

ЧИСЛЕННЫЕ

**методы
и математическое
моделирование**

Ю.Н. Прошин

кафедра теоретической физики

Казанского государственного университета

yurii.proshin@ksu.ru

2004-2011, Казань



MatLab: решение дифференциальных уравнений

и другие демонстрации (?)



Простой пример

В качестве самого простого примера приведем решение следующего уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

с начальным условием

$$y(0) = 1$$

и аналитическим решением

$$y(x) = e^{-x^2}$$

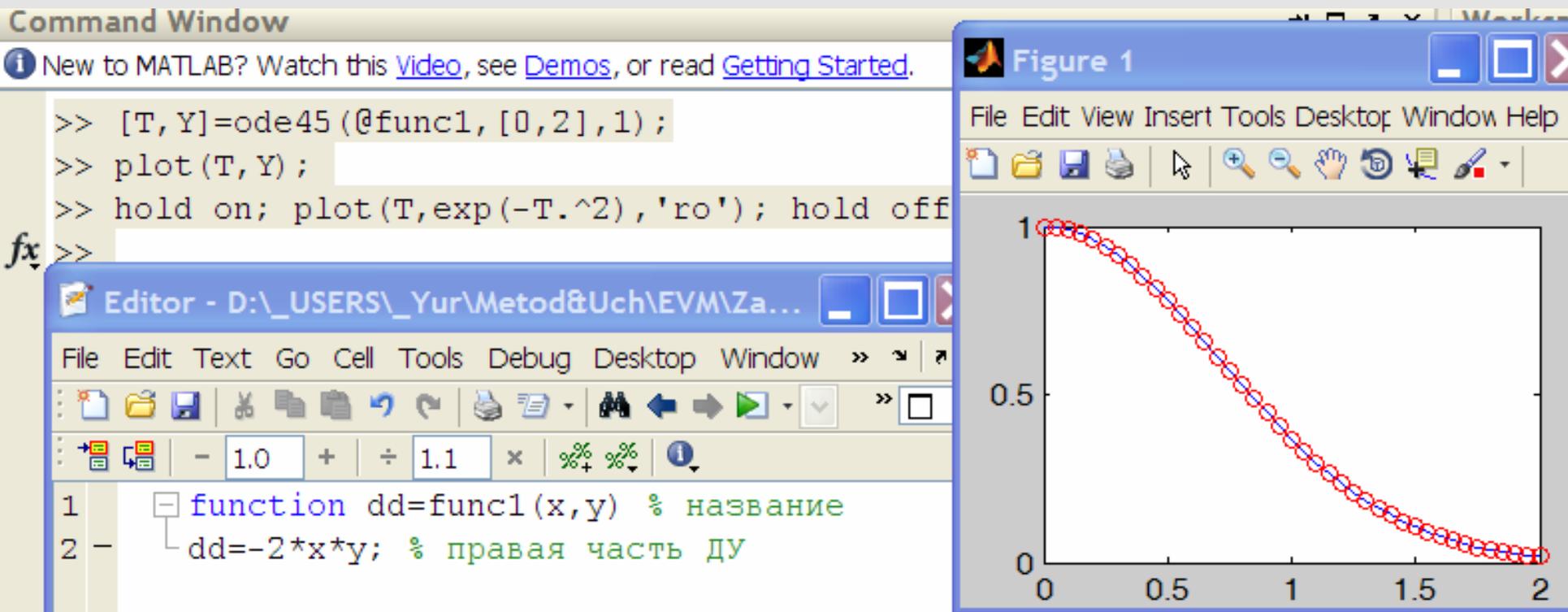
Возможный формат вызова процедуры решателя в MatLab:

`[T,Y]=ode45(@DiffEquatFunc,[Tstart,Tfinal],StartVector).`



Простой пример

Снимок экрана, который соответствует численному решению этой задачи в системе MatLab.



Возможный формат вызова процедуры решателя в MatLab:

[T,Y]=ode45(@DiffEquatFunc,[Tstart,Tfinal],StartVector).

Command Window

 New to MATLAB? Watch this [Video](#), see [Demos](#), or read [Getting Started](#).

```
>> [T, Y]=ode45 (@func1, [0, 2], 1);  
>> plot (T, Y);  
>> hold on; plot (T, exp (-T.^2), 'ro'); hold off  
fx >>
```

Editor - D:_USERS_Yur\Metod&Uch\EVM\Za...   

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window >>  

   |    |   |   |    | 

  | - 1.0 + | ÷ 1.1 × | % % | 

```
1 function dd=func1(x,y) % название  
2 - dd=-2*x*y; % правая часть ДУ
```

Возможный формат вызова процедуры решателя в MatLab:

$[T, Y] = \text{ode45}(@\text{DiffEquatFunc}, [T_{\text{start}}, T_{\text{final}}], \text{StartVector})$.

, or read [Getting Started](#).

```
1) ;
```

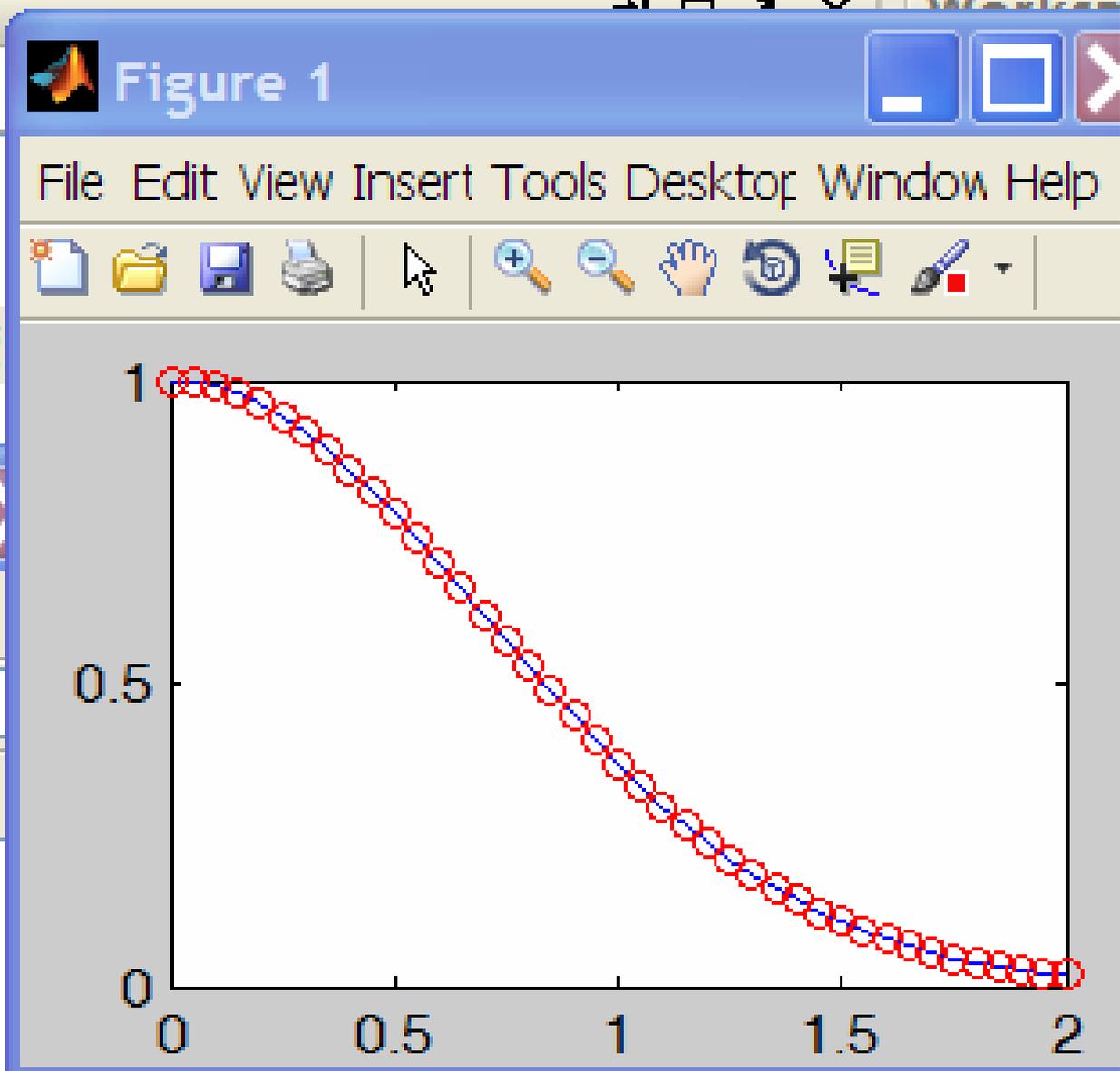
```
), 'ro'); hold off
```

ch\EVM\Za...

Desktop Window

```
) % название
```

```
асть ду
```



В общем случае, процедура **ode45** может решать систему уравнений следующего вида:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $\mathbf{X}(t)$ – вектор-столбец $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

$\mathbf{F}(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция-столбец, зависящая от времени и компонент вектора \mathbf{x} .



Заметим, что уравнение (1) можно решить в MatLab и символично. Приведем часть командного окна, где была вызвана стандартная процедура **dsolve**

```
>> dsolve('Dy=-2*t*y','y(0)=1')
```

```
ans =  
  
                2  
                exp(-t)
```

Здесь также использовано начальное условие.

```
Command Window  
  
>> dsolve('Dy=-2*t*y','y(0)=1')  
ans =  
  
                2  
                exp(-t)
```

Видим, что с точностью до переобозначения $x \rightarrow t$ результат совпадает с приведенным выше.



Решатели диф. уравнений в MatLab (solvers)

Для решения систем ОДУ в MatLAB реализованы различные методы. Их реализации названы решателями ОДУ. Решатели реализуют следующие методы решения систем дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{F}(\vec{y}, t)$$
$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$
$$\vec{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\} = ?$$

Все решатели (**ode45, ode23, ode133, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb**) могут решать системы уравнений явного вида $y' = F(t, y)$.

Решатели **ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb** могут решать уравнения неявного вида $F(t, y, y') = 0$.



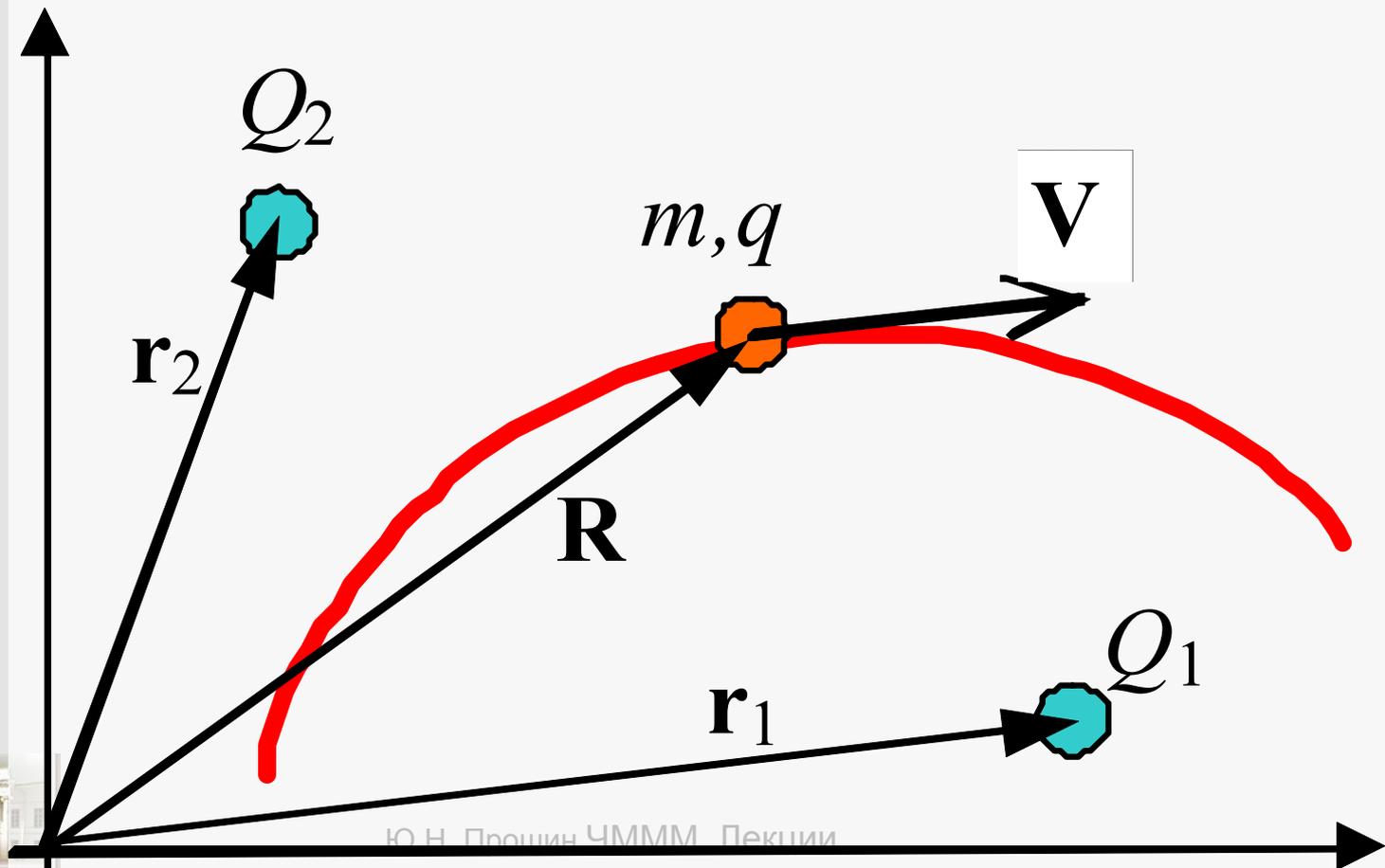
Решатели диф. уравнений в MatLab (solvers)

- `ode45` – одношаговые явные методы Рунге-Кутты 4-го и 5-го порядка {начальная проба решения}. Во многих случаях он дает хорошие результаты;
- `ode23` – одношаговые явные методы Рунге-Кутты 2-го и 3-го порядка. При умеренной жесткости системы ОДУ и низких требованиях к точности этот метод может дать выигрыш в скорости решения;
- `ode133` – многошаговый метод Адамса-Башворта-Мултона переменного порядка. Это адаптивный метод, который может обеспечить высокую точность решения;
- `ode15s` – многошаговый метод переменного порядка (от 1-го до 5-го, по умолчанию 5), использующий формулы численного дифференцирования. Это адаптивный метод, его стоит применять, если решатель `ode45` не обеспечивает решения;
- `ode23s` – одношаговый метод, использующий модифицированную формулу Розенброка 2-го порядка. Может обеспечить высокую скорость вычислений при низкой точности;
- `ode23t` – метод трапеций с интерполяцией. Этот метод дает хорошие результаты при решении задач, описывающих осцилляторы с почти гармоническим выходным сигналом;
- `ode23tb` – неявный метод Рунге-Кутты в начале решения и метод, использующий формулы обратного дифференцирования 2-го порядка в последующем. При низкой точности этот метод может оказаться более эффективным, чем `ode15s`.



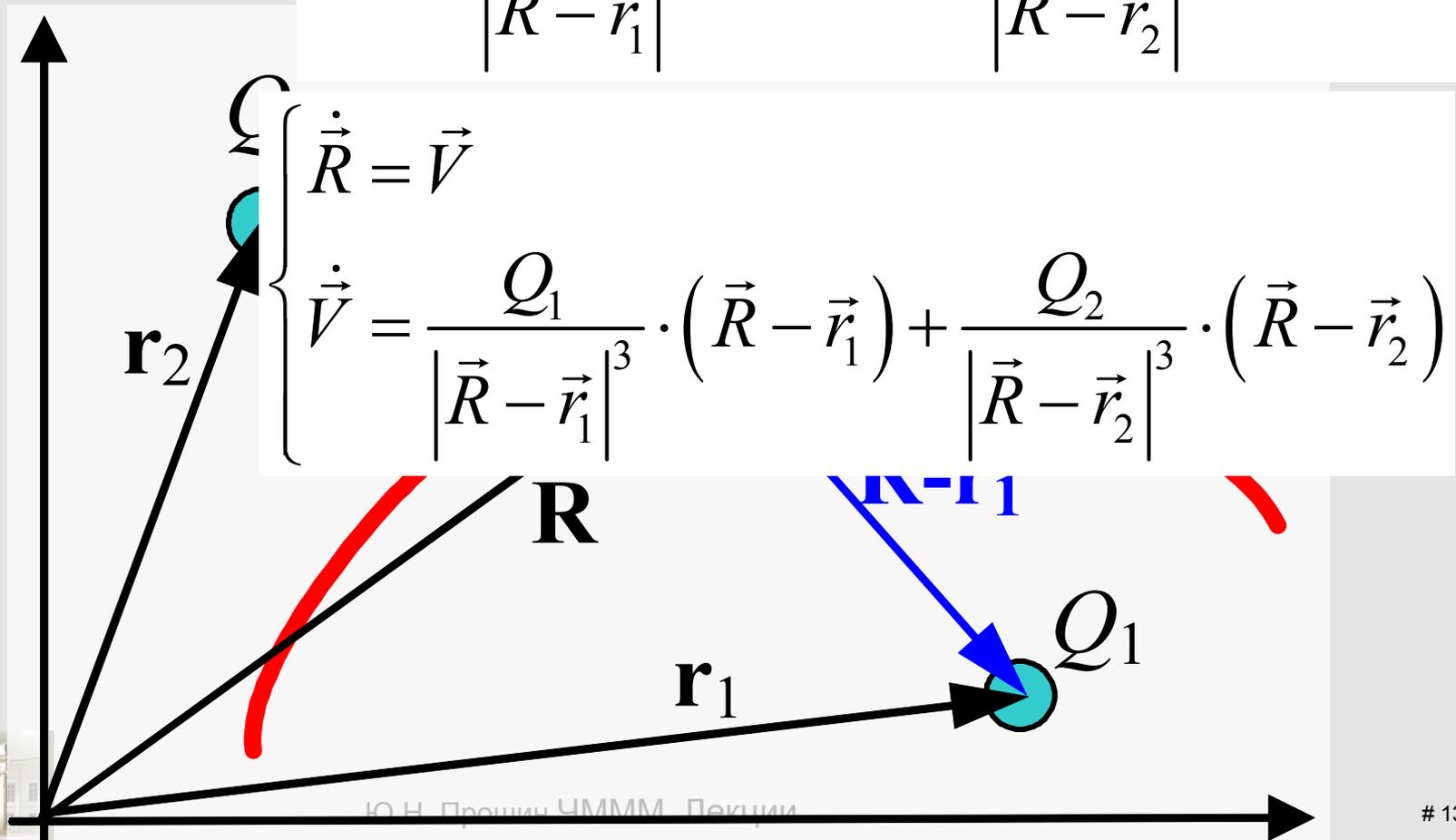
Движение заряженной частицы. Закон Кулона

Пусть некоторая точка массы m с зарядом q движется в электрическом поле двух неподвижных зарядов Q_1 и Q_2



Движение заряженной частицы. Закон Кулона

$$m\ddot{\vec{R}} = \frac{qQ_1}{|\vec{R} - \vec{r}_1|^3} (\vec{R} - \vec{r}_1) + \frac{qQ_2}{|\vec{R} - \vec{r}_2|^3} (\vec{R} - \vec{r}_2)$$



Движение заряженной частицы. Закон Кулона

$$m\ddot{\vec{R}} = \frac{qQ_1}{|\vec{R} - \vec{r}_1|^3} (\vec{R} - \vec{r}_1) + \frac{qQ_2}{|\vec{R} - \vec{r}_2|^3} (\vec{R} - \vec{r}_2)$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{R}} = \vec{V} \\ \dot{\vec{V}} = \frac{Q_1}{|\vec{R} - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{R} - \vec{r}_1) + \gamma \frac{Q_2}{|\vec{R} - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{R} - \vec{r}_2) \end{cases}$$

Пусть масса частицы $m = 1$, ее заряд $q = 1$. Перейдем к безразмерным единицам, и будем считать, что данная задача является "плоской".

