

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
НИИ МЕХАНИКИ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. М.В. ЛОМОНОСОВА
НИИ МЕХАНИКИ НИЖЕГОРОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
ООО САНАТОРИЙ «ВЯТИЧИ»

**МАТЕРИАЛЫ XXVI МЕЖДУНАРОДНОГО СИМПОЗИУМА
«ДИНАМИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ И СПЛОШНЫХ СРЕД»
имени А.Г. Горшкова**

Вятчи, 16 – 20 марта 2020 г.

Том 2

**XXVI INTERNATIONAL SYMPOSIUM «DYNAMIC
AND TECHNOLOGICAL PROBLEMS OF A MECHANICS
OF CONSTRUCTIONS AND CONTINUOUS MEDIUMS»
Dedicated to A.G. Gorshkov**

Vyatichi, 16 – 20 March 2020

Vol. 2

Москва 2020

© Материалы XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО "ТРИП", 2020. – 244 с.

Программный комитет:

Тарлаковский Д.В. (председатель), д.ф.-м.н., проф., академик РАЕН (Россия)
Шклярчук Ф.Н. (зам. председателя), д.т.н., проф. (Россия)
Федотенков Г.В. (ученый секретарь), к.ф.-м.н., доц., член-корр. РАЕН (Россия)
Бабешко В.А., академик РАН (Россия)
Баженов В.Г., д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Белосточный Г.Н., д.т.н., проф. (Россия)
Гаврюшин С.С., д.т.н., проф. (Россия)
Гачкевич А.Р., д.ф.-м.н., проф. (Украина)
Горячева И.Г., академик РАН (Россия)
Ерофеев В.И., д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Желязов Т., профессор, Софийский технический университет (Болгария)
Зинин А.В., к.т.н. доц. (Россия)
Игумнов Л.А., д.ф.-м.н., проф., академик РАЕН (Россия)
Кит Г.С., член-корр. АН Украины (Украина)
Коноплев Ю.Г., академик АН Республики Татарстан (Россия)
Кушнир Р.М., академик НАН Украины (Украина)
Локощенко А.М., д.ф.-м.н., проф., академик РАЕН (Россия)
Ломакин Е.В., член-корр. РАН (Россия)
Матвеев А.М., академик РАН (Россия)
Медведский А.Л., д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Морозов Н.Ф., академик РАН (Россия)
Нестеров В.А., д.т.н., проф. (Россия)
Окунев Ю.М., академик РАЕН (Россия)
Остапенко Н.А., д.ф.-м.н., проф., академик РАЕН (Россия)
Паймушин В.Н., академик АН Республики Татарстан (Россия)
Петрашкевич Войцех, профессор (Польша)
Плескачевский Ю.М., член-корр. НАН Белоруссии (республика Беларусь)
Рабинский Л.Н., д.ф.-м.н., проф., член-корр. РАЕН (Россия)
Равикович Ю.А. д.т.н., проф., проректор МАИ (Россия)
Саркисян С.О., д.ф.-м.н., проф., член-корр. НАН Армении (Армения)
Старовойтов Э.И., д.ф.-м.н., проф. (республика Беларусь)
Сыпало К.И., член-корр. РАН (Россия)
Yu Gu, PhD, Professor, Beijing Jiaotong University (Китай)

Организационный комитет:

Бугаев Н.М. председатель оргкомитета, зав лабораторией, МАИ	Оконечников А.С., доцент, МАИ
Вахтерова Я.А., ассистент, МАИ	Земсков А.В., профессор, МАИ
	Федотенков Г.В., доцент, МАИ

Симпозиум проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-08-20003/20 “Научные мероприятия”).

ISBN 978-5-6043255-9-9

© Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2020

ПРЕДИСЛОВИЕ

XXVI Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» проводился Московским авиационным институтом (национальным исследовательским университетом) – МАИ, научно-исследовательским институтом механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, научно-исследовательским институтом механики и Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского при поддержке РФФИ на базе санатория «Вятичи» с 16 по 20 марта 2020 года.

В соответствии с тематикой докладов их обсуждение проходило в рамках трех секций.

Секция I «Динамика сплошных сред» (председатель академик РАН Горячева И.Г., сопредседатели – академик НАН Украины, Кушнир Р.М. и д.ф.-м.н., профессор Старовойтов Э.И.).

Секция II «Динамика и прочность конструкций» (председатель – д.т.н., профессор Шклярчук Ф.Н., сопредседатели – д.ф.-м.н., профессор Баженов В.Г. и академик Республики Татарстан Паймушин В.Н.).

Секция III «Технологические проблемы новых материалов и конструкций» (председатель – д.ф.-м.н., профессор Рабинский Л.Н., к.т.н., доцент Зинин А.В.).

Материалы симпозиума распределены по двум томам. Во второй том вошли не включенные в первый том тезисы и отобранные программным комитетом лучшие доклады. Все материалы, в основном, приводятся в авторской редакции.

Председатель программного комитета Д.В. Тарлаковский

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ К РАСЧЕТУ ДЕТАЛЕЙ МАШИН В СВЯЗИ С ВАРИАЦИЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ

Агамиров Л.В.¹, Вестяк В.А.²

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), (²Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва)

Расчет прочности и ресурса деталей машин и элементов конструкций при действии переменных напряжений основан на определении пределов выносливости и соответствующих им долговечностей. Для этого необходимо проводить испытания конструктивно-подобных образцов и натуральных деталей, что зачастую оказывается непростой задачей в связи с высокой стоимостью объектов и большой длительностью испытаний в условиях значительного рассеяния характеристик усталостных свойств. В связи с этим наиболее эффективными, особенно на этапе проектирования изделий, являются расчетно-экспериментальные методы, которые позволяют обосновать характеристики выносливости натуральных деталей путем испытаний стандартных образцов различного типоразмера. В основе подобных методов всегда лежит та или иная теория усталостного разрушения, достоверность которой должна быть подтверждена массовыми экспериментами. Настоящая работа посвящена статистическому анализу экспериментальных данных усталостных испытаний образцов и деталей различного типоразмера и коррелятивам, связанным с зависимостью расчетных характеристик выносливости от долговечности. Проведенные расчеты основаны на статистической теории подобия усталостного разрушения Когаева [1], которая описывает влияние абсолютных размеров, конструктивных, эксплуатационных и технологических факторов на предел выносливости деталей машин и функцию его распределения. Определены параметры уравнения подобия в широком диапазоне долговечностей $4 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^7$ для алюминиевых, титановых сплавов и легированных сталей. Предложены расчетные зависимости, связывающие изменение расчетных характеристик выносливости с формой кривой усталости, вариацией долговечности и вероятности разрушения. Разработанная методика позволяет обосновать кривые усталости деталей и натуральных элементов конструкций в широком диапазоне долговечностей и вероятностей разрушения, используя лишь параметры медианной кривой усталости стандартных образцов и справочные значения параметров уравнения подобия.

Литература

1. Козаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977, с.232.

О СОБСТВЕННЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Алмуратов Ш.¹, Райимов Д.², Сафаров И.И.³, Тешаев М.Х.²

(¹ Термезский Государственный университет, Термез, Узбекистан, ² Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара, Узбекистан, ³ Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан)

Рассматривается достаточно протяженная цилиндрическая оболочка и окружающая ее среда. Задача сводится к плоской задаче динамической теории вязкоупругости. Уравнения движения деформируемого слоя (при отсутствии массовых сил) удовлетворяет интегро-дифференциальным уравнениям [1]:

$$\tilde{\mu}_\kappa \nabla^2 \tilde{u} + (\tilde{\lambda}_\kappa + \tilde{\mu}_\kappa) \text{grad div } \tilde{u} = \rho_\kappa \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь \tilde{u} - вектор перемещений точек среды; ρ_κ - плотность материала слоя; ν_κ - коэффициент Пуассона слоя

$$\tilde{\lambda}_\kappa f(t) = \lambda_{0\kappa} \left[f(t) - \int_0^t R_{\lambda\kappa}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right]; \quad \tilde{\mu}_\kappa f(t) = \mu_{0\kappa} \left[f(t) - \int_0^t R_{\mu\kappa}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right] \quad (2)$$

$f(t)$ - произвольная функция времени; $R_{\lambda\kappa}(t-\tau)$ и $R_{\mu\kappa}(t-\tau)$ - ядра релаксации, $\lambda_{0\kappa}$, $\mu_{0\kappa}$ - мгновенные модули упругости. Далее применяя процедуру замораживания, заменим соотношения (1) приближенными вида [2]

$$\tilde{\lambda}_\kappa f(t) = \lambda_{0\kappa} \left[1 - \Gamma_{\lambda\kappa}^C(\omega_R) - i \Gamma_{\lambda\kappa}^S(\omega_R) \right] f(t), \quad \tilde{\mu}_\kappa f(t) = \mu_{0\kappa} \left[1 - \Gamma_{\mu\kappa}^C(\omega_R) - i \Gamma_{\mu\kappa}^S(\omega_R) \right] f(t).$$

Здесь

$$\Gamma_{\lambda\kappa}^C(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda\kappa}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \quad \Gamma_{\mu\kappa}^C(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\mu\kappa}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau,$$

$$\Gamma_{\lambda\kappa}^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda\kappa}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau, \quad \Gamma_{\mu\kappa}^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\mu\kappa}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau,$$

соответственно косинус и синус образы Фурье ядра релаксации; ω_R - действительная величина. Уравнение (1) решается в плоской постановке в потенциалах перемещений $\tilde{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \psi$. Здесь ϕ - потенциал продольных волн,

$\bar{\psi}(\psi, 0, 0)$ - потенциал поперечных волн. Уравнение движения цилиндрической оболочки в плоской постановке имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial W}{\partial \theta} = -\frac{R^2}{B} x_1, \frac{\partial u}{\partial \theta} + b^2 \left(\frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + W \right) + W = \frac{R^2}{B} x_2 \quad (3)$$

где u и W - соответственно продольное и поперечное перемещения оболочки. При собственных колебаниях бесконечности ставится укороченные условия Зоммерфельда [3].

С увеличением коэффициент Пуассона в пределах $0 \leq \nu \leq 0.4$ реальные и мнимые части комплексной частоты изменяются до 27%. При $\nu_1=0,5$ среда становится несжимаемой, затухания, естественно, отсутствуют.

Литература

1. Safarov I.I, Akhmedov M. Sh ., Boltaev .Z.I. Dissemination Sinusoidal Waves in of A Viscoelastic Strip. Global Journal of Science Frontier Research: F Mathematics & Decision Sciences. 2015. Volume 15, Issue 1 (Ver.1.0). - P.39-60 .
2. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация . – М.: Высшая школа , 1976.- 276с.
3. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Распространение линейных волн в протяженных пластинчатых телах. LAP, Lambert Academic Publishing (Germany) . 2016. 315 с.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ПАНЕЛЬНЫЙ ФЛАТТЕР ИЗОГНУТОЙ ПЛАСТИНЫ

Амирзадеган С.

(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ)

При обтекании летательного аппарата потоком могут возникнуть автоколебания различной природы, для исследования которых требуется создание нелинейных математических моделей [1-2]. Одной из проблем современных сверх и гиперзвуковых летательных аппаратов является возникновение панельного флаттера на различных участках обшивки. Поэтому исследования автоколебаний панелей обшивки является актуальной задачей.

В данной работе приводятся результаты исследования нелинейных колебаний изогнутой пластины в сверхзвуковом потоке [3]. Определяется скорость флаттера, частоты колебаний, полученные результаты сопоставляются с экспериментом. Задача решается с помощью метода Бубнова-Галеркина. Для определения аэродинамической нагрузки используется поршневая теория, интегрирование по времени производится методом Рунге-Кутты-Фельберга.

Литература

1. *Тлеулинов М.К.* Об одном виде автоколебаний составных конструкций // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60. № 5 (357). С. 202-205.
2. *Тлеулинов М.К.* Бифуркация Пуанкаре-Андронов-Хопфа в колебаниях прощелкивания составных несущих и управляющих поверхностей // Письма в Журнал технической физики. 2019. Т. 45. № 15. С. 47-50.
3. *Amirzadegan S.* Nonlinear Limit Cycle Oscillation and Flutter Analysis of Clamped Curved Plates / Sadegh Amirzadegan, Earl H. Dowell // AIAA –Journal of Aircraft. – опубликовано онлайн 20.12.2019.

ГИДРОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Антуфьев Б.А.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Приближенно решена задача о осесимметричном гидроупругом деформировании тонкой цилиндрической оболочки содержащей жидкость под действием подвижной нагрузки. В основе ее решения лежит изменение уровня свободной поверхности жидкости в цилиндре вследствие деформации его стенок. Для этого в разрешающую систему уравнений входит кроме уравнения осесимметричного изгиба цилиндра под действием гидростатического давления и подвижной радиальной нагрузки еще и условие несжимаемости жидкости. Опускание уровня жидкости ведет к изменению гидростатической нагрузки и как следствие к нелинейности проблемы. Применение метода Бубнова сводит задачу к нелинейной системе алгебраических уравнений, решение которой имеет чисто вычислительные сложности. Поэтому предложен и более простой вариант решения задачи не учитывающий несжимаемость жидкости. В этом случае применения метода Бубнова сводит проблему уже к системе линейных алгебраических уравнений. Влияние подвижной нагрузки изучается в квазистатической постановке, при которой деформированное состояние цилиндра не зависит от времени. В обоих вариантах решения задачи определяются критические скорости движения нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости стенок оболочки, а также влияние жидкости на эту скорость.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 18920-09025.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛОСТЬЮ

Арутюнян А.М.¹, Кузнецова Ел.Л.¹, Федотенков Г.В.^{1,2}

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

В рамках плоской постановки рассматриваются нестационарные контактные задачи для абсолютно твердых тел, имеющих прямоугольные сечения в плане (штампов) и упругого полупространства с заглубленными полостями произвольной геометрии.

Постановка задач включает в себя уравнения плоского движения упругой среды (уравнения Ламе), закон Гука, соотношения Коши, нулевые начальные условия граничные условия свободного края на границе внутренней полости в полупространстве, условия контакта между границей полупространства и штампом. Для замыкания задачи добавляются уравнения движения поступательного движения центров масс штампа. В качестве условий контакта рассматриваются случаи свободного проскальзывания и жесткого сцепления. Полагаем, что вне зоны контакта поверхность полупространства свободна от напряжений. Все уравнения и соотношения математической постановки задачи записываются в декартовой прямоугольной системе координат Oxy , ось Ox которой направлена вдоль невозмущенной границы полупространства, а ось Oy – вглубь полупространства.

В начальный момент времени к штампу прикладывается вертикальная нагрузка с заданным законом изменения во времени, равнодействующая которой проходит через центр масс этого тела.

Для решения задачи используем динамическую теорему взаимности работ [1-3]. Применение теоремы взаимности работ приводит к двумерным граничным интегральным уравнениям, ядрами которых являются функции влияния. Для решения полученной системы уравнений применяется прямой метод граничных элементов с дискретизацией по времени [4]. Для получения решений внутри области используются обобщенные формулы Сомильяны.

Приведена постановка и разработан метод решения новых плоских нестационарных контактных задач для абсолютно жестких штампов и упругого полупространства, содержащего заглубленную полость с гладкой границей произвольной геометрии. Построено разрешающее граничное интегральное уравнение и предложен его дискретный аналог.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-08-00707 А).

Литература

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 472 с.
2. Кузнецова Е.Л., Арутюнян А.М., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная задача о распространении возмущений от заглубленной полости в упругом полупространстве // Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2017., Т. 2. – С. 5-7.
3. Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Исследование распространения нестационарных возмущений в полупространстве с заглубленной цилиндрической полостью методом прямых граничных интегралов // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы VIII Международной научно-практической конференции, посвященной Году науки – Гомель. 2017 г. Ч. 2. – С. 166.
4. Арутюнян А.М., Федотенков Г.В., Кузнецова Е.Л. Применение метода прямых граничных интегралов к исследованию распространения нестационарных возмущений в полупространстве с заглубленной цилиндрической полостью // Тезисы докладов VI Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2016г., Москва – М.: Издательство ООО "ТР-принт", 2017. – С. 12-13.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕГРАДАЦИИ УУКМ С ПИРОУГЛЕРОДНОЙ МАТРИЦЕЙ ПРИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОМ ОКИСЛЕНИИ

Астапов А.Н., Недосукова М.С., Погодин В.А.

(ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», Москва)

Работа выполнена в продолжение систематических исследований, посвященных разработкам сверхвысокотемпературных композиционных материалов на основе углерода и жаростойких защитных покрытий [1-5].

Исследован процесс низкотемпературного окисления углерод-углеродных композиционных материалов (УУКМ) на основе ПАН волокон с пироуглеродной матрицей. Окисление при температурах 450-700°C характеризуется объемным выгоранием углеродной фазы с сохранением внешних размеров и объема экспериментальных образцов. Выполнен анализ стойкости к окислению структурных составляющих УУКМ. Проведена оценка удельной поверхности УУКМ и углеродных волокон методом низкотемпературной адсорбции азота и криптона с привлечением моделей по БЭТ и теории функционала плотности. Полуэмпирическим методом Хорвата-Кавазое получено распределение пор по

размерам. Установлено значительное увеличение (в 10-15 раз) удельной поверхности композиционного материала и рост доли свободного объема на ~ 5 % при общей потере массы около 5 %. Изменение удельной поверхности происходит в результате анизотропного травления поверхности углеродных волокон с образованием микро- и мезопор размером 0,5-2 и 2-50 нм соответственно [5]. Макропоры, возникающие преимущественно при окислении пиролизного остатка термореактивного связующего, не вносят вклад в значение удельной поверхности, а обеспечивают доступ к микро- и мезопорам. Нарушение контакта на границе раздела матрица-наполнитель и увеличение степени несплошности структуры в результате образования и развития микропористости приводит к снижению характеристик механических свойств материалов. Отмечена необходимость контроля изменения удельной поверхности композиционных материалов как адекватного параметра оценки их кинетической стабильности в процессе окисления.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ по мероприятию «Проведение исследований научными группами под руководством молодых ученых» Президентской программы исследовательских проектов (Соглашение № 19-79-10258 от 08.08.2019 г.).

Литература

1. Терентьева В.С., Лейтунский И.О., Еремина А.И., Пшеченков П.А., Астапов А.Н. Влияние архитектуры и компонентно-химического состава на структуру и свойства углеродсодержащих композиционных материалов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 30 – 52.
2. Астапов А.Н., Терентьева В.С. Анализ практики работ по созданию гиперзвуковых систем и обеспечению их тепловых режимов (обзор) // *Тепловые процессы в технике*. – М., 2014. – Т. 6, № 1. – С. 2 – 11.
3. Терентьева В.С., Астапов А.Н. Концептуальная модель защиты особопрочных материалов в гиперзвуковых потоках окислительного газа // *Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия*. – 2017. – № 3. – С. 51 – 64.
4. Астапов А.Н., Терентьева В.С. Жаростойкие покрытия с повышенной эрозийной стойкостью в гиперзвуковых потоках воздушной плазмы // *Коррозия: материалы, защита*. – 2017. – № 11. – С. 1 – 10.
5. Pogodin V.A., Astapov A.N., Rabinskiy L.N. CCCM specific surface estimation in process of low-temperature oxidation // *Periodico Tche Quimica*. – 2020. – Vol. 17, No. 34. – P. 1004 – 1013.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТА ОВАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖЕСТКИМИ ПРЕГРАДАМИ В УСЛОВИИ ВНУТРЕННЕГО ИЗБЫТОЧНОГО ДАВЛЕНИЯ

Аунг Чжо Тху, Рабинский Л.Н.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ

В рамках исследования контакта цилиндрической оболочки овального сечения под давлением с жесткими недеформированными плитами производился аналитический расчет в первом приближении. В рамках данного моделирования были получены аналитическое решение определяющее зону контакта цилиндрической оболочки с жесткими преградами. Полученные аналитические оценки сравнивались с ранее проведенным экспериментом. В рамках исследуемого моделирования проводился подбор геометрических параметров сечения цилиндрической оболочки для наибольшего контакта при заданном давлении. Полученные аналитические результаты сравнивались с численным расчетом в среде Ansys Workbench. В ходе всех проведенных расчетов была получена хорошая согласованность численных и аналитических расчетов с экспериментом. Однако при радиусах эллипса приближенных к круглому сечению полученное аналитическое решение не соответствует реальности и требует существенно доработки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 20-01-00517).

НАТУРНО-ПОЛЕВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ СЕЙСМОВЗРЫВНОГО ИМПУЛЬСА ОТ ИСТОЧНИКА ВЗРЫВА

Ахмедов М.Ш.¹, Рахмонов Б.С.², Сафаров И.И.³, Тешаев М.Х.²

¹Бухарский инженерно-технологический институт, ²Ургенчский государственный университет, ³Ташкентский химико-технологический институт Узбекистан)

Различные инженерные сооружения и системы, попадая в соответствующее динамическое поле, вводятся в колебательный режим, параметры которого, коррелированные с внешним воздействием, определяют вероятность и степень повреждений сооружения. Во всех случаях среда, в которой производится взрыв, является субстанцией передающей энергию от источника к исследуемому сооружению, динамика которого в значительной степени определяется характером контакта с энергопроводящей средой.

Известно, что колебания грунтовой поверхности на пункте наблюдения состоят из нескольких групп волн, каждая из которых имеет по трем составляющим значения и имеет амплитуды скорости ϑ_i , период колебания T_i , число периодов колебаний в группе n_i и скорость распространения C_i . Плотность энергии в пункте наблюдения определяется по формуле С. М. Медведева: $E_r = \sum_{i=1}^K \bar{u}_i T_i n_i = 1/2\rho$, $\sum_{i=1}^K \vartheta_i^2 T_i n_i C_i$. Чтобы энергия в пункте наблюдения E_r была выражена в эргах и отнесена к 1см^2 поверхности, здесь следует принимать амплитуду скорости колебания грунта ϑ_i в см/сек, скорость распространения волны C_i также в см/сек, период T в сек. Плотности среды ρ в г/см^3 .

При изучении рассеянии энергии сейсмозрывного поля надо будет знать значение степени затухания энергии сейсмических колебаний от точки взрыва с расстоянием. Для этого можно пользоваться следующего выражения: $E_0 = 2\pi r^2 E_r (r/r_0)^n$. Приводится зависимость логарифма приведенной энергии колебаний грунта от логарифма расстояния между пунктом наблюдения и точек взрывов. Анализ результатов показывает, что опытные данные в обоих пунктах наблюдения с некоторым приближением можно аппроксимировать прямой, тангенс угла наклона который равен приблизительно 3. Логарифмируя вышеприведенную формулу, получен следующая формула: $\lg E_0 = \lg(2\pi r^2 E_r) + n \lg(r/r_0)$, где множитель r_0 означает радиус реферцсферы.

Выше указанные кинематические параметры были определены непосредственно из натуральных экспериментов и были изучены в зависимости от приведенного расстояния и параметров взрыва.

Экспериментально полученные результаты были аппроксимированы следующей зависимости: $\lg E_r = 3,8 + 0,40I$.

При исследований сейсмического действия подземных взрывов важное место занимает вопрос определение энергии в очаге, а также коэффициент сейсмического действия взрывов. Этот коэффициент был определен используя формулу: $E_0 = k_c q Q$, где E_0 - полная выделяемая энергия в очаге взрыва; q - вес заряда ВВ, кг; Для определения коэффициента сейсмического действия взрывов k_c была использована следующая формула: $k_c = 2\pi r^2 E_r (r/qQr_0)$, где $Q = 4,3 \cdot 10^{13}$ эрг/кг. Численные значения коэффициента сейсмического действия взрывов для ближней зоны лежат в диапазоне 0,016-0,042, а для основного пункта наблюдения 0,007-0,026.

В работе приведены дискретные спектры энерговыделения на разных частотах, построенные на основе экспериментально полученных результатов. Здесь надо обратить внимание на спектре четко выраженного максимума, т.е. на определенной частоте выделяется значительно больше энергии, чем на других частотах. Заметим, что энергия сейсмозрывных волн на различных частотах спектра

неодинаково, а в энергетическом спектре колебаний имеется четко выраженный максимум, т.е. на определенной частоте выделяется больше энергии, чем на других частотах. Пик, где четко выражен максимум, всегда наблюдается не в начале диапазона частот. Частота f_{max} , которая несёт большую энергию, с расстоянием изменяется.

Анализ энерговыделения по частотам показывает, что энергия сейсмического излучения на различных частотах спектра не одинакова, а в энергетическом спектре при малых приведенных расстояниях имеются четко выраженный максимум, т.е. на определенной величине частот выделяется значительно больше энергии, чем в других частотах. Приведена зависимость плотности потока энергии сейсмозрывных колебаний грунта от приведенного расстояния. Анализ этой зависимости показывает, что изменение плотности потока энергии происходит не по одинаковой закономерности. Приведенную плоскость условно можно разделить на две части: первая, примерно $R_{\text{пр}} \leq 15$, зона, где затухание потока энергии происходит с показателем n_1 . Вторая зона, начиная с $R_{\text{пр}} > 15$, где процесс затухания происходит с другим показателем (n_2).

НАТУРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОДЗЕМНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИЯХ СЕЙСМОВЗРЫВНЫХ ВОЛН

Ахмедов М.Ш.¹, Рахмонов Б.С.², Сафаров И.И.³, Тешаев М.Х.²

(¹Бухарский инженерно-технологический институт, ²Ургенский государственный университет, ³Ташкентский химико-технологический институт Узбекистан)

Объектом изучения напряженно-деформированного состояния подземных сооружений типа цилиндрических тонкостенных оболочек замкнутого профиля выбраны образцы малой толщины из стали, которые были уложены на глубине 5,0м. от дневной поверхности грунта. При взрывах в качестве заряда ВВ был применен граммонит 79/21. Произведены взрывы с весом заряда ВВ 420-7000кг. Взрывы были произведены с приближением к исследуемым образцам.

Известно, что при действие подземных взрывов подземное сооружение совершает колебательное движение в пространстве в вертикальной плоскости и в двух горизонтальных плоскостях. Следует отметить, что собственные колебания подземного сооружения здесь не имеет явной формы. В форме движения сооружения наблюдается некоторая асинхронность. Асинхронность движения по видно свидетельствует о том, при опытах записаны некоторые суммарные движения. Можно заметить, что на участке записей с максимальными амплитудами, пик соответствующий максимуму, по мере увеличения приведенного расстояния пе-

ремещается к концу записи. Следовательно, они переносятся волнами, имеющими относительно малую скорость распространения. Отсюда можно сказать, что с увеличением приведенного расстояния диапазон колебаний шире чем остальных, время действия волн на сооружение увеличивается.

При сейсмических колебаниях, вызванных подземными взрывами, напряженно-деформированного состояния подземного сооружения определяет величина энергии, получаемая сооружением. Поэтому в работе особое внимание уделялось кинетической энергии, сообщаемой сейсмозрывной волны сооружению. Для оценки соотношения энергии протекающей в грунтовой среде и энергии, получаемой подземным сооружением при их взаимодействии используем следующее выражение:

$$\eta = E_{\text{к.соор}} / E_{\text{гр}}$$

где $E_{\text{к.соор}}$ -кинетическая энергия, получаемая сооружением; $E_{\text{гр}}$ -энергия, протекающая по площади сечения сооружения. Это выражение можно написать следующем виде:

$$\eta = \rho_c \pi (R^2 - r^2) L v^2 / 0,35 S \rho_{\text{ср}} \sum v^2 T_i.$$

В работе приведен инженерный анализ кривой зависимости η от интенсивности сейсмозрывного колебания. Отсюда видно, что с увеличением интенсивности колебания коэффициент η незначительно убывает. С увеличением интенсивности колебания при действии подземных взрывов, общее количество кинетической энергии, получаемой подземным, увеличивается, по соотношению (η) уменьшается.

Кроме выше сказанных, в работе приведены зависимости радиальных напряжений на фронте взрывной волны от приведенного расстояния и инженерный анализ результатов. Отсюда следует, что характер изменения значения напряжения по расстоянию является по нелинейному закону.

В результате аппроксимации экспериментальных данных, получена формула, для определения напряжения в грунте, в следующей форме: $\sigma(R_0) = B R_0^{-1}$ где $R_0 = R / 0,054 \sqrt[3]{C}$ - приведенное расстояние, м; С-вес заряда ВВ, кг; В-безразмерный коэффициент, $B=10^4$; η -показатель степени, характеризующий затухания напряжения в грунте; $\eta=2,5$; $15 \leq R_0 \leq 55$.

Для оценки максимальных значений продольных изгибающих и кольцевых напряжений в подземном сооружении, были получены выражения:

$$\sigma_x = k_1 \left(\frac{\sqrt{C}}{R} \right) \cdot 1/4 \cdot \sqrt[3]{E D_H^5} \left(k_z L / J \right)^2 \text{ (кг/см}^2\text{);}$$

$$\sigma_y = k_1 \left(\sqrt{C} / R \right) \cdot 4,25 \cdot (Eh / D_c^2); \text{ (кг/см}^2\text{),}$$

где E-модуль упругости материала сооружения (кг/см²); D_H, D_b -наружный и внутренний диаметры сооружения, здесь $D_c = 1/2 \cdot (D_H + D_b)$; k_z -коэффициент попе-

речного взаимодействия (кГ/см^3); L -длина цилиндрического сооружения; J -момент инерции сооружения (см^4); h -толщина стенки сооружения; k_1 -коэффициент, зависящий от свойств грунта. Для оценки максимальных значений продольных и кольцевых напряжений в подземных сооружениях рекомендуем пользоваться выше приведенными формулами при весе заряда ВВ до 500кГ , и до расстояния не менее 30м . от сооружения, при весе заряда ВВ 700кГ до расстояния не менее 150м . от исследуемого объекта. Приведена зависимость продольных и кольцевых напряжений в цилиндрических стальных трубах различных диаметров от расстояния соответствующие формулам.

С уменьшением расстояния значение кольцевых напряжений становятся больше, чем продольных. Расчеты показывают, что достаточной точностью зависимости могут быть использованы при оценке сейсмической интенсивности сейсмозрывных волн.

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ ПОКРЫТИЯ В УСЛОВИЯХ ИСПЫТАНИЙ НА ОТРЫВ КОНСОЛЬНО-ЗАКРЕПЛЕННОГО ОБРАЗЦА

Бабайцев А.В., Гетманов А.Г., Рабинский Л.Н.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ

Рассматривался вариант испытаний образцов в виде тонких металлических пластин (полос) с покрытиями, закрепленных одним концом на жесткой подложке. Закрепление на подложке реализуется с использованием высокопрочного клеевого соединения, когезионная и адгезионная прочность которого превышает адгезионную прочность покрытия к подложке и, соответственно, обеспечивает возможность изменения последней в данном эксперименте. Пластика нагружается силой на свободном конце, направленной вертикально вверх, в том время как жесткая подложка фиксируется на нижней поверхности. Таким образом, обеспечивается отрыв пластинки от подложки. Выбором высокопрочного клея, разрушение локализуется на границе покрытия с подложкой и, таким образом, в испытаниях возможно определить максимальную нагрузку, при которой это разрушение начинается. Механизм разрушения является в данном случае сложным, так как в представленной схеме испытаний в покрытии и в подложке действуют, как нормальные, так и касательные напряжения. Максимум этих напряжений реализуется в точке, где заканчивается жесткая подложка. Проведем расчет для оценки этих напряжений. В расчетах будем считать, что толщиной покрытия и клеевого соединения можно пренебречь и рассматривать задачу о деформациях балки толщиной, закрепленной одним концом на стальной подложке толщиной. Перерезывающая сила и изгибающий момент, возникающие в балке, определяют уровень напряжений на границе ее

контакта с подложкой и, соответственно, искомый уровень напряжений в покрытии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 20-01-00517).

О РАСЧЁТНОЙ МОДЕЛИ ВНУТРЕННЕГО ОБОРУДОВАНИЯ НОСОВОГО ОТСЕКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ И УПЛОТНЕНИИ

Белов Г.В., Марков В.А., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.

(Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва)

Для создания адекватной расчётной модели приборного отсека (ПО) летательного аппарата (ЛА) был применён метод аддитивности, впервые использованный в экспериментальном исследовании. Данный метод предполагает получать диаграмму деформирования ПО путем суммирования диаграмм отдельных блоков бортовой аппаратуры (БА). В качестве расчётной модели была использована часть ПО, состоящая из 2-х блоков БА. Для каждого блока методом квазистатического нагружения в численном решателе LS-DYNA была получена диаграмма напряжение-деформация. Затем был проведен расчёт совместного нагружения 2-х блоков до их разрушения. Построенная на основании данного расчёта диаграмма нагружения ПО показала хорошее соответствие с кривой, полученной сложением диаграмм деформирования отдельных блоков.

В результате получено расчётное подтверждение экспериментального метода аддитивности, а также обоснована возможность построения общей диаграммы деформирования ПО для создания механических эквивалентов ПО ЛА для решения задач конечной (терминальной) баллистики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00701-а).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УПЛОТНЕНИЯ БЛОКА ВНУТРЕННЕГО ОБОРУДОВАНИЯ НОСОВОГО ОТСЕКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Белов Г.В., Марков В.А., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.

(Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва)

Блоки бортовой аппаратуры (БА), относящиеся согласно ГОСТ Р 522003-2003 и ГОСТ Р 51676-2000 ко второму уровню разукрупнения средств радиоэлектронной аппаратуры, могут оказывать существенное влияние на характер нагружения зданий (сооружений) ввиду расположения блоков БА в носовой части летательного аппарата (ЛА).

Для определения характера деформирования блоков БА был разработан типовой блок БА, состоящий из корпуса с 2-мя крышками и внутреннего наполнения – печатных плат на несущих рамах (т.н. бортовых несущих конструкциях). На основании исходной геометрии выполнена конечно-элементная модель [1]. Поставленный по данной конечно-элементной модели расчёт предполагал квазистатическое сжатие блока до его разрушения. В процессе расчёта регистрировались параметры напряжений и деформаций, возникающих в конструкции, а затем по этим данным выполнялось построение диаграмм напряжение-деформация. Для определения вклада корпуса конструкции был также проведен расчёт корпуса блока с крышками, но без внутреннего наполнения.

На диаграмме можно выделить 3 основных участка: линейно-упругий, участок пластического деформирования и участок последующего уплотнения. Полученная диаграмма напряжение-деформация может быть использована для создания механических эквивалентов блоков БА в проектных расчётах в процессе разработки ЛА [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00701-а).

Литература

1. LS-DYNA, Keyword User's Manual, Version 970. Livermore Software Technology Corporation, 2003

2. Белов Г.В., Марков В.А., Пусев В.И., Селиванов В.В. О разработке механических эквивалентов конструкций внутреннего оборудования носовых отсеков летательных аппаратов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 1 (13). С. 30.

О НАГРУЖЕНИИ КОНЕЧНОЙ МАССЫ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ УДАРЕ ВЫСОКОПОРИСТОГО ЦИЛИНДРА

Белов Г.В., Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.

(Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва)

Конструкции зданий и сооружений отечественных атомных электростанций (АЭС) необходимо рассчитывать по нормам [1], в том числе при экстремальных воздействиях, таких как удар самолета. Зависимость ударной нагрузки от времени при ударе самолета, необходимая в качестве исходных данных для оценки прочности сооружений АЭС, основана на подходе Дж. Риеры [2, 3] для удара по жесткой стенке.

В методе Дж. Риеры [2, 3] летательный аппарат (ЛА) рассматривается как жестко-пластический цилиндр с обобщенными характеристиками массы и прочности, распределенными по длине. Данная модель [2, 3] получила широкое рас-

пространение и применяется в современных исследованиях, но из-за ряда упрощений во многих работах не учитываются механические свойства внутреннего оборудования носового отсека ЛА, что особенно важно на начальной стадии взаимодействия для самолетов военного назначения.

При воздействии ЛА на защитную оболочку АЭС удар самолета рассматривается как «мягкий» (ударник сильно деформируется и разрушается при взаимодействии с преградой), но при этом перемещения преграды считаются пренебрежимо малыми, поэтому для расчета динамического отклика конструкции прикладывают нагрузку, рассчитанную для удара по жесткой стенке по Дж. Риере [2, 3].

В данной работе рассчитана нагрузка от объемно-перфорированного цилиндра [4] на преграду конечной массы и проведена оценка влияния движения преграды на характер и величину нагрузки. Это представляет практический интерес, так как защитные оболочки сооружений АЭС имеют конечную массу, не являются абсолютно жесткими и могут перемещаться под действием нагрузки.

Полученные истории нагружения преград конечной массы могут быть использованы для оценки влияния перемещения преград на характер и величину нагрузки при ударе самолета на начальном этапе взаимодействия.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00701-а).

Литература

1. Нормы строительного проектирования АС с реакторами различного типа. Правила и нормы в атомной энергетике. ПиН АЭ-5.6: Изд. Минатомэнерго СССР. 1986. 21 с.
2. *Riera J.D.* On the stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces // *Nucl. Engng. and Des.* 1968. Vol. 8. № 4. P. 415-426.
3. *Riera J.D.* A critical reappraisal of nuclear power plant safety against accidental aircraft impact // *Nucl. Engng. and Des.* 1980. Vol. 57. № 1. P. 193-206.
4. Применение теста Тейлора для исследования динамических механических свойств высокопористого алюминиевого сплава / *Г.В. Белов, А.П. Гусаров, В.А. Марков, В.И. Пусев, А.Ф. Овчинников, В.В. Селиванов, М.Ю. Сотский* // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана.* 2012 – № 9. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/15395303> (дата обращения 12.02.2020).

О НАГРУЖЕНИИ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ УДАРЕ ВЫСОКОПОРИСТОГО ЦИЛИНДРА

Белов Г.В., Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.

(Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва)

В настоящее время возможность падения самолета (в том числе военного назначения) на сооружения атомных электростанций предусмотрена отечественными [1] и зарубежными нормами.

В современной проектной практике расчет конструкции на такое экстремальное воздействие принято разделять на два этапа. Сначала определяют внешнюю ударную нагрузку, а затем исследуют динамический отклик конструкции под действием заданной нагрузки. Внешняя нагрузка при ударе самолета обычно определяется по подходу Дж. Риеры [2], который рассматривал взаимодействие с жесткой стенкой жестко-пластического стержня, эквивалентного самолету.

В [3] показано, что у реактивных истребителей носовой отсек содержит бортовую радиолокационную станцию и другую радиоэлектронную аппаратуру, которая относится к бортовой аппаратуре (БА). Блоки БА составляют 70-75 % массы внутреннего оборудования носовых отсеков ЛА и заполняют 90-95 % площади поперечного сечения отсека. Механические свойства БА носовых отсеков самолетов будут определяться в основном механическими свойствами блоков БА [3].

Блоки БА являются композиционной высокопористой средой, которая по своим компоновочным характеристикам, составу материалов и механическим свойствам весьма близка к высокопористым алюминиевым сплавам и сотовым конструкциям из алюминиевых сплавов и может быть применена в качестве модельной среды для внутреннего оборудования носовых отсеков ЛА как в расчетной, так и в экспериментальной областях [3].

В работе на основе численного моделирования рассмотрена динамика изменения нагрузки на жесткую стенку при ударе объемно-перфорированного стержня, являющегося механическим эквивалентом БА. Полученные результаты верифицировались с экспериментами (по остаточной длине ударника [4]) и сравнивались с результатами расчета нагрузки по Дж. Риере [2].

Полученные истории нагружения жесткой стенки позволяют сравнить результаты численного моделирования в пакете прикладных программ LS-DYNA с подходом Дж. Риеры.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00701-а).

Литература

1. Нормы строительного проектирования АС с реакторами различного типа. Правила и нормы в атомной энергетике. ПиН АЭ-5.6: Изд. Минатомэнерго СССР. 1986. 21 с.
2. *Riera J.D.* A critical reappraisal of nuclear power plant safety against accidental aircraft impact // *Nucl. Engng. and Des.* 1980. Vol. 57. № 1. P. 193–206.
3. *Марков В.А., Овчинников А.Ф., Пусев В.И.* Модельная среда для внутреннего оборудования носовых отсеков летательных аппаратов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение», 2010. – С. 196-206. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modelnaya-sreda-dlya-vnutrennego-oborudovaniya-nosovyh-otsekov-letatelnyh-apparatov.pdf> (дата обращения 12.02.2020).
4. Применение теста Тейлора для исследования динамических механических свойств высокопористого алюминиевого сплава / *Г.В. Белов, А.П. Гусаров, В.А. Марков, В.И. Пусев, А.Ф. Овчинников, В.В. Селиванов, М.Ю. Сотский* // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012 – № 9. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/15395303> (дата обращения 12.02.2020).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИБРООПОРЫ С ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ И УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ

Блинкова О.В.^{1,2}, Кондратов Д.В.^{1,3,4}

(¹Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина- филиал РАНХиГС, ²Саратовская государственная юридическая академия, ³Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., ⁴Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского)

В настоящее время в машино- и приборостроении, авиационной и космической промышленности применяют упругие элементы конструкций, взаимодействующие с вязкой жидкостью или газом [1,2,3]. Однако, недостаточно изучено их взаимодействие с вязкой сжимаемой жидкостью или газом.

Рассмотрим физическую модель механической системы, состоящей из абсолютно жесткой пластины – вибратора и упругой стенкой щелевого канала - статором. Между вибратором и статором находится вязкая сжимаемая жидкость. Внутренняя поверхность вибратора считается плоской и является одной из стенок щелевого канала. Предполагается, что вибратор имеет подвес, который обладает упругой податливостью. В результате пульсации давления в жидкости в соответствии с гармоническим законом возникают колебания вибратора в вертикальном направлении относительно статора. Считается так же, что температура жидкости, вибратора и упругого статора является постоянной [4].

Математическая модель, описанной выше механической системы представляет собой систему уравнений динамики сжимаемой жидкости, уравнений динамики упругой пластины, уравнений движения абсолютно жесткого вибратора и соответствующих граничных условий. Задача решается комбинацией метода возмущений и метода Бубнова_Галеркина. В результате находим амплитудные частотные характеристики упругой пластины – статора.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00014-а).

Литература

1. *Kondratov D.V., Kalinina A.V., Mogilevich L.I., Popova A.A., Kondratova Y.N.* Mathematical model of elastic ribbed shell dynamics interaction with viscous liquid under vibration // *Vibroengineering Procedia* 2016. С. 300-305

2. *Анциферов С.А., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И.* Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом прибора на вибрирующем основании при несимметричном торцевом истечении // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.* 2009. № 3. С. 25-35

3. *Анкилов А. В., Вельмисов П. А.* Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск. 2009. 220 с

4. *Блинкова О.В., Кондратов Д.В.* Математическая модель взаимодействия сдвливаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругой трехслойной пластиной с легким несжимаемым наполнителем // *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках.* – 2018. – № 1. URL: mathmod.esrae.ru/17-65.

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ДИНАМИКЕ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ, ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНУЮ СРЕДУ

Богданов А.Н.

(НИИ механики МГУ)

Представленный в докладе аналитический подход к решению задач определения параметров нелинейного возмущения произвольной интенсивности, распространяющегося в сплошной среде с заданным распределением параметров (стратификацией), вдохновлен чрезвычайно удачно написанной монографией Дж. Уизема «Линейные и нелинейные волны» [1].

Предложенный автором ранее [2] подход в развитие метода Уизема для исследования динамики ударных волн произвольной интенсивности при распространении по слою одномерной продольной стратификации (шаг вперед по сравнению с Уиземом) положен в основу уточнения эффектов в такого рода процессах, в определенном смысле это – два

шага вперед по сравнению с Уиземом. Указана роль локальных и интегральных эффектов воздействия малых возмущений.

Предложенный метод возможно применить к исследованию динамики нелинейного возмущения в среде иной (негазообразной) природы, имеющей неоднородный состав.

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ (тема АААА-А19-119012990113-1) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00793).

Литература

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977.
2. Богданов А.Н. Динамика ударных волн в средах с продольной стратификацией// Доклады РАН. 2020. В печати

О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Болтаев З.И.¹, Сафаров И.И.², Тешаев М.Х.¹, Хомидов Ф.¹

¹Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара, Узбекистан,

²Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан)

Рассматривается вязко упругий изотропный цилиндрической волновод занимающий в безразмерной системе цилиндрических координат (r, ϕ, z) область $V = \{r_0 < r \leq R, 0 < \theta \leq \theta_0, -\infty < z < \infty\}$. Пусть гармонические волны распространяются по оси Oz в бесконечном вязкоупругом цилиндре с радиальной трещиной. Связь между напряжениями и деформациями имеет вид [1]

$$\sigma_{ik} = \bar{\lambda}\theta\delta_{ik} + 2\bar{\mu}\varepsilon_{ik}, \quad (1)$$

здесь

$$\bar{\lambda}\phi = \lambda_{01} \left[1 - \Gamma_{\lambda}^C(\omega_R) - i\Gamma_{\lambda}^S(\omega_R) \right]; \bar{\mu}\phi = \mu_{01} \left[1 - \Gamma_{\mu}^C(\omega_R) - i\Gamma_{\mu}^S(\omega_R) \right],$$

$$\Gamma_{\lambda}^C(\omega_R) = \int_0^{\infty} R_{\lambda}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau; \Gamma_{\lambda}^S(\omega_R) = \int_0^{\infty} R_{\lambda}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau,$$

$$\Gamma_{\mu}^C(\omega_R) = \int_0^{\infty} R_{\mu}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \Gamma_{\mu}^S(\omega_R) = \int_0^{\infty} R_{\mu}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$$

- соответственно косинус и синус образы Фурье ядра релаксации материала. Основные уравнения движения вязкоупругого цилиндрического механического волновода, занимающего область V, задаются следующими уравнениями [2]:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где ρ - плотность материала и краевые условия:

$$r = r_0 \rightarrow 0, R: \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rr} = \sigma_{r\phi} = 0; \quad (3)$$

$$\phi = 0, 2\pi: \quad u_\phi = 0; \sigma_{\phi z} = \sigma_{\phi r} = 0, \quad (4)$$

Методы решения. В случае бегущих гармонических волн вдоль оси z , решение краевой задачи (1), (2), (3) и (4) допускает разделение переменных [3]

$$\begin{aligned} u_r &= w(r) \cos \frac{\phi}{2} \cos(kz - \omega t); u_\phi = v(r) \sin \frac{\phi}{2} \cos(kz - \omega t); \\ u_z &= u(r) \cos \frac{\phi}{2} \sin(kz - \omega t); \\ \sigma_{rr} &= \sigma(r) \cos \frac{\phi}{2} \cos(kz - \omega t); \sigma_{r\phi} = \tau_\phi(r) \sin \frac{\phi}{2} \cos(kz - \omega t); \\ \sigma_{rz} &= \tau_z(r) \cos \frac{\phi}{2} \sin(kz - \omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $w(r)$, $v(r)$, $u(r)$, $\sigma(r)$, $\tau_\phi(r)$, $\tau_z(r)$ - амплитуды перемещений и напряжений (компоненты тензора напряжений), ω - комплексная собственная частота, k - волновое число, $C = \omega / k$ - фазовая скорость.

При подстановке (5) в (1), (2), (3) и (4), получаем спектральную краевую задачу. Задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} w' &= \frac{\sigma}{K_\lambda} - \frac{\tilde{\lambda}}{K_\lambda} \left(ku + \frac{v}{r} + \frac{w}{r} \right); v' = \frac{\tau_\phi}{\mu} + \frac{v}{r} + \frac{w}{2r}; \quad u' = \frac{\tau_z}{\mu} + kw; \sigma' = -\omega^2 \rho w + \frac{\tilde{a}}{r} - \frac{\tau_\phi}{2r} - k\tau_z; \\ \tau_\phi' &= -\omega^2 \rho v - \frac{2\tau_\phi}{r} + (\sigma + \tilde{a}) \frac{1}{2r} - k\tilde{b}; \tau_z' = -\omega^2 \rho u - \frac{\tau_z}{r} - \frac{\tilde{b}}{2r} + k(\sigma + 2\mu(ku - w')), (\dots)' = \frac{d}{dr}. \end{aligned} \quad (6)$$

Литература

1. Сафаров И.И., Ахмедов М.Ш., Болтаев З.И. Собственные волны в слоистых средах. Lambert Academic Publishing (Germany). 2016. 192с.
2. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Математическое моделирование волнового процесса в механическом волноводе с учетом внутреннего трения. Германия. LAP. 2013. 243с.
3. Safarov I.I., Boltaev Z. I., Akhmedov M. Sh. Properties of wave motion in a fluid-filled cylindrical shell/ LAP, Lambert Academic Publishing, 2016. -105 p.

СТРУКТУРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИИ ДЛЯ АДДИТИВНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Большаков П.В., Габсаттаров Р.М., Кашипов Р.Н., Рагинов И.С., Саченков О.А.

(Казанский федеральный университет)

Аддитивные технологии нашли распространение в артропластике. В связи с этим актуальной становится задача оптимизации конструкции с учетом технологий. Аддитивные технологии позволяют формировать форму конструкции, позволяющую размещение костного материала, с целью ускорения заживления организма. Авторами был обобщён разработанный подход к проектированию ферменного эндопротеза [1, 2].

Предлагается подход к обобщению базового элемента и оценке его механических свойств. С этой целью необходимо определить множество параметров, определяющих базовый элемент. Далее проводятся численные эксперименты и определяются управляющие функции. Последующая оптимизация конструкции реализована на основе метода конечных элементов. Из предположения наличия механической симметрии базового элемента может быть использована гипотеза ортотропности. Сформулирован итерационный процесс оптимизации конструкции, в рамках которого использована гипотеза соосности тензора напряжений и осей ортотропии базового элемента. Отдельно стоит отметить реконструкцию получаемой геометрии, что позволяет в полуавтоматическом режиме получать готовые файлы для производства и последующей обработки [3]. Предлагаемый подход был реализован для пористого базового элемента с выраженной эллиптичностью в одном направлении.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, задание № 13556.2019/13.1

Литература

1. *Большаков П.В., Кашипова Р.М., Саченков О.А. О проектировании ферменного эндопротеза // Современные проблемы теории машин. – 2017. – № 5. – С. 42 – 44.*
2. *Большаков П.В., Саченков О.А. Погрешности формы при аддитивном производстве // Современные проблемы теории машин. – 2017. – № 5. – С. 85 – 87.*
3. *Кашипов Р.Н. Плазменно-электролитная обработка поверхности металлов // Физика и химия обработки материалов. – 2010. – № 5. – С. 50 – 56.*

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭПОКСИДНЫХ ОЛИГОМЕРОВ С ЛАПРОКСИДАМИ ДЛЯ СОЗДАНИЯ НИЗКОВЯЗКИХ СВЯЗУЮЩИХ

Бресская А.Д.¹, Симонов-Емельянов И.Д.¹

(¹МИРЭА – Российский технологический университет, Москва)

Для регулирования физико-химических и комплекса технологических и эксплуатационных характеристик эпоксидных связующих в их состав вводят различные по природе модификаторы (М) при создании стеклопластиков различного назначения.

