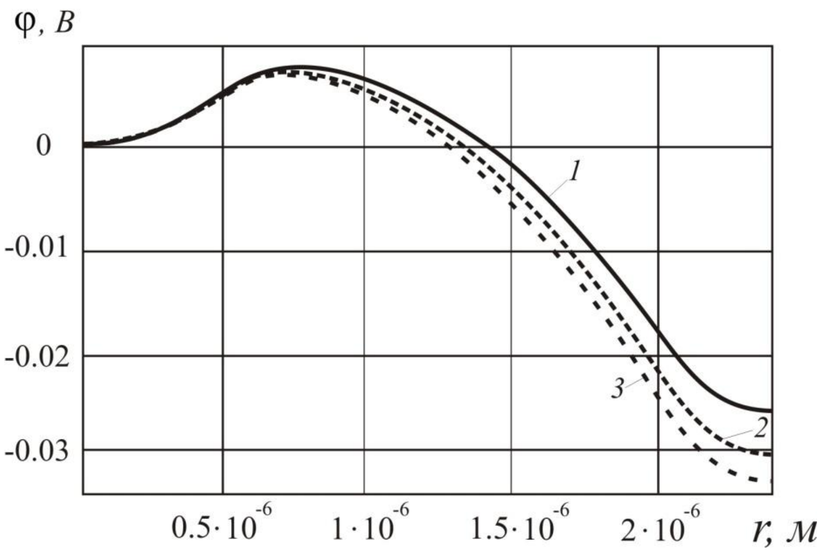


Рис.6.2. Распределение потенциала для различных температур в области $0 \le r \le l$ при $n_i = 10^{19}$ м$^{-3}$, $R_1 = 5 \cdot 10^{-7}$ м, $R = 2 \cdot 10^{-6}$ м, $l = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ м(*1* - для T=1000 К, *2* - для T=1500 К и *3* - для T=2000 К).

Как видно из рис. 6.2, внутри полости частицы с ростом r потенциал медленно увеличивается. Затем, при приближении к внутренней поверхности рост потенциала происходит быстрее, что объясняется большим значением градиента концентрации электронов. В области $R_1 \le r \le R$ потенциал медленно увеличивается, достигает максимального значения и начинает уменьшаться. Вблизи внешней поверхности уменьшение потенциала с ростом r происходит наиболее быстро. Соответственно возникает большая напряженность электрического поля. Из (6.4) можно найти формулу для расчета напряженности на внешней поверхности полой микрочастицы, т.е. в точке $r=R$

$$E(R) = -\frac{kT}{qR}\psi'_x(1) \tag{6.14}$$

Расчет по этой формуле при T=1000 К, $n_i = 10^{19}$ м$^{-3}$, $R_1 = 5 \cdot 10^{-7}$ м, $R = 2 \cdot 10^{-6}$ м, $l = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ м даёт $E(R) = 4.2 \cdot 10^4$ В/м. В области $R < r \le l$ с ростом r потенциал сначала быстро, затем медленно уменьшается до значения $\varphi(l)$.

Расчеты показали, что при больших l условие $|\psi| << 1$ не выполняется. В этом случае уравнение (6.2) решалось численно методом Рунге-Кутта.