Введем следующие обозначения:

$$\vec{R} = (x_1, x_2) \quad \vec{r}_1 = (C_{1x}, C_{1y}) \quad \vec{r}_2 = (C_{2x}, C_{2y}) \quad \vec{V} = (x_3, x_4)$$

Движение заряженной частицы. Закон Кулона

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{Q_1(x_1 - C_{1x})}{\left((x_1 - C_{1x})^2 + (x_2 - C_{1y})^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q_2(x_2 - C_{2x})}{\left((x_1 - C_{2x})^2 + (x_2 - C_{2y})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{x}_4 = \frac{Q_1(x_1 - C_{1y})}{\left((x_1 - C_{1x})^2 + (x_2 - C_{1y})^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q_2(x_2 - C_{2y})}{\left((x_1 - C_{2x})^2 + (x_2 - C_{2y})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Пусть масса частицы $m = 1$, ее заряд $q = 1$. Перейдем к безразмерным единицам, и будем считать, что данная задача является "плоской".

Введем следующие обозначения:

$$\vec{R} = (x_1, x_2) \quad \vec{r}_1 = (C_{1x}, C_{1y}) \quad \vec{r}_2 = (C_{2x}, C_{2y}) \quad \vec{V} = (x_3, x_4)$$

Движение заряженной частицы. Закон Кулона

Рассмотрим простейший случай *финитного* движения с $Q1 = -50$, $Q2 = 0$, $C1 = (5,0)$ и $C2 = (0,10)$. При таких начальных параметрах ($Q2 = 0$ и $Q1 < 0$) наша точка движется в притягивающем поле только первого заряда и, как мы помним из классической механики, должна описывать вокруг него *эллипс*. Проверим, запишем правую часть системы уравнений как файл-функцию, назвав ее **pointq12**.

```
function f=pointq12(t,x)
global Q1 Q2 C1x C1y C2x C2y
f=[x(3);x(4);...
Q1*(x(1)-C1x)/(sqrt((x(1)-C1x)^2+(x(2)-C1y)^2))^3+...
Q2*(x(1)-C2x)/(sqrt((x(1)-C2x)^2+(x(2)-C2y)^2))^3;...
+Q1*(x(2)-C1y)/(sqrt((x(1)-C1x)^2+(x(2)-C1y)^2))^3+...
Q2*(x(2)-C2y)/(sqrt((x(1)-C2x)^2+(x(2)-C2y)^2))^3];
```

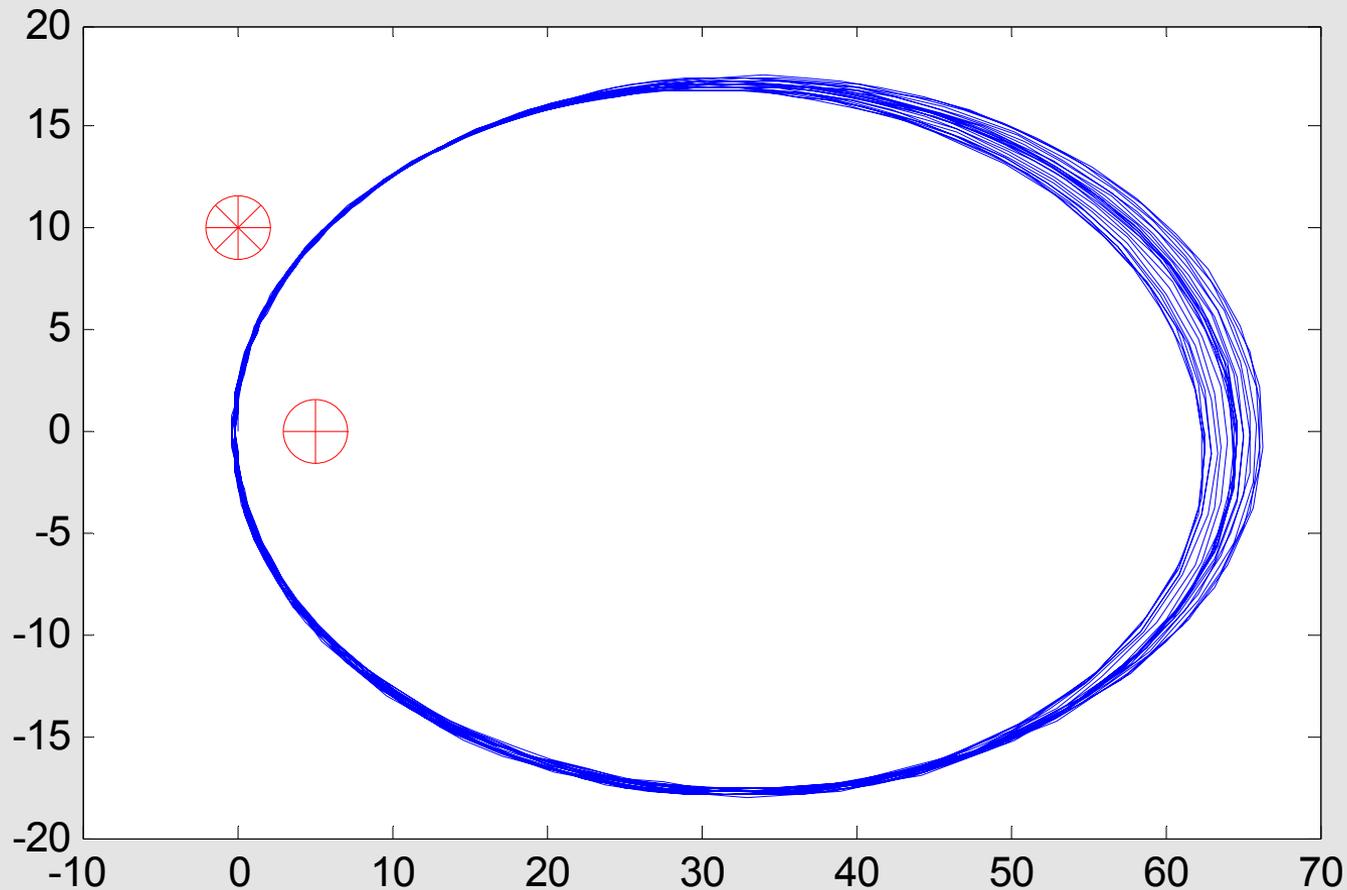
Движение заряженной частицы. Закон Кулона

Решим систему дифференциальных уравнений, вызвав процедуру ode45 из "пустой" файла-функции **pointDyn.m**

```
function pointDyn()
clear all
global Q1 Q2 C1x C1y C2x C2y
Q1=-50; Q2=-0.; C1x=5; C1y=0; C2x=0; C2y=10;
x0=0; y0=0; vx0=0; vy0=4.3; T1=4000;
[t,h]=ode45(@pointq12,[0,T1],[x0,y0,vx0,vy0]);
x=h(:,1); y=h(:,2); x1=C1x; y1=C1y; x2=C2x; y2=C2y;
plot(x,y,'b-'); % отрисовка траектории
hold on
% отрисовка положения неподвижных зарядов
plot(x1,y1,'r+',x2,y2,'r*','MarkerSize',15);
plot(x1,y1,'ro',x2,y2,'ro','MarkerSize',15);
% comet(x,y); % отрисовка "движения"
hold off;
```

Движение заряженной частицы. Закон Кулона

Для данного примера относительной точности 10^{-3} , заложенной по умолчанию в процедуре **ode45**, недостаточно. Придется либо уменьшать этот параметр, либо пробовать другие процедуры.

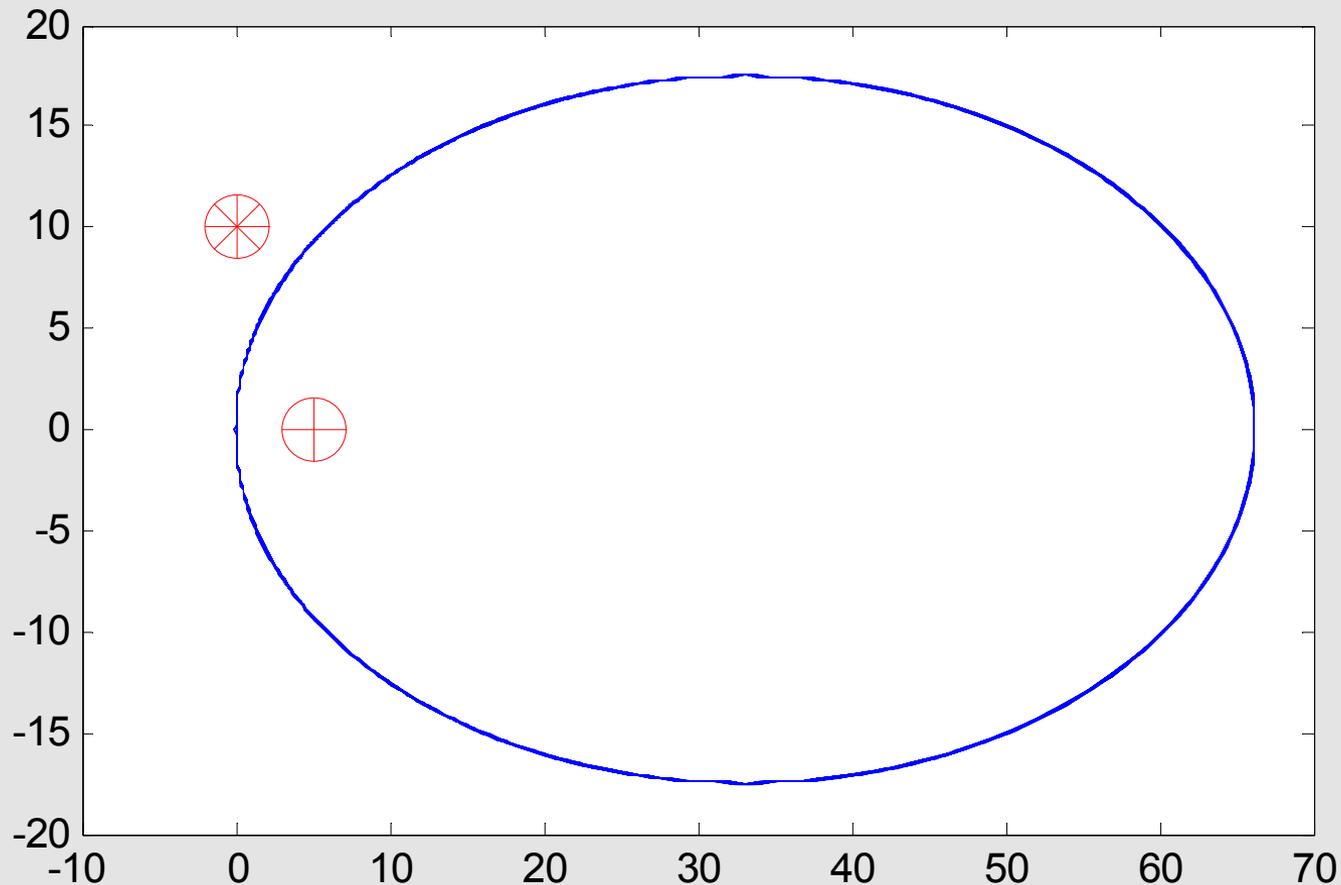


Движение заряженной частицы. Закон Кулона

Изменим относительную точность решения на три порядка $\rightarrow 10^{-6}$:

tol = 1e-6;

[t,h]=ode45(@pointq12,[0,T1],[x0,y0,vx0,vy0],...odeset('RelTol',tol))



Движение заряженной частицы. Закон Кулона

Время расчета увеличилось, но теперь мы получили вполне приемлемый результат.

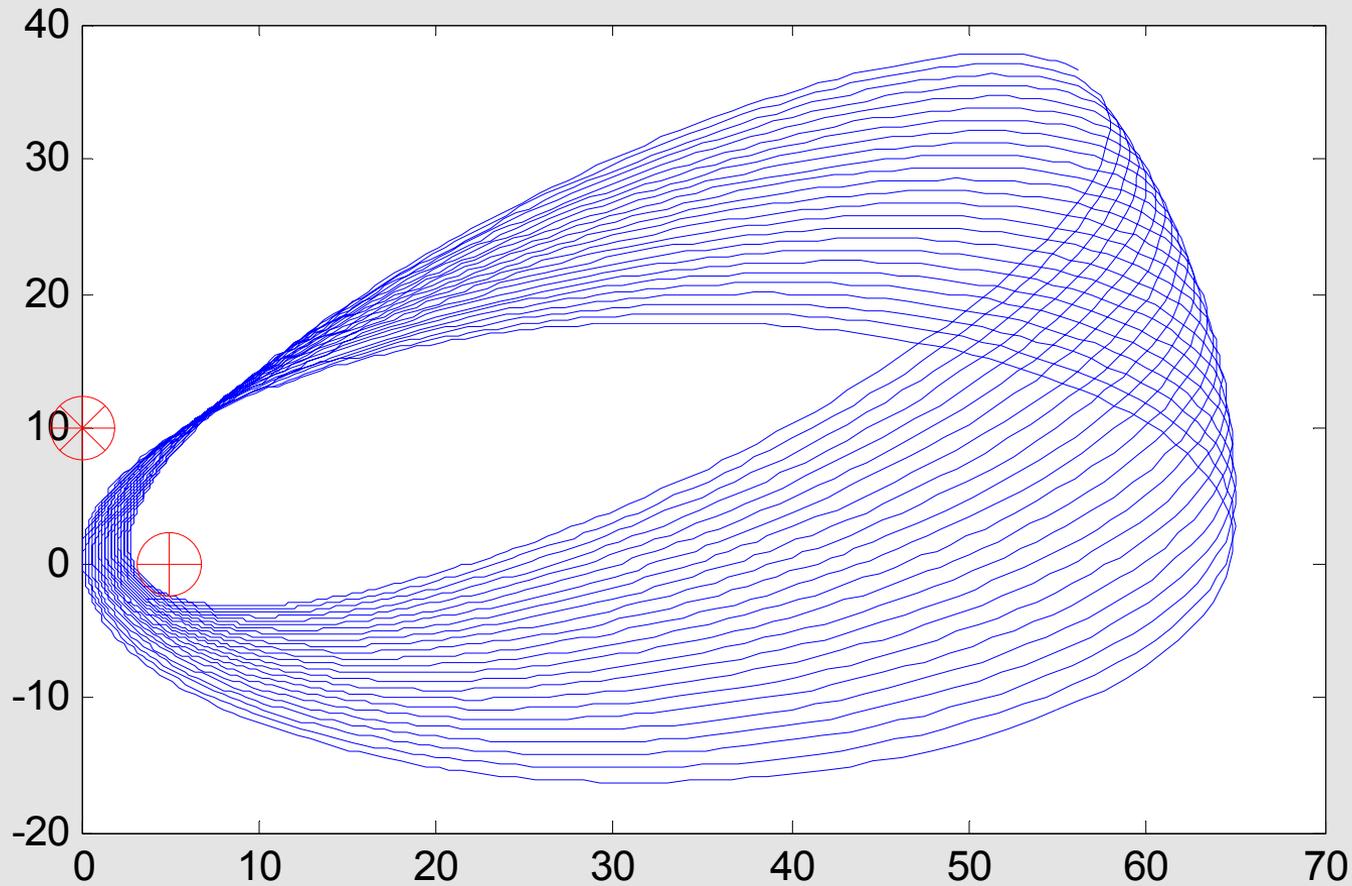
Теперь можно поэкспериментировать с начальными условиями и зарядами тел (например, можно убедиться, что при последовательном увеличении на единицу заряда Q_1 с -50 до -46 движение становится инфинитным).

Естественно, что движение станет также инфинитным, если взять заряды одного знака, т.е. $Q_1 > 0$.

Движение заряженной частицы. Закон Кулона

Введем значение $Q2 = -0.2$.