Несомненный интерес представляет использование в качестве модификаторов эпоксидных олигомеров алифатических соединений на основе глицидиловых эфиров, содержащих эпоксидные группы, так называемые, Лапроксиды и Лапролаты, которые хорошо совмещаются с эпоксидными олигомерами. Лапроксиды и Лапролаты являются активными растворителями-разбавителями (АР) и при отверждении встраиваются в трехмерную структуру эпоксидного полимера, что исключает стадию удаления растворителя и сушки при получении стеклопластиков.

В научно-технической литературе отсутствуют сведения о статическом угле смачивания поверхности из стекла и поверхностному натяжению этих активных разбавителей и систем разного состава на основе эпоксидного олигомера с активными разбавителями (ЭО+АР). Данных о динамическом угле смачивания для полимерных эпоксидных связующих с АР не приведены в научной литературе.

Физико-химические характеристики (статический и динамический углы смачивания и поверхностное натяжение) Лапроксидов, Лапролатов и полимерных связующих на основе ЭО+АР необходимы для расчета параметров процесса пропитки волокнистых наполнителей и создания армированных пластиков.

В настоящей работе исследованы зависимости статического и динамического угла смачивания и поверхностного натяжения для эпоксидных олигомеров марок ЭД-20 и DER-330 и активных разбавителей - Лапроксидов и Лапролата разной структуры, функциональности, молекулярной массы, а также систем на основе эпоксидных олигомеров (ЭО) с активными разбавителями (АР) от состава, природы активных разбавителей и температуры.

Показано, что поверхностное натяжение и углы смачивания ЭО значительно снижаются при повышении температуры. На поверхностное натяжение и углы смачивания АР повышение температуры влияет менее значительно. Повышение температуры систем ЭО + АР снижает поверхностное натяжение почти в два раза, а на углы смачивания оказывает незначительное влияние.

Установлено, что с повышением содержания АР в системах ЭО + АР поверхностное натяжение и углы смачивания снижаются значительно.

Предложены оптимальные составы эпоксидных связующих для получения

радиопрозрачных изделий из конструкционных стеклопластиков методом инъекционного формования. Проведены расчеты и выданы рекомендации по режимам нанесения связующего на стеклянные волокна и пропитки тканей для получения армированных пластиков. Показано, что производительность технологического процесса можно увеличить в ~10-20 раз по сравнению с традиционными технологиями в результате регулирования физико-химических характеристик эпоксидных связующих.

Литература

1. *А. П. Петрова, Г. В. Малышева.* Клеи, клеевые связующие и клеевые препреги: учебное пособие / под ред. Г. В. Малышевой. - М. – ВИАМ, 2018. - 742 с.
2. *Дебердеев Т.Р., Гарипов Р.М., Сычова М.В., Улитин Н.В., Фомин А.А., Иржак В.И.* Описание топологической структуры модифицированных циклокарбонатом эпоксидных систем // Вестник Казанского технологического университета. 2008. №5. с. 112-118.
3. *Григорьев Г.А., Киселев В.Я., Копытин В.С.* Методы определения поверхностного натяжения жидкостей и энергии твердой поверхности, Учебное пособие, М.: МИТХТ им. М.В. Ломоносова, 2005
4. *Симонов-Емельянов И.Д., Соколов В. И., Трофимов А.Н., Смотрова С. А., Шалгунов С. И., Евдокимов Ю.Ю.* / Пропитка волоконистых армирующих наполнителей полимерными связующими в динамических режимах формования изделий // Конструкции из композиционных материалов, 2018 выпуск 1, с. 14-23

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОДКРЕПЛЕННОЙ УСЕЧЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРЕВЕ

Бугаев Н.М., Горюнов А.В., Прокофьев А.И.

(Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва)

Рассматривается усеченная коническая оболочка, подвергающаяся нагреву импульсным лучистым тепловым потоком от бесконечно удаленного источника излучения. По торцам оболочка подкреплена шпангоутами. Между оболочкой и подкрепляющими элементами существует идеальный тепловой контакт. Тепловой поток падает на оболочку перпендикулярно ее оси вращения. Между оболочкой и окружающей средой происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона. В начальный момент времени температура конструкции равна температуре окружающей среды, которая остается постоянной в рассматриваемом проме-

жутке времени. Подкрепляющие элементы имеют прямоугольное сечение. Геометрические характеристики сечений шпангоутов малы по сравнению с радиусом меньшего основания оболочки.

Задача термоупругости решается в линейной несвязанной квазистатической постановке. Сначала проводится исследование температурного поля оболочки, а затем – определяется ее термонапряженное состояние.

Проведена оценка влияния теплофизических параметров на функцию распределения температуры. Представлены различные асимптотические решения задачи теплопроводности [1], обеспечивающие необходимую для практических расчетов точность в случае использования приведенных зависимостей при анализе несущей способности конструкций ЛА [2].

На втором этапе исследуется термонапряженное состояние конструкции при найденном ранее температурном поле. Напряженно-деформированное состояние оболочки [3] представлено в виде суммы решений, полученных по безмоментной теории и краевого эффекта. Считается, что по торцам оболочка закреплена, но торцы могут свободно смещаться параллельно самим себе вдоль ее оси. Анализ приведенных зависимостей показал, что в затененной части оболочки возникают растягивающие усилия, а в освещенной – сжимающие. Величина последних изменяется вдоль осевой координаты и достигает максимального значения у меньшего основания. Сравнивая величину напряжений от этого усилия с величиной критического напряжения, можно получить представление о моменте потери устойчивости оболочки.

Литература

1. Горюнов А.В., Молодожникова Р.Н., Прокофьев А.И. Температурное поле подкрепленной тонкостенной конструкции при одностороннем нагреве. Электронный журнал «Труды МАИ», №71, 26 декабря 2013.
2. Афанасьев П.П., Голубев И.С., Лавочкин С.Б., Новиков В.Н., Парафесь С.Г., Пестов М.Д., Туркин И.К. Под ред. Голубева И.С. и Туркина И.К. Беспилотные летательные аппараты. Основы устройства и функционирования – М.: МАИ, 2010, 654 с.
3. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Общая теория упругих оболочек. – М.: МАИ, 2018, 111 с.

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЗУЧЕСТИ НА ОСНОВЕ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ РЕКУРРЕНТНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Васильев А.Н.¹, Кузнецов Е.Б.², Леонов С.С.^{2,3}, Тархов Д.А.¹

(¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, ²Московский авиационный институт, ³Российский университет дружбы народов, Москва)

Одной из важных прикладных задач механики, машиностроения и авиационно-ракетной отрасли является разработка моделей деформирования и разрушения элементов конструкций, в том числе и композитных, с учетом неупругих свойств материала, таких как пластичность, ползучесть и вязкоупругопластичность. Характерной особенностью подобных моделей является наличие в них набора материальных констант, зависящих от температуры, режима нагружения, прикладываемых нагрузок и свойств материала, в том числе начального состояния и анизотропии. Это усложняет процесс построения адекватных моделей деформирования конструкций в условиях сложных температурно-силовых режимов, поскольку требует наличия методики определения материальных констант для различных типов определяющих соотношений. Ранее в работах авторов был предложен общий метод идентификаций моделей ползучести металлов для постоянных уровней напряжения и температуры, основанный на нейронных сетях прямого распространения (см., например, работу [1]). Но для идентификации характеристик ползучести для интервала температур и напряжений такой нейросетевой подход является ресурсоемким и не приводит к удовлетворительным результатам. Для подобных задач в работах А.Н. Васильева и Д.А. Тархова был предложен многослойный полуэмпирический подход, успешно примененный для построения модели развития поврежденности в образцах из стали 45 при одноосном растяжении [2]. В данной работе для этой же конструкции полуэмпирический подход применяется при построении деформационно-прочностной модели в интервале напряжений, описываемой начальной задачей для системы уравнений теории структурных параметров Ю.Н. Работнова в форме [3]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{B_\varepsilon \sigma^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad \varepsilon(0) = \omega(0) = 0, \quad t \in [0; t_*], \quad (1)$$

где ε – деформация ползучести, ω – скалярный параметр поврежденности, σ – действующее напряжение, t – время, t_* – момент разрушения конструкции, B_ε , B_ω , n , k , α , m – характеристики ползучести.

Для идентификации характеристик ползучести задачи (1) используется подход, в основе которого лежит сочетание традиционных разностных методов

численного решения задачи Коши и многослойных рекуррентных нейронных сетей. Вместо разбиения рассматриваемого отрезка $[t_0; t_*]$ на N частей: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_N = t_*$, применяемого в традиционных численных методах, предлагается строить приближённое решение задачи (1) на интервале переменной длины $[t_0; t]$, $t \in [0; t_*]$. В этом случае шаг интегрирования $h_i = h_i(t)$ и полученные приближенные решения на каждом i -ом шаге $\varepsilon_i = \varepsilon_i(t)$, $\omega_i = \omega_i(t)$ будут функциями аргумента t при условии $\varepsilon_0(t) = \omega_0(t) = 0$. В качестве приближённого решения задачи (1) используется решение, полученное на N -ом шаге, которое будет зависеть от характеристик ползучести, т. е. $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon_N(t, B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m)$, $\tilde{\omega}(t) = \omega_N(t, B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m)$. При использовании явного метода Эйлера, поиск характеристик ползучести сводится к решению задачи минимизации функционала вида

$$J = \delta_1 \sum_{q=1}^{14} F_{35}^2(\varepsilon_q^{35}, \omega_q^{35}, t_q^{35}, \alpha, m, n, k, B_\varepsilon, B_\omega) + \delta_2 \sum_{q=1}^{10} F_{40}^2(\varepsilon_q^{40}, \omega_q^{40}, t_q^{40}, \alpha, m, n, k, B_\varepsilon, B_\omega) + \delta_3 \sum_{q=1}^{12} F_{45}^2(\varepsilon_q^{45}, \omega_q^{45}, t_q^{45}, \alpha, m, n, k, B_\varepsilon, B_\omega) + \tilde{R}(B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m) \rightarrow \min. \quad (2)$$

с ограничениями типа неравенств $\alpha > 0, m > 0, k > 0, n > 0, B_\varepsilon > 0, B_\omega > 0$. Здесь \tilde{R} – регуляризирующий член, $\varepsilon_q^\sigma, \omega_q^\sigma, t_q^\sigma$ – экспериментальные точки, полученные при постоянных уровнях напряжения $\sigma_0 = 35; 40; 45$ МПа [3], $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – положительные штрафные множители. Суммируемые функции в (2) имеют вид

$$F_\sigma(B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m) = \left| t - \left[N^{-(\alpha+1)(m+1)} / B_\varepsilon \sigma^n \right] \cdot \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{N-1} S_i(\omega, \alpha, m) \right| + \left| t - \left[N^{-(\alpha+1)(m+1)} / B_\omega \sigma^k \right] \cdot \omega \cdot \sum_{i=0}^{N-1} S_i(\omega, \alpha, m) \right|. \quad (3)$$

$$\text{Здесь } S_i(\omega, \alpha, m) = (N + i \cdot \omega)^\alpha \left(N^{\alpha+1} - (N + i \cdot \omega)^{\alpha+1} \right)^m.$$

Применение полуэмпирических рекуррентных сетей позволяет проводить идентификацию модели ползучести при значительном сокращении вычислительных затрат и хорошем согласовании с экспериментальными данными.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 18-19-00474).

Литература

1. Васильев А.Н., Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Идентификация параметров модели разрушения для анизотропных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия «Механика предельного состояния». 2014. № 4(22). С. 33-45.

2. Васильев А.Н., Кузнецов Е.Б., Леонов С.С., Тархов Д.А. Многослойный метод идентификации характеристик ползучести в интервале напряжений для задачи разрушения металлов в условиях ползучести // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15. № 4. С. 828-836.

3. Горев Б.В., Захарова Т.Э., Клопотов И.Д. К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств // Физическая мезомеханика. 2002. Т. 5. № 2. С. 17-22.

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Вахтерова Я.А.¹, Федотенков Г.В.^{1,2}, Старовойтов Э.И.³

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва; ³Белорусский государственный университет транспорта, Гомель)

В прямоугольной декартовой системе координат рассматривается однородный изотропный стержень [1], левый конец которого жестко закреплен, а на правом задана внешняя осевая сила, зависящая от времени. Начальные условия нулевые. Внешняя осевая сила в прямой задаче полагается заданной.

В основу методики решения прямой задачи положен принцип суперпозиции, при котором перемещения и контактные напряжения связаны посредством интегрального оператора по пространственной переменной и времени. Ядром этого оператора является функция влияния для упругого стержня. Эта функция представляет собой фундаментальное решение дифференциального уравнения движения стержня. Построение функции влияния представляет собой отдельную задачу. Соответствующая задача решена с помощью преобразования Лапласа по времени и разложения в ряд Фурье по системе собственных функций.

В обратной задаче полагается, что перемещения на конце $u_d(t) = u(l, t)$ стержня известны. На практике эта информация может поступать с датчика перемещений, установленного в сечении $x = l$ стержня. В обратной задаче требуется, по данным, полученным с датчика, восстановить осевую нагрузку. Обратная задача сводится к решению системы независимых интегральных уравнений Вольтера I-го рода, которая является некорректной по Ж. Адамару вследствие вырожденности ядер интегральных операторов. Для регуляризации обратной задачи применяется метод регуляризации Тихонова, приводящий к системе интегральных уравнений с невырожденными ядрами [2-4].

Для решения системы разрешающих интегральных уравнений разработан и реализован на ЭВМ численно-аналитический алгоритм, основанный на методе

средних прямоугольников в сочетании с методом регуляризации Тихонова [5-6].
Выполнена проверка полученных результатов. Приведены примеры расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-08-00438, 20-58-00023).

Литература

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 472 с.

2. Вахтерова Я. А., Серпичева Е. В., Федотенков Г. В. Обратная задача об идентификации нестационарной нагрузки для балки Тимошенко // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. — 2017. — № 4. — С. 82–92.

3. Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V., Vahterova Y. A. Identification of non-stationary load upon timoshenko beam // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, no. 4. — P. 439–447.

4. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Нестационарная обратная задача по идентификации дефектов в упругом стержне // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. — Т. 3. — РИЦ БашГУ Уфа, 2019. — С. 878–880

5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. 2-е изд. — М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 285 с.

6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. - 232 с.

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО СЛОЯ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ С УЧЕТОМ ПРОЦЕССА ТЕРМОУПРУГОГО РАССЕИВАНИЯ ЭНЕРГИИ

*Вестяк В.А.¹, Гачкевич А.Р.², Ивасько Р.А.², Кушниц Р.М.², Мусий Р.С.³,
Тарлаковский Д.В.⁴*

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, ²Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Пидстрыгача НАН Украины, Львов, ³Национальный университет «Львовская политехника», Львов, ⁴МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

Рассматривается электропроводный слой с плоскопараллельными границами, отнесенный к декартовой системе координат $Oxuz$, плоскость xOy которой совпадает с его срединной поверхностью. Слой находится под воздействием однородного импульсного электромагнитного поля (ИЭМП), заданного значениями касательной (к основаниям слоя $z = \pm h$) компоненты H_y вектора напряженности магнитного поля (НМП) \vec{H} . Основания слоя находятся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой и свободны от силового нагружения. Материал слоя однородный, изотропный и неферромагнитный, а его физико-механические характеристики постоянны в рассматриваемых диапазонах изменения НМП и температуры T . Воздействие ИЭМП на слой учитывается джоулевыми тепловыделениями $Q = 1/\sigma (\text{rot } \vec{H})^2$ и пондеромоторными силами $\vec{F} = \mu \text{rot } \vec{H} \times \vec{H}$ взаимодействия индукционных токов с внешним возбуждающим ИЭМП (здесь σ , μ – коэффициент электропроводности и магнитная проницаемость соответственно). Упомянутые физические факторы воздействия создают в слое нестационарные температуры T и напряжения (описываемые компонентами σ_{ik} ($i, k = x, y, z$) тензора динамических напряжений $\hat{\sigma}$). При определенных значениях параметров, характеризующих ИЭМП, максимальные величины температуры T и компонент σ_{ik} тензора напряжений, а также интенсивности σ_i напряжений могут принимать значения, при которых рассматриваемый слой теряет несущую способность как элемент конструкций соответствующих изделий. Для оценки такой несущей способности пластинчатого элемента конструкции принимается (в силу критерия Губера-Мизеса) неравенство

$$\max \sigma_i < \sigma_d, \quad (1)$$

где σ_d – предел упругой деформации материала слоя.

В литературе [1] известны результаты исследования закономерностей тер-

моупругого поведения и несущей способности слоя с плоскопараллельными границами при воздействии ИЭМП характерных типов, используемых в современных технологиях магнитоимпульсной обработки [2]. Однако, недостаточно исследовано влияние процесса термоупругого рассеивания энергии на термонапряженное состояние рассматриваемого слоя при воздействии указанных ИЭМП.

На основании предложенных в [1, 3] методик исследованы закономерности термоупругого поведения и несущая способность рассматриваемого электропроводного слоя с плоскопараллельными границами с учетом процесса термоупругого рассеивания энергии при воздействии ИЭМП характерных типов – в режимах с импульсным модулирующим сигналом (РИМС) и затухающей синусоиды (РЗС), а также одиночного электромагнитного импульса (ЭМИ) [1]. Для слоев, изготовленных из различных неферромагнитных материалов (в частности меди, алюминия, нержавеющей стали) при соответствующих их толщинах определены предельные параметры ИЭМП характерных типов, при которых рассматриваемые слои теряют несущую способность.

Получено, что при продолжительностях t_i рассматриваемых характерных ИЭМП в пределах $10^{-6} \text{ с} \leq t_i \leq 10^{-2} \text{ с}$ температура T и составляющие σ_{ik} ($i, k = x, y, z$ тензора напряжений в слое при учете термоупругого рассеивания энергии совпадают практически с аналогичными, найденными с использованием модели, основанной на адиабатическом приближении [1].

Значения резонансных частот ИЭМП в РИМС и РЗС смещаются в сторону их увеличения, что необходимо учитывать при прогнозировании несущей способности и надежности работы соответствующих электропроводных пластинчатых элементов.

Литература

1. *Гачкевич А.Р., Мусий Р.С., Тарлаковский Д.В.* Термомеханика неферромагнитных электропроводных тел при воздействии импульсных электромагнитных полей с модуляцией амплитуды. – Львов: СПОЛОМ, 2011. – 216 с.
2. *Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Хищенко Л.Т.* Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Харьков: МОСТ-Торнадо, 2003. – 288 с.
3. *Hachkevych O.R., Musij R.S., Stasyuk H.B.* Coupled problem of thermomechanics for a conducting layer subjected to a uniform pulsed electromagnetic action // *Materials Science*. – 2009, 45(4), pp. 532-541.
4. *Hachkevych O., Musij R.* Mathematical modeling in thermomechanics of electroconductive bodies under the action of the pulsed electromagnetic fields with modulation of amplitude // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2019, 6(1), pp. 30-36.

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНЫХ ТВЁРДЫХ ТЕРМОУПРУГОДИФФУЗИОННЫХ РАСТВОРОВ

Волкова Л.В.¹, Давыдов С.А.¹, Земсков А.В.^{1,2}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

Развитие технологий получения и обработки материалов требуют всё более полного и обобщенного описания эффектов взаимодействия различных полей в сплошных средах. Примером такого взаимодействия может служить модель термоупругой диффузии. Данная модель учитывает связанность полей деформации, температуры и концентрации вещества. В модель включены уравнения движения сплошной упругой среды, а также законы массо- и теплопереноса [1].

Законы переноса могут входить в модель как необобщённые, так и обобщённые законы Фика и Фурье. Обобщенные законы обладают большим интересом, т.к. позволяют описать в т.ч. и быстропротекающие процессы. Такого рода процессы могут возникать в средах при моделировании технологий типа сварки взрывом или импульсной лазерной обработки. В этом случае рассматриваются ненулевые времена релаксации, скорости распространения диффузионных и тепловых возмущений считаются ограниченными [1–3].

Также стоит отметить, что крайне мало работ посвящено задачам в многокомпонентных средах. Однако практически все используемые в инженерном деле материалы представляют собой твёрдый раствор с теми или иными отношениями массовых долей нескольких химических элементов и их соединений. Причём нередко предполагают идеальность твёрдого раствора как отсутствие взаимодействия между диффузионными полями, а в матрице диффузии пренебрегают недиагональными элементами. Однако связанности полей концентрации через поля температур и деформаций недостаточно для отражения реальных процессов перераспределения вещества в среде [4].

В данной работе рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругой диффузии для изотропного многокомпонентного слоя. Для описания возмущений, распространяющихся с конечной скоростью, используется локально-равновесная модель связанной термоупругой диффузии, включающая уравнения движения упругой среды, теплопереноса и массопереноса. Твёрдый раствор считается неидеальным. Учитывается перекрёстный диффузионный эффект. Начальные условия приняты нулевыми. Сложность решения указанных выше задач связана с процедурой преобразования Лапласа и его последующим обращением, которая в свою очередь зависит от вида граничных условий [5].

Было обнаружено, что при определённых типах граничных условий для ре-

шения задач термоупругой диффузии можно комбинировать разложение в неполные ряды Фурье по пространственной переменной с преобразованием Лапласа по времени. Трансформанты Лапласа в этом случае являются рациональными функциями, что существенно упрощает задачу их обращения [3–5]. Недостатком такого подхода является ограниченность области применимости алгоритма, которая обусловлена спецификой специально подобранных граничных условий.

Ситуация может быть исправлена путём построения связи между решениями задач с граничными условиями различных типов. В общем случае, эти связи представляют собой систему интегральных уравнений Вольтерры 1-го рода. Тогда, достаточно решить какую-либо одну (эталонную) задачу, а все другие задачи будут сводиться к ней [6, 7]. Предложенная методика демонстрируется на примере одномерной нестационарной задачи для неидеальных твёрдых термоупругодиффузионных растворов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-31-00437).

Литература

1. Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях / Князева А. Г. – Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2014. – 172 с.
2. Sherief H.H., Hamza F. A., Saleh H. The theory of generalized thermoelastic diffusion // International Journal of Engineering Science. – 2004. – Vol. 42. – P. 591–608.
3. Davydov S.A., Vestyak A.V. and Zemskov A.V. Propagation of one-dimensional thermoelastodiffusive perturbations in a multicomponent layer // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – 1158, 022034.
4. Davydov S.A., Zemskov A.V. Unsteady one-dimensional thermoelastic cross-diffusion perturbations in a layer // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – 1129, 012009.
5. Вестяк А.В., Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Нестационарная одномерная задача термоупругой диффузии для однородных многокомпонентных сред с плоскими границами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 60, кн. 1. – С. 183–195.
6. Igumnov L.A. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlavovskiy D.V. Non-stationary model of mechanical diffusion for half-space with arbitrary boundary conditions // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – Vol. 23, № 1. – P. 36–41.
7. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Решение двумерных задач механодиффузии с помощью интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2016. – №1. – С. 49–56.

ИНТЕГРАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ В ПРОЦЕСС УПРАВЛЕНИЯ ЖИЗНЕННЫМ ЦИКЛОМ ТЕНЗОРЕЗИСТОРНОГО СИЛОИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ДАТЧИКА

Гавриленков С.И.¹, Гаврюшин С.С.¹

(¹МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет))

Тензорезисторные силоизмерительные датчики (тензодатчики) широко используются в науке и промышленности. Вопросу улучшения метрологических характеристик было посвящено большое количество работ, проанализированных в [1]. Однако подавляющее большинство этих работ не рассматривало экономический и технологический критерии проектирования тензодатчиков. При подобном подходе в процесс управления жизненным циклом тензодатчика не вовлекаются такие важные этапы жизненного цикла, как технологическая подготовка производства и само производство датчика.

В данной работе предложена методика определения критериев проектирования датчика, относящихся к вышеупомянутым этапам ЖЦ, а именно: стоимости датчика, которая в основном определяется трудоемкостью изготовления упругого элемента, и влияния погрешностей формы упругого элемента на чувствительность датчика к паразитным силовым факторам.

Влияние погрешностей формы упругого элемента, вызванных несовершенством технологического процесса, определяется путем учета этих погрешностей в геометрической модели упругого элемента с последующим определением напряженно-деформированного состояния упругого элемента при действии измеряемой полезной и паразитной нагрузок методом конечных элементов. Величина чувствительности датчика к паразитным нагрузкам рассчитывается по определенным напряженно-деформированным состоянием с учетом конфигурации мостовой измерительной схемы тензодатчика. Экономический критерий основан на расчете трудоемкости изготовления упругого элемента, расчет проводится по аналитическим зависимостям [2] для нормирования операций механической обработки (точение, фрезерование, и т.д.).

