§9. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. БАЗИСЫ

Базисы в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Всякая линейно независимая система $\{e^k\}_{k=1}^n$ (состоящая из n векторов) называется ***базисом*** пространства $\mathbb{C}^n$.

Единичные векторы $\{i^k\}_{k=1}^n$ образуют так называемый ***естественный базис*** пространства $\mathbb{C}^n$.

.

Для того, чтобы система

$$\{e^k\}_{k=1}^n, \quad e^k \in \mathbb{C}^n,$$

была базисом необходимо и достаточно, чтобы матрица $\mathcal{E}_n$, столбцами которой служат векторы

$$e^1,\ e^2,\ \ldots,\ e^n,$$

была невырожденной.

.

Если в пространстве $\mathbb{C}^n$ введено скалярное произведение, то можно пользоваться следующим критерием:

для того, чтобы система n векторов была базисом, необходимо и достаточно, чтобы матрица Грама этой системы была невырожденной.

.

Если $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbb{C}^n$, то любой вектор $x \in \mathbb{C}^n$, может быть представлен в виде линейной комбинации

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_n e^n$$

векторов базиса (Почему?).

.

Коэффициенты линейной комбинации

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_n e^n$$

однозначно определяются по вектору x, так как удовлетворяют крамеровской системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{E}_n \xi = x.$$

Здесь

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ \ldots, \xi_n)$$

есть столбец коэффициентов разложения вектора x по базису

$$\{e^k\}_{k=1}^n.$$

.

Конечномерные пространства.

Линейное пространство **X** называется *конечномерным*, если существуют векторы

$$\mathcal{E}_n = \{e^1, e^2, \ldots, e^n\},$$

образующие линейно независимую систему в пространстве **X**, и такие что любой вектор

$$x \in \mathbf{X}$$

представим в виде линейной комбинации

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

.

Говорят, что векторы $\{e^k\}_{k=1}^n$ образуют ***базис*** пространства $\mathbf{X}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Число n называют ***размерностью пространства*** $\mathbf{X}$. Линейное пространство $\mathbf{X}$ размерности n будем обозначать через $\mathbf{X}_n$.

Коэффициенты разложения $\xi_1, \ \ldots, \ \xi_n$ называют ***координатами вектора*** x в базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$.

.

Координаты любого вектора $x \in \mathbf{X}_n$ однозначно определяются по базису $\{e^k\}_{k=1}^n$.

.

Действительно, если наряду с разложением

$$x = \mathcal{E}_n \xi$$

существует разложение

$$x = \mathcal{E}_n \widetilde{\xi},$$

то, очевидно,

$$\mathcal{E}_n(\xi - \widetilde{\xi}) = 0,$$

и вследствие линейной независимости системы векторов $\mathcal{E}_n$ имеем

$$\xi = \widetilde{\xi}.$$

.

Теорема. В n-мерном линейном пространстве $\mathbf{X}_n$ любая система

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n,$$

состоящая из n линейно независимых векторов является базисом.

.

<u>Доказательство.</u> Достаточно убедиться, что любой вектор

$$x \in \mathbf{X}_n$$

представим в виде линейной комбинации

$$x = \widetilde{\mathcal{E}_n \xi}.$$

.

По определению n-мерного пространства в нем существует базис $\mathcal{E}_n$. Следовательно, любой вектор из $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ представим в виде линейной комбинации векторов базиса $\mathcal{E}_n$, иными словами существует квадратная матрица T порядка n такая, что

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

.

Поскольку $\mathcal{E}_n$ — базис, существует вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$x = \mathcal{E}_n \xi.$$

Поскольку матрица T невырождена, можно найти вектор $\widetilde{\xi} \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$\xi = T\widetilde{\xi}.$$

В результате, получим соотношение

$$x = \mathcal{E}_n T\widetilde{\xi} = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{\xi}. \ \square$$

.

Если пространство не является конечномерным, его называют *бесконечномерным*.

.

Пусть

$$e \neq 0$$

есть произвольный вектор евклидова пространства

$$\mathbf{X}_n, \quad n > 1.$$

Тогда существует некоторый вектор f_2, непропорциональный e. Затем можно указать вектор f_3 так, чтобы векторы

$$e, \quad f_2, \quad f_3$$

были линейно независимы.

.