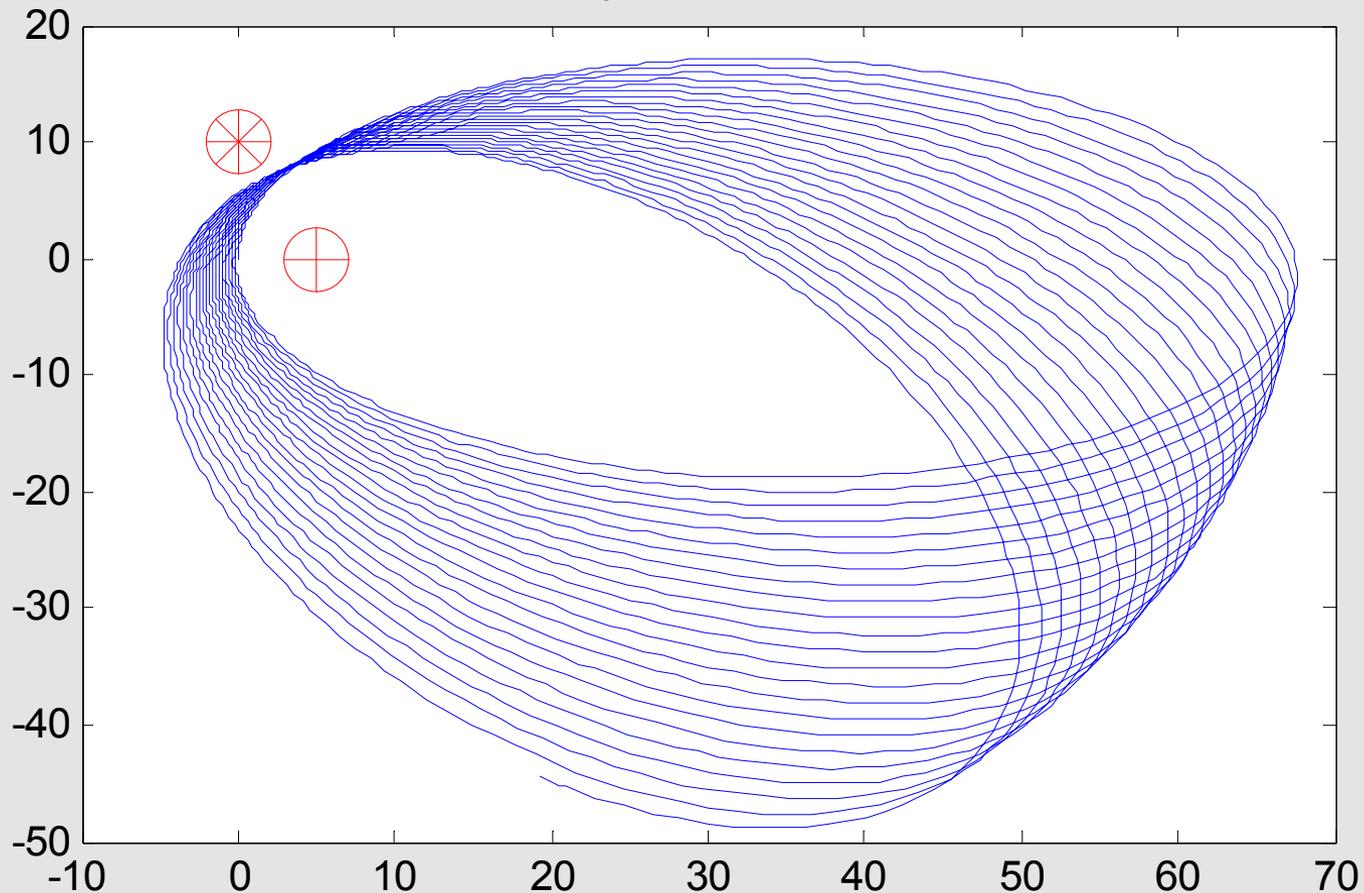
Это внесет возмущение в орбиту движущейся точки.



Движение заряженной частицы. Закон Кулона

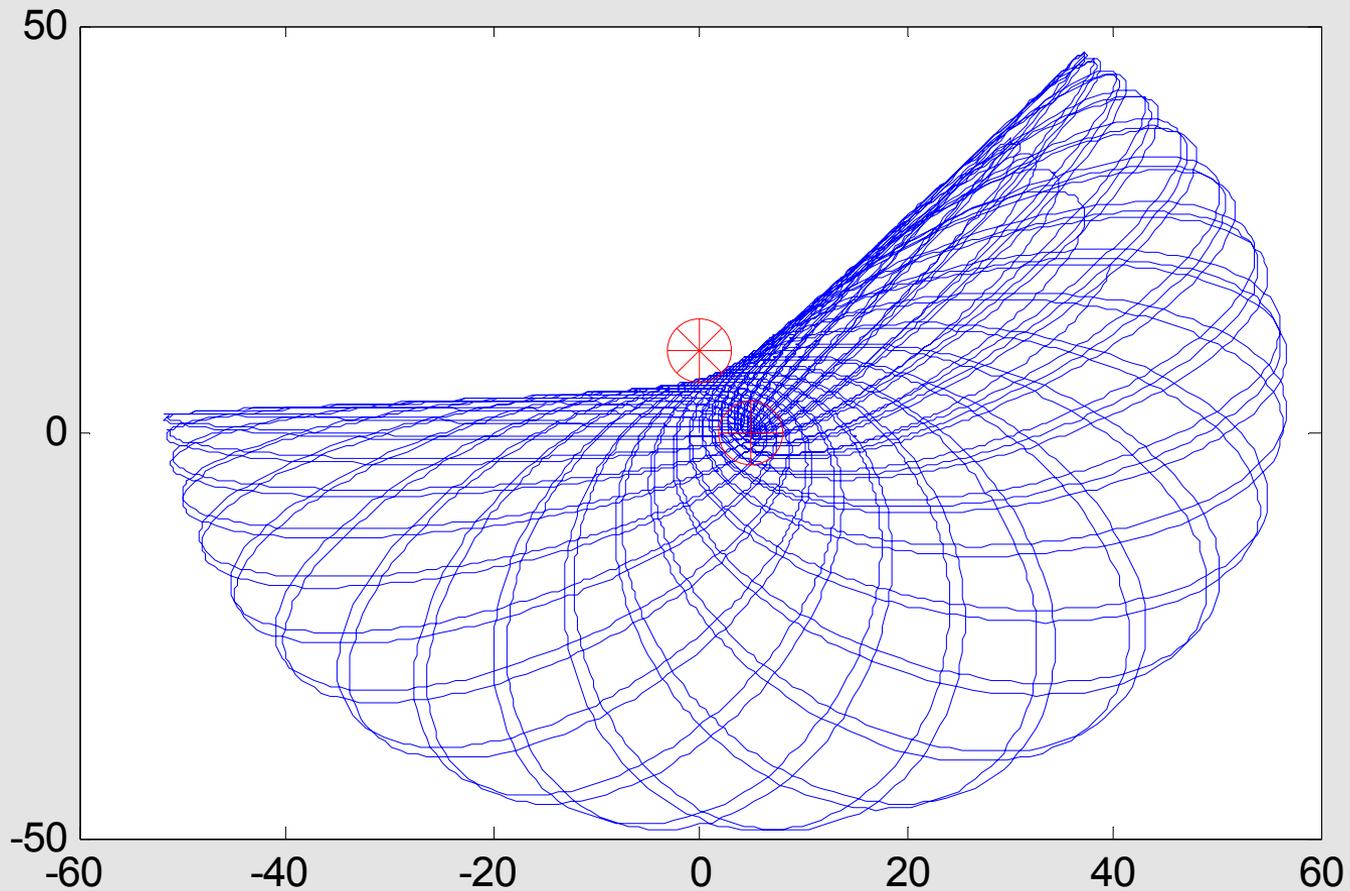
Введем значение $Q2 = +0.2$.

Траектория становится незамкнутой .



Движение заряженной частицы. Закон Кулона

$Q1 = -50$ и $Q2 = -1.5$. $T1 = 8000$.



Движение заряженной частицы. Закон Кулона

Следует подчеркнуть, что мы использовали модель точечных зарядов, т.е. пренебрегали возможностью "попадания" зарядов друг в друга. Дальнейшее улучшение программы связано с контролем в ходе решения выполнения закона сохранения энергии (особенно это существенно при решении задачи многих тел).

Теперь можно экспериментировать самостоятельно !

Ю.Н. Прошин, И.М. Еремин. **Вычислительная физика (Практический курс)** Казань: Казанский государственный университет, 2009.

("Задание 4. Движение заряда в кулоновском поле")

Движение под действием сил тяжести и трения

Рассмотрим траекторию движения пули под действием силы тяжести. При отсутствии сопротивления воздуха это будет парабола. При скорости пули больше скорости звука сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости и противоположна направлению движения. Уравнение движения пули массой m будет следующим

$$m\vec{w} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \vec{F} = m\vec{g} - kV\vec{V}$$

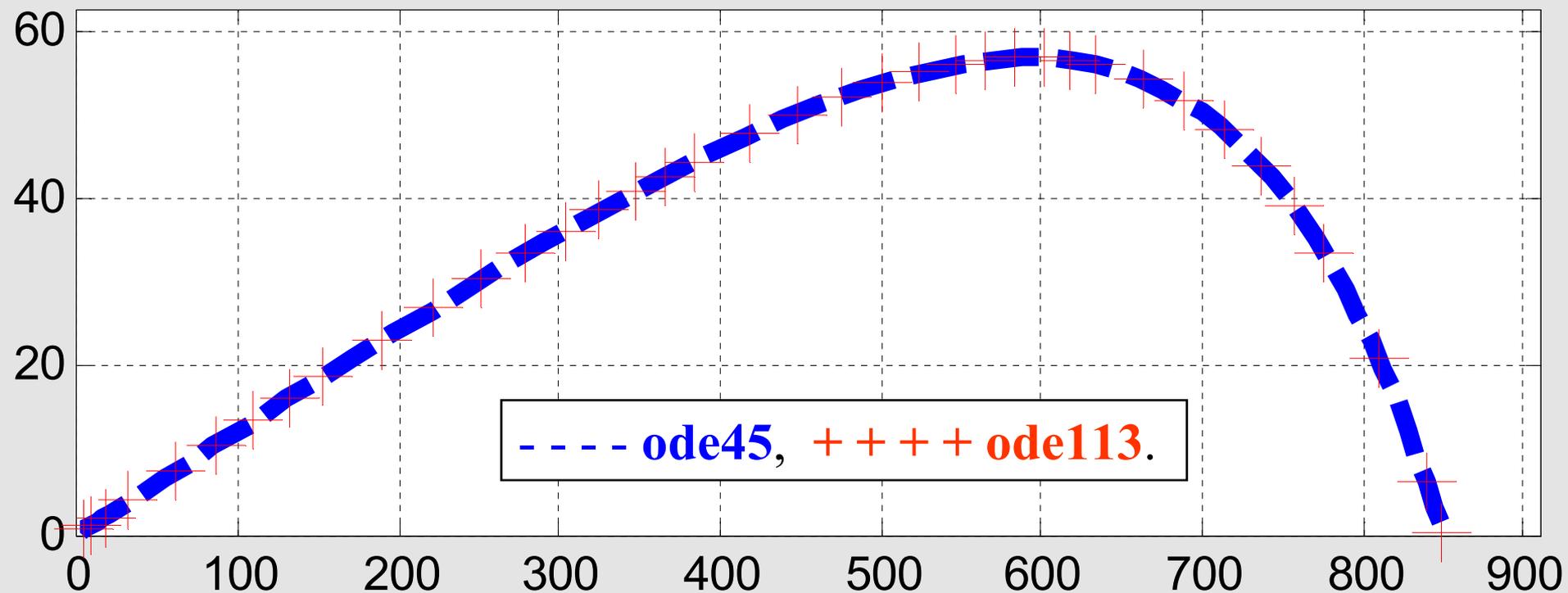
Примем для простоты, что коэффициент пропорциональности k в силе трения зависит от плотности воздуха ρ , которая, в общем случае, может меняться с высотой y , площади поперечного сечения пули S и некоторого постоянного безразмерного параметра b порядка единицы, учитывающего форму пули.

Из соображений размерности $k = b\rho S$.

Движение под действием сил тяжести и трения

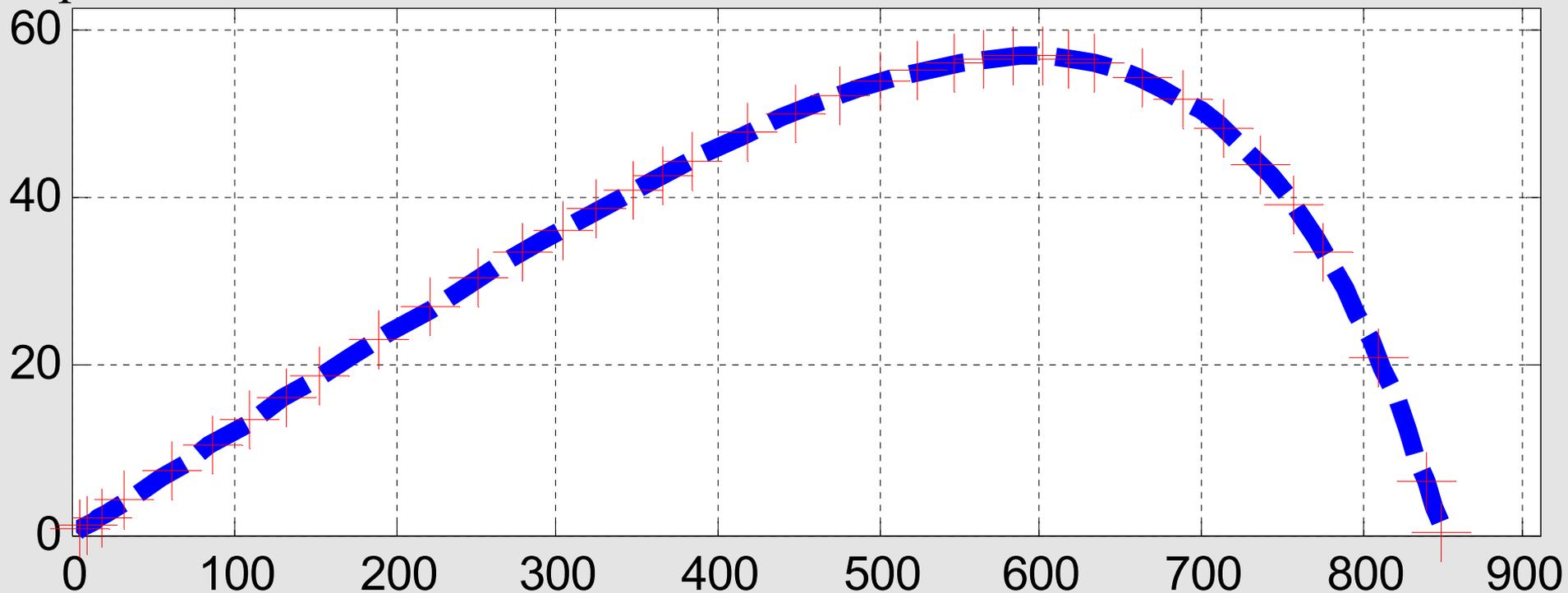
Пусть масса пули - $m = 9$ грамм, $S = 0.5$ см² (~ калибр 7.62 мм).
Пусть $\rho = \rho(0) = 1.22$ кг/м³, $g = 9.8$ м/с², коэффициент $b = 0.5$.
При $t_0 = 0$: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, а $v_{x0} = 800$ м/с, $v_{y0} = 100$ м/с.
Переведем все в систему Си и обезразмерим.

По осям - метры



Движение под действием сил тяжести и трения

Теперь можно проводить компьютерные "эксперименты", меняя параметры задачи. Например, можно учесть изменение плотности воздуха с высотой, или даже осевое вращение пули, возникающее в нарезном стрелковом оружии, и оценить как это влияет на точность стрельбы



I. Как изменится траектория пули с учетом распределения плотности воздуха по высоте. Построить аппроксимацию $\rho(y)$ по следующим данным: в Европе плотность воздуха у поверхности Земли равна 1.258 кг/м^3 , на высоте 5 км – 0.735 кг/м^3 , на высоте 20 км – 0.087 кг/м^3 , на высоте 40 км – 0.004 кг/м^3

II. При каком угле вылета пуля достигает максимальной дальности?

III. Если одну пулю выстрелить горизонтально из ствола, а другую пулю бросить с той же самой высоты в тот же самый момент, упадут ли обе из них в одно и то же время?

IV. Если пулю выстрелить из винтовки вертикально вверх, какой будет ее окончательная скорость, когда она попадет в макушку чьей-то головы во время своего полета вниз?

Построить фазовую диаграмму (y, V_y) при разных параметрах задачи. Зависит ли дальность от массы пули? Какая пуля улетит дальше, более тяжелая или более легкая?

Учесть осевое вращение пули, возникающее в нарезном стрелковом оружии. Как это влияет на дальность и точность стрельбы?

Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

Разберем известный пример осциллятора Ван дер Поля и увидим, что применение `ode45` либо сильно удлиняет время решения, либо, вообще, не может привести к решению. Итак ДУ, описывающее осциллятор Ван дер Поля, выглядит следующим образом

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

здесь μ – параметр. Перепишем

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$



Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

Используем в качестве функции, описывающей систему ДУ (13), функцию **vanderpoldemo**, входящую в стандартный демонстрационный пример MatLab – **odedemo**.

```
function dydt = vanderpoldemo(t,y,Mu)  
%VANDERPOLDEMO Defines the van der Pol equation %  
Copyright 1984-2002 The MathWorks, Inc.  
% $Revision: 1.2 $ $Date: 2002/06/17 13:20:38 $  
dydt = [y(2); Mu*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
```

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$



Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

Для малых μ порядка единицы практически любой MatLab решатель ОДУ сможет эффективно решить уравнение Ван дер Поля. Для больших значений $\mu > 100$ система ОДУ становится жесткой. Для быстрого и эффективного интегрирования таких систем должны быть использованы специальные методы, реализованные в **ode15s**, **ode23s**, **ode23t**, **ode23tb**. Сравним работу двух процедур **ode45** (**синяя сплошная линия на графиках**) и **ode15s** (**прерывистая красная**) при разных значениях μ . Начальные условия

$$x_{10} = x_0 = 0.5$$

$$x_{20} = \dot{x}_{10} = \dot{x}_0 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$