Предложенная методика реализована в виде отдельных модулей, которые предполагается интегрировать в ранее разработанную систему автоматизации принятия решений при управлении ЖЦ тензорезисторных силоизмерительных датчиков [3].

Литература

1. *Stefanescu D.M.* Handbook of force transducers: Principles and Components. — Berlin: Springer-Verlag, 2011. — 612 p.
2. *Силантьева Н.А.* Техническое нормирование труда в машиностроении. — М.: Машиностроение, 1990. — 256 с.

3. *Гаврюшин С.С., Гавриленков С.И.* Методика автоматизированного проектирования силоизмерительных упругих элементов // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред* им. А.Г.Горшкова: Материалы XX Международного симпозиума. – М., 2016. – Т.2. – С. 75 – 76.

РАЗРАБОТКА КОНСТРУКЦИИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО СТЕНДА ДЛЯ ОТРАБОТКИ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ АВТОМОБИЛЬНЫХ ВЕСОВ

Гавриленков С.И.¹, Гаврюшин С.С.¹, Кожеров В.В.¹

(¹МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва)

В настоящее время контроль осевых нагрузок является важной задачей. Наиболее существенным фактором, влияющим на точность автоматических постов весо-габаритного контроля (АПВГК) являются колебания осевой нагрузки транспортного средства. В исследовании [1] было выявлено, что при статической точности весов порядка 1 - 2%, разброс результатов измерения осевой нагрузки (ОН) может достигать плюс минус 10% от истинного значения. Колебания ОН зависят от параметров подвески ТС, дорожного профиля и режима движения ТС.

Совершенствование алгоритмов обработки данных измерений в АПВГК позволит повысить точность получаемых данных. Однако, такие алгоритмы требуют проведения мероприятий по их отладке и испытанию. Такие мероприятия являются весьма трудозатратными, так как требуется выделить транспортное средство, откалибровать его параметры, выбрать существующий участок дороги с АПВГК либо создать участок дороги с АПВГК специально для тестирования. Вместо этого предлагается разработать автоматизированный измерительный стенд для отработки алгоритмов обработки данных автоматических автомобильных весов.

Такой автоматизированный стенд включает в себя модель двухосного транспортного средства (МТС), весоизмерительный модуль, встроенный в стенд, электродвигатель для тяги МТС, акселерометр, установленный на МТС для определения продольного и вертикального ускорений. На рессоры МТС предлагается смонтировать тензометрические датчики для измерения колебаний подпрессоренной массы.

Параметры стенда и МТС определяются исходя из критерия подобия характера колебания ОН модели и реального ТС. В качестве критерия подобия был выбран коэффициент динамической нагрузки, который определяется как отношение среднеквадратического отклонения осевой нагрузки к среднему значению ОН, и соответственно является характеристикой колебаний ОН. В качестве реального

транспортного средства (РТС) был выбран грузовой автомобиль МАЗ 5550, так как при полной загрузке его масса может превышать допустимую по [3]. КДН реального ТС определяется по алгоритму, написанному на языке Python. Затем по другому алгоритму, также написанном на языке Python, определяются основные параметры стенда и тележки, при которых КДН МТС наиболее близок к КДН РТС.

Данный стенд позволит проводить испытания алгоритмов для обработки данных в удобных условиях при низких трудозатратах. Алгоритмы, которые по результатам испытаний дадут положительный результат, могут быть испытаны на реальных АПВГК.

Литература

1. Сенянский М. В. Методологические особенности поосного взвешивания автомобилей // Журнал Законодательная и прикладная метрология. – 2013. - №1. – С. 36-45.

2. Sarah K. Leming Bridge WIM algorithm for estimating axle weights, axle spacing, and other truck parameters: a dissertation doctor of philosophy /Sarah K. Leming. – Norman, Oklahoma, 2002. – 238 p.

3. Об утверждении Порядка осуществления весового и габаритного контроля транспортных средств, в том числе порядка организации пунктов весового и габаритного контроля транспортных средств: приказ Минтранса РФ от 29.03.2018 №119. Доступ из справ.-правовой системы «КонсультантПлюс» (дата обращения: 25.12.2019).

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ УПРУГОДИФFUЗИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ ТИМОШЕНКО С УЧЁТОМ РЕЛАКСАЦИИ ДИФFUЗИОННЫХ ПОТОКОВ

Гафуров У.С.^{1,2}, Земсков А.В.^{1,2}

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

Рассматривается задача о плоских нестационарных поперечных колебаниях балки Тимошенко с эффектами массопереноса и учетом релаксации диффузионных потоков. Балка находится под действием изгибающих моментов и поперечных сил, которые приложены к ее концам. Также на концах балки заданы плотности диффузионных потоков.

Для постановки задачи используется модель связанной упругой диффузии для сплошной среды в прямоугольной декартовой системе координат [1,2]. Из неё, используя принцип Даламбера, а также вводя ряд дополнительных допущений [3] о характере физических полей, получается модель упругого изгиба балки

с учётом диффузии (точка – производная по времени τ , штрих – производная по координате x , $q = 1, N$):

$$\begin{aligned} \ddot{v} - \mu k^2 (v'' - \chi') - \frac{q}{F} = 0, \quad \dot{H}_q + \tau_q \ddot{H}_q - D_q H_q'' - \Lambda_q \chi''' - \frac{z^{(q)}}{J_3} = 0, \\ \ddot{\chi} - \chi'' - \frac{F}{J_3} \mu k^2 (v' - \chi) + \sum_{q=1}^N \alpha_q H_q' - \frac{m}{J_3} = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

Краевые условия, соответствующие физической постановке задачи, имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\chi' + \sum_{q=1}^N \alpha_q H_q \right) \Big|_{x_i=0} = -\frac{M_0}{J_3}, \quad \left(\chi' + \sum_{q=1}^N \alpha_q H_q \right) \Big|_{x_i=1} = -\frac{M_0}{J_3}, \\ v \Big|_{x_i=0} = V_0, \quad v \Big|_{x_i=1} = V_1, \quad H_q \Big|_{x_i=0} = H_{q0}, \quad H_q \Big|_{x_i=1} = H_{q1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные условия полагаются нулевыми.

Здесь все величины являются безразмерными и связаны с размерными аналогами следующим образом:

$$\begin{aligned} x = \frac{x^*}{l}, \quad v = \frac{v^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}^*}{C_{1111}}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}^*}{\rho}, \quad \alpha_q = \frac{\alpha^{*(q)}}{C_{1111}}, \\ D_q = \frac{D^{*(q)}}{Cl}, \quad \Lambda_q = \frac{m^{(q)} D^{*(q)} \alpha^{*(q)} n_0^{(q)}}{\rho RT_0 Cl}, \quad \tau_q = \frac{C \tau^{(q)}}{l}, \end{aligned}$$

где t - время; x^* - декартова координата; v^* - прогиб балки, χ - поворот сечения, l - длина балки; H_q - приращение концентрации q -ой компоненты среды; C_{ijkl} - коэффициент тензора упругих постоянных; ρ - плотность; $\alpha^{*(q)}$ - коэффициент, характеризующий расширение среды за счёт диффузии; $D^{*(q)}$ - коэффициент диффузии; R - универсальная газовая постоянная; T_0 - температура среды; $m^{(q)}$ - молярная масса; $\tau^{(q)}$ - время релаксации, F - площадь сечения; J_3 - момент инерции сечения балки относительно оси Ox_3 ; m - распределённый погонный момент; q - распределённая погонная поперечная нагрузка.

Коэффициент k в уравнениях (1) учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по сечению балки [4]. Если касательные напряжения распределены по формуле Журавского, то для балки прямоугольного сечения единичной толщины и высоты h имеет место равенство $k^2 = 5/6$.

Решение ищется с помощью преобразования Лапласа и рядов Фурье в виде сверток функций Грина с функциями, стоящими в правых частях граничных условий (2).

Литература

1. *Князева А. Г.* Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях – Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2014. – 172 с.
2. *Вестяк А.В., Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная одномерная задача термоупругой диффузии для однородных многокомпонентных сред с плоскими границами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 60, кн. 1. – С. 183–195.
3. *Gafurov U.S., Afanasieva O.A., Zemskov A.V.* Unsteady elastic diffusion oscillations of a Timoshenko beam with considering the diffusion relaxation effects // Proceedings of the second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. Springer Nature Switzerland AG. 2019. P. 193–199.
4. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Общая теория упругих оболочек. М.: МАИ, 2018. 112 с.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С УЧЕТОМ ДАННЫХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Герасимов О.В.¹, Большаков П.В.¹, Харин Н.В.¹, Стаценко Е.О.¹, Саченков О.А.¹

⁽¹⁾Казанский федеральный университет)

Одним из перспективных направлений в моделировании поведения гетерогенных сред является использование данных компьютерной томографии. Эта задача актуальна и в клинической практике [1]. Существует разные подходы к построению моделей элементов пористых сред, деформирующихся под действием внешних нагрузок [2]. Предлагается подход, основанный на учёте особенностей структуры пористого материала, выявленных по данным компьютерной томографии [3, 4], при построении численной модели. На первом этапе исследования методом компьютерной томографии проводится сканирование расчетного образца, и полученные данные оцифровываются, после чего цифровой прототип структуры образца с соответствующими весами вносится в конечно-элементный алгоритм расчета на этапе формирования локальных матриц жесткости расчетной области, интегрирование которых проводится методом центральных прямоугольников.

Проведена оценка влияния данных томографического исследования на сходимость предложенной численной методики, решены тестовые задачи. Приведены результаты решения модельной задачи для участка диафиза бедренной ко-

сти. Полученные численные результаты отображают влияние точности аппроксимации геометрии образца, а также иллюстрируют зависимость поля перемещений от структуры материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160025.

Литература

1. Саченков О.А., Хасанов Р.Ф., Андреев П.С., Коноплев Ю.Г. Численное исследование напряженно-деформированного состояния тазобедренного сустава при ротационной остеотомии проксимального участка бедренной кости // Российский журнал биомеханики. – 2016. – Т. 20. № 3. – С. 257–271.

2. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Заборских А.А. Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15. № 4. – С. 78 – 93.

3. Закиров Т.Р., Галеев А.А., Коновалов А.А., Стаценко Е.О. Анализ "представительного элемента объема" для песчаников ашальчинского месторождения с использованием метода рентгеновской компьютерной томографии // Нефтяное хозяйство. – 2015. – № 10. – С. 54 – 57.

4. Харин Н.В., Воробьев О.В., Бережной Д.В., Саченков О.А. Методика построения репрезентативной модели по данным компьютерной томографии // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 3. – С. 95 – 102.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ НА ПРОЦЕСС НЕСТАЦИОНАРНОГО КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БАЛКИ ТИМОШЕНКО И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО УДАРНИКА

Грицков А.В.¹, Пещерикина О.Н.¹, Федотенков Г.В.^{1,2}, Старовойтов Э.И.³

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва; ³Белорусский государственный университет транспорта, Гомель)

Рассматривается нестационарная контактная задача с подвижными границами для балки Тимошенко бесконечной длины, связанной с упругим основанием, и абсолютно твёрдого ударника, ограниченного гладкой выпуклой поверхностью. В качестве оснований рассматриваются однопараметрическая модель Винклера и двухпараметрическая модель Пастернака. В начальный момент времени балка находится в состоянии покоя, а ударник, движется с заданной начальной скоростью по нормали к недеформированной упругой линии балки.

Постановка задачи включает систему уравнений движения балки Тимошенко с учётом связанности с деформируемым основанием [1-3], уравнение поступательного движения ударника, начальные условия и условия контакта.

Для решения задачи используется метод функций влияния и принцип суперпозиции. В результате задача сводится разрешающей системе уравнений, первое из которых является двумерным интегральным уравнением относительно распределения контактного давления. Ядром этого уравнения выступает нестационарная функция влияния для балки Тимошенко [1-3]. До замкнутой системы уравнений оно дополняется уравнением движения ударника и кинематическим соотношением для определения положения границ области контакта, вытекающим из условия пересечения поверхности ударника с упругой линией балки. Полученная система уравнений решается с помощью численно-аналитического алгоритма, основанного на методе механических квадратур.

Проведен анализ влияния коэффициентов деформируемого основания на процесс нестационарного контактного взаимодействия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-08-00438 А, 20-58-00023 Бел_а).

Литература

1. Грицков А.В., Федотенков Г.В. Нестационарные колебания балки Тимошенко под воздействием различных нагрузок // Материалы XXIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2018., Т. 2. – С. 38-39.
2. Грицков А.В., Федотенков Г.В. Нестационарные поперечные колебания балки Тимошенко // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 16–27 апреля 2018 года. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2018. – С. – 69.
3. Грицков А.В., Федотенков Г.В. Нестационарные поперечные колебания балки Тимошенко, лежащей на упругом основании // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 15–25 апреля 2019 года. Тезисы докладов. – М.: Издательство Московского университета, 2019. – С. 203.

ДЕФЕКТ МОДУЛЯ СДВИГА И ВОЗМОЖНОСТЬ ЕГО ОПИСАНИЯ ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Горшков А.А.¹, Ломовской В.А.²

(¹МИРЭА - Российский технологический университет, ²Институт физической химии и электрохимии имени А.Н. Фрумкина РАН, Москва)

Исследование имеющих релаксационную природу явлений неупругости, проводимое в статических режимах внешнего деформирующего воздействия в изотермических условиях, позволяет определить функцию релаксации только в области температур перехода исследуемой системы из одного агрегатного конденсированного состояния в другое (твердое тела – высоковязкая жидкость и обратно). В этом случае, исследуемая система рассматривается с позиций модельных представлений системы как однородной непрерывной сплошной среды. В этом случае, процесс перехода (процесс стеклования для некристаллических систем) представляется как глобальный процесс релаксации одной структурно-кинетической агрегатной системы. Процесс агрегатного перехода кристаллических систем в данном случае не может рассматриваться с позиций теории релаксационных явлений. Этот процесс в рамках теории наследственной неупругости Больцмана-Вольтерра описывается определенного вида ядром релаксации, в качестве которого принимается, непосредственно получаемая из эксперимента, функция релаксации: $\varphi(t)_{T;\varepsilon}$. В качестве функции релаксации $\varphi(t)_{T;\varepsilon}$ используются различные соотношения, в которые входит время t и время релаксации τ агрегатной структурной системы, т.е. время процесса перехода структурных элементов из термодинамически и механически неравновесного состояния в равновесное состояние. При этом выполняется условие:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t_0 \rightarrow G(t) = G_0 \\ t = \infty \rightarrow G(t) = 0 \end{array} \right., \text{ т.е. система релаксирует полностью и модуль сдвига (упругости) системы изменяется от начального значения (соответствующего температуре исследования) до нуля.}$$

В качестве функции релаксации $\varphi(t)_{T;\varepsilon}$ в статических режимах может использоваться как зависимость напряжения во времени $\sigma(t)_{T;\varepsilon}$, так и зависимость модуля от времени $G(t)_{T;\varepsilon}$, т.е. $\varphi(t)_{T;\varepsilon} \equiv \sigma(t)_{T;\varepsilon} \equiv G(t)_{T;\varepsilon}$,

где $\sigma(t)_{T;\varepsilon} = \sigma(t) / \sigma_0$; $G(t)_{T;\varepsilon} = G(t) / G_0$ – релаксирующий модуль. В качестве функции релаксации $\varphi(t)_{T;\varepsilon}$ для описания процессов стеклования используется дробно-экспоненциальная функция Кольрауша и функция Работнова. В данной работе проводится теоретический анализ использования в качестве функции

релаксации в динамических режимах функции Кольрауша, которая при значении показателя дробности равным единице переходит в обычную экспоненту. Если в статическом режиме термического или механического внешнего воздействия функция релаксации $\varphi(t)_{T;\varepsilon}$ в области температуры стеклования T_g определяется при $T = const$, то в динамических режимах (в частности в режиме свободных затухающих колебаний, возбуждаемых в исследуемой системе) процесс установления равновесного состояния системы наблюдается в широком интервале температур, в некотором диапазоне частот ν колебательного процесса и с различными временами релаксации, которые, в свою очередь, сами являются функцией от температуры исследуемой системы. Таким образом, для динамических режимов внешнего механического воздействия на систему, функция релаксации, в свою очередь, должна определяться функциональной зависимостью вида: $\varphi(t) = f(\nu; T; \tau)$. Сравнение функций релаксации для одной системы при разных режимах внешнего динамического механического воздействия показывает существенное усложнение функции релаксации при переходе к динамическим режимам. Однако динамические режимы позволяют, в отличие от статических режимов, выявлять процессы релаксационной неупругости не только в области температур глобального перехода агрегатного состояния исследуемых конденсированных систем, но и при значительно более низких температурах, где размораживается подвижность не всей структуры системы, а её компоненты или дефекты и примеси. Это локальные релаксационные процессы неупругости, каждый из которых имеет своё время релаксации и свою функцию релаксации. Именно эти локальные диссипативные процессы и приводит к локальным температурно-частотным дефектам модуля и снижению модуля всей системы в целом. Поэтому требуется определить ту функцию того или иного переходного процесса (как глобального, так и локального), которая может быть принята за функцию релаксации той или иной релаксирующей подсистемы. В данной работе в качестве функции релаксации проведен теоретический анализ использования соотношения $G^*(i\omega) \equiv \varphi(t) = f(\nu; T; \tau) \equiv \varphi(\nu; T; \tau)$. В этом случае, уравнение Больцмана принимает следующий вид: $G^*(i\omega) = G_0 + \Delta G \int_0^{\infty} \varphi(\nu; T; \tau) e^{i\omega t} dt$, где $\Delta G^*(i\omega) = G_{\infty} - G_0$.

. При использовании функции Кольрауша данное уравнение принимает вид

$$G^*(i\omega) = G_0 + \Delta G \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\theta}{\tau}\right)^b} e^{i\omega t} d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G^*(i\omega) = G_0 + \Delta G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(nb+1)}{(\omega\tau)^{nb} \Gamma(n+1)} \left[\cos \frac{\pi nb}{2} - i \sin \frac{\pi nb}{2} \right].$$

Учитывая, что комплексный модуль равен сумме динамического модуля $G'(\omega)$ и модуля потерь $G''(\omega)$, т.е. $G^*(i\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$, были проведены теоретические расчеты дефекта модуля $\Delta G^*(i\omega)$ на примере ПЭ в области температур перехода от упругой реакции системы на внешнее динамическое воздействие к высокоэластической реакции. Данные расчеты показали удовлетворительное согласие с температурной зависимостью изменения частоты свободных затухающих крутильных колебаний, а, следовательно, и температурного изменения дефекта модуля данного локального диссипативного релаксационного процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 18-08-00427-а).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯДРА КОЛЬРАУША В ТЕОРЕТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ СПЕКТРОВ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Горшков А.А.¹, Ломовской В.А.²

⁽¹⁾МИРЭА - Российский технологический университет, ⁽²⁾Институт физической химии и электрохимии имени А.Н. Фрумкина РАН, Москва)

Процесс перехода стеклообразующей системы из упругого стеклообразного агрегатного состояния в высоковязкое жидкое агрегатное состояние описывается с позиций феноменологической кинетической теории стеклования. В соответствии с данной теорией каждой температуре соответствует своё термодинамическое равновесное состояние системы. Изменение температуры окружающей среды приводит данную систему в термодинамически неравновесное (относительно окружающей среды) состояние. В результате внутренней структурной перестройки система стремится к новому состоянию термодинамического равновесия. Этот переход представляет собой процесс, требующий определенного времени, зависящего от вязкости системы. Таким образом, переход системы из неравновесного в равновесное термодинамическое состояние за счёт перестройки внутренней структуры этой системы является релаксационным процессом. Этот процесс описывается соотношением:

$$\varphi(t) = \frac{p(t) - p(\infty)}{p(0) - p(\infty)} = \exp \left[- \left(\frac{t}{\tau} \right)^b \right] \quad (1)$$

Соотношение (1) экспериментально обосновано кривыми релаксации напряжения $\varphi(t) = \frac{\sigma(t)}{\sigma_0}$ в изотермических режимах обобщенных внешних статических

воздействий ζ , т.е. $\begin{cases} \zeta = const \\ T = const \end{cases} \Rightarrow \varphi(t)_{\zeta;T}$. В динамических режимах процесс пе-

рехода стеклообразующей системы из упругого стеклообразного агрегатного состояния в высоковязкое жидкое агрегатное состояние описывается углом сдвига фазы δ между напряжением $\sigma(t)_T$ и деформацией системы $\varepsilon(t)_T$. Данный процесс экспериментально наблюдается в виде пика диссипативных потерь на спектре внутреннего трения $tg\delta_i = f(T_i)$. При этом, пик потерь растянут в определенном температурном интервале. Каждой температуре пика потерь соответствует своя функция релаксации $\varphi(t)$. Каждой температуре соответствует своё время релаксации,

определяемое по соотношению: $\tau_i = f(T) \rightarrow \tau_i = \tau_0 \exp \frac{U}{RT_i}$. Кроме

того, изменяется от температуры и частота колебательного процесса, возбуждаемого в исследуемой системе, т.е. $\nu = f(T)$. Таким образом, для динамических режимов функция релаксации зависит от частоты внешнего воздействия ν , температуры T и времени релаксации τ , т.е.: $\varphi(t) = f(\nu; T; \tau)$. Сопоставление функций

релаксации для статического и динамического режимов: $\begin{cases} \varphi(t) = f(t)_{\varepsilon;T;\tau} \\ \varphi(t) = f(t)_{\nu;\tau} \end{cases}$ пока-

зывает их различие в частотных интервалах исследования. Непосредственно определить функцию релаксации по пику диссипативных потерь на спектре внутреннего трения не удаётся, поэтому в качестве переходной функции, растянутой не по времени (как в случае статического режима), а по температуре процесса, может быть использована температурная зависимость частоты $\nu = f(T)$ свобод-

ных затухающих крутильных колебаний, возбуждаемых в системе. Учитывая связь между модулем сдвига G и частотой ν , экспериментально определяется величина дефекта модуля ΔG в температурном интервале проявления диссипативного пика потерь. Именно дефект модуля является той переходной функцией динамического режима, который может быть использован в качестве функции релаксации $\varphi(t) = f(t)_{\nu;\tau}$ и в этом случае функция $\varphi(t) = f(t)_{\nu;\tau} \equiv \exp \left[-\left(\frac{t}{\tau} \right)^b \right]$ мо-

жет быть представлена функцией Колярауша. Однако функция определяется не временем t , а температурой при постоянстве времени (периода θ) колебатель-

ного процесса. Следует отметить, что в динамическом режиме определяется комплексный модуль: $G^*(i\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$. Дефект модуля определяется действительной частью, точнее её температурно-частотной зависимостью, поэтому

$$\Delta G \equiv G'(\omega) \equiv \exp \left[- \left(\frac{\theta}{\tau_0 \exp \frac{U}{RT_i}} \right)^b \right].$$

Теоретический анализ этой зависимости и сопоставление экспериментальных данных с расчетной кривой зависимости $\Delta G = f(\theta; T)$ показал возможность использования функции Кольрауша для определения релаксационной микроненормодности диссипативных процессов. Однако не для всего температурно-частотного интервала проявления этого процесса возможно использование постоянного значения показателя степени дробности b . Для определения величины этого показателя требуется построить графические зависимости $\Delta G = f(\theta; T)$ для различных значений показателя степени дробности b .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 18-08-00427-а).

ИССЛЕДОВАНИЕ НДС И ДИНАМИЧЕСКОГО ОТКЛИКА БЛОКА ВЫБРОСА ПОМЕХОВЫХ ПИРОПАТРОНОВ

Гусев А.Н.^{1,2}, Макаревский И.Д.¹, Рожков Г.А.^{1,2}

(²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, ²АО «ГосМКБ «Вымпел» им. И.И. Торопова», Москва)

В работе рассматривается нагружение блока отстрела помеховых пиропатронов в зависимости от условий отстрела. Блок представляет собой корпус с установленной в нём кассетой, снаряжённой пиропатронами. Исследуется напряженно-деформированное состояние (НДС) системы при различных режимах отстрела. Особенностью данного исследования является моделирование процессов с учетом сил отдачи, возникающих в устройстве при действии выстрела как импульсной нагрузки.

На первом этапе работы была разработана математическая модель, позволяющая рассматривать задачу в динамической постановке. Моделирование конструкции осуществлялось в программном комплексе Femap NX путем создания конечно-элементной сетки с учетом массовых характеристик материалов.

На втором этапе рассматривалось воздействие силы отдачи помехового пиропатрона на узлы крепления конструкции блока к летательному аппарату (ЛА) при различных режимах отстрела. Рассматривалось несколько режимов отстрела: одиночный выстрел, залп из 2-х, 3-х и 4-х стволов. Следует отметить, что воздействие задается в виде треугольного импульса длительностью 30 мс. с интервалами между выстрелами 8 мс..