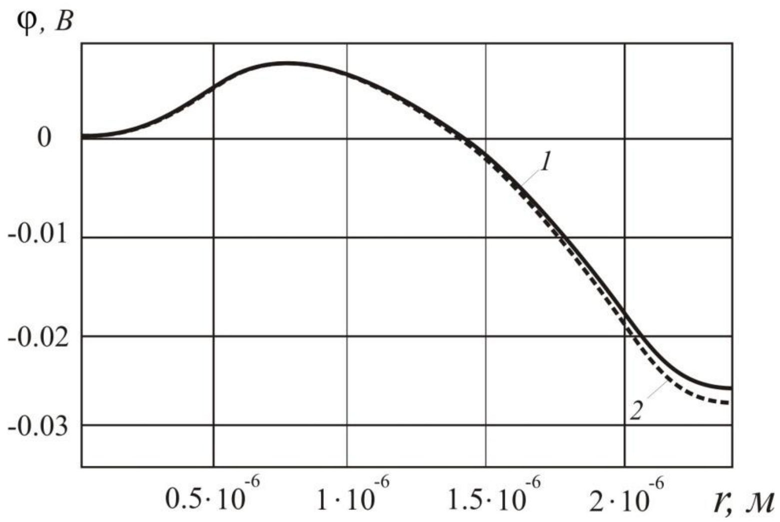


Рис. 6.3. Распределение потенциала в области $0 \le r \le l$ при $n_i=10^{19}$м$^{-3}$, $R_1=5\cdot10^{-7}$м, $R=2\cdot10^{-6}$м, $l=2{,}4\cdot10^{-6}$м и $T=1000$ К (*1* –результат аналитического решения, *2* –результат численного решения).

На рис.6. 3 график *1* построен по формулам (6.3) –(6.5), а график *2* построен путем численного решения дифференциального уравнения (6.2). Как видно из сравнения этих графиков, линеаризация уравнения (6.2) приводит к завышению потенциала при больших *r*.

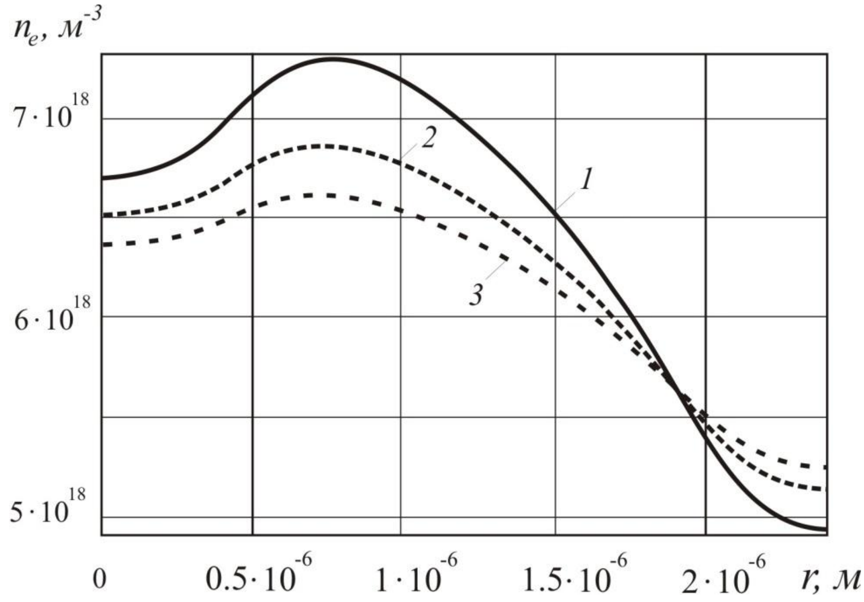


Рис.6.4. Распределение концентрации электронов для различных температур в области $0 \le r \le l$ при $n_i=10^{19}$м$^{-3}$, $R_1=5\cdot10^{-7}$м, $R=2\cdot10^{-6}$м, $l=2{,}4\cdot10^{-6}$м (*1* - для $T=1000$ К, *2* - для $T=1500$ К и *3* - для $T=2000$ К).

На рис. 6.4 представлены результаты расчетов распределения концентрации электронов по формулам (6.11)-(6.13). С ростом *r* в области $r\approx R$ величина n_e резко уменьшается. С удалением от частицы скорость изменения n_e уменьшается и в точке $r=l$ выполняется условие

$$\frac{dn_e}{dr}=0.$$

Практикум 7: Численное решение уравнения Пуассона-Больцмана для равновесной пылевой плазмы в среде MathCad.

На рис. 7.1 приведен листинг алгоритма численного решения уравнения Пуассона-Больцмана в среде MathCad.