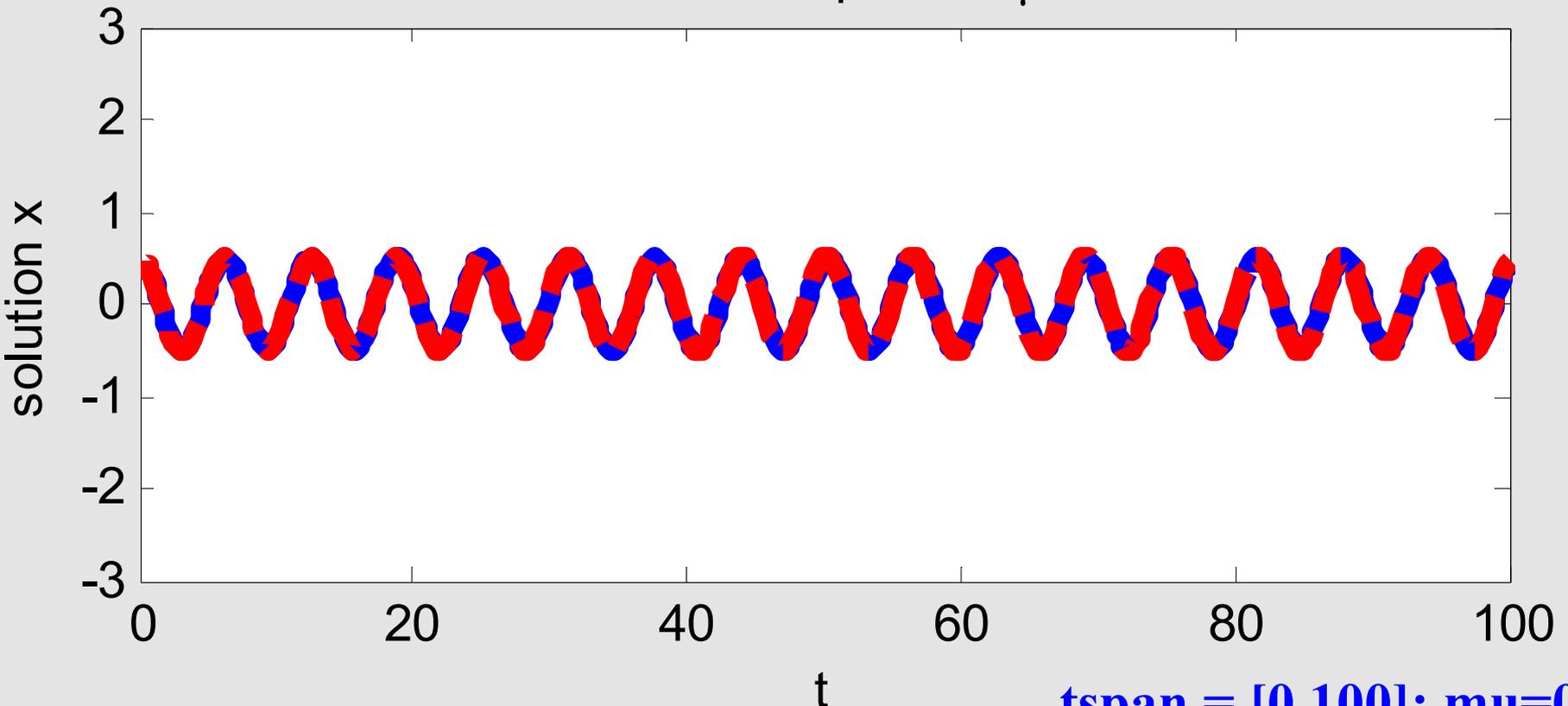
Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

```
tspan = [0, 100]; x0 = [0.5; 0]; Mu = 0.0;
disp(['Fig0 tspan = [0, 100]; mu=', num2str(Mu)])
tic % Засекаем время
[t,x] = ode45(@vanderpoldemo, tspan, x0,[],Mu);
toc % Останавливаем и печатаем время
% Plot of the solution
plot(t,x(:,1),'b','LineWidth',4)
xlabel('t'); ylabel('solution x')
title(['van der Pol Equation, \mu = ', num2str(Mu)])
hold on; tic
[t,x] = ode15s(@vanderpoldemo, tspan, x0,[],Mu);
toc;
plot(t,x(:,1),'r--','LineWidth',4); hold off
```



Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

van der Pol Equation, $\mu = 0$

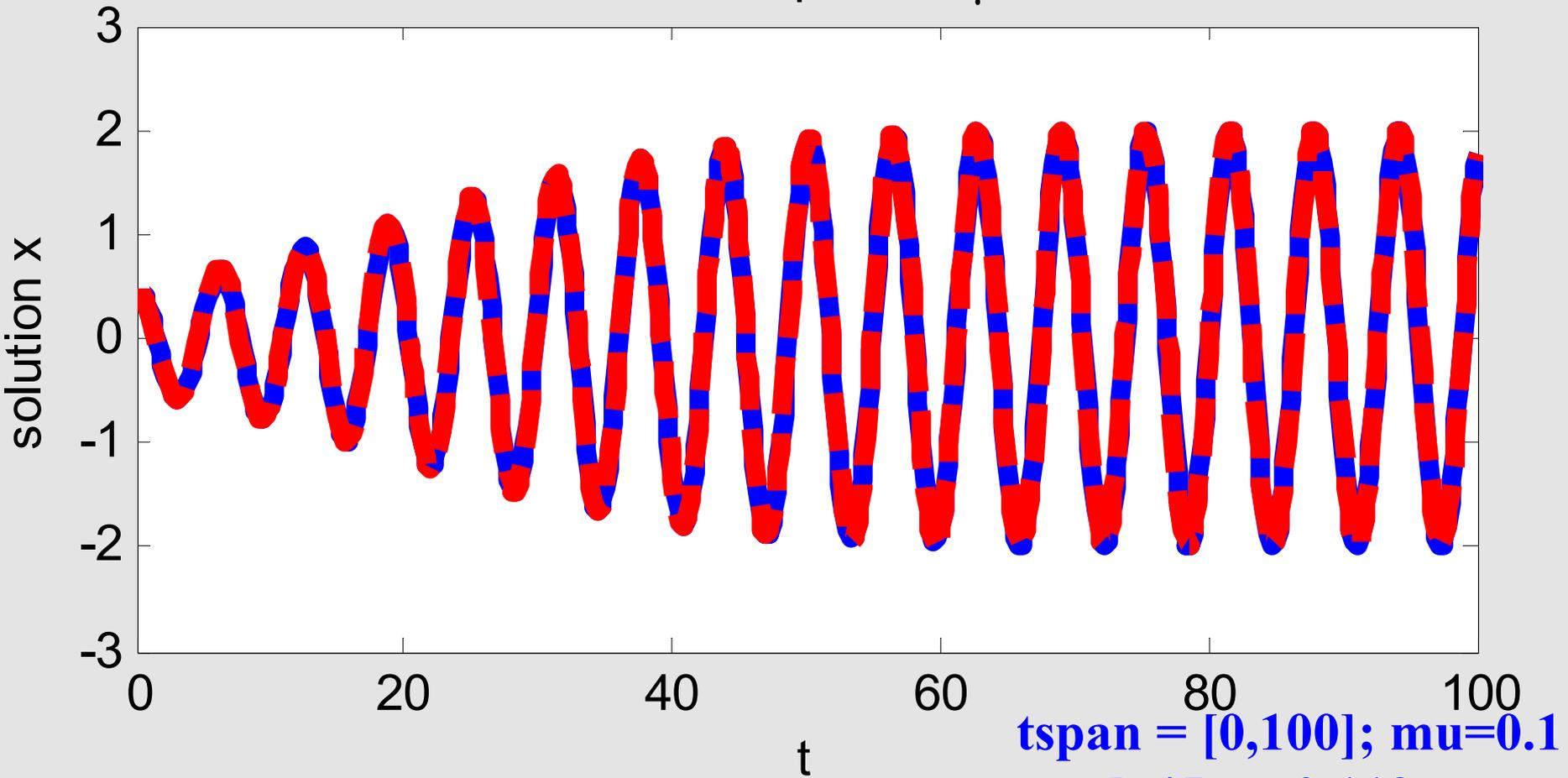


периодическое решение для
гармонического осциллятора с
амплитудой 0.5

$tspan = [0,100]; mu=0$
 $ode45 \Rightarrow 0.103$ sec.
 $ode15s \Rightarrow 0.284$ sec.

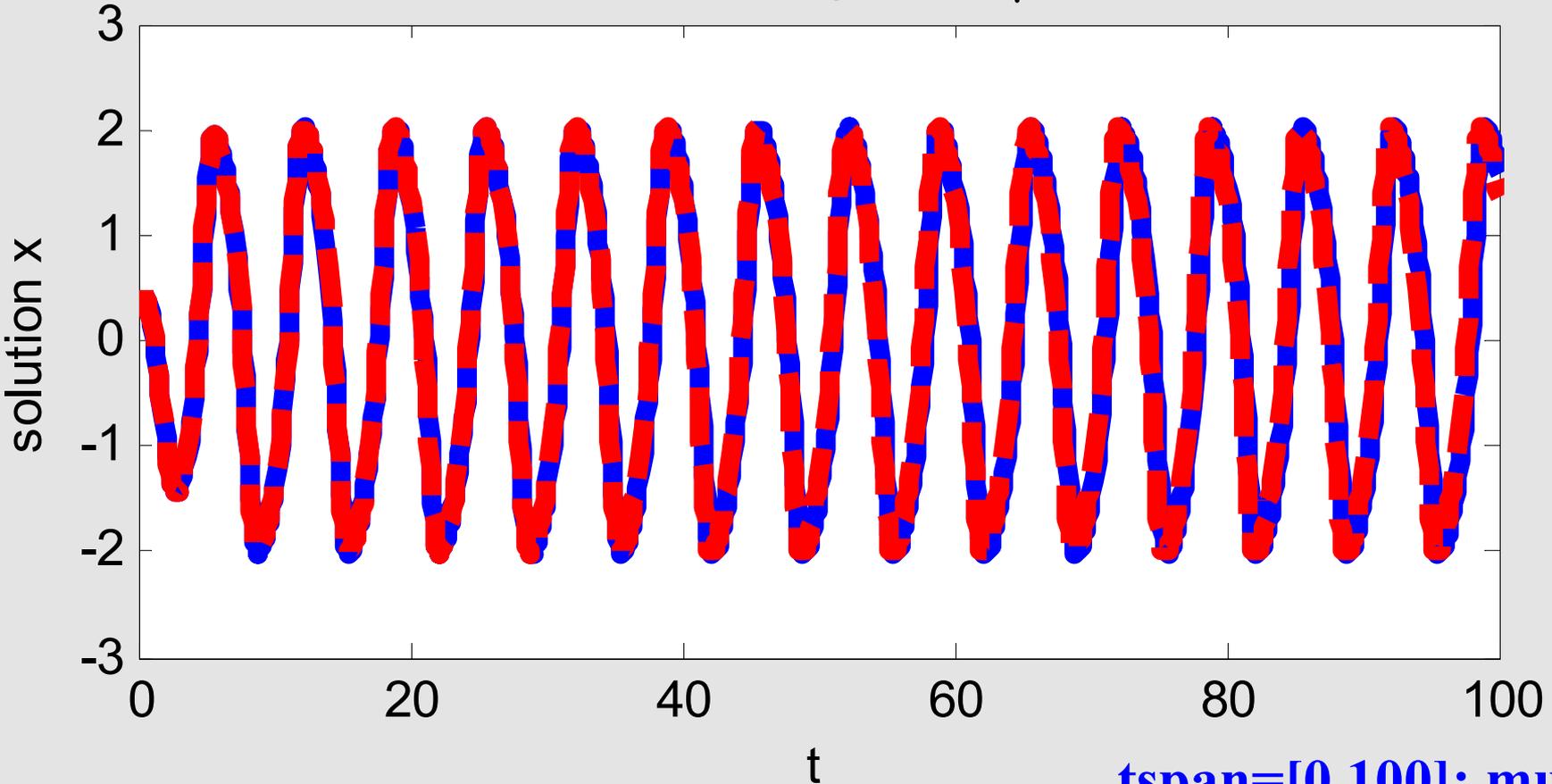
Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

van der Pol Equation, $\mu = 0.1$



Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

van der Pol Equation, $\mu = 1$

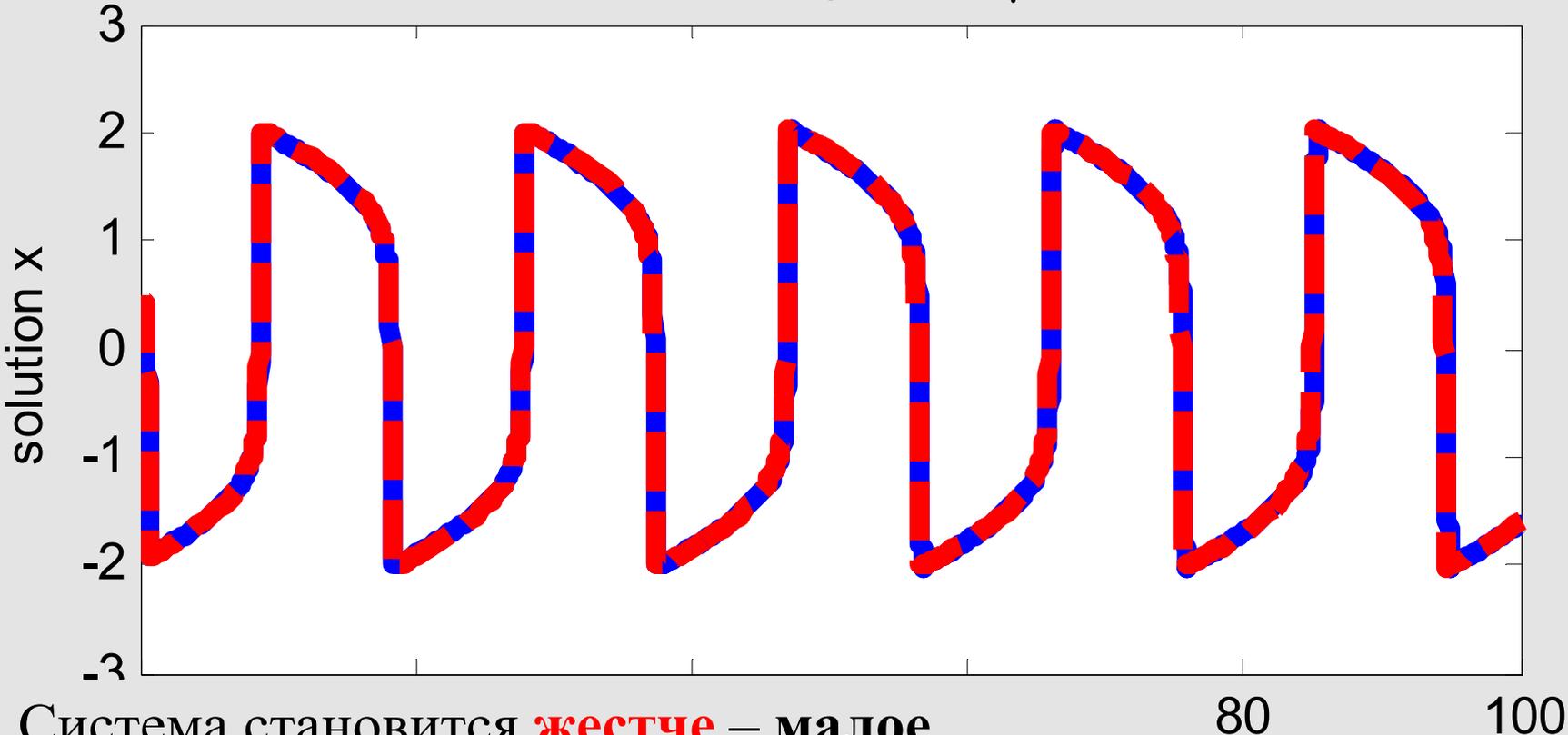


`tspan=[0,100]; mu=1`
`ode45 => 0.191 sec.`
`ode15s => 0.796 sec.`



Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

van der Pol Equation, $\mu = 10$

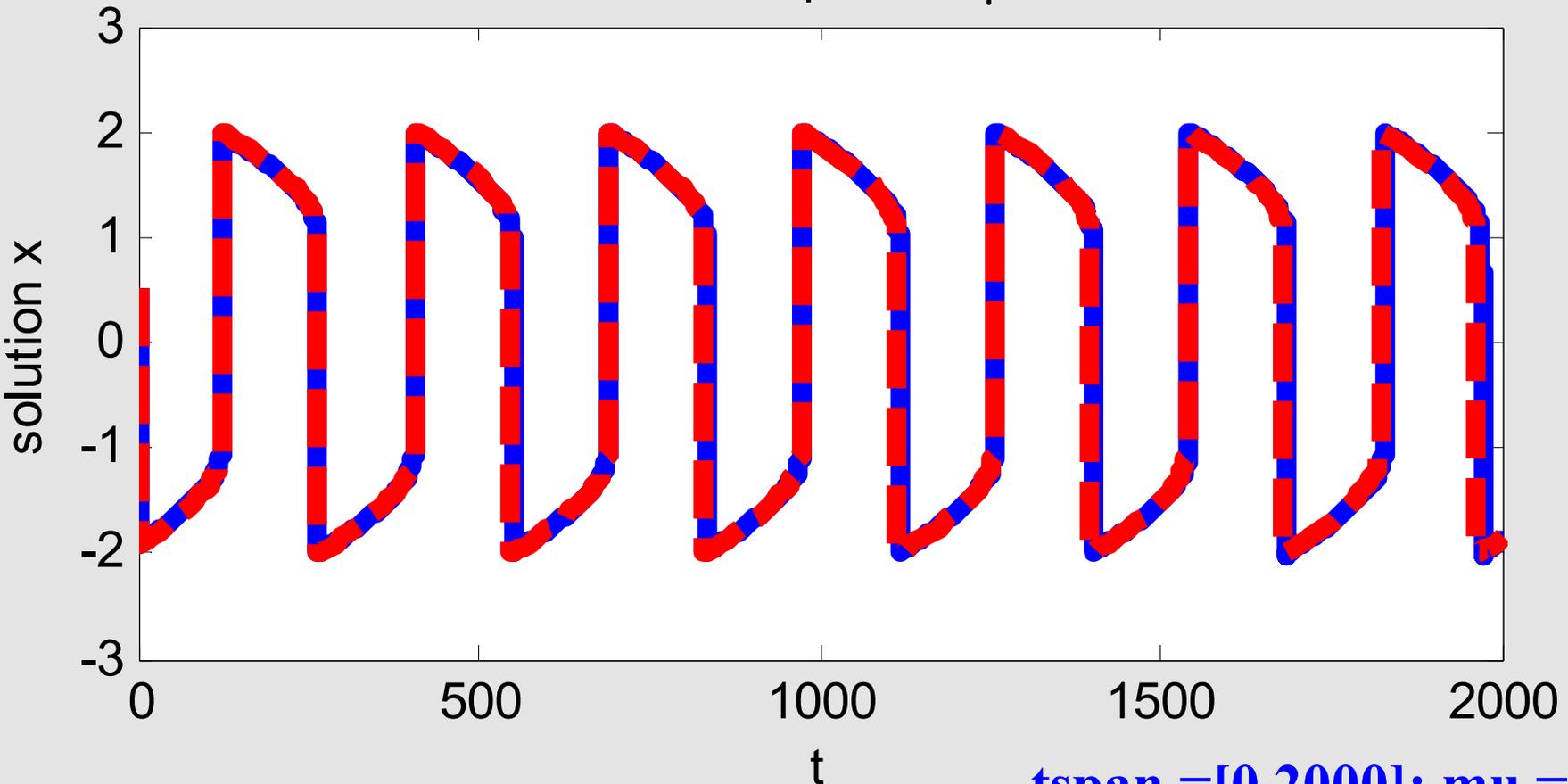


Система становится **жестче** – малое
изменение параметра, приводит к
сильному изменению функции.
Хотя по-прежнему **ode45** быстрее **ode15s**.

tspan=[0,100]; mu=10
ode45 => 0.450 sec.
ode15s => 1.07 sec.

Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

van der Pol Equation, $\mu = 175$

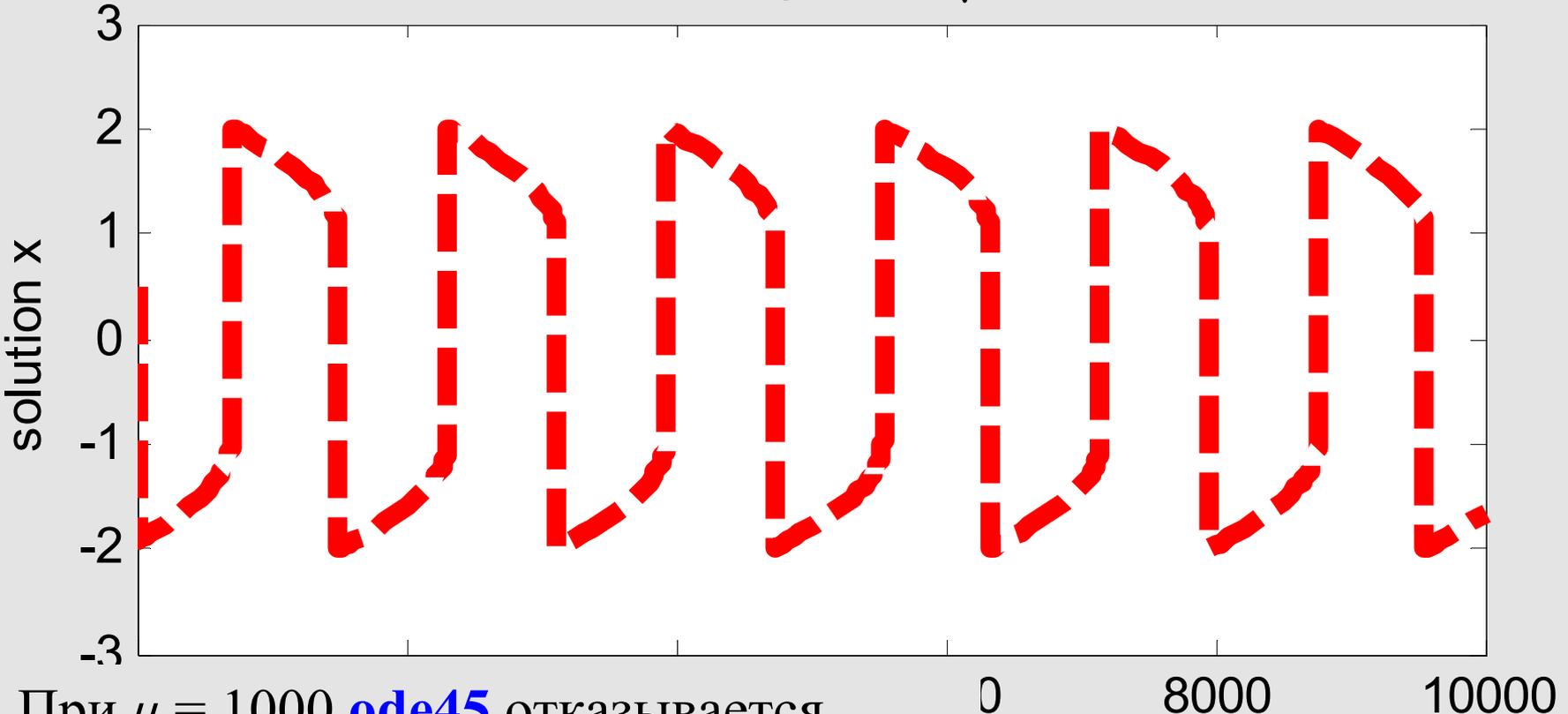


`tspan = [0,2000]; mu = 175`
`ode45 => 190.4 sec.`
`ode15s => 2.631 sec.`



Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

van der Pol Equation, $\mu = 1000$



При $\mu = 1000$ **ode45** отказывается
работать, а время работы **ode15s**
увеличился на треть при увеличении
временного диапазона почти в 5 раз:

tspan=[0,10000]; mu=1000
ode45 => Not solved!
ode15s > 3.166 sec.

Осциллятор Ван дер Поля. Жесткость системы ОДУ

Причина в том, что при увеличении параметра μ начинают сильно различаться порядки коэффициентов при разных слагаемых.

Именно степень этого различия чаще всего и определяет жесткость системы ОДУ

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X})$$

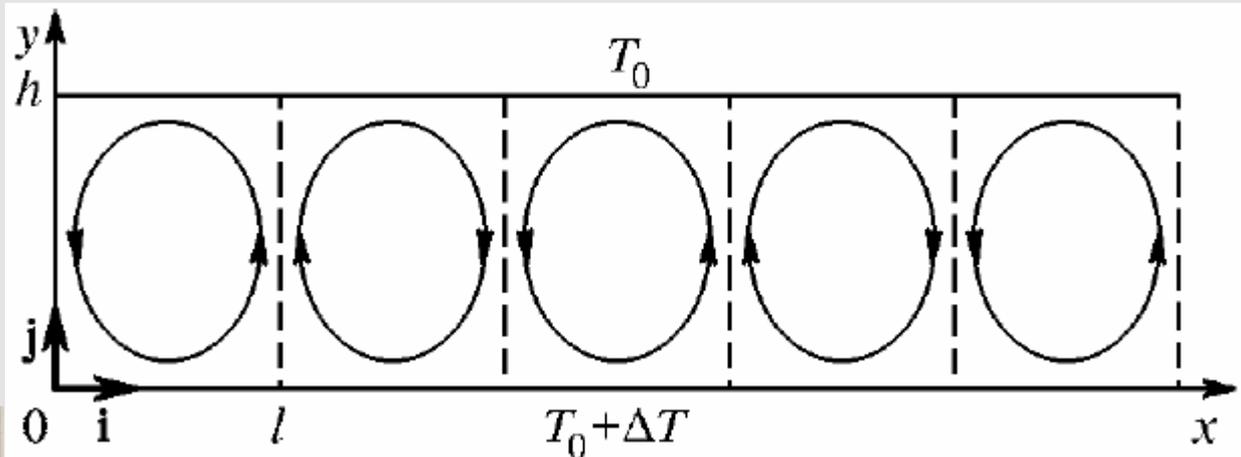
В качестве соответствующей характеристики выбирают матрицу Якоби (якобиан) векторной функции $\mathbf{F}(t, \mathbf{X})$, определяющей правую часть системы ОДУ. Чем сильнее вырождена матрица Якоби, т.е. функциональная матрица, составленная из производных $\mathbf{F}(t, \mathbf{X})$, тем **жестче** система уравнений.

При $\mu = 1000$ `ode45` отказывается работать, а время работы `ode15s` увеличился на треть при увеличении временного диапазона почти в 5 раз:

`tspan=[0,10000]; mu=1000`
`ode45 => Not solved!`
`ode15s > 3.166 sec.`

Система Лоренца (С.П.Кузнецов, Динамический хаос)

В 1963 г. американский исследователь Эдвард Лоренц, занимавшийся проблемами прогноза погоды, опубликовал в журнале «Journal of Atmospheric Sciences» статью «Детерминированное неперiodическое течение». Эта работа была посвящена исследованию модельной нелинейной системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая получалась как результат определенных приближений при анализе задачи о конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости.



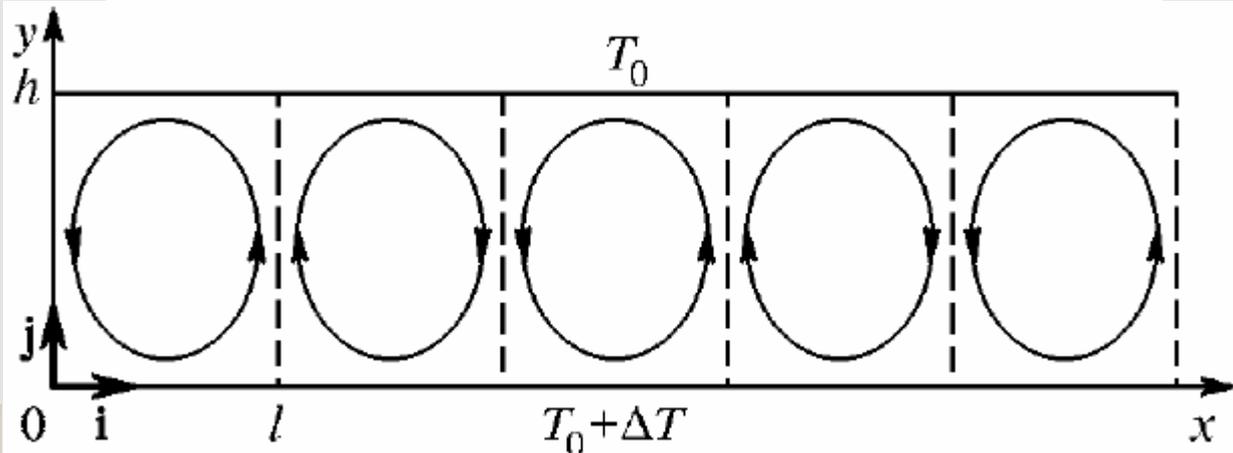
Система Лоренца

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

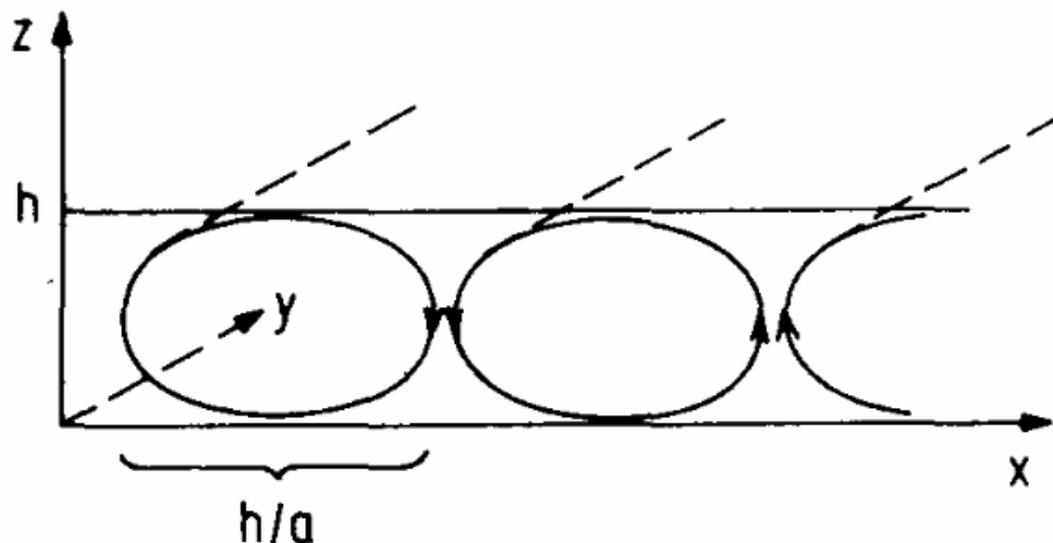
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \mathbf{v}) = \kappa \nabla^2 T,$$

$$\rho = \rho_0 (1 - \gamma(T - T_0)),$$



Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

Рассмотрим эксперимент Рэля — Бенара, показанный на рис. Жидкость описывается полем скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и полем температуры $T(\mathbf{x}, t)$.



Конвективные валы и геометрические параметры в эксперименте Бенара.



Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

Рассмотрим эксперимент Рэля — Бенара, показанный на рис. Жидкость описывается полем скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и полем температуры $T(\mathbf{x}, t)$. Основными уравнениями, описывающими эту систему, являются:

а) уравнение Навье — Стокса

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}; \quad (\text{П1.1})$$

б) уравнение теплопроводности

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T; \quad (\text{П1.2})$$

в) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{П1.3})$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} T(x, y, z = 0, t) &= T_0 + \Delta T; \\ T(x, y, z = h, t) &= T_0. \end{aligned} \quad (\text{П1.4})$$



Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

Здесь ρ — плотность жидкости, μ — вязкость, p — давление, κ — температуропроводность, $\mathbf{F} = \bar{\rho}g\mathbf{e}_z$ — внешняя сила тяготения в направлении \mathbf{e}_z . Нелинейность в гидродинамике связана с конвективным слагаемым $\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \partial\mathbf{v}/\partial t$ (квадратичным по \mathbf{v}) в уравнении Навье — Стокса (П1.1).

Чтобы упростить вычисления, предполагается, что а) система обладает трансляционной инвариантностью по y , так что конвекционные валы простираются до бесконечности, как показано на рис. и б) зависимостью от ΔT всех коэффициентов, кроме $\rho = \bar{\rho}(1 - \alpha\Delta T)$, можно пренебречь (приближение Буссинеска). Уравнение неразрывности принимает вид



Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ где } u = v_x \text{ и } w = v_z, \quad (\text{П1.5})$$

поэтому удобно ввести функцию $\psi(x, z, t)$, для которой

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \text{ и } w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\text{П1.6})$$

так что (П1.5) выполняется автоматически.

Далее введем отклонение $\theta(x, z, t)$ от линейного профиля температуры:

$$T(x, z, t) = T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h} z + \theta(x, z, t). \quad (\text{П1.7})$$



Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

Используя (П1.6) и (П1.7), основные уравнения можно записать в виде (Saltzman, 1981)

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - \frac{\partial (\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial (x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (\text{П1.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = - \frac{\partial (\psi, \theta)}{\partial (x, z)} + \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta, \quad (\text{П1.9})$$

где

$$\frac{\partial (a, b)}{\partial (x, z)} \equiv \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial b}{\partial x}; \quad (\text{П1.10})$$

$$\nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4};$$

$\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость (член, содержащий давление, уничтожается применением ротора к уравнениям Навье — Стокса).

Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

Чтобы упростить (П1.8) и (П1.9), Лоренц использовал свободные граничные условия

$$\begin{aligned} \theta(0, 0, t) &= \theta(0, h, t) = \psi(0, 0, t) = \\ &= \psi(0, h, t) = \nabla^2 \psi(0, 0, t) = \nabla^2 \psi(0, h, t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{П1.11})$$

и, сохраняя только младшие члены в фурье-представлении ψ , предложил следующую подстановку:

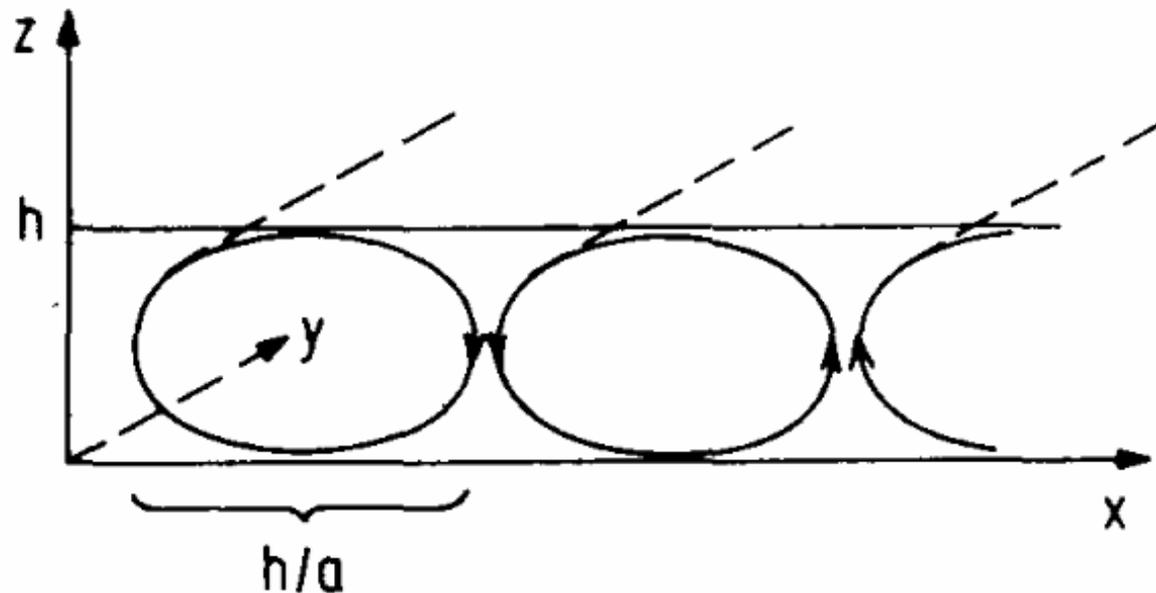
$$\frac{a}{1 + a^2} \frac{1}{\kappa} \psi = \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \quad (\text{П1.12})$$

$$\frac{\pi R}{R_c \Delta T} \theta = \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right), \quad (\text{П1.13})$$

где переменные X , Y и Z зависят только от времени, $R = g\alpha h^3 \Delta T / \nu \kappa$ — число Рэлея, $R_c = \pi^4 a^{-2} (1 + a^2)^3$ — критическое значение R , a — отношение геометрических размеров (рис. 1.10).

Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

Конвективные валы и геометрические параметры в эксперименте Бенара.



Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

Отсюда получаем

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y; \quad (\text{П1.14а})$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y; \quad (\text{П1.14б})$$

$$\dot{Z} = XY - bZ, \quad (\text{П1.14в})$$

где точкой обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \pi^2 h^{-2} (1 + a^2) \kappa t$, $\sigma = \nu / \kappa$ — число Прандтля, $b \equiv 4(1 + a^2)^{-1}$; $r = R / R_c \sim \Delta T$ — внешний управляющий параметр.



Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

Анализ устойчивости, возникновения конвекции и турбулентности в модели Лоренца¹⁾

Запишем уравнения Лоренца (П1.14) в краткой форме

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (\text{П2.1})$$

и линеаризуем их вблизи неподвижных точек

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}; \mathbf{X}_2 = (\pm\sqrt{b(r-1)}; \pm\sqrt{b(r-1)}; r-1), \quad (\text{П2.2})$$

определяемых условием

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_{1,2}) = \mathbf{0}. \quad (\text{П2.3})$$

Первая неподвижная точка $\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ соответствует состоянию теплопроводности без движения жидкости, и ее матрица устойчивости

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{X}_1} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (\text{П2.4})$$

Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma + 1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4(r - 1)\sigma}; \quad \lambda_3 = -b. \quad (\text{П2.5})$$

Таким образом, решение $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ устойчиво, т. е. все λ отрицательны, при $0 < r < 1$. При $r = 1$ начинается конвекция Бенара, так как $\lambda_1 = 0$, и именно в этот момент «принимает эстафету» вторая неподвижная точка \mathbf{X}_2 (соответствующая движущимся валам, изображенным на рис. 118). Матрица устойчивости для \mathbf{X}_2 :

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{X}_2} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & c \\ c & c & -b \end{pmatrix}, \quad c \equiv \pm \sqrt{b(r - 1)}; \quad (\text{П2.6})$$

а ее собственные значения — корни полинома

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0. \quad (\text{П2.7})$$



Видно, что при $r = 1$ $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -b$; $\lambda_3 = -(\sigma + 1)$, т. е. «конвективная» неподвижная точка находится на грани устойчивости, и как показывает рис. 119, она устойчива при $1 < r < r_1$. При $r_1 < r$ два собственных значения становятся комплексными, т. е. появляются два предельных цикла, устойчивых до тех пор, пока действительная часть этих значений меньше 0.]