По результатам исследования было показано, что при залпе из 4-х стволов происходит наложение усилий, не превышающее усилия при залпе из трех стволов. Этот результат позволяет при проведении статических испытаний блока воспроизводить нагрузку от выстрела залпом из 4-х стволов и более, задавая нагрузку только для трех стволов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИРОДИНАМИЧЕСКОЙ ВИБРОПОРЫ С УПРУГИМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ РЕБРИСТЫМ СТАТОРОМ

Гягяева А.Г.¹, Кондратов Д.В.^{1,2,3}, Мозилевич Л.И.², Попова А.А.²

¹Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина- филиал РАНХиГС,

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,

³Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского)

Тонкостенные конструкции, такие как пластины и оболочки применяются в машиностроении, приборостроении, авиакосмической промышленности [1,2,3]. Пластины и оболочки могут иметь ребра жесткости [4, 5]. Рассмотрим физическую модель гидропоры (Рис.1). Жесткий вибратор 1 совершает колебания по гармоническому закону в вертикальной плоскости.

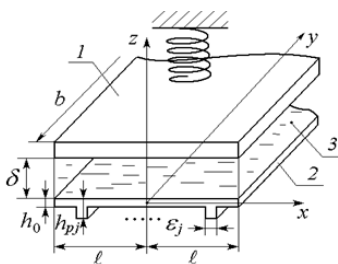


Рис.1.

Упругая ребристая пластина 2 – статор, в отличие от [5] здесь рассматривается геометрически нелинейная пластина. Вязкая несжимаемая жидкость 3 заполняет щель между вибратором и статором. Математическая модель, описанной выше механической системы представляет собой систему уравнений динамики жидкости, уравнений динамики статора, уравнений движения вибратора и соответствующих граничных условий. Таким образом, получили постановку задачи для изучаемой системы.

Выполнено при поддержке РФФИ проекты 18-01-00127а, и 19-01-00014-а.

Литература

1. *Кондратов Д.В.* Гидроупругость силового цилиндра с полым плунжером при свободном истечении жидкости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 25-35
2. *Вельмисов П.А., Манжосов В.К.* Математическое моделирование в задачах динамики виброударных и аэроупругих систем. Ульяновск. 2014. 204 с.
3. *Анциферов С.А., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И.* Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом прибора на вибрирующем основании при несимметричном торцевом истечении // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 25-35
4. *Kondratov D.V., Kalinina A.V., Mogilevich L.I., Popova A.A., Kondratova Y.N.* Mathematical model of elastic ribbed shell dynamics interaction with viscous liquid under vibration // *Vibroengineering Procedia* 2016. С. 300-305
5. *Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Скородумов Е.С.* Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости с упругим трехслойным статором и абсолютно твердым вибратором опоры // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 16-23.

ПРИМЕНЕНИЕ VR- И AR-ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Данилевский А.А., Ахметова Е.Р.

(Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва)

Общеизвестно, что конкурентное преимущество любой компании в условиях рыночной экономики обеспечивается за счёт использования передовых технологий, программных средств и инструментов, одними из которых на данный момент признаны VR-технологии. Они являются, пожалуй, наиболее динамично развивающимся направлением ИТ, позволяющем не только численно моделировать процессы, но и давать их наглядное представление, а также интерактивно взаимодействовать с проектируемым объектом, не зависимо от того, создаём ли мы модель какого-либо явления, процесса или проектируем изделие.

На данный момент VR- и AR-технологии активно внедряются на предприятиях и имеют очень широкий спектр применения. Перечислим наиболее эффективные кейсы отдельно для VR и AR.

Виртуальная реальность [VR]

Кейс 1. Проектирование в виртуальной реальности - возможность просматривать промышленные объекты в виртуальной среде, выявляя коллизии и ошибки на ранней стадии без необходимости физического прототипирования.

Кейс 2. Визуализация цифрового двойника предприятия - возможность перемещения по цифровому двойнику предприятия в реальном масштабе, внесение изменений в данные прямо в VR.

Кейс 3. Обучение сотрудников в виртуальной реальности - виртуальные тренажеры для персонала, позволяющие воссоздать любую ситуацию на промышленном предприятии, в том числе, отработать последовательность действий в случае чрезвычайной ситуации, освоить новое оборудование, пройти курс по повышению квалификации.

Кейс 4. Удаленное взаимодействие в виртуальной реальности - возможность сотрудникам, удаленным друг от друга, обсудить в наглядном формате тот или иной промышленный объект/продукт, сэкономить время специалистов и командировочные издержки.

Дополненная реальность [AR]

Кейс 1. Цифровые инструкции - пошаговые рекомендации, позволяющие сотруднику совершать сборочные операции, операции по обслуживанию и ремонту оборудования с привязкой к конкретным узлам оборудования.

Кейс 2. Удаленный помощник - удаленный специалист на мониторе компьютера видит то же, что и сотрудник на предприятии с помощью камеры на очках. Предусмотрена двусторонняя голосовая связь, возможность с помощью цифровых интерфейсов в пространстве размещать необходимую информацию.

Кейс 3. Наложение цифровой модели на физический объект - путем сравнения позволяет выявить коллизии и ошибки при производстве или строительстве.

Кейс 4. Продажа продукции промышленного предприятия - демонстрация будущего продукта клиенту или партнеру – его характеристик и возможностей – в формате интерактивных анимированных 3d-моделей в размере 1:1. Актуально, если продукт сложный и трудно транспортируемый.

В сфере VR наиболее эффективными и перспективными кейсами являются «Обучение сотрудников» и «Проектирование». Среди AR - «Цифровые инструкции» и «Удаленный помощник».

За последние годы центры и лаборатории виртуального прототипирования были внедрены во всех крупных автомобилестроительных и авиакосмических компаниях мира. Использование перечисленных выше кейсов в промышленности позволяет решать следующие задачи:

- снизить срок разработки изделия (по различным оценкам, от 15 до 30%);
- снизить количество ошибок при разработке как внутри фирмы, так и среди субподрядчиков;
- повысить качество изделия за счет более качественной проработки эргономики, ремонтных и эксплуатационных характеристик;
- повысить удовлетворенность клиента изделием за счет вовлечения его в процесс компоновки;

· снизить ремонтные и эксплуатационные издержки за счет проработки и прототипирования не только самого изделия, но и процессов его производства и последующей эксплуатации.

Литература

1. *Ахметова Е. Р., Данилевский А. А., Пашков В. С., Гуськов М. А.*, Разработка концепта создания межотраслевой VAMR-лаборатории на базе МАИ / Сборник 18-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика», МАИ, г. Москва, Россия.

2. *Екатерина Дегай.* Применение технологий дополненной и виртуальной реальности [AR | VR] на промышленных предприятиях / Доклад с форума AVRA DAYS, ноябрь 2019.

3. *Илья Вигер* Виртуальная реальность в промышленности / Журнал Control Engineering Россия Октябрь 2016.

О РЕАКЦИЯХ В УЗЛАХ НАВЕСКИ РУЛЕЙ ПРИ МНОГОШАРНИРНОМ СОЕДИНЕНИИ СОСТАВНЫХ НЕСУЩИХ И УПРАВЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Джафарзаде А.

(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ)

Для расчета составных несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов необходимо построение расчетных схем, позволяющих учесть совместное деформирование отдельных звеньев такой составной конструкции. Основоположником такого подхода является В.А.Павлов [1]. Такая необходимость вызвана тем, что при соединении несущей и управляющей поверхностей в трех и более точках, то есть статически неопределимым образом, величина реакций в узлах навески рулей существенно зависит от жесткостных характеристик и взаимного расположения звеньев. При отклонении рулей реакции заметно изменяются [2].

На многих летательных аппаратах установлены управляющие поверхности с большим числом узлов навески. Установка большого числа шарниров (узлов) навески делается для того, чтобы увеличить надежность составной конструкции, а также уменьшить нагрузку на каждый узел навески. Но исследования по расчетной схеме, учитывающей совместные перемещения несущей и управляющей поверхностей, показали, что при количестве шарниров больше трех происходит перераспределение реакций – в крайних шарнирах реакции увеличиваются, а средних, наоборот, уменьшаются. При этом, реакции в крайних шарнирах превосхо-

дить реакции, найденные по традиционной методике во много раз. В докладе приводятся результаты численных исследований многос шарнирной составной конструкции.

Литература

1. *Павлов В.А.* Механика авиаконструкций: Статика, устойчивость, катастрофы. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 1999. 162 с.
2. *Tleulinov M.K., Jafarzade A.* Hinge reactions of a statically indeterminate jointed control surface // В сборнике: Journal of Physics: Conference Series 2019. С. 042027.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В СТЕНКАХ КОЛЬЦЕВОГО КАНАЛА, ЗАПОЛНЕННОГО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ОКРУЖЕННОГО УПРУГОЙ СРЕДОЙ

Евдокимова Е.В.¹, Могилевич Л.И.¹, Попов В.С.¹, Попова Е.В.²

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов)

Рассматривается постановка и решение задачи о распространении нелинейных волн деформации в бесконечно длинных соосных оболочках, образующих стенки канала с кольцевым сечением. Канал окружен упругой средой типа Винклера, в которой реакции действуют как в нормальном, так и в продольном направлении. Оболочки полагаются геометрически нелинейными типа Кирхгофа-Лява. Кольцевой канал, образованный двумя оболочками, и внутренняя оболочка заполнены вязкой несжимаемой жидкостью. Ранее в [1,2] рассматривались аналогичные задачи для геометрически и физических нелинейных оболочек без учета инерции движения вязкой жидкости и воздействия на внешнюю оболочку окружающей упругой среды. В предлагаемом исследовании произведен учет данных факторов. Первоначально формулируем связанную задачу гидроупругости, включающую: уравнения динамики оболочек и жидкости, а также условия непротекания на границах контакта жидкость-оболочка и ограниченности на оси симметрии. Используя метод возмущений аналогично [1,2] получена система двух уравнений, описывающих распространение нелинейных продольных волн деформации, в правых частях которых присутствуют напряжения со стороны вязкой жидкости. Производя решение уравнений динамики вязкой жидкости в рамках гидродинамической теории смазки используем метод итераций для учета сил инерции. В результате определяем напряжения жидкости как функции упругих перемещений оболочек и получаем замкнутую систему двух нелинейных уравне-

ний волнового процесса в оболочках. Данные уравнения суть обобщение уравнений Кортевега де Вриза (КДВ). Для их решения получены, с помощью построения базиса Грёбнера, разностные схемы типа Кранка–Николсона. Проведено численное исследование особенностей волнового процесса в стенках изучаемого канала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект 19-01-00014-а.

Литература

1. Блинков Ю.А., Месянжин А.В., Могилевич Л.И. Распространение нелинейных волн в соосных физически нелинейных цилиндрических оболочках, заполненных вязкой жидкостью // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2017. Т. 25, № 1. С. 19–35.

2. Блинков Ю.А., Месянжин А.В., Могилевич Л.И. Распространение нелинейных волн в соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью // Вычислительная механика сплошных сред, 2017. Т. 10(2). С. 172-186.

ВЕРИФИКАЦИЯ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТОНКОСТЕННЫХ ГИБКИХ СИСТЕМ

Дмитриев В.Г., Егорова О.В., Рабинский Л.Н.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ

На основе вариационно-разностного метода с вариационно-разностной дискретизацией континуальной задачи механики тонкостенной конструкции построены математические модели и соответствующие им консервативные разностные схемы для моделирования процессов деформирования неоднородных и многосвязных оболочечных элементов конструкций. Решение нелинейной задачи опирается на метод установления в квазидинамической форме, адаптированной к решению статических задач для тонкостенных неоднородных конструкций как на основе модели Кирхгоффа-Лява, так и Тимошенко-Рейсснера. В рамках оптимального линейного итерационного процесса разработан вычислительный алгоритм, позволяющий на основе однотипной разностной схемы второго порядка точности получать численные решения геометрически и физически нелинейных краевых задач. На основе спектрального подхода получены оценки оптимальных значений параметров итерационного процесса для конструкций как из изотропных, так и многослойных композиционных материалов. Проведен анализ сходимости решений, полученных для многослойных арок и панелей цилиндрических оболочек при произвольных перемещениях и углах поворота нормали с использованием в качестве эталона конечно-элементного решения задачи на базе сертифицированного программного комплекса. Разработана оригинальная мето-

дика ускорения сходимости метода установления, позволяющая существенно сокращать затраты машинного времени при решении нелинейных статических задач для тонкостенных конструкций с особенностями и неоднородностями, и показано, что применение метода квазидинамического установления в сочетании с предложенными дискретными аналогами позволяет существенно сократить потребные вычислительные ресурсы и время счета по сравнению с МКЭ при достижении адекватной точности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00675-а)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЧХ ПРОГИБОВ ТРЕХ СООСНЫХ ОБОЛОЧЕК, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ДВУМЯ ВЯЗКИМИ НЕСЖИМАЕМЫМИ ЖИДКОСТЯМИ МЕЖДУ НИМИ

Елистратова О.В.¹, Кондратов Д.В.^{1,2,3}, Попова Е.В.², Ребрина А.Ю.³

⁽¹⁾Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина- филиал РАНХиГС,
⁽²⁾Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, ⁽³⁾Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов)

В современных машинах и агрегатах широко используют соосные упругие цилиндрические оболочки, взаимодействующие с вязкой несжимаемой жидкостью. Например, в конструкциях плунжерных пар, систем подачи топлива, телескопических шасси и др. [1, 2].

Ранее были рассмотрены три соосных упругих цилиндрических оболочек, между которыми протекает вязкая несжимаемая жидкость, свободно опираемых на концах как при гармоническом перепада давления на концах системы [3], так и при вибрации [4]. Построены амплитудные и фазовые частотные характеристики прогиба каждой из трех упругих оболочек. Проведено численное исследование зависимости поведения амплитудных частотных характеристик прогибов оболочек от физико-механических параметров материала и жидкости и размеров механической системы в широком диапазоне частот вибрации или перепада давления показало, что изменение указанных параметров приводит не только к изменению величины амплитуды, но и к сдвигу резонансных частот по оси частот. Расчеты показали, что для модели при воздействии перепада давления обычно встречаются 6 значимых резонансных частоты в АЧХ, и 9 значимых резонансных частот – для модели при воздействии вибрации. Это объясняется тем, что получившаяся колебательная система «упругая оболочка–вязкая несжимаемая жидкость–упругая оболочка–вязкая несжимаемая жидкость–упругая оболочка» начинает действовать как единое целое, двумерное в первом и трехмерное во втором.

Таким образом, зная диапазон рабочих частот машины или агрегата можно сдвинуть часть резонансных частот в область не рабочих частот

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 18-01-00127а и 19-01-00014-а).

Литература

1. *Елистратова О.В., Кондратов Д.В.* Моделирование динамики трех упругих соосных оболочек свободно опертых на концах, взаимодействующих с двумя пульсирующими слоями жидкости, находящихся между ними при пульсации давления // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 11-15.

2. *Kondratov D.V., Elistratova O.V., Mogilevich L.I., Kondratova Y.N.* Hydroelasticity of three elastic coaxial shells interacting with viscous incompressible fluids between them under vibration // *Vibroengineering Procedia* 32, Dynamics and Acoustics in Automotive Engineering. 2018. С. 157-163

3. *Кондратов Д.В.* Гидроупругость силового цилиндра с полым плунжером при свободном истечении жидкости // Вестник Саратовского госагроуниверситета им. Н.И. Вавилова. 2008. № 1. С. 38-43.

4. *Кондратова Ю.Н., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И.* Гидроупругость трубопровода кольцевого профиля со свободным опиранием при воздействии вибрации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 4 (62). С. 9-14.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТА АВИАКОНСТРУКЦИИ ИЗ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Ершова А.Ю., Мартыросов М.И.

(Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва)

Полимерный композиционный материал (ПКМ) – материал конструкционного назначения, состоящий из высокопрочных (средне- или высокомодульных) волокон (наполнителя) и полимерной матрицы (отвержденного связующего). ПКМ широко применяется в настоящее время в авиационной промышленности.

Важнейшее преимущество ПКМ – возможность создания из них элементов конструкций с заданными свойствами, наиболее полно соответствующими характеру и условиям работы. Многообразие волокон и матричных материалов, а также схем армирования позволяет регулировать прочность, жесткость, уровень рабочих температур и другие свойства путем подбора состава, изменения соотношения компонентов и макроструктуры ПКМ.

Механика разрушения элементов конструкций из ПКМ весьма сложна из-за анизотропии, взаимного влияния напряженно-деформированного состояния (НДС) отдельных монослоев, образующих композитный пакет (КП), специфики структуры и ряда других причин.

Анализ прочности КП обычно сводится к анализу НДС его монослоев и определению их коэффициентов запаса по различным критериям. Минимальный из них определяет запас прочности всего КП.

Для КП не существует однозначного критерия разрушения. Имеющиеся критерии являются феноменологическими и описывают прочность в монослое на основе экспериментов по результатам испытаний на растяжение, сжатие и сдвиг. Критерии разрушения определяют критическую комбинацию действующих в монослое напряжений или деформаций, которая и приводит к разрушению.

У ряда применяемых на практике критериев разрушения КП серьезным недостатком является невозможность определения причины разрушения монослоя (разрушается матрица или волокно). Однако разрушение матрицы отдельного монослоя может не вызвать исчерпания его несущей способности и КП может и далее воспринимать действующую нагрузку (критерии Hill, Hoffman, Tsai-Wu и другие). В настоящее время получили распространение критерии, которые дают возможность определить запасы прочности матрицы и волокна отдельно (критерии Puck, Hashin-Rotem, Chang-Chang).

Математически критерии разрушения, как правило, описываются функциями, значения которых сравниваются с единицей.

В работе рассматривается плоская удлиненная панель прямоугольной формы из углепластика марки BNCF IMS 24K/PRISM EP 2400RS на основе связующего PRISM EP 2400RS производства фирмы Cytec Engineered Materials (США) и углеродной ленты BNCF IMS 24K производства фирмы Toho Tenax (Япония). Связующее – на эпоксидной основе пониженной вязкости (по Брукфильду). Углеродные волокна представляют собой синтетический материал органического происхождения – полиакрилонитрил, насыщенный углеродом. Химические формулы и рецептуры связующего и армирующих волокон являются ноу-хау их производителей. Панель выполнена по безавтоклавной инфузионной технологии. Инфузионная технология – процесс пропитки сухого армирующего наполнителя в виде преформы связующим при комнатных или повышенных температурах за счет создаваемого вакуума. Преформа – предварительно уплотненный с помощью давления и температуры сухой армирующий наполнитель, принимающий форму будущего изделия. Для скрепления армирующего наполнителя в преформе используется биндер (связующий компонент).

Формат укладки панели – смешанный: $+45^{\circ}/-45^{\circ}/0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}/+45^{\circ}/-45^{\circ}/0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}/-45^{\circ}/+45^{\circ}/0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}/-45^{\circ}/+45^{\circ}$ (всего в КП 18 слоев). Характеристики монослоя известны (толщина, плотность, объемное содержание наполнителя,

пределы прочности при растяжении и сжатии вдоль и поперек волокна, предел прочности при сдвиге в плоскости КП, модули упругости при растяжении и сжатии вдоль и поперек волокна, модуль упругости при сдвиге в плоскости КП, коэффициент Пуассона). Исходные данные для расчета являются паспортными (от производителя) и получены экспериментально применительно к монослою. Эти данные соответствуют режиму испытаний RTD (Room Temperature Dry): температура $+23^{0\pm 3}^{\circ}\text{C}$, влажность – в состоянии поставки испытуемых образцов (это состояние, в котором находятся образцы сразу после изготовления, содержание влаги в которых не превышает 10% от максимального влагонасыщения при относительной влажности 85%).

Определяются жесткостные и прочностные характеристики КП. Проводится расчет на прочность данной панели методом конечных элементов (МКЭ) под действием различных комбинаций заданных статических нагрузок (основной вариант нагружения – растяжение-сжатие в двух направлениях и сдвиг). Рассматриваются различные варианты граничных условий. Используются следующие критерии разрушения: maximum stress, maximum strain, Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Tsai-Hill (Hill-Mises), Hankinson, Cowin, Grant-Sanders, Puppo-Evensen, Yamada-Sun, Norris, Fischer (Modified Norris), Norris-McKinnon, Puck, Hashin-Rotem, Cuntze, Chang-Chang, LaRC (Langley Research Center). Дается сравнение полученных результатов по различным критериям разрушения. Сформулированы практические выводы и рекомендации по результатам проведенных в работе исследований.

Ниже приведены ссылки на публикации, которые использовались при подготовке данной работы.

Литература

1. Ян Нант Мин, Аунг Чжо Тху, Мартыросов М.И., Рабинский Л.Н. Выбор рациональных конструктивных решений при проектировании деталей из полимерных композиционных материалов для гражданской авиации // Тезисы докладов VI Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». М., МАИ, 2017 г. С. 122-124.

2. Еришова А.Ю., Мартыросов М.И. Определение механических характеристик монослоя однонаправленного слоистого композита, применяемого в гражданском авиастроении // Сборник трудов 7-ой Всероссийской научной конференции «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». М., ИПРИМ РАН, 2017 г. С. 80-82.

3. Медведский А.Л., Мартыросов М.И., Хомченко А.В. Напряженно-деформированное состояние многослойной композитной пластины при наличии межслоевых дефектов // Известия Тульского государственного университета. науки. Выпуск 8. Тула, изд-во ТулГУ, 2018 г. С. 168-179.

4. *Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В.* Сравнительный анализ критериев разрушения многослойной композитной пластины при наличии межслоевых дефектов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Выпуск 9. Тула, изд-во ТулГУ, 2018 г. С. 399-409.

5. *Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В.* Численное моделирование поведения пластины из полимерного композита под действием динамических нагрузок при наличии множественных дефектов между слоями // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Выпуск 10. Тула, изд-во ТулГУ, 2018 г. С. 271-278.

6. *Ershova A.Y., Kuznetsova E.L., Martirosov M.I., Rabinskiy L.N.* Experimental determination of characteristics of crack-resistance of disperse-strengthened composites based on non-saturated polyesters // Journal of Mechanical Engineering Research and Developments. Vol. 41, No. 3, 2018. P. 33-36.

7. *Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В.* Численное исследование разрушения композитной пластины при наличии межслоевых дефектов различной природы // Сборник трудов «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». М., ИПРИМ РАН, 2019 г. С. 70-76.

8. *Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В.* Поведение полой композитной панели с внутренними повреждениями под действием нестационарной нагрузки // Научно-технический журнал «Строительная механика и расчет сооружений». № 2, ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 2019 г. С. 43-47.