29.9.2014 Шар 300К, 10 мкм.html

$k := 1.3806488 \cdot 10^{-23}$ $q := 1.602176565 \cdot 10^{-19}$ $\varepsilon := 8.854187817 \cdot 10^{-12}$ $T := 0.3 \cdot 10^{3}$

$R := 10^{-5}$ $ni := 10^{18}$ $ne := \frac{10^{18}}{1.00585815}$

$$a := \sqrt{q^2 \cdot R^2 \cdot \frac{ne}{k \cdot T \cdot \varepsilon}}$$

Given

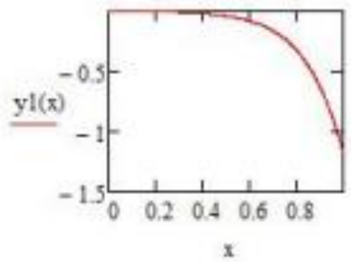
$$y1''(x) + \frac{2 \cdot y1'(x)}{x} = a^2 \cdot \left(e^{y1(x)} - \frac{ni}{ne}\right)$$

$y1(0) = 0$

$y1'(0) = 0$

$y1 := \mathrm{Odesolve}(x, 1)$

$y1(1) = -1.168$



$$\frac{y1(1) - y1(0.999999999)}{1 - 0.999999999} = -6.964$$

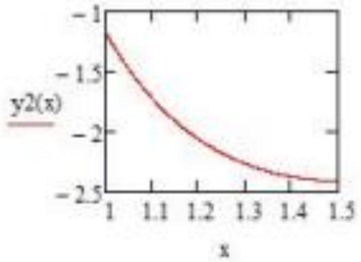
Given

$$y2''(x) + \frac{2 \cdot y2'(x)}{x} = a^2 \cdot \left(e^{y2(x)}\right)$$

$y2(1) = y1(1)$

$$y2'(1) = \frac{y1(1) - y1(0.999999999)}{1 - 0.999999999}$$

$y2 := \mathrm{Odesolve}(x, 1.5)$



$$\frac{y2(1.5) - y2(1.499999999)}{1.5 - 1.499999999} = 4.13 \times 10^{-5}$$

Рис. 7.1.

Практикум 8: Аналитическое решение уравнение Пуассона-Ферми-Дирака для равновесной пылевой плазмы.

Уравнение Пуассона-Ферми-Дирака

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\frac{\mu_0\psi_1}{q}\right)+\frac{q}{\varepsilon_0}\left(n_i-(1+\psi_1)^{3/2}n_{e0}\right)=0\,. \qquad (8.1)$$

Умножим обе части этого уравнения на q/μ_0, находим

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi_1}{dr}\right)+\frac{q^2}{\varepsilon_0\mu_0}\left(n_i-(1+\psi_1)^{3/2}n_{e0}\right)=0\,. \qquad (8.2)$$

Введением безразмерного радиуса $x=\frac{r}{R}$ это уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\psi_1}{dx}\right)+\frac{q^2R^2}{\varepsilon_0\mu_0}\left(n_i-(1+\psi_1)^{3/2}n_{e0}\right)=0\,. \qquad (8.3)$$

Введением безразмерной величины $\frac{n_i}{n_{e0}}=\bar{n}_i$ из (8.3) получим

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\psi_1}{dx}\right)+\frac{q^2R^2}{\varepsilon_0\mu_0}n_{e0}\left(\bar{n}_i-(1+\psi_1)^{3/2}\right)=0\,.$$

Обозначим $a^2=\frac{q^2R^2n_{e0}}{\mu_0\varepsilon_0}$. Тогда

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\psi_1}{dx}\right)-a^2\left((1+\psi_1)^{3/2}-\bar{n}_i\right)=0\,. \qquad (8.4)$$

Рассмотрим случай, когда $|\psi_1|<<1$. Разложим величину $(1+\psi_1)^{3/2}$ в ряд и ограничимся первыми двумя членами:

$$(1+\psi_1)^{3/2}=1+\frac{3}{2}\psi_1\,. \qquad (8.5)$$

С учетом этого выражения из (8.4) получим

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\psi_1}{dx}\right)=a^2\left(1+\frac{3}{2}\psi_1-\bar{n}_i\right). \qquad (8.6)$$