Продолжая этот процесс, получим базис пространства $\mathbf{X}_n$, включающий в себя вектор e.

Применяя затем процесс ортогонализации Грама — Шмидта, можно построить ортогональный базис пространства $\mathbf{X}_n$, содержащий вектор e.

.

В любом пространстве $\mathbf{X}_n$ существует сколько угодно базисов.

.

Действительно, если система векторов

$$\mathcal{E}_n$$

является базисом, то система векторов

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T,$$

где T — произвольная невырожденная матрица, также базис.

.

<u>Примеры.</u>

1) Любые три некомпланарных вектора пространства $\mathbf{V}_3$ образуют базис. Пространство $\mathbf{V}_3$ трехмерно.

.

2) Пространства $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$, очевидно, конечномерны. Их размерность равна n.

.

3) Пространство $\mathbf{Q}_n$ всех полиномов степени не выше n конечномерно. Его размерность равна n. Базисом в пространстве полиномов степени не выше n является, например, система векторов

$$\{1,\ z,\ \ldots,\ z^n\},$$

где z — комплексная переменная.

.

4) Пространство всех полиномов бесконечномерно. Действительно, в нем линейно независима система векторов

$$\{1,\ z,\ \ldots,\ z^k\}$$

при любом, сколь угодно большом, целом k.

.

5) Пространство $C[a,b]$ бесконечномерно, так как содержит полиномы с вещественными коэффициентами любого порядка.

§10. ЗАМЕНА БАЗИСА

Пусть

$$\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n, \quad \widetilde{\mathcal{E}}_n = \{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$$

есть базисы пространства $\mathbf{X}_n$. Как уже говорилось, $\mathcal{E}_n$, $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ — эквивалентные системы векторов, существуют квадратные матрицы T, $\widetilde{T}$ порядка n такие, что

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{T}, \quad \widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

.

Матрицу T называют ***матрицей перехода*** от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

.

Матрицы T и $\widetilde{T}$ взаимно обратны.

.

Действительно, подставляя выражение для $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ из равенства

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

в

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{T},$$

получим

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n T \widetilde{T},$$

и вследствие линейной независимости векторов базиса $\mathcal{E}_n$ имеем

$$T\widetilde{T} = I.$$

.

Пусть известны коэффициенты ξ разложения некоторого вектора $x \in \mathbb{C}^n$ по базису $\mathcal{E}_n$:

$$x = \mathcal{E}_n \xi.$$

Пусть задана матрица перехода T к базису базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

Получим формулу для вычисления коэффициентов $\widetilde{\xi}$ разложения того же вектора x по базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$.

.

С одной стороны, имеем

$$x = \mathcal{E}_n \xi,$$

но

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n T^{-1},$$

следовательно,

$$x = \widetilde{\mathcal{E}}_n T^{-1} \xi,$$

а это означает, что

$$x = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{\xi}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\xi} = T^{-1} \xi.$$

Пример. Пусть векторы e^1, e^2, e^3 образуют базис в трехмерном пространстве $\mathbf{X}_3$. Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned}\widetilde{e}^1 &= \quad 5e^1 - e^2 - 2e^3,\\ \widetilde{e}^2 &= \quad 2e^1 + 3e^2,\\ \widetilde{e}^3 &= -2e^1 + e^2 + e^3.\end{aligned}$$

Записывая эти равенства в матричном виде, получим

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}T,$$

подробнее,

$$\{\widetilde{e}^1, \widetilde{e}^2, \widetilde{e}^3\} = \{e^1, e^2, e^3\} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Матрица

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

невырождена. Действительно,

$$\det T = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Поэтому векторы

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}T,$$

также образуют базис пространства $\mathbf{X}_3$.

.

Рассмотрим вектор

$$a = e^1 + 4e^2 - e^3.$$

Координатами этого вектора в базисе $\mathcal{E}$ являются числа

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 4, \quad \xi_3 = -1,$$

т. е.

$$a = \mathcal{E}\xi,$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты того же вектора, но в базисе $\widetilde{\mathcal{E}}$. Вычислим матрицу T^{-1}. Получим:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$\widetilde{\xi} = T^{-1}\xi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$a = -13\widetilde{e}^1 + 6\widetilde{e}^2 - 27\widetilde{e}^3.$$

Мы нашли, таким образом, представление вектора a в базисе $\widetilde{\mathcal{E}}$.