О РАЗЛИЧНЫХ ФОРМАХ КВАЗИКАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА РАСШИРЕННОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА

Жаворонок С.И.¹, Курбатов А.С.²

(¹ ФГБУН Институт прикладной механики Российской Академии наук (ИПРИМ РАН), ² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва)

Рассматривается вариационная формулировка расширенной трехмерной теории N-го порядка неоднородных оболочек. Модель оболочки задана на двумерном многообразии множеством переменных поля 1го рода $u_\alpha^{(k)}$, $u_3^{(k)}$, плотностью функционала Лагранжа \mathcal{L}_S , \mathcal{L}_T и уравнениями связей, следующими из краевых условий, перенесенных с лицевых на реперную поверхность оболочки [1]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S = \mathcal{L}_S \left(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, \dot{u}_\alpha^{(k)}, \dot{u}_3^{(k)}, \nabla_\beta u_\alpha^{(k)}, \nabla_\beta u_3^{(k)} \right), \quad \mathcal{L}_T \left(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)} \right), \quad \alpha, \beta = \overline{1, 2}; \\ f_\pm^\alpha \left(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, \nabla_\beta u_\alpha^{(k)}, \nabla_\beta u_3^{(k)} \right) = 0, \quad f_\pm^\alpha \left(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, \nabla_\beta u_\alpha^{(k)}, \nabla_\beta u_3^{(k)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Переменные поля заданы коэффициентами разложения вектора перемещения по биортогональной системе функций нормальной координаты $\zeta \in [-1, 1]$:

$$u_\alpha^{(k)} = (u_\alpha, \mathbf{P}^{(k)})_1, \quad u_3^{(k)} = (u_3, \mathbf{P}^{(k)})_1, \quad k = \overline{0, N}, \quad (u, v)_1 = \int_{-1}^1 u(\zeta)v(\zeta)d\zeta.$$

Обобщенные уравнения Лагранжа 2го рода системы (1) имеют вид (2) [1]:

$$\begin{aligned} \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} + \nabla_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \nabla_\beta u_\alpha^{(k)}} + \lambda_i^\pm \frac{\partial f_\pm^i}{\partial \nabla_\beta u_\alpha^{(k)}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_\alpha^{(k)}} + \lambda_i^\pm \frac{\partial f_\pm^i}{\partial u_\alpha^{(k)}} \right) &= 0; \\ \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} + \nabla_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \nabla_\beta u_3^{(k)}} + \lambda_i^\pm \frac{\partial f_\pm^i}{\partial \nabla_\beta u_3^{(k)}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_3^{(k)}} + \lambda_i^\pm \frac{\partial f_\pm^i}{\partial u_3^{(k)}} \right) &= 0, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\lambda_i^\pm, \lambda_3^\pm$ - множители Лагранжа. Преобразование Лежандра [2] плотности функционала Лагранжа (1) приводит к плотности гамильтониана \mathcal{H}^0 [3]:

$$\mathcal{H}^0 = p_\alpha^{(k)} \dot{u}_\alpha^{(k)} + p_3^{(k)} \dot{u}_3^{(k)} - \mathcal{L}_S, \quad (3)$$

здесь $p_\alpha^{(k)}, p_3^{(k)}$ - обобщенные импульсы, задаваемые соотношениями (4) (см.[3]):

$$p_\alpha^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} = \rho_{(k)}^{(m)} \dot{u}_{(m)}^\alpha, \quad p_3^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} = \rho_{(k)}^{(m)} \dot{u}_{(m)}^3; \quad \rho_{(k)}^{(m)} = (\rho \mathbf{P}_{(k)}, \mathbf{P}^{(m)})_1. \quad (4)$$

Обобщенные уравнения Гамильтона–Лича [2] системы (1,3) имеют вид (5):

$$\begin{aligned} \dot{p}_{(k)}^\alpha &= \nabla_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \nabla_\beta u_\alpha^{(k)}} + \lambda_i^\pm \frac{\partial f_\pm^i}{\partial \nabla_\beta u_\alpha^{(k)}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u_\alpha^{(k)}} + \lambda_i^\pm \frac{\partial f_\pm^i}{\partial u_\alpha^{(k)}} \right); \\ \dot{p}_{(k)}^3 &= \nabla_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \nabla_\beta u_3^{(k)}} + \lambda_i^\pm \frac{\partial f_\pm^i}{\partial \nabla_\beta u_3^{(k)}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u_3^{(k)}} + \lambda_i^\pm \frac{\partial f_\pm^i}{\partial u_3^{(k)}} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Краевые условия задачи записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left[\nabla_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \nabla_\beta u_\alpha^{(k)}} + \lambda_i^\pm \frac{\partial f_\pm^i}{\partial \nabla_\beta u_\alpha^{(k)}} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}_\Gamma}{\partial u_\alpha^{(k)}} \right] \delta u_\alpha^{(k)} \Big|_{\partial S} &= 0; \\ \left[\nabla_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \nabla_\beta u_3^{(k)}} + \lambda_i^\pm \frac{\partial f_\pm^i}{\partial \nabla_\beta u_3^{(k)}} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}_\Gamma}{\partial u_3^{(k)}} \right] \delta u_3^{(k)} \Big|_{\partial S} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразование Лежандра плотности лагранжиана (1) по всем производным [3] приводит к плотности функционала Гамильтона – де Дондера – Вайля:

$$\mathcal{H}^{DW} \left(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, p_{(k)}^\alpha, p_{(k)}^3, \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}, \sigma_{(k)}^{3\beta} \right) = p_{(k)}^\alpha \dot{u}_\alpha^{(k)} + p_{(k)}^3 \dot{u}_3^{(k)} + \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha^{(k)} + \sigma_{(k)}^{3\beta} \nabla_\beta u_3^{(k)} - \mathcal{L}_S \quad (7)$$

Здесь обобщенные напряжения $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$, $\sigma_{(k)}^{3\beta}$ определяются соотношениями (8):

$$\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} = -\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \nabla_{\beta} u_{\alpha}^{(k)}}, \quad \sigma_{(k)}^{3\beta} = -\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \nabla_{\beta} u_3^{(k)}}. \quad (8)$$

Уравнения де Дондера – Вайля, учитывающие связи (1), имеют вид (9-11):

$$\dot{u}_{\alpha}^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial p_{(k)}^{\alpha}}, \quad \dot{u}_3^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial p_{(k)}^3}; \quad (9)$$

$$\nabla_{\beta} u_{\alpha}^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}} - \lambda_i^{\pm} \frac{\partial f_{\pm}^i}{\partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}}, \quad \nabla_{\beta} u_3^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial \sigma_{(k)}^{3\beta}} - \lambda_i^{\pm} \frac{\partial f_{\pm}^i}{\partial \sigma_{(k)}^{3\beta}}; \quad (10)$$

$$\dot{p}_{(k)}^{\alpha} - \nabla_{\beta} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} = -\frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial u_{\alpha}^{(k)}} - \lambda_i^{\pm} \frac{\partial f_{\pm}^i}{\partial u_{\alpha}^{(k)}}, \quad \dot{p}_{(k)}^3 - \nabla_{\beta} \sigma_{(k)}^{3\beta} = -\frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial u_3^{(k)}} - \lambda_i^{\pm} \frac{\partial f_{\pm}^i}{\partial u_3^{(k)}}. \quad (11)$$

Краевые условия, учитывающие связи (1), записываются в форме (12):

$$\left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \nu_{\beta} - \frac{\partial \mathcal{H}_r^{DW}}{\partial u_{\alpha}^{(k)}} - \lambda_i^{\pm} \frac{\partial f_{\pm}^i}{\partial u_{\alpha}^{(k)}} \right) \Big|_{\partial S} = 0; \quad \left(\sigma_{(k)}^{3\beta} \nu_{\beta} - \frac{\partial \mathcal{H}_r^{DW}}{\partial u_3^{(k)}} - \lambda_i^{\pm} \frac{\partial f_{\pm}^i}{\partial u_3^{(k)}} \right) \Big|_{\partial S} = 0 \quad (12)$$

Уравнения движения (5, 11) и краевые условия (6, 12), в отличие от приведенных в [3], учитывают связи, т.е. обеспечивают точное удовлетворение краевым условиям на лицевых поверхностях при любом порядке теории. Постановка задачи замыкается уравнениями связей (1) и начальными условиями в форме [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 19-01-00695_a, 19-08-00938_a, 17-08-01461_a).

Литература

1. Жаворонок С. И. Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015, т. 21, № 3. – С. 370-381.
2. Лич Дж. У. Волны в сплошных средах. – М: Иностранная литература, 1961. – 173 с.
3. Zhavoronok S. I. On the Hamiltonian formulations of shell and plate theories of Vekua-Amosov type // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017, vol.13, no.4. – Pp. 82-95.

ОБ УРАВНЕНИЯХ СОВМЕСТНОСТИ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Жаворонок С.И.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ

Проекционным методом Галеркина на базе формулировки трехмерной задачи механики деформируемого твердого тела получены уравнения совместности деформаций теории оболочек N -го порядка. Рассмотрены основные варианты внутренних кинематических переменных для оболочки (тензоры дисторсии и деформации), основанные на отнесении к различным базисным триэдрам, связанным с гладкой базисной поверхностью оболочки. Получены три основные формулировки линейного тензора деформации для области трехмерного пространства, занятого оболочкой, и соответствующие формулировки уравнений совместности деформаций. Пространственной редукцией по нормальной координате получены в общем виде для произвольной базисной системы функций уравнения совместности для теории оболочек произвольного порядка. Получены соответствующие формулировки уравнений связей, соответствующих силовым краевым условиям на лицевых поверхностях в расширенной теории оболочек N -го порядка, записанных относительно переменных поля третьего рода (обобщенных деформаций) или обобщенных напряжений, и построены уравнения совместности расширенной теории оболочек N -го порядка. Показано соответствие одной из форм уравнений совместности теории первого порядка уравнениям совместности классических теорий оболочек и существование статико-геометрической аналогии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-01-00695-а и 20-08-00891-а).

ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

Жаворонок С.И.,^{1,2} Киреевков А.А.,¹ Федотенков Г.В.^{1,3}

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, ³НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

Рассматривается динамика тонкой упругой сферической оболочки типа Тимошенко на неподвижной горизонтальной плоскости с учетом трения скольжения, вращающего и качения.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения сферической оболочки типа Тимошенко в системе координат, связанных с главными кривизнами [1], физические и кинематические соотношения, уравнения поступательного и вращательного движения оболочки как абсолютно твёрдого тела, начальные условия. Для моделирования процессов сухого трения предлагается использовать модель Контесу-Журавлёва [2-4]. В нулевом приближении радиус пятна контакта определяется из условия пересечения недеформированной поверхности оболочки с горизонтальной плоскостью. Затем предлагается использовать итерационную процедуру уточнения области контакта, которая в общем случае может быть многосвязной в случае частичного отрыва поверхности оболочки от опорной плоскости.

Для построения распределений контактных напряжений предлагается использовать подход, основанный на методе функций влияния [5-7], согласно которому перемещения оболочки связаны с контактными напряжениями посредством интегральных операторов, ядрами которых выступают функции влияния. Функции влияния представляют собой нормальные, тангенциальные и угловые перемещения оболочки в ответ на воздействие сосредоточенных по времени и по координатам источников внешних возмущений. Для построения функций влияния использованы разложения в ряды по сферическим функциям и интегральное преобразование Лапласа по времени.

В результате построена связанная система разрешающих уравнений, включающая уравнения поступательного и вращательного движения оболочки как абсолютно твёрдого тела с учетом трения, интегральные соотношения связи контактных напряжений с перемещениями оболочки и кинематические соотношения для определения области контакта.

Для решения поставленной задачи предложен численно-аналитический алгоритм с итерационной процедурой уточнения положения границ области контакта.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-08-01120 А).

Литература

1. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Общая теория упругих оболочек: Учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 2018. – 112 с.
2. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762-767.
3. Киреенков А.А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 60-67.

4. *Киреенков А.А.* Метод вычисления силы трения и момента сил трения в комбинированной модели сухого трения для круговых площадок контакта // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 48-53.

5. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Электронный журнал «Труды МАИ». 2014. Вып. 78.

6. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 2. С. 118-128.

7. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2014, №2, С 69-76.

ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ СО СВАРНЫМИ СОЕДИНЕНИЯМИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Зарецкий М.В., Сидоренко А.С.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Сварные соединения, широко используемые в несущих тонкостенных конструкциях, имеют повышенную чувствительность к вибрациям, вызванную в том числе высоким уровнем остаточных технологических напряжений, сопоставимым с пределом текучести материала, и являются одним из основных источников усталостных повреждений.

Решается задача оценки характеристик усталостной долговечности тонкостенной оболочечной конструкции, содержащей непрерывные сварные соединения, при действии случайной кинематической нагрузки в виде широкополосного процесса ускорения. Особенностью исследований является учет влияния остаточных сварочных напряжений на характеристики вибрационных напряжений.

Для определения локального напряженного состояния в зоне сварных соединений разработаны численные модели на основе объемных конечных элементов, позволяющие учитывать существенные нерегулярности распределения напряжений в этих зонах. Моделирование напряженного состояния конструкции проведено для случая действия случайного процесса ускорения в виде «белого шума» со спектральной плотностью соответствующей условиям реальной эксплуатации.

Получено распределение уровней вибрационных напряжений в конструкции, определены величины и максимальных уровней напряжений, которые имеют место в зонах сварных швов. Установлено существенное влияние геометрических параметров и взаимного расположения сварных швов на уровни вибрационных напряжений.

Для оценки долговечности по скорректированной линейной теории накопления усталостных повреждений на основе вычисленных спектральных характеристик вибрационных напряжений в наиболее напряженных зонах конструкции и с использованием алгоритмов статистического моделирования построены реализации случайных процессов напряжений. Методом "дождя" выполнено приведение случайных процессов напряжений к набору эквивалентных по повреждающему действию регулярных циклов и построены функции повторяемости амплитуд процесса напряжений для реализаций различной продолжительности. Адекватность результатов статистического моделирования и приведения набору регулярных циклов подтверждается соответствием распределения значений случайного процесса напряжений распределению Гаусса, а распределения амплитуд - распределению Рэлея.

Непосредственное вычисление характеристик долговечности по спектральной плотности напряжений без моделирования случайного процесса и построения функций повторяемости амплитуд проведено на основе алгоритмов теории спектрального суммирования усталостных повреждений. В рамках этой теории для медианной долговечности \bar{T} при действии стационарного нормального случайного процесса напряжений имеет место соотношение:

$$\bar{T} = \frac{2\pi C}{D_{\sigma}^{m/2} L(m) \left[\int_{\omega} \bar{\Phi}(\omega) \omega^{2/m} d\omega \right]^{m/2}}$$

где $C = N \cdot \sigma^m$ - параметр уравнения кривой усталости, (МПа)^m; D_{σ} - суммарная дисперсия процесса напряжений σ , МПа²; $L(m) = 2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)$ - функция показателя степени кривой усталости m ; Γ - гамма-функция; $\bar{\Phi}(\omega) = S_{\sigma}(\omega)(D_{\sigma})^{-1}$ - нормированная спектральная плотность напряжений $S_{\sigma}(\omega)$, с/рад; ω - частота, рад/с.

Здесь вычисление интеграла от сложной функции, включающей спектральную плотность напряжений проводится с использованием численных алгоритмов.

Получены оценки медианной долговечности рассматриваемой конструкции по двум теориям накопления усталостных повреждений (скорректированной линейной и спектрального суммирования) и с учетом остаточных сварочных напряжений. Дана сравнительная оценка влияния остаточных сварочных напряжений на долговечность рассматриваемой конструкции при заданных условиях случайного нагружения.

Литература

1. Прочность сварных соединений при переменных нагрузках / Под ред. В.И. Труфякова. Киев.: Наукова думка. 1990. - 256 с.

2. Махутов Н.А., Гаденин М.М., Одинцев И.Н. Разумовский И.А. Развитие методов расчетного и экспериментального определения локальных остаточных напряжений при сложных спектрах нагружения // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2015, № 6. - С. 53-62.

3. Зарецкий М.В., Сидоренко А.С. Напряженное состояние авиационной конструкции со сварными соединениями при случайных колебаниях. // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып. 12. С. 476-482.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ МЕХАНОДИФФУЗИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Зверев Н.А.¹, Земсков А.В.^{1,2}

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

Рассматривается полярно-симметричная задача об определении напряженно-деформированного состояния ортотропного сплошного бесконечного цилиндра, находящегося под влиянием нестационарных поверхностных упругодиффузионных возмущений. Уравнения, описывающие связанные упругодиффузионные процессы в N -компонентной среде, в произвольном криволинейном базисе \mathbf{e}_i , имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} &= \nabla_j (C^{ijkl} \nabla_l u_k) - \sum_{r=1}^N \nabla_j (\alpha^{(r)ij} \eta^{(r)}) + \rho F^i \quad (i, j, k, l = \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, N}), \\ \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} &= \nabla_i (D^{(q)ij} \nabla_j \eta^{(q)}) - \frac{m^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0} \nabla_i [D^{(q)ij} \nabla_j (\alpha^{(q)kl} \nabla_l u_k)] + F^{(q)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где t – время; u^i – компоненты вектора механических перемещений; x^j – криволинейные координаты; ∇_j – ковариантная производная по криволинейной координате x^j ; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации вещества; $n_0^{(q)}$ и $n^{(q)}$ – начальная и текущая концентрации q -го вещества в составе N -компонентной сплошной среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества в составе N -компонентной сплошной среды; $\mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$ – тензор упругих постоянных; ρ – плотность

среды; $\mathbf{a}^{(q)} = \alpha^{(q)ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ – упругодиффузионный тензор, характеризующий деформации, возникающие вследствие диффузии; $\mathbf{D}^{(q)} = D^{(q)ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ – тензор самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $\mathbf{F} = F^i \mathbf{e}_i$ – удельная плотность объёмных сил, $F^{(q)}$ – объёмная плотность источников массопереноса.

Далее рассматриваются одномерные (полярно-симметричные) процессы. В этом случае вектор массовых сил и объёмная плотность источников массопереноса будут иметь вид:

$$\mathbf{u} = \{u_r(r), 0, 0\}, \quad \eta^{(j)} = \eta^{(j)}(r), \quad \mathbf{F} = \{F_r(r), 0, 0\}, \quad F^{(q)} = F^{(q)}(r), \quad (2)$$

где r – радиальная координата, u_r и $F_r(r)$ – физические компоненты векторов механических перемещений и массовых сил.

Вычисляя ковариантные производные в (1), с учетом (2), для ортотропной среды получаем

$$\begin{aligned} C_{1111} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_{11}^{(j)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ -\Lambda_{1111}^{(q)} \left(\frac{\partial^3 u_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r^3} \right) + D_{11}^{(q)} \left(\frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r} \right) &= \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Lambda_{1111}^{(q)} = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_{11}^{(q)} \alpha_{11}^{(q)}}{\rho R T_0}.$$

Физические компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_{1111} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{1122} \frac{u_r}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_{11}^{(j)} \eta^{(j)}, \quad \sigma_\varphi = C_{1122} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{1111} \frac{u_r}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_{11}^{(j)} \eta^{(j)}, \\ \sigma_z &= C_{1133} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{1133} \frac{u_r}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_{33}^{(j)} \eta^{(j)}, \quad J_r^{(q)} = \Lambda_{1111}^{(q)} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - D_{11}^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейшем будут рассматриваться два вида граничных условий на каждой из поверхностей цилиндрического тела радиуса R_0 .

$$u_r|_{r=R_0} = f_r(t), \quad \left[\Lambda_{1111}^{(q)} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - D_{11}^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r} \right]_{r=R_0} = f^{(q)}(t), \quad (5)$$

$$\left(C_{1111} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{1122} \frac{u_r}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_{11}^{(j)} \eta^{(j)} \right) \Big|_{r=R_0} = f_r(t), \quad \eta^{(q)} \Big|_{r=R_0} = f^{(q)}(t). \quad (6)$$

Переходя в (3) – (6) к безразмерным величинам (при одинаковом начертании они обозначаются символом «*»), который в дальнейшем опускается)

$$r^* = \frac{r}{L}, u = \frac{u_r}{L}, \tau = \frac{Ct}{L}, c_{12} = \frac{C_{1122}}{C_{1111}}, c_{11} = \frac{C_{1111}}{C_{1111}} = 1,$$

$$C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, D_q = \frac{D_{11}^{(q)}}{CL}, \Lambda_q = \frac{\Lambda_{1111}^{(q)}}{CL},$$

получаем (точка означает производную по времени τ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u - \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r} = \ddot{u},$$

$$-\Lambda_q \left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r^3} \right) + D_q \left(\frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r} \right) = \dot{\eta}^{(q)}. \quad (7)$$

$$u|_{r=c_{12}} = f_r(\tau), \left[\Lambda_q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) - D_q \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r} \right]_{r=c_{12}} = f^{(q)}(\tau), \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta^{(j)} \right) \Big|_{r=c_{12}} = f_r(\tau), \quad \eta^{(q)} \Big|_{r=c_{12}} = f^{(q)}(\tau). \quad (9)$$

Здесь характерный размер L выбирается таким образом, чтобы безразмерный радиус цилиндра равнялся c_{12} .

Решение задач (7), (8) и (7), (9) с нулевыми начальными условиями будем искать в интегральной форме (звездочки обозначают свертку по безразмерным времени τ и радиусу r)

$$u = \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau G_{1m}(r,t) f_m(\tau-t) dt + \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_0^{c_{12}} \tilde{G}_{1m}(r,\xi,t) F_m(\xi,\tau-t) dt d\xi,$$

$$\eta_q = \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau G_{q+1,m}(r,t) f_m(\tau-t) dt + \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_0^{c_{12}} \tilde{G}_{q+1,m}(r,\xi,t) F_m(\xi,\tau-t) dt d\xi.$$

где $G_{km}(r,\tau)$ ($k, m = \overline{0, N+1}$), $\tilde{G}_{km}(r,\tau)$ ($k, m = \overline{0, N+1}$) – соответственно, поверхностные и объемные функции Грина рассматриваемой задачи.

Для нахождения вышеуказанных функций влияния применяются интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды Фурье по функциям Бесселя. Оригиналы функций Грина определяются аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

Литература

1. *Zemskov AV, Tarlakovskii DV*. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2016. Vol 158, No 1, 012101,
2. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Полярно-симметричная задача упругой диффузии для многокомпонентной среды // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – № 80 (1). – с. 5-14.
3. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Полярно-симметричная стационарная задача механодиффузии для изотропного полого цилиндра // Материалы XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. - М.: ООО «ТР-принт», 2017. – с. 128-132
4. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Сплошной ортотропный цилиндр под действием поверхностных полярно-симметричных стационарных возмущений // Материалы XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. - М.: ООО «ТР-принт», 2017. – с. 132-137
5. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Осесимметричная модель механодиффузии для изотропной плоскости // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Международной конференции: в двух томах – Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, Т.1. - 2016. – с. 224 – 229.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВНЕДРЕНИИ ГЛАДКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО УДАРНИКА В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И ПОДВИЖНОСТИ ГРАНИЦ

Казаков Ю.С.¹, Тарлаковский Д.В.^{1,2}

(¹МАИ (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова)

Рассматривается нестационарная контактная задача о внедрении симметричного абсолютно твердого ударника в изотропную упругую полуплоскость с учетом трения и подвижности границ. Используется прямоугольная декартова система координат. В замкнутую систему уравнений входят уравнение поступательного движения ударника и уравнения движения упругой среды относительно потенциалов перемещения при отсутствии массовых сил. Начальные условия полагаются однородными. В области контакта задается равенство нормальных перемещений границы полуплоскости и поверхности ударника, а также связь касательных и нормальных напряжений законом трения Кулона. На свободной поверхности нормальные и касательные напряжения отсутствуют.

Для решения применяются преобразования Фурье по пространственной координате и преобразование Лапласа по времени. Искомые функции представляются в виде сверток с функцией Грина. Получены изображение и оригинал последней. С их использованием построено решение для сверхзвукового этапа внедрения. Показано, что на сверхзвуковом этапе решение не зависит от трения.

На произвольном временном интервале используется численный алгоритм решения разрешающей функциональной системы уравнений, включающей интегральные уравнения относительно контактных напряжений и поступательного движения ударника, а также уравнение для границы области контакта. Для определения направления силы трения применяется итерационный процесс, начальным приближением для которого является решение задачи при отсутствии трения.

Приведен пример расчета для нулевого и первого приближения.

РАЗДЕЛЕНИЕ НАТРИЕВО-СИЛИКАТНОГО СТЕКЛА МЕТОДОМ ЛАЗЕРНОГО УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЯ ПРИ МАЛОМ ПОГЛОЩЕНИИ ЭНЕРГИИ ЛУЧА

Каптаков М.О.¹, Булычев Н.А.^{1,2}, Колесник С.А.¹, Бучанов В.В.³, Муравьев Э.Н.⁴, Ревенко В.И.³

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН (ФИАН), ³Акционерное общество «Научно-исследовательский институт технического стекла им. В.Ф.Солинова», АО «НИТС им. В.Ф.Солинова», Москва, ⁴Академия инженерных наук им. А.М.Прохорова, (АИН им. А.М.Прохорова)

Устоявшиеся в современной промышленности контактные методы разделения стекла давно известны и находят широкое применение. Однако, большое разнообразие форм и размеров вырезаемых заготовок, а также наличие на исходном материале различных дефектов приводят к большому проценту бракованной продукции. Кроме того, края деталей, разделённых контактными методами, содержат множество царапин, микротрещин, задиров и прочих дефектов, приводящих к снижению прочности изделий до значений на два – три порядка меньших предполагаемого порога предельной прочности. Особенно актуальна эта проблема в случае, когда предъявляются повышенные требования к качеству обработки.

В последние десятилетия активно развивается и внедряется в производственные технологии метод лазерной резки хрупких материалов, основанный на явлении разделения материалов упругими силами, возникающими в неоднородных температурных полях. Необходимые для разделения листов натрий-силикатного стекла градиенты температуры возникают в результате локального лазерного

нагрева до температур существенно ниже температуры размягчения стекла, часто, в сочетании с локальным охлаждением. Линия разделения материала плавно следует за лазерным лучом, перемещающимся относительно заготовки. При этом процесс происходит без испарения или возгонки материала. Этот метод был назван лазерным управляемым термораскалыванием и был связан с поверхностным нагревом непрозрачных материалов. Теоретические представления, связанные с поверхностным поглощением излучения в стекле, например, излучения CO₂- лазера с длиной волны 10,6 мкм, по большей части, не применимы для резки, например, неодимовым или иттербиевым лазерами, поскольку в первом случае стекло непрозрачно, а во втором - почти полностью пропускает излучение.

В работе рассмотрены условия управляемого развития сквозной трещины, образованной в результате локального нагрева лазерным излучением в листе натрий-силикатного стекла при условии малого поглощения излучения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕСТРУКЦИИ СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ И ЩЕЛОЧНОЙ СРЕДЫ

Каюмов Р.А.^{1,2}, Мухамедова И.З.¹, Шакирова А.М.²

¹Казанский государственный архитектурно-строительный университет, ²Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Казань)

Волокнистым композитам на основе стекловолокон, подвергнутым механическим воздействиям в агрессивных щелочных средах, характерно изменение их механических свойств. Это приводит к уменьшению с течением времени прочностных, жесткостных характеристик и несущей способности элементов конструкций на основе стеклопластика.

В связи с актуальностью вопроса исследования степени влияния агрессивной среды на изменение механических характеристик стеклопластика, в данной работе построены определяющие соотношения для компонент волокнистого композита, связывающих его статические, кинематические и структурные параметры при наличии агрессивной щелочной среды и силовых воздействий. Предлагаются модель деформирования и методика оценки степени деградации стеклопластика с применением соотношений теории наследственной упругости, ползучести материала, с учетом накопления микроповреждений, старения, под влиянием силовых факторов и агрессивной щелочной среды.

Тензор полной деформации для композита с учетом вязкоупругости, ползучести (вязкопластичности), а также с учетом накопления микроповреждений в фазах стеклопластика представляется в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c + \varepsilon^\omega + \varepsilon^v, \quad (1)$$

где ε^e – упругая часть, ε^v – деформация вязкоупругости, ε^ω – деформация, возникающая от наличия поврежденности, ε^c – деформация ползучести.