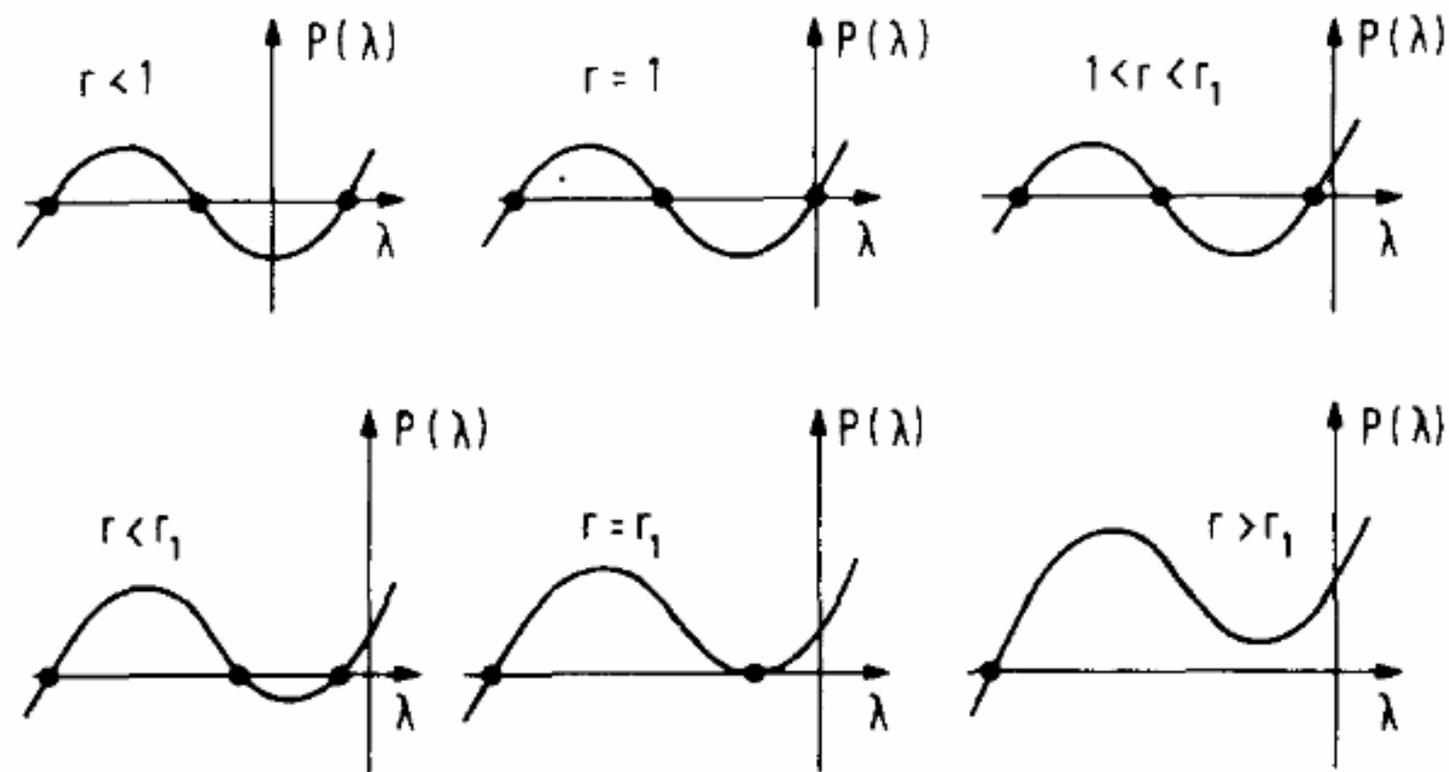


Рис. 119. Вид полинома $P(\lambda)$ в зависимости от параметра r .

Система Лоренца (Г.Шустер, Детерминированный хаос)

При $r = r_c$ действительные части обращаются в 0, т. е. $\lambda = \pm i\lambda_0$, и из (П2.7)

$$r_c = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \quad (= 24,7368 \text{ для } \sigma = 10, b = 8/3).$$

При превышении r_c предельный цикл становится неустойчивым (действительные части комплексных собственных значений положительны) и наступает хаос. Этот анализ согласуется с численным результатом, полученным Лоренцем, обнаружившим хаотическое поведение при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и значениях параметра r , превышающих $r_c = 24,74$.



Система Лоренца

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \mathbf{v}) &= \kappa \nabla^2 T, \\ \rho &= \rho_0 (1 - \gamma(T - T_0)),\end{aligned}$$

В исходной постановке задачи мы имеем дело с *распределенной системой* — ее состояние характеризуется эволюционирующими во времени полями распределения скорости $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, плотности $\rho(x, y, z, t)$ и температуры $T(x, y, z, t)$ ¹). Изменение этих полей во времени описывается системой уравнений с частными производными



Система Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$

Переменная x характеризует скорость вращения конвекционных валов, величины y и z отвечают за распределение температуры, соответственно, по горизонтали и по вертикали. Параметр b определяется геометрией конвекционной ячейки, а именно, отношением ее вертикального и горизонтального размеров a . Параметр σ есть отношение коэффициента кинематической вязкости и коэффициента температуропроводности ν/κ . Его называют *числом Прандтля*. Комбинацию $R = g\gamma h^3 \Delta T / \nu\kappa$ называют *числом Рэлея*. В свое время Рэлей показал, что условию возникновения конвекционного течения в виде валов отвечает определенное критическое значение этого числа, а именно, $R_c = \pi^4 a^{-2} (1 + a^2)^3$.

параметр r представляет собой отношение R/R_c .



Система Лоренца

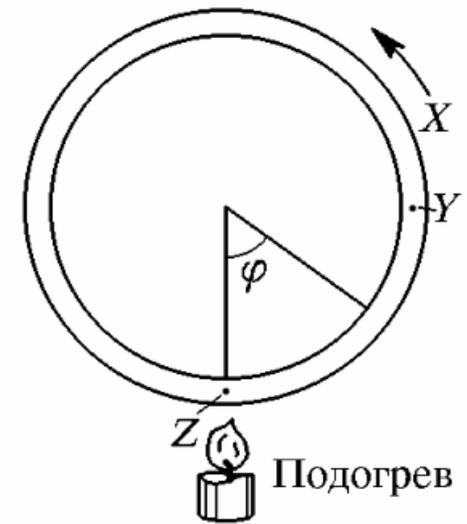
$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$

$$\sigma = \frac{\beta}{D}, \quad r = \frac{cA}{\beta D^2}, \quad b = 1 \quad (\text{Rubinfeld, Siegman, 1977})$$

$$X = Dx, \quad Y = \frac{\beta Dy}{c}, \quad Z = -\frac{\beta Dz}{c}, \quad t = Dt$$

D — константа.

Задача о конвекции в замкнутой кольцевой трубке. X характеризует скорость течения, Y и Z — отклонение температуры от среднего значения в указанных точках

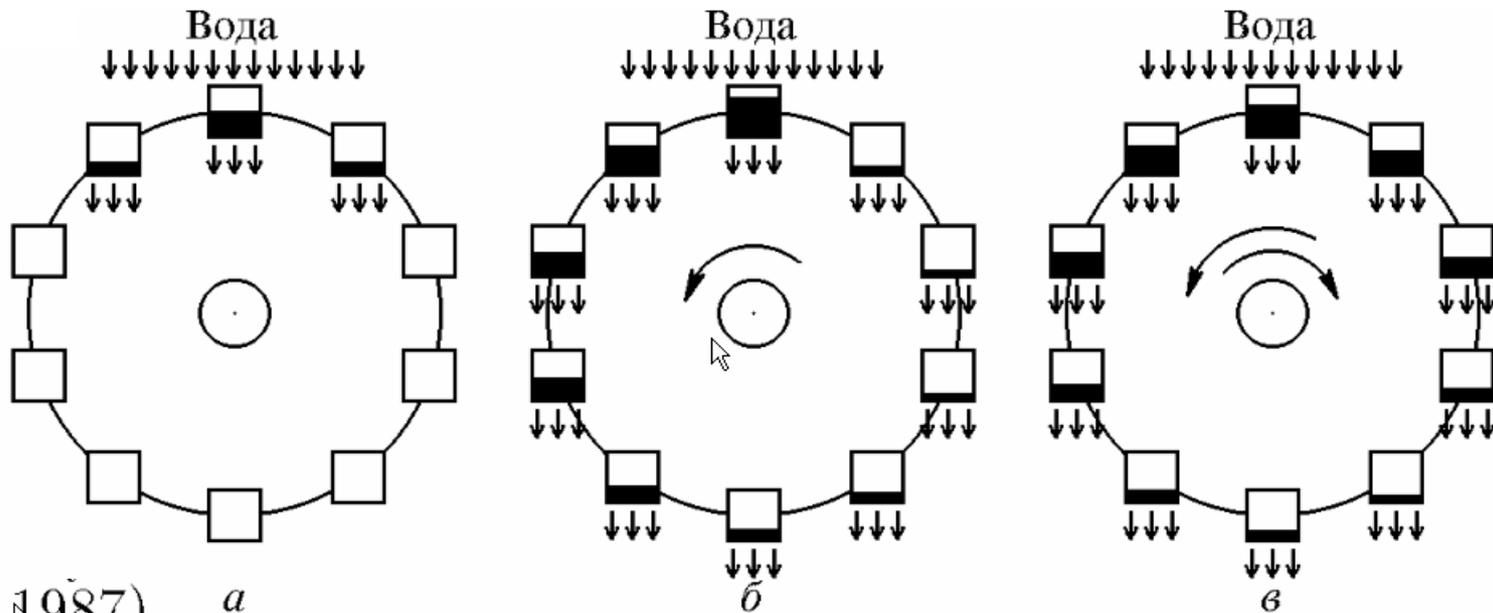


Если взять эллиптическую форму, можно получить уравнения с параметром b , отличным от 1.



Система Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$



(Gleick, 1987)

Водяное колесо — механическая модель системы Лоренца. При малом потоке воды сверху колесо остается в покое (*a*), при большем вращается с постоянной скоростью (*б*), при очень большом — вращается хаотически, меняя время от времени направление вращения на противоположное (*в*)



Система Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$

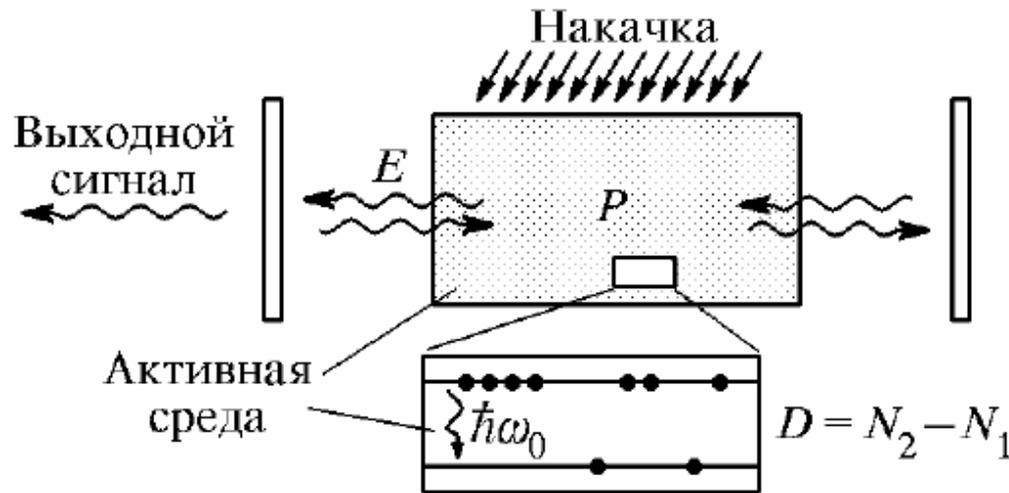
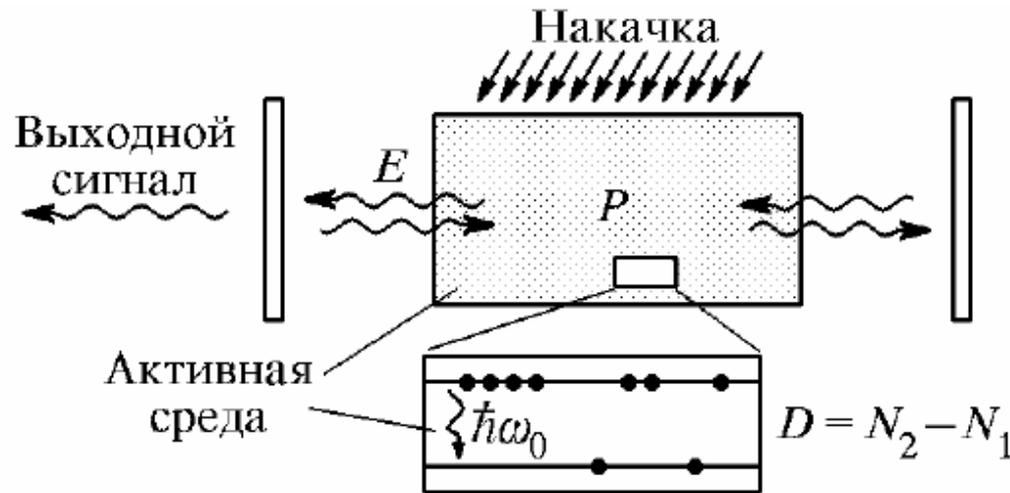


Схема одномодового лазера: E — электрическое поле резонатора, P — поляризация активной среды, D — инверсия населенностей уровней



Система Лоренца

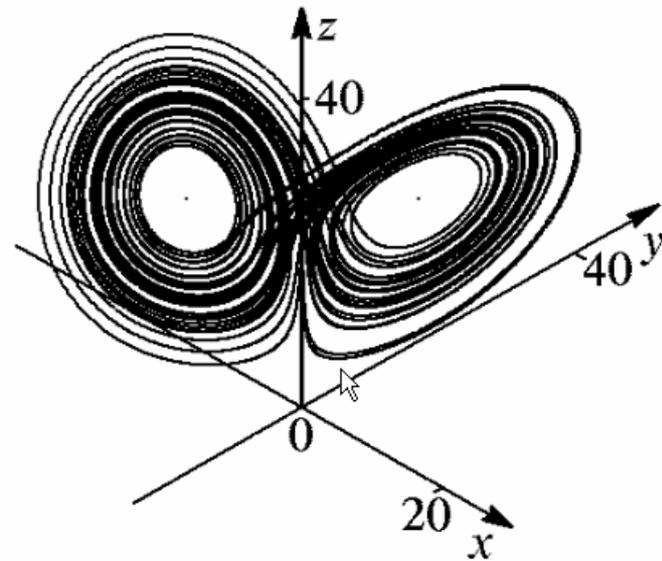
$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$



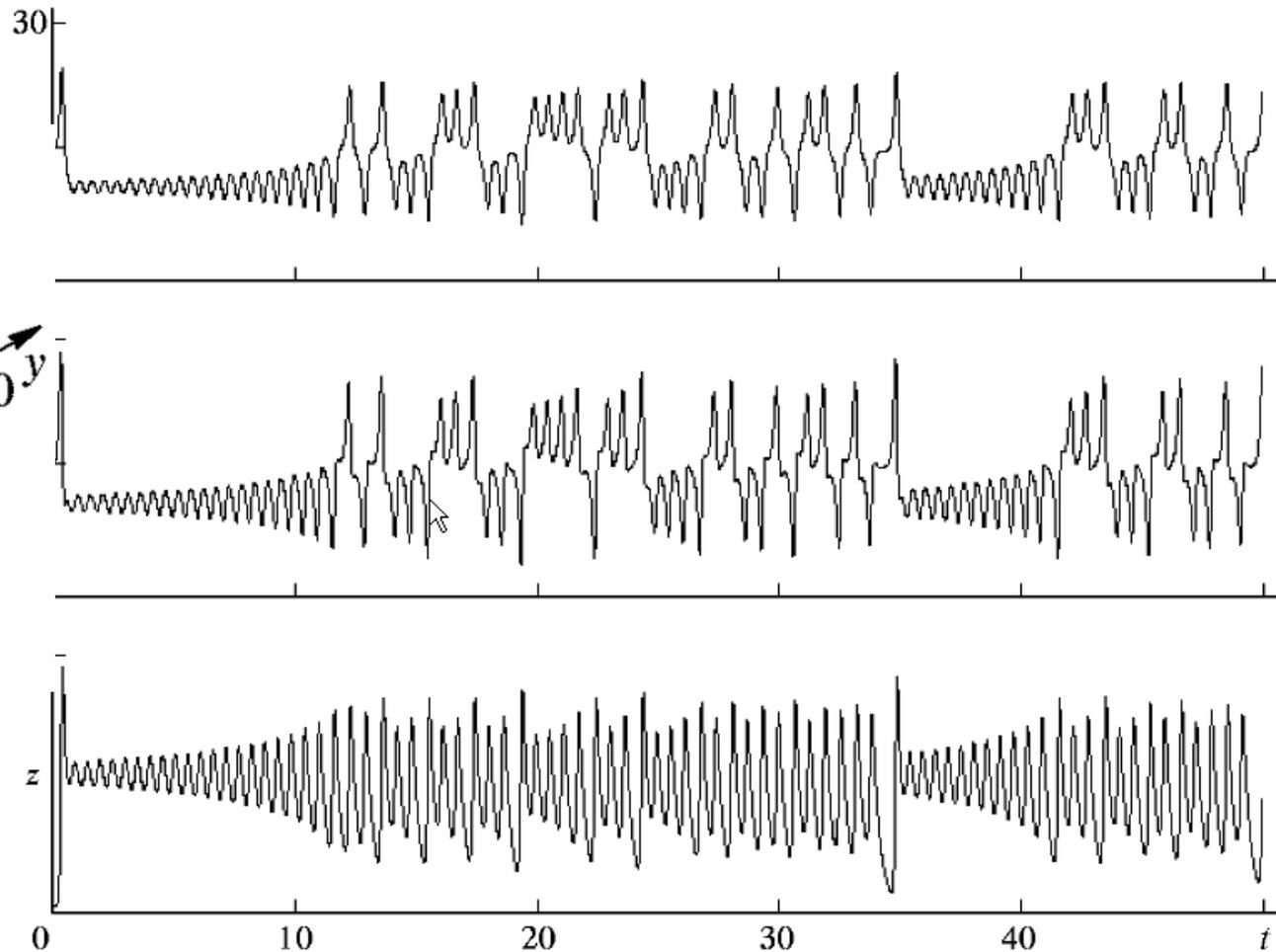
переменная x отвечает амплитуде поля, y — поляризации, а z — инверсии населенностей. Место параметра геометрии b и числа Прандтля σ занимают отношения коэффициентов релаксации инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации. Интенсивность накачки играет ту роль, какую в гидродинамической системе играло число Рэлея.