Введем функцию $xy=W$, $1+\frac{3}{2}\psi_1-\bar{n}_i=y$. Тогда (8.6) приводится к виду

$$\frac{d^2W}{dx^2} - a^2W = 0. \qquad (8.7)$$

Общим решением уравнения (8.7) является:

$$W = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax}.$$

Тогда

$$\psi_1(x) = \frac{2}{3}\left(\bar{n}_i - 1\right) + \frac{2}{3}\frac{C_1e^{ax} + C_2e^{-ax}}{x}. \qquad (8.8)$$

Выберем C_1 и C_2 с учетом условия

$$\psi_1(0) = 0. \qquad (8.9)$$

Из (8.8) видно, что величина $\psi_1(0)$будет ограниченной только, если функция

$$y(x) = \frac{2}{3}\frac{C_1e^{ax} + C_2e^{-ax}}{x}$$

в точке $x = 0$ представляет неопределенность вида 0:0. Следовательно,

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(C_1e^{ax} + C_2e^{-ax}\right) = \frac{2}{3}(C_1 + C_2) = 0, \; C_1 = -C_2.$$

Найдем значение $\psi_1(x)$ при $x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\psi_1(x) = \frac{2}{3}\left(\bar{n}_i - 1\right) + \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{C_1\left(e^{ax} - e^{-ax}\right)}{x} = \frac{2}{3}\left(\bar{n}_i - 1\right) + \frac{2}{3}C_1\frac{(a+a)}{1} = \frac{2}{3}\left(\bar{n}_i - 1 + 2C_1a\right).$$

Отсюда и из условия (8.9) находим:

$$\bar{n}_i = 1 - 2C_1a, \qquad (8.10)$$

$$C_1 = \frac{1 - \bar{n}_i}{2a}.$$

Таким образом,

$$\psi_1(x) = \frac{2}{3}\left(\bar{n}_i - 1\right) + \frac{2}{3}\frac{C_1\left(e^{ax} - e^{-ax}\right)}{x} = \frac{2}{3}\left(\bar{n}_i - 1\right) + \frac{1 - \bar{n}_i}{2ax}\left(e^{ax} - e^{-ax}\right). \qquad (8.11)$$

Введем величину $\lambda = \frac{l}{R}$, где $2l$ - расстояние между двумя соседними частицами. В области $1 \le x \le \lambda$ ионы отсутствуют: $\bar{n}_i = 0$.Тогда формула (8.11) для случая $1 \le x \le \lambda$ имеет вид.

$$\psi_2(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax}}{x} - 1\right). \tag{8.12}$$

Отсюда следует

$$\psi_2{}'(x) = \frac{2}{3}\frac{\left(D_1 a e^{ax} - D_2 a e^{-ax}\right)x - \left(D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax}\right)}{x^2} \ . \tag{8.13}$$

Одним из граничных условий для $\psi_2(x)$ является

$$\psi'_2(\lambda) = 0, \tag{8.14}$$

Из (8.13), (8.14) находим

$$\psi_2{}'(\lambda) = \frac{2}{3}\frac{\left(D_1 a e^{a\lambda} - D_2 a e^{-a\lambda}\right)\lambda - \left(D_1 e^{a\lambda} + D_2 e^{-a\lambda}\right)}{\lambda^2},$$

$$D_2 = D_1 \frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} e^{2a\lambda}. \tag{8.15}$$

Таким образом, распределение безразмерного потенциала в этой области описывается формулой

$$\psi_2(x) = \frac{2}{3}\left(D_1 \frac{e^{ax} + \left(\dfrac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - x)}}{x} - 1\right). \tag{8.16}$$