Для деформаций ε^v и ε^c , следуя гипотезе Качанова, согласно которому механизмы процессов ползучести и накопления повреждений, в общем, различны и независимы, принимались следующие ниже определяющие соотношения. Для деформация вязкоупругости:

$$\varepsilon^v = \int_0^t H[t - \tau, \sigma_i(\tau)] \sigma(\tau) d\tau . \quad (2)$$

Здесь H - ядро ползучести. Соотношение для скорости деформации ползучести по теории упрочнения принято в виде:

$$\dot{\varepsilon}^c = \sigma_i^m \sigma / \left(\eta^{m+1} (1 + k \varepsilon_i^c) \right), \quad (3)$$

где σ_i , ε_i – интенсивность напряжений и деформаций соответственно, η , k – некоторые характеристики материала.

Под воздействием щелочной среды, происходит старение стеклопластика, т.е. фазовые превращения и изменения его механических характеристик. Этот процесс назовем деструкцией материала под влиянием щелочной среды. Введем в рассмотрение скалярный параметр W_{PH} , который назовем параметром деструкции. Распространение деструкции в толщу материала идет со стороны поверхности, подверженной воздействию щелочи. Под воздействием напряжений появляются микротрещины, которые также со временем растут, то есть ведет к увеличению параметра микроповреждений ω . Параметр W_{PH} считается пропорциональным степени концентрации щелочи γ . Законы распространения W_{PH} и γ вглубь стеклопластика приняты в виде:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial W_{PH}}{\partial t} = \gamma F(W_{PH}, \omega), \quad (4)$$

где $\mu = \mu(\omega, W_{PH})$ - коэффициент диффузии.

Для параметра поврежденности ω , который описывает накопление в материале микротрещин, было принято следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{d\omega}{dt} = B(T) \cdot \eta(\omega, \sigma_i, W_{PH}), \quad (5)$$

где $B(T)$ - некоторая функция температуры T .

Критерий разрушения принимается в виде:

$$\sigma^* = \sigma_0^* (1 - k_0 \omega), \quad (6)$$

где σ^* – текущий предел прочности, σ_0^* – начальный предел прочности.

На основе разработанной авторами конечно элементной модели поведения представительной ячейки плетеного стеклопластика проведены численные эксперименты и получены зависимости долговечности ячейки при изменении различных ее механических и геометрических характеристик.

Работа выполнена в рамках РФФ (проект № 19-19-00059) и РФФИ (проект № 19-08-00349).

Литература

1. *Kayumov R A, Mangusheva A R and Muhamedova I Z* Estimation of durability fabric composite material considering changes of temperature condition // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1158 (2019) 032008

2. *Каюмов Р.А., Сулейманов А.М., Мухамедова И.З., Мангушева А.Р., Шакирова А.М.* Методы оценки прочности и долговечности пленочно-тканевых композиционных материалов: Монография /– Казань: Изд-во КГАСУ, 2015. – 160с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ АРКИ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Каюмов Р.А.^{1,2}, Мухамедова И.З.¹, Шакирова А.М.²

(¹Казанский государственный архитектурно-строительный университет, ²Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань)

Рассматривается трехслойная арка с заземленными концами под действием распределенной поперечной нагрузки. Задача о деформировании арки решается численно. Для анализа напряженно деформированного состояния используется принцип виртуальной работы в приращениях:

$$\iiint_V \{\Delta\sigma\}^T \delta\{\Delta\varepsilon\} dV = \iint_{S_\sigma} \{\Delta P\}^T \delta\{\Delta u\} dS, \quad (1)$$

где $\{P\}$ – вектор поверхностной нагрузки. Задача решается в плоской геометрически нелинейной постановке с использованием Лагранжева подхода, дискретизация задачи по пространственным координатам осуществляется методом конечных элементов, в качестве которых приняты шестиузловые треугольные элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений.

Приращение полной деформации складывается из приращений упругой деформации и деформации ползучести:

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^e\} + \{\Delta\varepsilon^c\}. \quad (2)$$

При вычислении приращений полной деформации использовались геометрически нелинейные соотношения между приращениями деформаций Грина и приращениями перемещений.

Для вычисления приращений деформации ползучести использовалась теория течения в виде:

$$\{\Delta \varepsilon^c\} = f \theta A \{\sigma\} \cdot \Delta t, \quad f \theta = \theta^m, \quad \theta = \{\sigma\}^T [A] \{\sigma\}, \quad (3)$$

где Δt - приращение по времени, A - положительно определенная матрица, составленная из постоянных, характеризующих реологические свойства материала. Связь приращений напряжений с приращениями упругой части деформаций принимается линейной:

$$\Delta \sigma = [D] \Delta \varepsilon^e \quad (4)$$

С учетом (2) - (4) из (1) вытекает уравнение:

$$\int_V \Delta \varepsilon^T [D] \delta \Delta \varepsilon dV = \Delta P^T \delta \Delta u + \int_V \Delta \varepsilon^c{}^T [D] \delta \Delta \varepsilon dV, \quad (5)$$

где

$$\Delta P_{фикс}^e = \int_V \Delta \varepsilon^c{}^T [D] \delta \Delta \varepsilon dV \quad (6)$$

Интегрирование по времени, согласно (3), ведется численно, а значения напряжений в (3) берутся из предыдущего шага.

Под критическим временем (временем потери устойчивости арки) понимается такое время, после которого скорости максимальных перемещений (или какой-либо нормы вектора скоростей перемещений) начинают значительно отличаться от начальных своих значений. По изложенной методике проведены численные эксперименты при варьировании механических и геометрических характеристик трехслойных арок.

Работа выполнена в рамках РФФ (проект № 19-19-00059) и РФФИ (проект № 19-08-00349).

Литература

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1988. - 712с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. - М.: Физматгиз, 1963. - 880с.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. - Киев: Наукова думка. 1973 г. - 272 с.
4. *Паймушин В.Н.* Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней // Изв. РАН. ПММ. 2007. Т.71. Вып.5. - 855-893 с.
5. *Kayumov, R.A., Tazyukov, B.F., Shakirzyanov, F.R., Mukhamedova, I.Z.* Large Deflections of Beams, Arches and Panels in an Elastic Medium with Regard to Deformation Shifts // Lobachevskii Journal of Mathematics. -2019. - V.40, No.3. -P.321-327. DOI: 10.1134/S1995080219030119

6. Каюмов Р.А., Тазюков Б.Ф., Мухамедова И.З., Шакирзянов Ф.Р. Большие прогибы вязкоупругих панелей // Известия вузов. Математика. 2019, №11, с. 80-86.

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ И ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Каюмов Р.А.^{1,2}, Шакирзянов Ф.Р.^{1,2}, Мухамедова И.З.², Шакирова А.М.¹

(¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, ²Казанский государственный архитектурно-строительный университет)

В конструкциях типа трехслойных панелей мягкий наполнитель имеет достаточно малую жесткость на поперечный сдвиг, который может проявлять и свойства ползучести. Это может повлиять как на НДС панели, так и на ее устойчивость. В случае конструкций, изготовленных из линейно вязкоупругих материалов, задачу на основании принципа Вольтерры можно рассматривать как упругую, после решения которой упругие характеристики заменяются вязко-упругими операторами. Поэтому сначала рассмотрена задача о больших прогибах упругих панелей. Система статических и кинематических соотношений в упругой постановке сведена к системе двух нелинейных уравнений относительно прогиба и усилия распора, приведены ее аналитическое решение и примеры числовых расчетов. Особенностью использованного подхода является то, что для прохождения предельных точек не потребовалось применять специальные методы типа методов продолжения по параметру. Выявлены особенности поведения панели, вызванные перестройкой ее геометрии в процессе нагружения. Показано, что учет сдвига приводит к существенному снижению предельной нагрузки, кроме того, панель ведет себя совершенно неожиданным образом, а именно, сначала центральная точка перемещается в направлении, противоположном направлению действия нагрузки, а после прохождения предельной ее величины направление перемещения меняется. Анализ числовых результатов показал, что это происходит по причине существенной перестройки формы панели в результате ее изгиба. При этом после прохождения предельной точки знак кривизны оси линии в отличие от первоначальной становится разной слева и справа от центральной точкой.

С учетом того, что в волокнистых материалах ползучесть материала проявляется в основном при сдвиге, полученное решение обобщается на случай линейно вязкоупругих панелей. На основании принципа Вольтерры после решения упругой задачи жесткостные характеристики заменены вязко-упругими операторами. Показано, что при этом не требуется использования прямых и обратных преобразований Лапласа. Кроме прямой задачи об отыскании зависимости прогибов от заданной нагрузки рассмотрено решение обратной задачи отыскания

критического времени, при котором происходит потеря устойчивости панели при заданной нагрузке (задачи оценки долговечности панели). В случае использования в законе ползучести ядра Абеля для критического времени получено явное выражение.

Работа выполнена в рамках РФФ (проект № 19-19-00059) и РФФИ (проект № 19-08-00349).

НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСЧЕТ БАЛОЧНОЙ ПЛИТЫ НА КЛИНОВИДНОМ ОСНОВАНИИ

¹Козунова О.В., ²Пусенков А.Г.

¹(Белорусский государственный университет транспорта, Гомель)

²(ОАО «Гомельский домостроительный комбинат», Гомель)

В предлагаемой работе решается контактная задача линейной теории упругости в нелинейной постановке (плоская деформация): *балочная плита - клиновидное основание (двуслойное основание с наклонным слоем)* [1]. Слои упругого основания имеют ступенчатую границу разделения под наклоном к горизонтали. Метод решения – численно-аналитический: вариационно-разностный метод (ВРМ) [2], который позволяет полностью описать напряженно-деформированное состояние (НДС) нелинейно-упругого основания, вычислить его осадки, внутренние усилия в балочной плите, а также исследовать контактную зону. ВРМ численно реализуется в программном пакете *Mathematica*.

Постановка задачи. Балочная плита на клиновидном основании находится под действием внешней нагрузки $q(x)$. Параметры плиты: ширина $2l$, высота h , изгибная жесткость EJ . Клиновидное основание при расчете заменяется прямоугольной расчетной областью, на границах которой перемещения равны нулю; в контактной зоне справедливо равенство осадок основания прогибам плиты. Основание аппроксимируется разбивочной сеткой конечных размеров с постоянным шагом по осям.

Гипотезы и допущения теории упругости, используемые в расчет: в зоне контакта плиты с упругим основанием возникают нормальные напряжения; касательные напряжения в контактной зоне малы и ими можно пренебречь; для балочной плиты справедливы гипотезы теории изгиба.

Расчет. Контактная задача решается в нелинейной постановке с использованием функционала полной энергии расчетной модели «балочная плита – клиновидное основание». Функционал полной энергии получается суммированием функционала энергии деформаций упругого основания U_f , функционала энергии изгиба плиты Ω_b и потенциала внешней нагрузки Π

$$\mathcal{E} = U_f + \Omega_b + \Pi. \quad (1)$$

Первое и третье слагаемые в формуле (1) определяется дифференциальными соотношениями [2]. В ходе численного решения нелинейной задачи дифференциальные соотношения формулы (1) заменяются на конечно - разностные аппроксимации.

Расчет балочной плиты на клиновидном основании предполагает итерационный процесс метода упругих решений [3]. Имея значения напряжений и перемещений, полученных в результате решения задачи в первом приближении, определяется *касательный модуль упругости* (2) для каждой ячейки. Задача решается во втором и последующих приближениях, с учетом изгибной жесткости балочной плиты. При каждой итерации модуль упругости в i -той точке m -ого упругого слоя основания изменяется, поэтому при вычислениях используется переменный (касательный) модуль упругости для n -ой итерации

$$E_{im}^{(n)} = \operatorname{tg} \beta_i = \frac{d\sigma_i^{(k)}}{d\varepsilon_i^{(k)}} = \frac{E_{0m}}{ch^2 \left(\frac{E_{0m}}{\sigma_{um}} \varepsilon_i^{(n-1)} \right)} \quad (2)$$

Где σ_{um} , E_{0m} - предел текучести и начальный модуль упругости m -ого слоя $\sigma_i^{(k)}$, основания; $\varepsilon_i^{(k)}$ - интенсивности напряжений и деформаций в центре k -той ячейки упругого основания; $\varepsilon_i^{(n-1)}$ - интенсивность деформаций для $(n-1)$ итерации.

Итерационный процесс заканчивается, как только разница между последующим и предыдущим приближением исследуемой функции будет соответствовать требуемой точности решения задачи

$$\delta_f = \frac{f_{\max}^{(n)} - f_{\max}^{(n-1)}}{f_{\max}^{(n)}} \cdot 100\% \leq \xi. \quad (3)$$

Полученные численные результаты подтверждают корректность алгоритма нелинейного расчета с использованием метода упругих решений в итерациях, и возможность использования компьютерной программы *Mathematica* для инженерного расчета по второй группе предельного состояния (по деформациям) клиновидных оснований под балочной плитой, характеристики которых приближены к реальным условиям.

Литература

1 Босаков, С. В. Изгиб балок расположенных вблизи откоса / С. В. Босаков, Н. М. Фомичева // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1988. – № 2. – С. 26 – 28.

2 Козунова, О. В. Особенности проектирования плитных фундаментов на многослойных основаниях со слабыми слоями грунтов / О. В. Козунова // Реко-

мендации по проектированию и устройству рациональных фундаментов на основаниях, сложенных озерно-ледниковыми и лессовидными грунтами : Р 5.01.056.09 : введ. 01.10.09. – Минск : Стройтехнорм, 2009. – Гл. 8. – С. 39–47.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Колесник С.А., Селиванова О.С.

(Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет))

В анизотропных средах волновой теплоперенос описывается волновым уравнением теплопроводности, содержащим смешанные производные. Для процессов, описываемых такими уравнениями, тепловые потоки в разных направлениях имеют различные скорости. Моделирование теплопереноса в анизотропных средах на основе новых аналитических решений рассматривалось в работах [1–4].

В данной работе на основе полученного аналитического решения задачи о волновом теплопереносе в анизотропном полупространстве под действием нестационарного точечного источника тепловой энергии исследуется неравновесное тепловое состояние, возникающее вследствие отставания плотности теплового потока от градиента температур на время релаксации. Такая неравновесность наблюдается в быстропротекающих процессах, например, релятивистской механики или при высоких скоростях нагрева в окрестности начального момента времени, соизмеримого со временем релаксации. Сформулирован новый закон волнового теплопереноса на основе расширенной гипотезы Вернотта-Каттанео-Лыкова, имеющего форму закона Фурье и выведено волновое уравнение теплопереноса параболического типа с запаздывающим аргументом по времени, равным времени релаксации.

Анизотропия тела имеет место в плоскостях, параллельных границе полупространства, а в направлении оси, перпендикулярной этим плоскостям, тело остается изотропным.

В работе проведено исследование неравновесного теплопереноса в анизотропном полупространстве под действием нестационарного точечного источника тепловой энергии на основе нового аналитического решения. Ранее математическое моделирование волнового теплопереноса системно рассматривалось в монографии [1].

Существенный вклад в определение времени тепловой релаксации в линейных и нелинейных средах, а так же при построении термодинамической теории теплопроводности с памятью и конечной скоростью распространения тепловых

возмущений, внесли авторы работ [5-12].

Анализ результатов показывает, что неравновесность существенно сказывается при очень малых временах наносекундных длительностей. При этом изотермы имеют вид эллиптических параболоидов, распространяющихся со временем вглубь тела. Полученное аналитическое решение в дальнейшем можно использовать при исследовании теплообмена в условиях фазовых превращений при образовании кратеров.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 18-01-00446 А).

Литература

1. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Математическое моделирование аэродинамического нагрева затупленных анизотропных тел // М.: Изд-во МАИ, 2016.- 160с.
2. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Методика, алгоритм и программный комплекс по определению теплового состояния охлаждаемых микро ракетных двигателей //Труды МАИ. 2014. №78.
3. Колесник С. А., Формалев В. Ф., Селин И. А. Математическая модель и программный комплекс сопряженного теплообмена между вязкими газодинамическими течениями и охлаждаемыми лопатками газовых турбин //Труды МАИ. 2015. №80.
4. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Селин И.А. О сопряженном теплообмене при аэродинамическом нагреве анизотропных тел с высокой степенью анизотропии //Тепловые процессы в технике. 2016. Т.8, №9. С.388-394.
5. Колесник С.А. Метод идентификации нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов //Математическое моделирование. 2014. Т. 26, №2. С. 119-132.
6. Колесник С.А. Идентификация компонентов тензора теплопроводности анизотропных композиционных материалов //Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т.18, №1. С. 111-120.
7. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование теплового состояния анизотропной пластины при наличии теплообмена на свободных границах //Математическое моделирование. 2003. Том 15, №6. С.107-110.
8. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование сопряженного теплообмена на границах анизотропных тел //Теплофизика высоких температур. 2002. Том 40, №6. С.993-999.
9. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Влияние продольной неизотермичности на сопряженный теплообмен между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами //Теплофизика высоких температур. 2009. Т.47, №2. С.456-463.

10. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А. Аналитическое исследование теплопереноса при плёночном охлаждении тел //Теплофизика высоких температур. 2006. Т.44, №1. С.107-112.

11. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Сопряженный теплоперенос между пристенными газодинамическими течениями и анизотропными телами //Теплофизика высоких температур. 2007. Т.45, №1. С.85-93.

12. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Методология решения обратных коэффициентов задач по определению нелинейных теплофизических характеристик анизотропных тел //Теплофизика высоких температур. 2013. Т.51, №6. С.875-883.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Коребо Я.А.

(Белорусский государственный университет транспорта, Гомель)

Трехслойные конструкции широко применяются в строительстве и промышленности. В работах [1, 2] рассмотрено деформирование трехслойных стержней и цилиндрических оболочек при статическом терморadiационном воздействии. Статьи [3–5] посвящены исследованию колебаний трехслойных круговых пластин постоянной толщины, скрепленных с упругим основанием. Здесь рассматривается постановка начально-краевой задачи о колебаниях сплошных несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин круговой формы ступенчато-переменной толщины с легким наполнителем.

Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого (не работающего в тангенциальном направлении) наполнителя ($h_3 = 2c$) справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Проекция внешней нагрузки на вертикальную ось координат – $q = q(r, t)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

Рассматривается осесимметричная задача, поэтому тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют ($u_\varphi^{(k)} = 0$, k – номер слоя) и искомые прогиб пластины w , относительный сдвиг в наполнителе ψ и радиальное перемещение срединной плоскости u не зависят от координаты φ , то есть $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$.

Уравнения движения пластины выводятся при помощи вариационного принципа Гамильтона–Остроградского:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - W + A) dt = 0,$$

где A – потенциал внешних нагрузок и контурных усилий, W – потенциальная энергия деформации, K – кинетическая энергия системы.

Литература

1. Старовойтов Э.И., Журавков М.А., Леоненко Д.В. Трехслойные стержни в терморadiационных полях. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.
2. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Тарлаковский Д.В. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.
3. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Тарлаковский Д.В. Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании // Механика композитных материалов. – 2015. – 51, № 5. – С. 793–806.
4. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок // Механика композитных материалов. – 2016. – 52, № 5. – С. 943-954.
5. Леоненко Д.В. Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – №3. – С. 42–47.

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА НА РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК

Коровайцев А.А.¹, Коровайцева Е.А.²

(¹АО «НИИ автоматической аппаратуры им. академика В.С. Семенихина»,
²НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)

Рассматривается задача осесимметричного деформирования мягкой оболочки вращения из нелинейно упругого материала. Исследуемый в процессе нагружения диапазон деформаций и перемещений не ограничивается. Для построения разрешающей системы дифференциальных уравнений используется общая теория больших деформаций мягких оболочек [1]. Считается, что оболочка нагружена внутренним давлением, а ее напряженное состояние двухосное. Поведение оболочки описывается системой уравнений, образованных нелинейными дифференциальными и дополнительными алгебраическими соотношениями. Граничные условия в общем случае записываются в виде системы нелинейных уравнений, накладывающих ограничения на переменные задачи в ее начальной и конечной точках.

Для решения полученной нелинейной краевой задачи с дополнительными алгебраическими соотношениями используется алгоритм метода дифференцирования по параметру. При этом исходная задача приводится к двум взаимосвязанным: квазилинейной краевой и нелинейной начальной задачам. Реализация алгоритма указанного метода для задач теории мягких оболочек имеет ряд особенностей, связанных, в частности, с вырождением матрицы Якоби системы квазилинейных дифференциальных уравнений при отсутствии предварительного напряженного состояния мягкой оболочки. Поэтому на начальном участке построения решения применяется регуляризация решения, заключающаяся в построении на всем участке разрешающей системы уравнений теории мягких оболочек с решением, близким к решению исходной задачи, но не имеющей плохой обусловленности.

Приводятся результаты решения задач о раздувании полусферы из материала, описываемого соотношениями Трелоара, с различными условиями закрепления. Исследовано влияние следующих параметров вычислительного алгоритма на результаты расчетов:

- величина предварительного внутреннего давления;
- величина начального и максимально допустимого шага по параметру дифференцирования;
- число шагов по параметру, на которых проводится регуляризация решения;
- способы расчета напряженного состояния при построении системы регуляризирующих уравнений.

В целом проведенные вычисления показывают, что некорректный выбор хотя бы одного из указанных параметров вычислительного алгоритма может привести к неверному решению задачи или потере устойчивости счета. Отмечено также влияние условий закрепления полусферы на особенности такого выбора.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы (проект 19-38-70005 мол_a_мос).

Литература

1. *Усюкин В.И.* Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 1. С. 70 – 75.

ВЫДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РЕЛАКСАЦИИ В СЛОЖНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ ПРОЦЕССАХ (β_k - ПРОЦЕСС В ПЭ)

Кречетова М.М.¹, Ломовской В.А.^{1,2}, Шатохина С.А.²

(¹ МИРЭА – Российский технологический университет (Институт тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова), Москва, ² Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина Российской академии наук, Москва)

Аморфно-кристаллическая структура ПЭ характеризуются сложным релаксационным поведением [1,2]. Статические исследования физико-механических характеристик полиэтиленов с различной M_w позволяют определить пределы текучести σ_m и их зависимости от температуры. Это, в свою очередь, позволило провести исследование релаксационных процессов при $\sigma \approx \sigma_m$, т. е. $\sigma = f(t)$ и установить, что реакция исследуемых систем является сложной и характеризуется двумя областями зависимости напряжений: $\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} = \sigma(t)_T + \sigma_{const}$. В этом случае вся структурная система исследуемого образца ПЭ может быть представлена в виде совокупности двух структурно-кинетических подсистем, квази-независимо реагирующих на внешние деформирующее воздействие. Феноменологически описать общую реакцию исследуемой системы в этом случае возможно с использованием модели стандартного линейного тела:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1}{\eta_1} \cdot \sigma = \left[(E_0 + E_1)i\omega + \frac{E_0 E_1}{\eta_1} \right] \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

где σ - напряжение в поперечном сечении образца; E_0 и E_1 - модули упругости I и II подсистем; η_1 - вязкость II подсистемы; ω - частота.

Решением уравнения (1) для затухающего колебательного процесса, возбужденного в исследуемой системе является соотношение:

$$\lambda_i = 2\lambda_{i_{\max}} \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2)$$

где λ_i и $\lambda_{i_{\max}}$ - текущее и максимальное в пике потерь.

На спектре внутреннего трения $\lambda = f(t)$, значение логарифмического декремента; τ - время релаксации. Полученные спектры $\lambda = f(t)$ для ПЭ выявляют два локальных диссипативных процесса в различных температурных интервалах [1]. Однако, и в этом случае температурный интервал проявления этого процесса 100 градусов, а частота свободных затухающих крутильных колебаний в этом же температурном интервале изменяется от ~ 4 Гц до ~ 2 Гц. В таком узком частотном интервале можно может быть использована для модельных представлений

стандартного линейного тела дробно-экспоненциальная формула Работнова в виде [3,4]:

$$\varphi(t) = \mathfrak{E}_{\gamma-1} \left(\frac{t}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma^{(n+1)}]} \quad (3)$$

Для выявления связи между соотношением (1-3) используется введение комплексного модуля $E^*(i\omega)$ в общем соотношении: $\sigma(t) = E^*(i\omega)\varepsilon(t)$

где
$$E^*(i\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega); \quad E'(\omega) = E_1 + \frac{E_{II}\eta_{II}^2\omega^2}{E_{II}^2 + \eta_{II}^2\omega^2} \quad (4)$$

$$E''(\omega) = \frac{E_{II}^2\eta_{II}\omega}{E_{II}^2 + \eta_{II}^2\omega^2}; \quad \lambda = \frac{1}{\pi} \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)}.$$

Учитывая соотношения (4) и используя преобразования Лапласа для функции Работнова (3) и тригонометрические функции, входящие в ряд, удаётся построить нормированные зависимости $\lambda_i / \lambda_{i_{\max}}$ при различных значениях параметра дробности γ , который может служить характеристикой релаксационной микронеоднородности релаксирующей структурно-кинетической подсистемы в комбинированном образце. Однако, это возможно лишь в узком частотном диапазоне, т. к. ранее было показано, что ядро Работнова в широком частотном диапазоне не может быть использовано вследствие несоблюдения некоторых требований к сходимости функции и её образа [5].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-08-00427 и №19-33-90105.