Система Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$



$$\sigma = 10, \quad b = 8/3, \\ r = 28$$



Система Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad rx - y - xz = 0, \quad -bz + xy = 0. \quad |$$

— три состояния равновесия:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$x = \sqrt{r-1}, \quad y = \sqrt{r-1}, \quad z = r-1,$$

$$x = -\sqrt{r-1}, \quad y = -\sqrt{r-1}, \quad z = r-1,$$

которые в дальнейшем будем обозначать, соответственно, O , O_1 и O_2 .

С точки зрения физической интерпретации, в задаче о конвекции первая неподвижная точка отвечает состоянию равновесия и отсутствию конвекционных потоков. Водяное колесо неподвижно, лазер не генерирует. Второе и третье решения соответствуют наличию конвекционного потока — вращению жидкости, соответственно, против или по часовой стрелке. Водяное колесо вращается в одну или другую сторону с постоянной скоростью. Лазер генерирует сигнал постоянной, не зависящей от времени интенсивности.

Система Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$

function lorenz(action)

%LORENZ Plot the orbit around the Lorenz chaotic attractor.

**% This demo animates the integration of the three coupled nonlinear differential
% equations that define the "Lorenz Attractor", a chaotic system first described
% by Edward Lorenz of the Massachusetts Institute of Technology.**

% Copyright 1984-2005 The MathWorks, Inc.

% \$Revision: 5.13.4.3 \$ \$Date: 2005/12/15 20:52:53 \$

% The values of the global parameters are

global SIGMA RHO BETA

SIGMA = 10.;

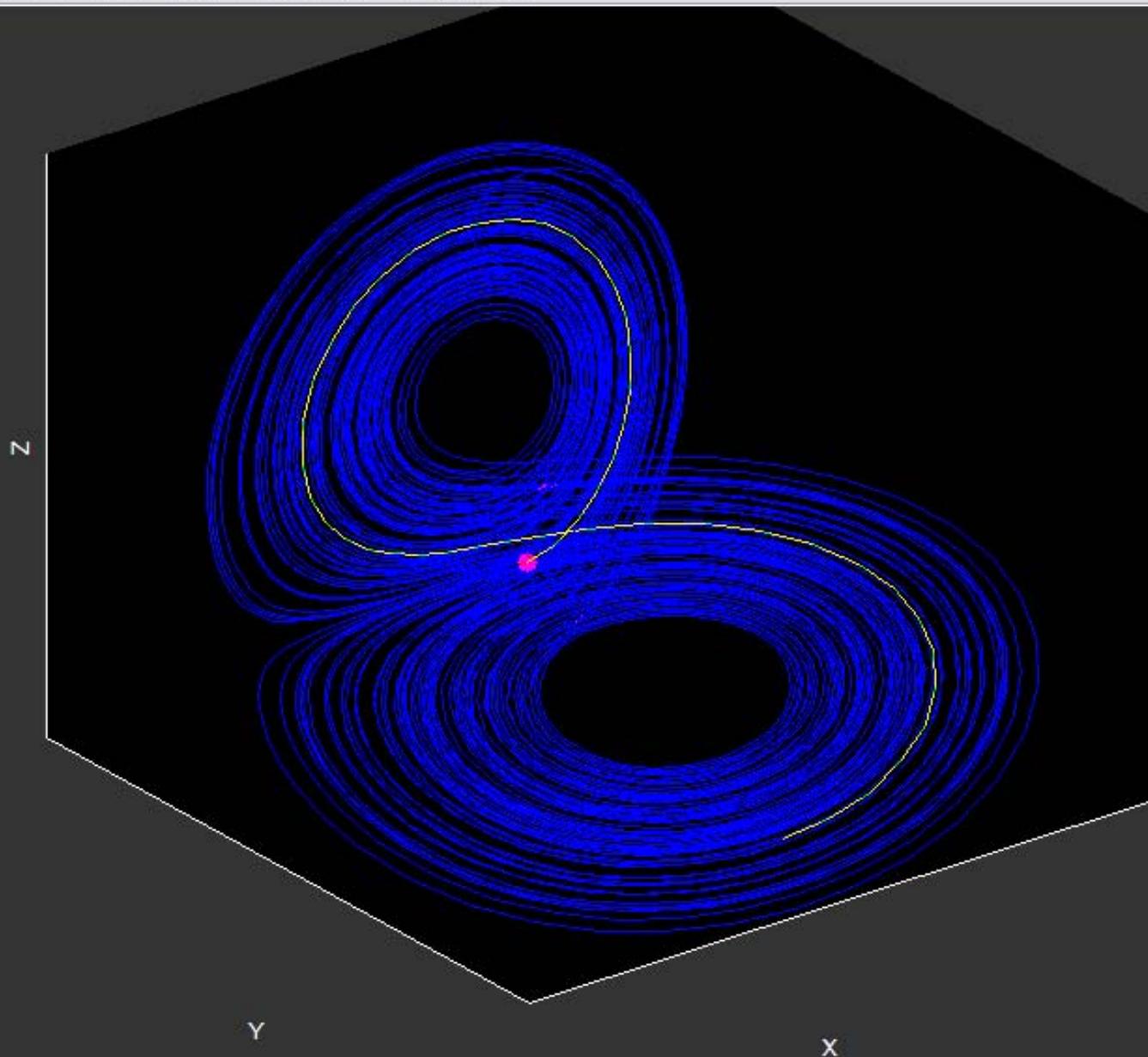
BETA = 8./3.;