При x=1 должны выполняться граничные условия:

$$\psi_1(1) = \psi_2(1), \quad \psi'_1(1) = \psi'_2(1). \tag{8.17}$$

Из (8.11) и (8.16) находим

$$\psi_1(1) = \frac{2}{3} C_1\left(e^a - e^{-a} - 2a\right), \psi_2(1) = \frac{2}{3}\left(D_1\left(e^a + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - 1)}\right) - 1\right),$$

$$\psi_1{}'(1) = \frac{2}{3} C_1\left[e^a(a - 1) + e^{-a}(a + 1)\right], \quad \psi'_2(1) = \frac{2}{3} D_1\left(e^a(a - 1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right) e^{a(2\lambda - 1)}(a + 1)\right), \tag{8.18}$$

$$C_1 = \frac{D_1\left(e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-1)}(a+1)\right)}{\left[e^a(a-1)+e^{-a}(a+1)\right]},$$

$$D_1 = \frac{e^a(a-1)+e^{-a}(a+1)}{2a\left(e^a(a-1)-(a+1)\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-1)}+1+\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{2a\lambda}\right)}, \qquad (8.19)$$

$$C_1 = \frac{e^a(a-1)-\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-1)}(a+1)}{2a\left(e^a(a-1)-(a+1)\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-1)}+1+\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{2a\lambda}\right)}. \qquad (8.20)$$

Можно записать формулу для распределения концентрации электронов

$$n_e = n_{e0}\left(1+\frac{2}{3}C_1\left(\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{x}-2ax\right)\right)^{3/2}, \qquad 0 \le x \le 1, \quad (8.21)$$

$$n_e = n_{e0}\left(\frac{2}{3}\left(D_1\frac{e^{ax}+\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-x)}}{x}+\frac{1}{2}\right)\right)^{3/2}, \quad 1 < x \le \lambda. \quad (8.22)$$

На рис. 8.1 показан график распределения потенциала электрического поля по радиусу твердой частицы.

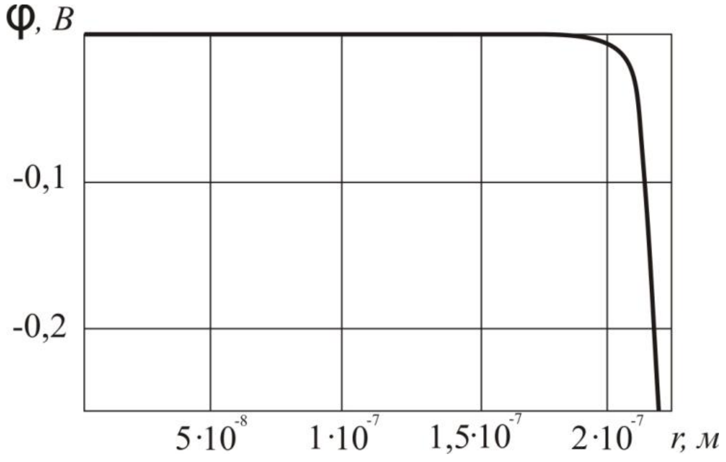


Рис. 8.1. Расрпределение потенциала в области $0 \le r \le R$

при $R = 22 \cdot 10^{-8}$ *м*, $n_{e0} = 5 \cdot 10^{27}$ *м*$^{-3}$.

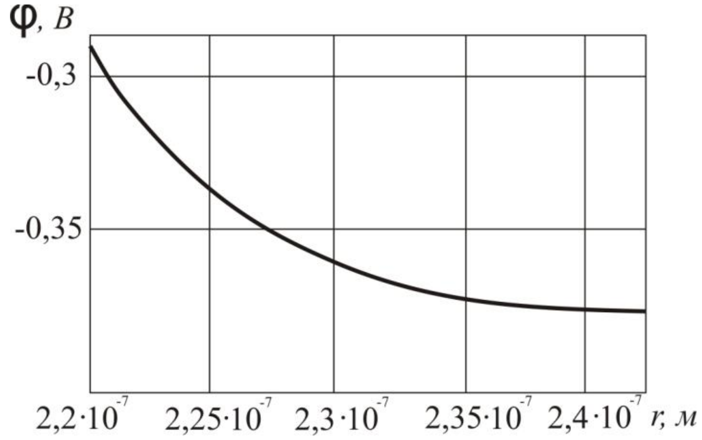


Рис. 8.2. Расрпределение потенциала в области $R < r \le l$

при $R = 22 \cdot 10^{-8}$ *м*, $n_{e0} = 5 \cdot 10^{27}$ $м^{-3}$.