RHO = 28; %

% 28 1 13.927 24.06 24.74

Lorenz Attractor

File Edit View Insert Tools Desktop Window Help



Start

Stop

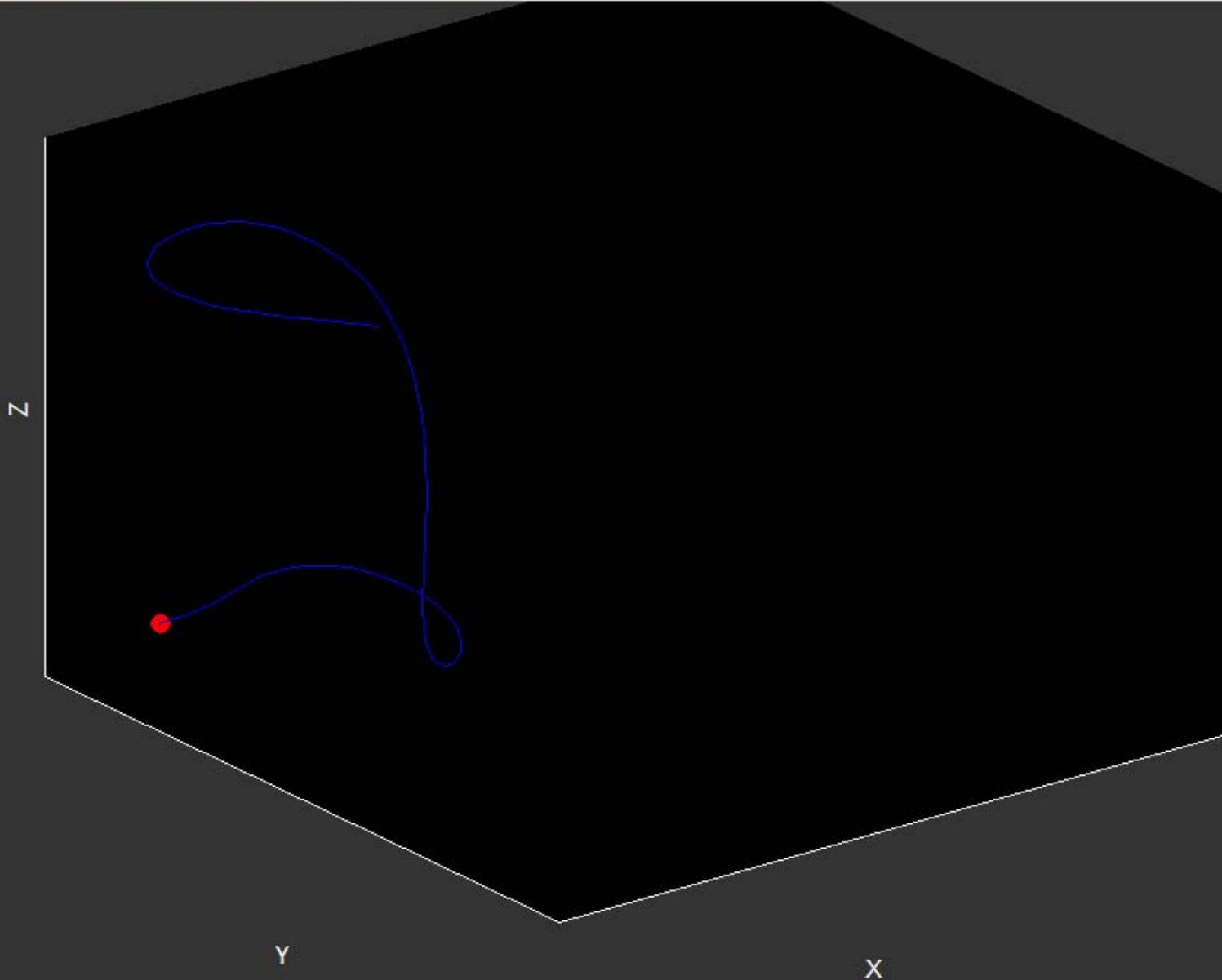
Info

Close

$$\text{RHO} = 0.9 < 1$$

Lorenz Attractor

File Edit View Insert Tools Desktop Window Help



Start

Stop

Info

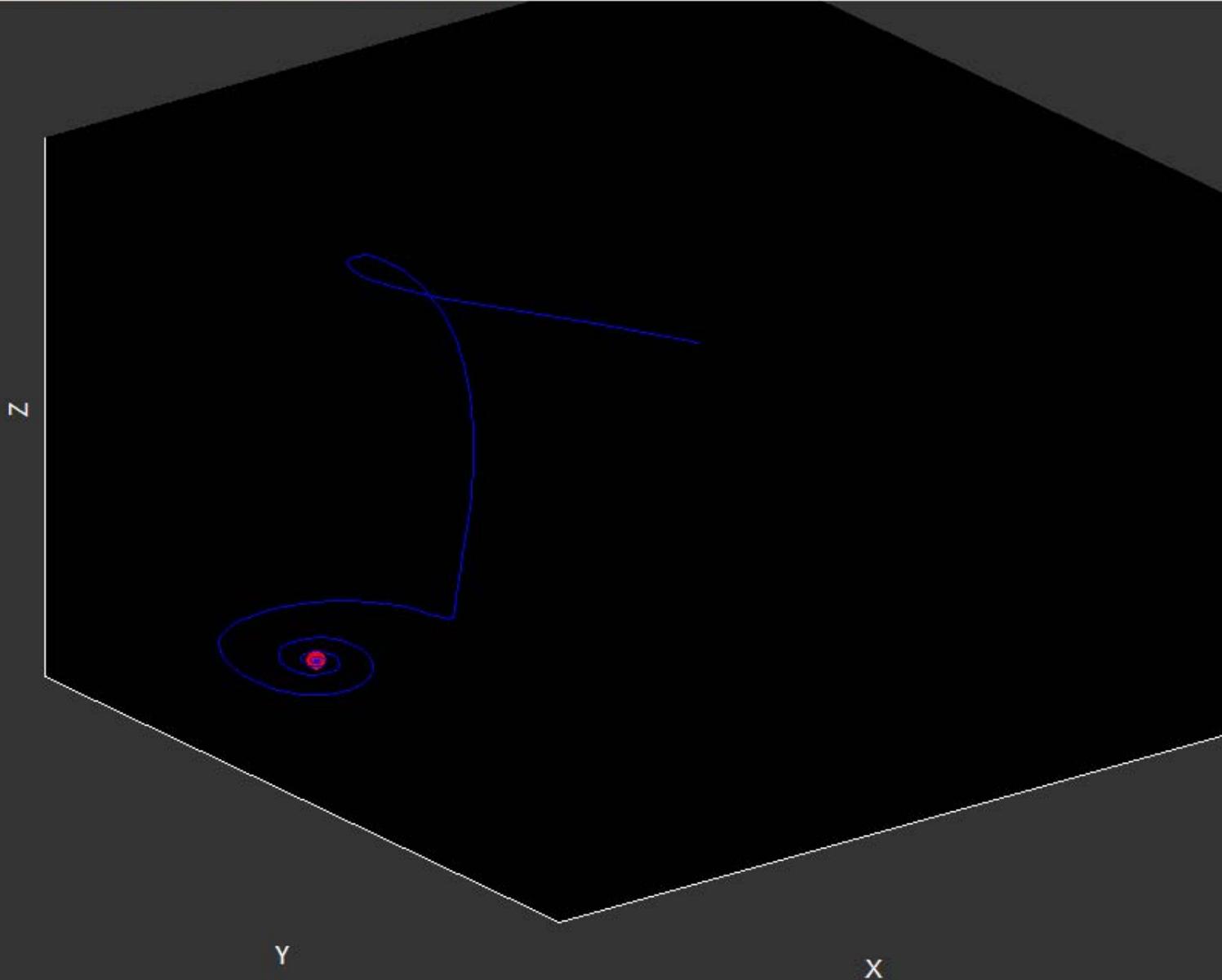
Close

$$RHO = 7.5 < 13.927$$

Lorenz Attractor



File Edit View Insert Tools Desktop Window Help



Start

Stop

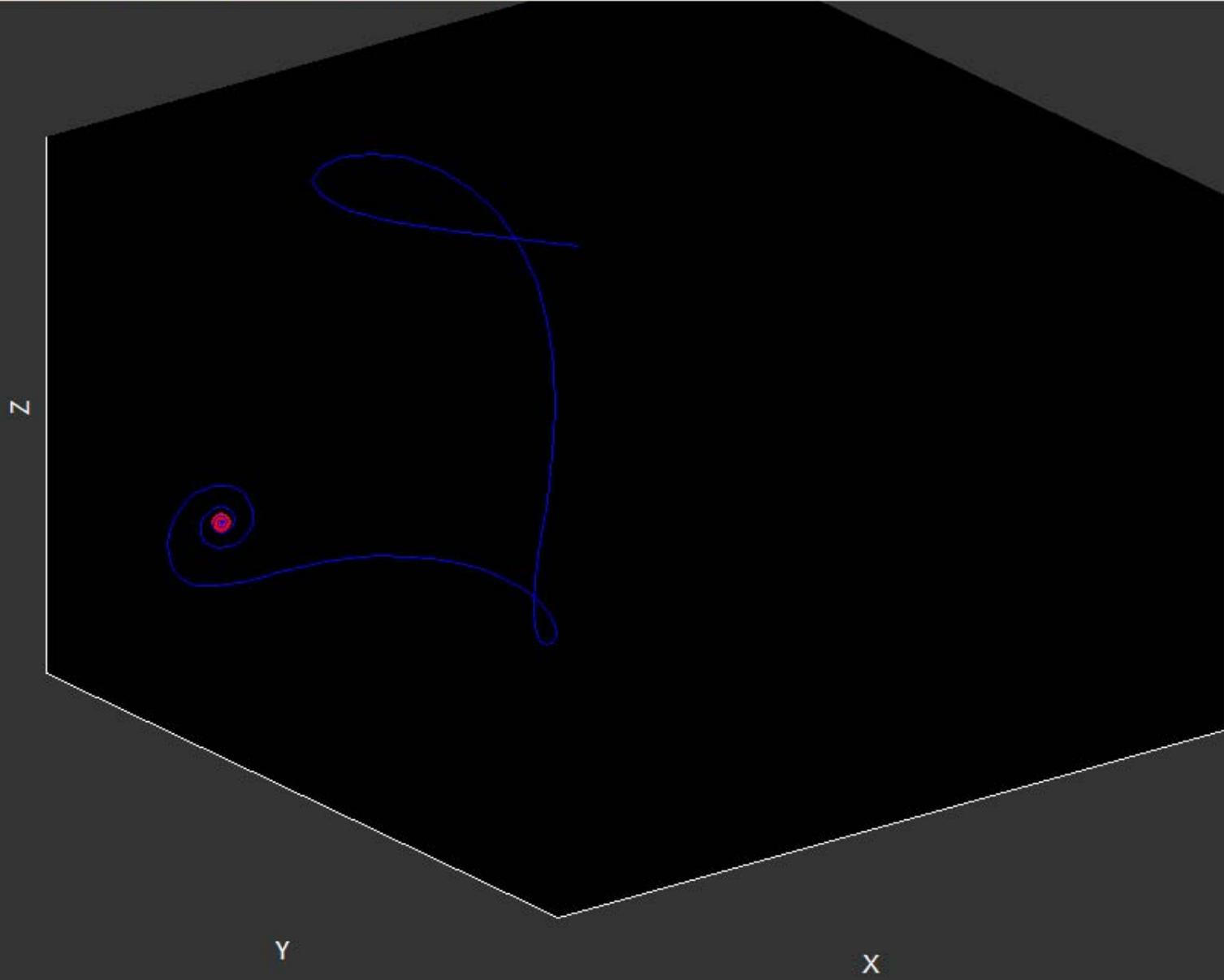
Info

Close

$$RHO = 7.5 < 13.927$$

Lorenz Attractor

File Edit View Insert Tools Desktop Window Help



Start

Stop

Info

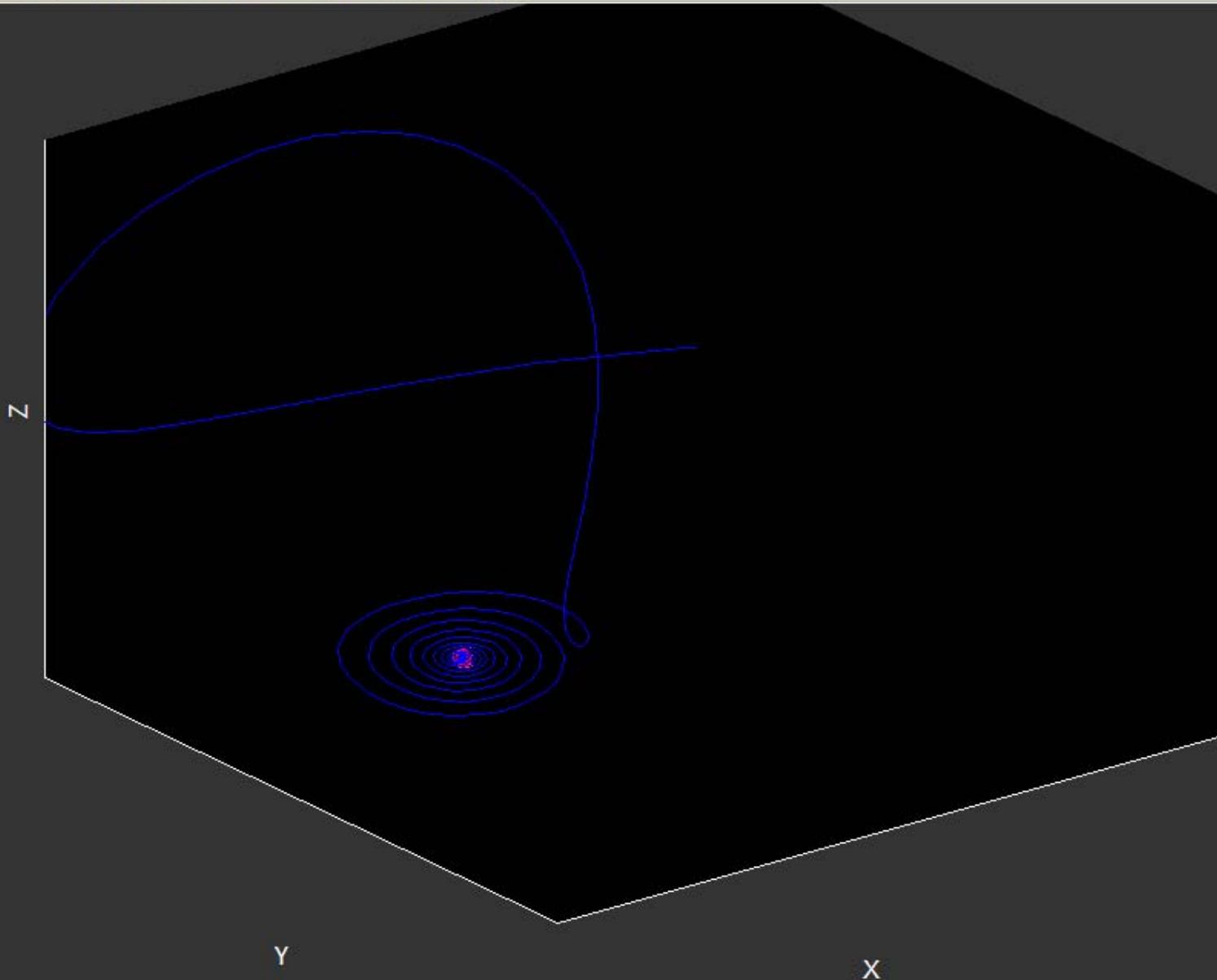
Close

$$RHO = 15 > 13.927$$

Lorenz Attractor



File Edit View Insert Tools Desktop Window Help



Start

Stop

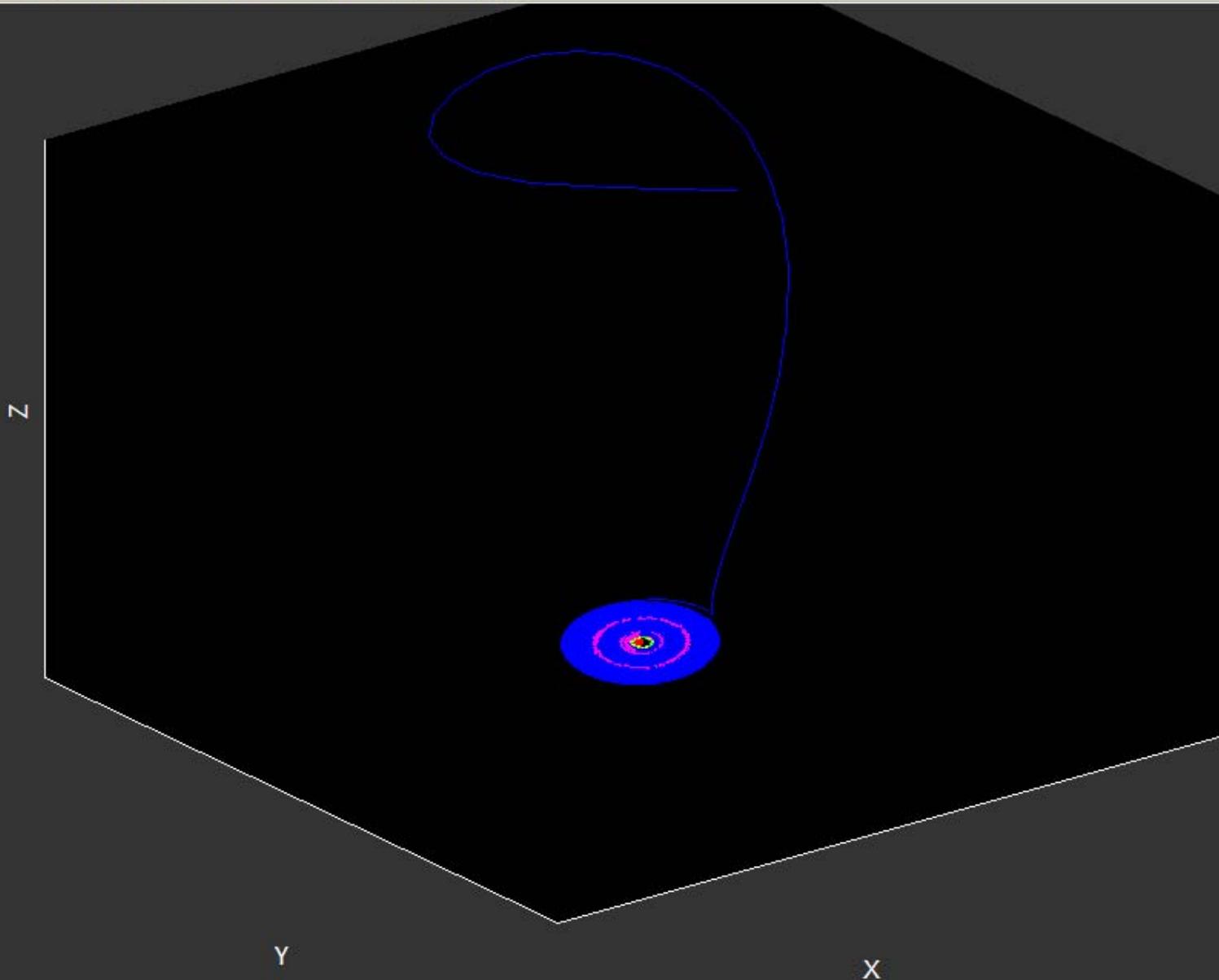
Info

Close

$$24.06 < \text{RHO} = 24.5 < 24.74$$

Lorenz Attractor

File Edit View Insert Tools Desktop Window Help



Start

Stop

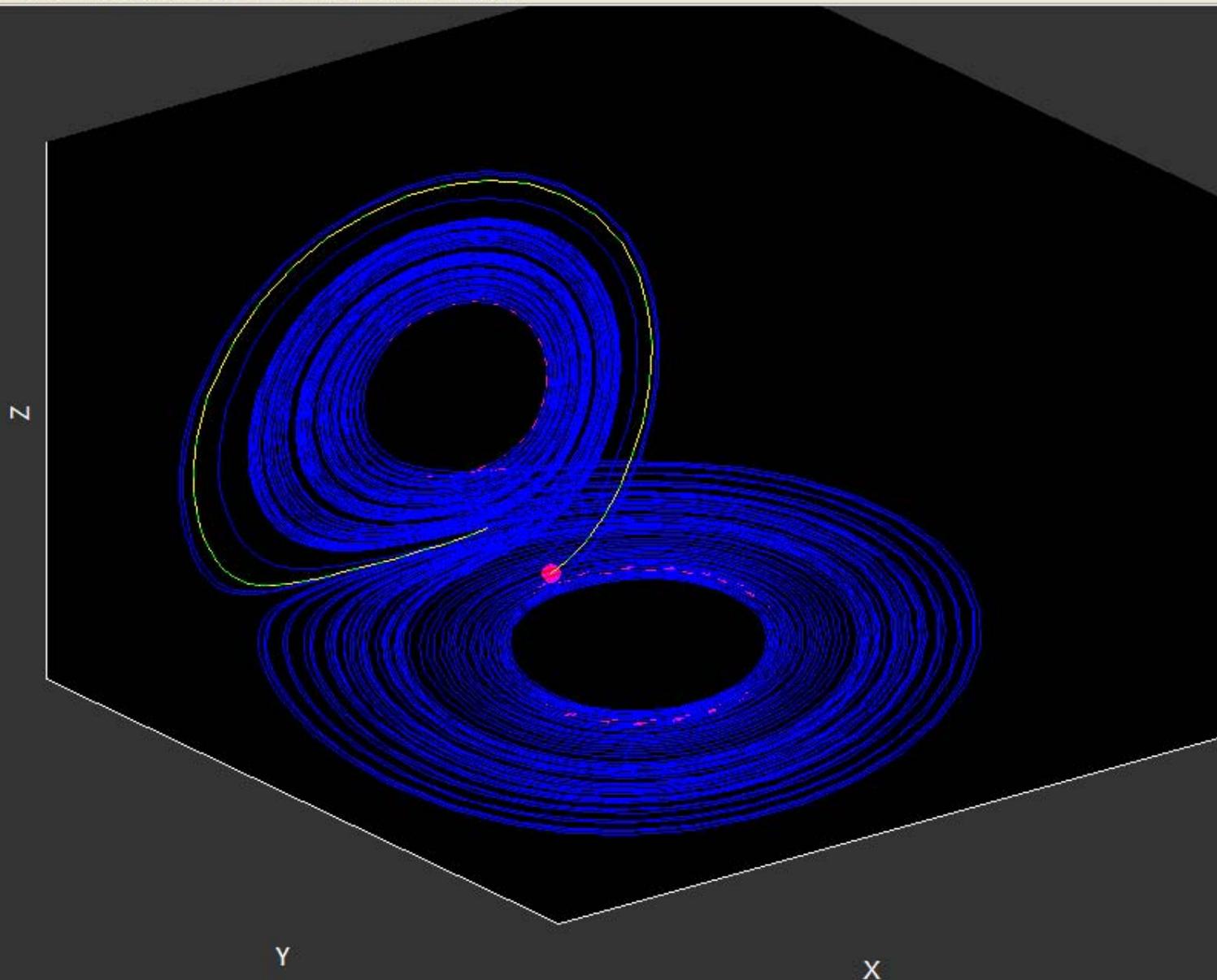
Info

Close

$$24.06 < \text{RHO} = 24.5 < 24.74$$

Lorenz Attractor

File Edit View Insert Tools Desktop Window Help



Start

Stop

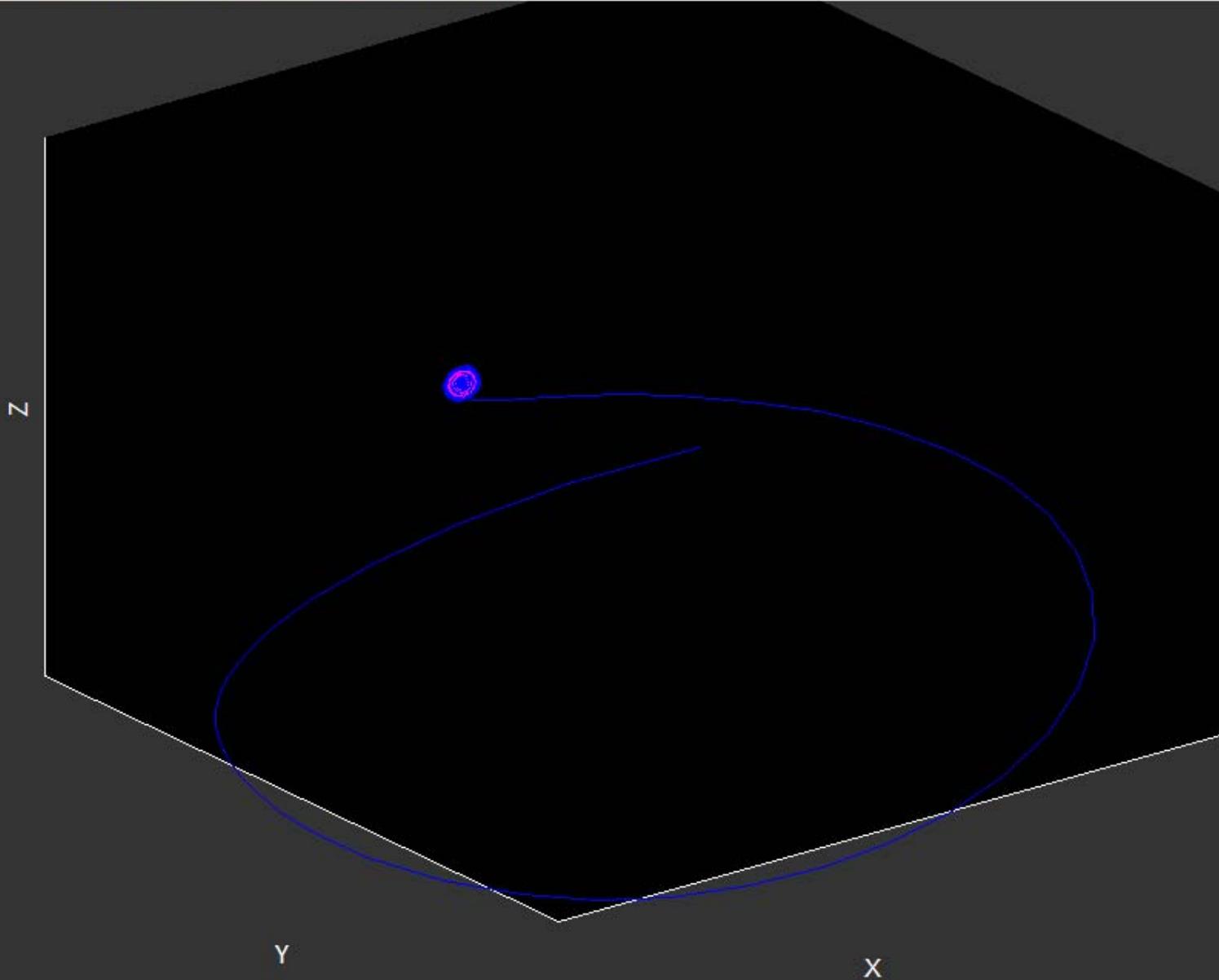
Info

Close

$$24.06 < \text{RHO} = 24.5 < 24.74$$

Lorenz Attractor

File Edit View Insert Tools Desktop Window Help



Start

Stop

Info

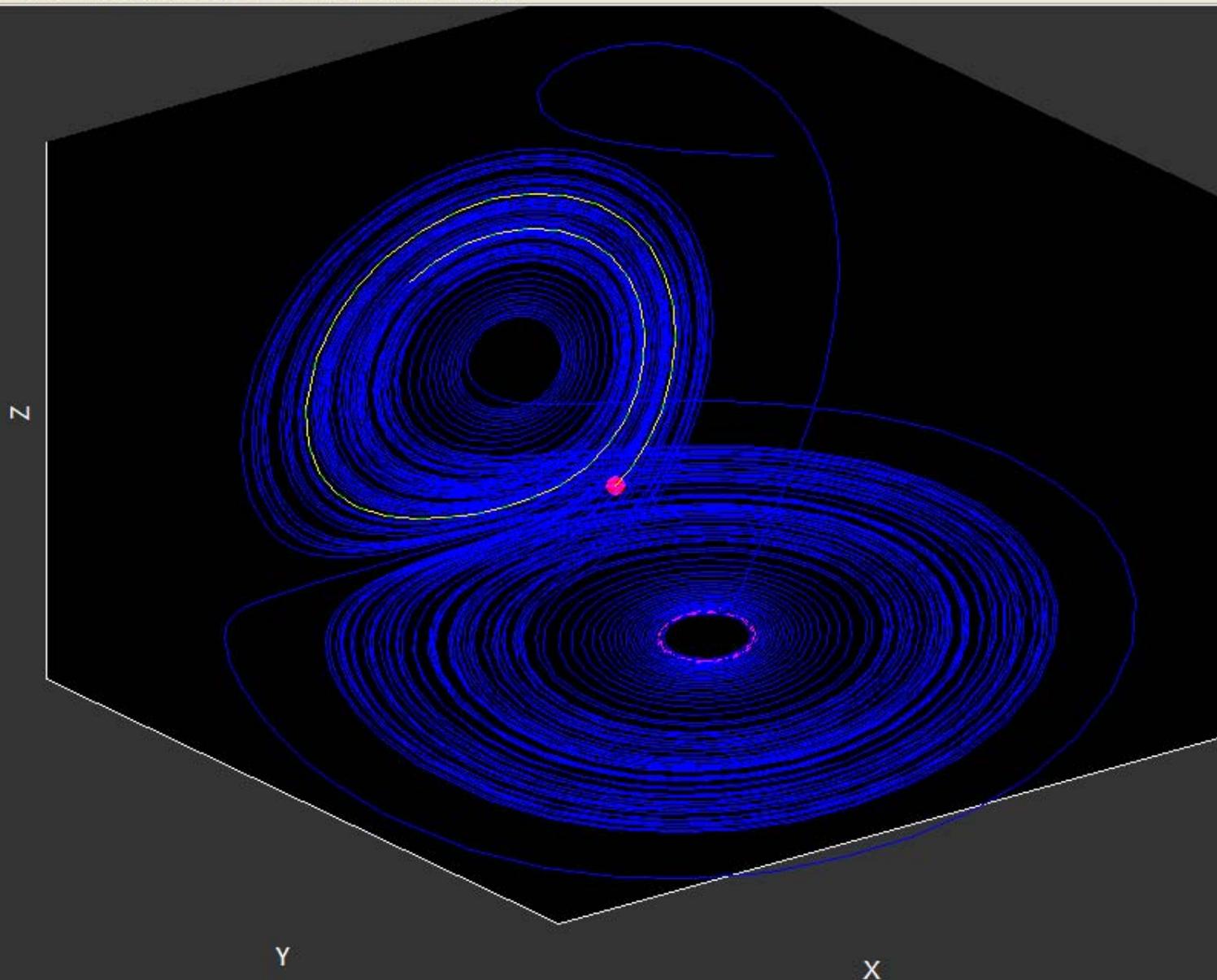
Close

$$RHO = 28 > 24.74$$

Lorenz Attractor



File Edit View Insert Tools Desktop Window Help



Start

Stop

Info

Close

Литература

- Ю.Н. Прошин, И.М. Еремин. Вычислительная физика (Практический курс) Казань: Казанский государственный университет, 2009. – 180 с.
- С. П. Кузнецов, Динамический хаос. М: ФИЗМАТЛИТ, 2006 г. – 356 с.
- А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов, Основы теории сложных систем. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. – 620 с.