Как видно из рис. 8.1, внутри частицы с ростом безразмерного радиуса x потенциал сначала уменьшается медленно, затем при приближении к поверхности частицы он уменьшается очень быстро. Это объясняется возникновением очень большого градиента концентрации электронов вблизи поверхности. Соответственно возникает большая напряженность электрического поля. На рис. 8.3 и 8.4 показаны графики распределений концентрации электронов рассчитанные по формулам 3.73 и 3.74. Как видно из этих рисунков, основная часть заряда находится у поверхности частицы, то есть пылевая частица окружена довольно плотным электронным облаком.

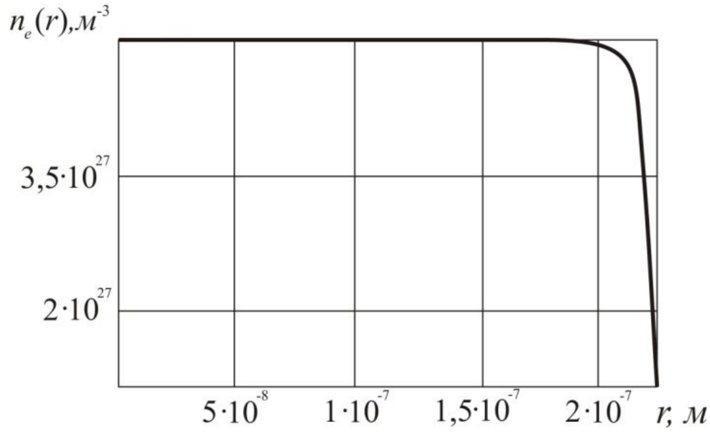


Рис. 8.3. Распределение концентрациии электронов в области $0 \le r \le R$

при $R = 22 \cdot 10^{-8}$ *м*, $n_{e0} = 5 \cdot 10^{27}$ $м^{-3}$.

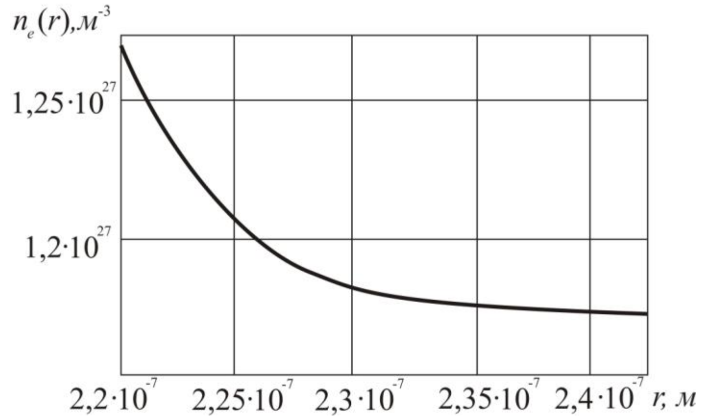


Рис. 8.4. Распределение концентрациии электронов в области $R < r \le l$ при при $R = 22\cdot10^{-8}$ *м*, $n_{e0} = 5\cdot10^{27}$ *м*$^{-3}$.

Основная литература:

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978, 512 с.
2. Вычислительные методы в физике плазмы / Под редакцией Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга – М.: Мир, 1974, 514 с.
3. Численные методы в физике плазмы / Под редакцией А.А. Самарского – М.: Наука, 1977, 264 с.
4. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. – Новосибирск: Наука, 180, 96 с.
5. Низкотемпературная плазма / гл. редактор серии М.Ф. Жуков / т.11. Математическое моделирование катодных процессов – Новосибирск: Наука, 1993, 194 с.