Литература

1. Ломовской В.А., Мазурина С.А., Симонов-Емельянов И.Д., Киселев М.Р., Константинов Н.Ю. Релаксационная спектроскопия полиэтиленов с разной молекулярной массой. — М.: Материаловедение, 2018. — №7. — С. 9 – 17.
2. Алехина Р.А., Ломовской В.А., Симонов-Емельянов И.Д., Шатохина С.А. Релаксационная и физико-механические характеристики полиэтиленов с различной молекулярной массой. – М.: Тонкие химические технологии, 2019. — Т.14. – №6. — С. 61 — 71.
3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1974. — С. 383.
4. Андреев И.В., Мазурин О.В. Исследование реологических свойств оконного стекла динамическим механическим методом. // Физ. и хим. стекла, 1980. — Т.6. — № 2. — С. 203 – 210.

5. Валишин А.А., Горшков А.А., Ломовской В.А. Релаксационные процессы и их спектры в ликвирующих стеклах // Изв. РАН. МТТ, 2011.– № 2. – С. 169 – 182.

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ В ЗАДАЧЕ О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ НАГРЕТОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Кузнецов Е.Б.¹, Леонов С.С.^{1,2}

(¹Московский авиационный институт, ²Российский университет дружбы народов, Москва)

Рассматривается задача о неустановившейся ползучести равномерно прогретой до температуры $T = 450$ °С толстостенной цилиндрической трубы постоянной толщины из сплава АК4-1Т, подверженной действию постоянного внутреннего давления P . Для описания данной задачи с учетом больших перемещений используется система определяющих уравнений энергетического варианта теории ползучести совместно с условием пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформации вида [1]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{B \cdot \sigma_i^n}{A^\alpha (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \frac{3\sigma_r}{2\sigma_i^2}, \quad \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \frac{3\sigma_\varphi}{2\sigma_i^2}, \quad t \in [0; t_*], \quad x \in [x_1, 1] \quad (1)$$

с начальными условиями

$$A(0, x) = \varepsilon_r(0, x) = \varepsilon_\varphi(0, x) = 0 \quad \forall x \in [x_1, 1]. \quad (2)$$

Здесь $A(t, x)$ – удельная работа рассеяния, $\varepsilon_r(t, x)$, $\varepsilon_\varphi(t, x)$ – радиальная и тангенциальная компоненты деформаций ползучести, t – время, $x = r/R_2$ – безразмерный радиус, r – радиальная координата точки трубы до деформации, R_1 и R_2 – начальные внутренний и внешний радиусы трубы, $\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2}$ – интенсивность напряжений, $\sigma_r(t, x)$, $\sigma_\varphi(t, x)$ – радиальная и тангенциальная компоненты напряжений, t_* – момент разрушения конструкции, A_* – критическое значение удельной работы рассеяния, $x_1 = R_1/R_2$, B, n, m, α – характеристики ползучести материала. Решение задачи (1)-(2) ищется при фиксированном значении аргумента x , что дает возможность заменить частные производные на полные.

Значения компонент напряжений вдоль сечения трубы в каждый момент времени находятся из решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{x} \cdot e^\beta, & \beta = \frac{1+\nu}{E} \cdot (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi, \\ \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial x} = \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{x} \cdot e^\beta + \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot (e^\beta - 1) + \frac{\nu \cdot E}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} - \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial x} \end{cases} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\sigma_r(t, x_1) = -P, \quad \sigma_r(t, 1) = 0 \quad \forall t \in [0, t_*], \quad (4)$$

где E – модуль упругости, ν – постоянная Пуассона. Значения всех материальных констант приводятся в монографии [1]. Здесь $e^\beta = \exp(\beta)$.

Опуская частные вопросы численного решения начальной (1)-(2) и краевой (3)-(4) задач, отметим их две существенные особенности. Во-первых, задача (1)-(2) при учете стадии неустановившейся ползучести, т. е. при $\alpha > 0$, имеет две предельные особые точки – в начальный момент времени и в момент разрушения при $A = A_*$. Это делает явные методы численного решения малоэффективными для данного класса задач. Во-вторых, при граничных условиях (4) задача (3)-(4) является недоопределенной, поскольку на внутреннем радиусе не задано значение тангенциальной компоненты напряжений. Это приводит к необходимости применения специальных искусственных приемов при численном решении. Указанные особенности существенно усложняют процесс численного решения. Однако, если недоопределенность граничных условий в общем случае устранить не удастся, то предельные особые точки можно эффективно преодолевать, используя метод продолжения решения по наилучшему аргументу [2].

Метод продолжения решения состоит в замене исходного аргумента t на новый аргумент λ , отсчитываемый по касательной к интегральной кривой задачи (1)-(2) и записываемый в скалярной форме

$$(d\lambda)^2 = (dA)^2 + (d\varepsilon_r)^2 + (d\varepsilon_\varphi)^2 + (dt)^2. \quad (5)$$

Полагая, что аргумент t зависит от λ , можно преобразовать систему (1) к аргументу вида (5). В результате получим преобразованную систему

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda} = \frac{2B \cdot \sigma_i^{n+2}}{Q(t, x)}, \quad \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \lambda} = \frac{3\sigma_r \cdot B \cdot \sigma_i^n}{Q(t, x)}, \quad \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \lambda} = \frac{3\sigma_\varphi \cdot B \cdot \sigma_i^n}{Q(t, x)}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega(A)}{Q(t, x)}, \quad (6)$$

где $Q(t, x) = \sqrt{\omega^2(A) + 4B^2 \cdot \sigma_i^{2(n+2)} + 9\sigma_r^2 \cdot B^2 \cdot \sigma_i^{2n} + 9\sigma_\varphi^2 \cdot B^2 \cdot \sigma_i^{2n}}$, функция $\omega(A) = 2\sigma_i^2 \cdot A^\alpha (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^m$, $\lambda \in [0, \lambda_*]$.

Начальные условия для системы (6) примут вид

$$A(0, x) = \varepsilon_r(0, x) = \varepsilon_\varphi(0, x) = t(0) = 0 \quad \forall x \in [x_1, 1]. \quad (7)$$

Преобразованная система (6) не имеет особых точек. Это означает, что начальная задача (6)-(7) может быть решена при помощи явных методов. В результате удастся сократить время счета вдвое при сохранении точности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 18-38-00424мол_а, 19-08-00718А).

Литература

1. *Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф.* Энергетический вариант теории ползучести. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. 96 с.

2. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИНТЕНСИВНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Курбатов А.С.¹, Жаворонок С.И.²

(¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ² ФГБУН Институт прикладной механики Российской Академии наук (ИПРИМ РАН), Москва)

Рассматривается задача динамической потери устойчивости весьма тонкой функционально-неоднородной цилиндрической оболочки при различных типах граничных условий и различных видах динамического температурного воздействия. Деформирование оболочки предполагается нелинейным [1]. Постановка задачи опирается на вариационный принцип Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона оболочки как непрерывно-дискретной системы выводятся с помощью преобразования Лежандра. Далее задача сводится к нахождению собственных значений и векторов симплектических матричных операторов. Показана возможность разделения решения на симметричные и несимметричные формы потери устойчивости. В результате решения получены зависимости параметров критических нагрузок от вида нагрузки и геометрических параметров модели оболочки. Полученные предложенным методом аналитические решения задачи о динамической неустойчивости тонкой оболочки сравнивались с численными решениями на базе как собственных моделей, так и стандартных конечно-элементных комплексов прикладных программ. Результаты показали хорошую сходимость, при этом использование стандартных конечно-элементных решателей в разы увеличивает время счета при той же точности, что и обеспечиваемая предложенным методом, основанным на обобщенном гамильтоновом формализме механики тон-

ких оболочек. Разработанный метод может быть положен в основу решения существенно нелинейных задач о динамической устойчивости оболочек с изгибной жесткостью, стремящейся к нулю, находящихся под действием давления наддува и обтекающего потока газа, равно как и одномерных гибких систем (тросов, кабелей) в потоке [2], а также при исследовании неустойчивости тонкостенных систем при интенсивном тепловом воздействии [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 19-08-00938-а, 17-08-01461-а).

Литература

1. *Dmitriev V.G., Biryukov V.I., Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I.* Nonlinear deforming of laminated composite shells of revolution under finite deflections and normals rotation angles. Russian Aeronautics. 2017. Т. 60. № 2. С. 169-176.
2. *Danilin A. N., Zhavoronok S. I.* Nonlinear vibrations and galloping of transmission lines' conductors // Asia Life Sciences Supplement 21(1). – 2019, pp.629-643.
3. *Kurbatov A.S., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N.* Solution of the problem of thermal stability of a thin-walled structure under non-stationary thermal action arising in the process of creating articles by the method of selective laser sintering. PERIODICO TCNE QUIMICA. – 2018, vol. 15, no. 1. – Pp. 441-447.

РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ТЕРМОУПРУГИМИ ТЕЛАМИ С ПОКРЫТИЯМИ

Ларин Н.В.

(Тульский государственный университет, Тула)

Построена математическая модель дифракции гармонических звуковых волн на однородных термоупругих телах с неоднородными покрытиями, граничащих с теплопроводными жидкостями. Движение жидкости рассматривается в рамках линеаризованной модели безвихревого течения идеальной сжимаемой жидкости с учетом тепловых процессов [1]. Тела, с которыми взаимодействует жидкость, описываются уравнениями классической модели линейной термоупругости [2, 3]. На основе данной модели получено решение задачи о дифракции сферической звуковой волны на термоупругом шаре с покрытием. Рассматривались случаи непрерывно- и дискретно-слоистого покрытий. Представлены результаты расчетов рассеянного акустического поля.

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 18-11-00199).

Литература

1. *Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. – Т. 2. – М.: Гостехиздат, 1955. – 475 с.
2. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка,

1970. – 308 с.

3. *Подстригач Я. С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.

РЕКОНСТРУКЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ, ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ПЛАСТИНУ ТИМОШЕНКО

Левицкий Д.Ю.¹, Пещерикова О.Н.¹, Федотенков Г.В.^{1,2}, Старовойтов Э.И.³

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва; ³Белорусский государственный университет транспорта, Гомель)

Рассматривается прямоугольная пластина Тимошенко, находящаяся под воздействием нестационарного давления. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию по краям пластины. В начальный момент времени пластина находится в недеформированном состоянии. Для описания движения пластины используются известные уравнения модели С.П. Тимошенко [1-3].

Полагается, что в точке с заданными координатами установлен датчик, способный измерять нестационарный прогиб пластины. В обратной задаче требуется восстановить зависимость нестационарного давления от времени по показаниям датчика прогиба.

Перед решением обратной задачи (реконструкции нагрузки) решается прямая задача, целью которой является построения прогиба пластины при известном нестационарном давлении. В основе метода решения лежит принцип суперпозиции, согласно которому нормальные перемещения пластины представляют собой свертку заданного давления с функцией влияния по пространственным координатам и времени. Функция влияния для пластины представляет собой ее нормальные перемещения при воздействии давления специального вида, а именно, единичной сосредоточенной силы, мгновенно приложенной во времени. Математически такое распределение задается с помощью произведения дельта-функций Дирака. Для построения функции влияния применяются разложения в двойные тригонометрические ряды Фурье и интегральное преобразование Лапласа по времени. Оригиналы коэффициентов рядов разложений определяются аналитически с использованием второй теоремы разложения для преобразования Лапласа.

В постановке обратной задачи полагается, что закон распределения давления по пластине задан, а зависимость его от времени неизвестна и подлежит определению. Прогиб пластины связан с поверхностным давлением посредством интегрального оператора по пространственным переменным и по времени. Ядром этого оператора является построенная функция влияния для пластины. Это позволяет свести обратную задачу к решению интегрального уравнения типа Вольтера по времени, причём интеграл в нём имеет вид свёртки. При этом неизвестной

подынтегральной функций является искомый закон зависимости давления от времени. Для решения интегрального уравнения разработан и реализован на ЭВМ численно алгоритм, основанный на методе механических квадратур.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-08-00438 А, 20-58-00023 Бел_а).

Литература

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 472 с.

2. Федотенков Г.В., Левицкий Д.Ю. Воздействие нестационарных нагрузок на прямоугольную пластину Тимошенко // в сборнике ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ Научная конференция Секция механики 15–25 апреля 2019 года Тезисы докладов, место издания ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Москва, тезисы, с. 204-204

3. Левицкий Д.Ю., Федотенков Г.В. Воздействие различных нестационарных нагрузок на пластину Тимошенко // в сборнике Материалы XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова, место издания ООО "ТРИП" М Москва, НИУ МАИ, том 2, тезисы, с. 91-92

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА ТОНКИХ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Локтева Н.А.^{1,2} Сердюк Д.О.¹ Скопинцев П.Д.¹

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

В современном мире пластины и оболочки представляют широко распространенный конструктивный элемент, применяемый во многих областях науки и техники, таких, как авиа- и ракетостроение, машиностроение, строительная индустрия.

Знание закономерностей распространения нестационарных волн в пластинах и оболочках является основой для анализа и систематизации данных, относящихся к практически используемым конструкциям. Широко исследован вопрос нестационарной динамики упругих пластин [1]. Вопросы о нестационарной динамике анизотропных пластин поднимаются в работах [2-4]. Данная работа посвящена аналитическому исследованию процесса действия нестационарного давления на произвольную боковую область упругой анизотропной цилиндрической оболочки.

Цель – построить функцию влияния для анизотропной цилиндрической оболочки, зависящей от угловой и осевой координаты, а также от времени.

Объектом исследования является тонкая цилиндрическая оболочка неограниченной длины [1]. Материал оболочки принят упругим и анизотропным, имеющим симметрию относительно срединной плоскости. В качестве теории тонких упругих оболочек принята теория оболочек Кирхгофа-Лява. На боковую поверхность оболочки по нормали действует нестационарная нагрузка, распределенная по произвольному закону.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения упругой оболочки типа Кирхгофа-Лява, соответствующие геометрические и физические соотношения с учетом симметричных свойств материала исследуемой оболочки. Начальные условия принимаются нулевыми.

Решение задачи ищется в цилиндрической системе координат, связанной с осью цилиндрической оболочки

Функция влияния для анизотропной оболочки представляет собой решение специальной задачи, а именно, задачи о воздействии на оболочку мгновенного сосредоточенного давления, моделируемого произведением дельта-функций Дирака по времени и пространственным координатам [5]. Для её решения использованы экспоненциальные ряды по угловой координате и интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по осевой координате. Найденный в результате обратных интегральных преобразований нестационарный прогиб и представляет собой искомую функцию влияния.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-08-00968 А).

Литература

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 472 с.
2. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Нестационарная динамика тонких ортотропных упругих пластин // Тезисы докладов VII Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. — ООО ТР-Принт Москва, 2018. — С. 108–109.
3. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Нестационарные функции влияния для анизотропной пластины типа Кирхгофа-Лява // Тезисы докладов. Ломоносовские чтения. — изд. Московского университета Москва, 2019. — С. 204–205.
4. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Функция Грина для неограниченной тонкой анизотропной пластины // Материалы XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы Механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова. Т.2. — М.: ООО "ТРП", 2020. — 106-107 с.

5. *Tarlavovskii D.V., Fedotenkov G.V.* Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell // *Mechanics of Solids*, 2015, Vol. 50, № 2, pp. 208-2017. DOI: 10.3103/S0025654415020107.

ОПИСАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОБЛАСТИ ЛОКАЛЬНОЙ НЕУПРУГОСТИ КАНИФОЛИ

Ломовской В.А., Платонова О.Д., Шоршина А.С.

(Лаборатория «Структурообразование в дисперсных системах» ИФХЭ РАН,
Москва)

Исследование спектров внутреннего трения $\lambda=f(T, K)$ и температурной зависимости частоты $\gamma = f(T, K)$ свободно затухающего колебательного процесса, возбужденного в композиционной системе «канифоль-медь» (медь является подложкой комбинированного образца), показало наличие двух диссипативных процессов, связанных с локальной неупругостью комбинированной системы исследуемого образца и наблюдаемых в различных температурных интервалах. Физико-механические характеристики медной подложки исследуемого образца оказывают слабое влияние на общую реакцию образца на внешнее воздействие, однако введение жесткой упругой подложки кардинально изменяет феноменологическое модельное описание этой реакции. Была обнаружена реакция α -подсистемы и β -подсистемы на внешнее одинаковое воздействие свидетельствует о наличии в структуре канифоли как минимум двух квазинеzáвисимых структурно кинетических подсистем, имеющих различное строение, но проявляющееся в одной области температур. Это определяется тем, что при отсутствии подложки канифоль в области температуры α -процесса потерь переходит из твердого агрегатного состояния в высоковязкое жидкое агрегатное состояние, что на спектре $\lambda=f(T, K)$ фиксируется в виде возрастающего фона диссипативных потерь и соответствующего аномального спада частоты колебательного процесса, а, следовательно, и модуля сдвига $G = f(T)$. В этом случае дифференциальное уравнение, описывающим данную реакцию, является модель Максвелла:

$$G^*(i\omega) = \frac{G\eta\omega}{G + i\eta\omega} \quad (1)$$

Учитывая, что используется динамический метод внешнего воздействия, т.е:

$$\begin{cases} G'(\omega) = \frac{G\eta^2\omega^2}{G^2 + \eta^2\omega^2} \\ G''(\omega) = \frac{G\eta\omega}{G^2 + \eta^2\omega^2} \end{cases}$$

$$tg \delta = \frac{\lambda}{\pi} = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} = \frac{1}{\omega \tau_i} \quad (2)$$

$$\tau_i = \tau_0 \exp \frac{U}{RT_i} \Rightarrow \lambda = f(T) \quad (3)$$

определяется теоретическая зависимость $\lambda=f(T, K)$. Исходя из предположения, что этот диссипативный процесс имеет релаксационную природу, этот процесс неупругости может быть описан в рамках уравнения Больцмана-Вольтерра, в котором в качестве ядра релаксации может использоваться дробно-экспоненциальная функция Кольрауша.

$$\varphi(t) = \exp \left[-\left(\frac{t}{\tau} \right)^b \right]; \quad 0 < b \leq 1 \quad (4)$$

Тогда использовать функцию (4) возможно учитывая связь частоты λ свободного затухающего колебательного процесса, возбужденного в исследуемом образце и действительной части $G'(\omega)$ комплексного модуля сдвига $G^*(i\omega)$.

Возникновение пика потерь на спектре $\lambda = f(T)$ в этой или иной температурной области исследования, характеризуется как локальный диссипативный процесс, не приводящий к переходу всей системы из твердого агрегатного состояния в высоковязкое жидкое состояние. В этом случае изменяется и феноменологическая модель, описывающая этот процесс. $\varepsilon_{отм} = 0$ Поэтому для данного локального процесса в качестве модели может быть использована модель Фойгта (качественно) и модель стандартного линейного тела (количественно). Представим уравнение Больцмана-Вольтерра в виде:

$$\varepsilon(t) = G_0 \sigma_0 + \frac{\Delta G}{\tau} \int_{-\infty}^t \exp \left[-\frac{t-t'}{\tau} \right] \sigma(t') dt' \quad (5)$$

Где в качестве ядра релаксации используется обычная дробно-экспоненциальная функция Максвелла, что не описывает пик потерь на спектре $\lambda = f(T)$ и температурно-частотной зависимости дефекта модуля $\Delta G = f(\omega; T)$ полученными экспериментально. Для теоретического анализа этих характеристик может быть использована в качестве ядра релаксации в уравнении (8) в самом общем виде функция Абея.

В данной работе рассматривается возможность использования этих функций для описания локального диссипативного процесса в канифоли, учитывая сложный характер изменения $\Delta G = f(\omega; T)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-08-00427-а).

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОСТОВЕРНЫХ ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ И ФУНКЦИЙ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ СО СЛОЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Луканкин С.А.

(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань)

Моделирование потери устойчивости многослойных тонкостенных конструкций с помощью любой вычислительной процедуры определяется в первую очередь требованием твердой уверенности исследователя в получении достоверных значений параметра критической нагрузки и функций, описывающих форму потери устойчивости (ФПУ). Не останавливаясь здесь на вопросах «точности» постановки самой задачи описания процесса потери устойчивости, доставляющей использованием соответствующей математической модели, в работе рассмотрены вопросы, определяющих точность применения используемого вычислительного метода при получении достоверного численного результата.

Учитывая специфику расчета тонкостенных (в том числе и оболочечных) конструкций на устойчивость по статическому критерию, который проходит, как правило, в два этапа, выделим следующие вопросы, непосредственно определяющие точность полученного решения:

1. достоверность определения параметров докритического напряженно-деформированного состояния (НДС);
2. достоверность определения параметра критической нагрузки;
3. достоверность определения собственного вектора задачи (функций основных неизвестных) математической модели;
4. достоверность определения функций, описывающих ФПУ многослойной оболочки.

Для решения указанных вопросов при численном моделировании процесса устойчивости равновесного состояния многослойной тонкостенной конструкции можно варьировать следующие параметры вычислительной процедуры:

1. количество расчетных сечений сетки;
2. зоны сгущения сетки.

Отдельным вопросом при решении задач устойчивости стоит вопрос порядка учета полученных на первом этапе расчета параметров (кинематических или статических – усилий-моментов) докритического (в соответствии со статическим критерием устойчивости) НДС. Следует отметить, что этому вопросу посвящено большое число работ, в которых исследовался порядок учитываемых слагаемых

и их влияние на определяемые величины. Подводя некоторый итог, следует сказать, что при современном уровне развития вычислительной техники учет или не учет той или иной группы слагаемых не представляет практического вопроса. Соотношения используемой математической модели (дискретно-структурной теории многослойных оболочек со слоями переменной толщины с ячейкой периодичности в виде несущего слоя Кирхгоффа –Лява и трансверсально-мягкого и слоя заполнителя) включают все сочетания указанных параметров и выбирать среди них вносящие больший или меньший вклад в уравнения не имеет смысла, т.к. эти порядки определяются факторами, присущими конкретной решаемой задаче об устойчивости многослойной конструкции, т.е. для другой задачи величины параметров могут быть кардинально другими. Порядок этих слагаемых не оказывает никакого влияния на обусловленность разрешающей матрицы, т.к. эти величины являются только слагаемыми в ряду других суммируемых величин в соотношениях модели. Здесь можно задаться правилом о необходимости учета всех групп параметрических слагаемых при решении задач устойчивости для многослойных конструкций.

Отдельным является вопрос определения расчетных сеток, как для задачи вычисления достоверных параметров докритического НДС, так и для численного решения задачи устойчивости. Следует отметить, то эти задачи в общем случае не являются связанными с точки зрения выбора расчетной сетки. Вместе с тем, использование одной расчетной сетки для рассматриваемых задач является более целесообразным, т.к. исключает вычисление параметров в узлах новой сетки, также имеющее свою точность. Понятно, что определяющей с точки зрения выбора расчетной сетки должна быть задача устойчивости, но выбранная таким образом расчетная сетка должна обеспечить сходимость и точность решения задачи о докритическом НДС. С практической точки зрения указанная проблема оставляет неопределенным только вопрос оптимальности составления расчетной сетки, т.к. современные вычислительные возможности легко могут позволить и выбор сеток с таким сгущением, которое гарантирует достоверное определение параметров задачи.

В работе на примере решения ряда задач для трехслойных оболочек и панелей переменной толщины, рассмотрены вопросы, определяющие достоверность решения задач устойчивости с целью построения оптимального порядка использования вычислительной процедуры при определении достоверных значений параметра критической нагрузки и функций, описывающих ФПУ.

Рассмотренные примеры решения задач устойчивости типовых трехслойных элементов конструкций позволяет сформулировать следующий оптимальный порядок действий (алгоритм) определения решения задачи устойчивости численным путем:

1. Выбирается некоторое усредненное число расчетных сечений n_{pc}^1 , имеющих постоянный шаг разбиения (этот выбор может или базироваться, например, на опыте численного решения подобных задач, или может быть получен подбором);

2. Решается задача определения докритического НДС, в результате последовательного увеличения числа сечений и определения областей сгущения сетки по результатам этих вычислений, определяют расчетную сетку для задачи определения параметров докритического НДС и соответствующее ей значение $n_{pc}^{НДС}$;

3. На расчетной сетке, определенной при решении серии задач о докритическом НДС (при $n_{pc}^{НДС}$) решается задача определения параметра критической нагрузки при последовательном увеличении числа полуволн по окружной координате. Определяется и фиксируется пара $(n_{экс.}, P_{кр}^{min})$;

4. Далее, при фиксированном $n = n_{экс.}$ проводятся расчеты с модификацией расчетной сетки (последовательным увеличением числа расчетных сечений и добавлением, при необходимости, зон сгущения сечений) в результате которых, уточняется $p_{кр}$. Расчеты проводятся до тех пор, пока функции собственного вектора и функции, описывающие ФПУ (восстанавливающиеся по функциям из собственного вектора), не станут достоверными.

Следует отметить, что если на этапе уточнения функций собственного вектора при фиксированном $n = n_{экс.}$, собственные значения задачи, а именно $p_{кр}$ будут сильно изменяться от расчета к расчету, то в этом случае на новой сетке следует заново решить задачу по определению пары $(n_{экс.}, P_{кр}^{min})$ и провести указанную выше процедуру при новом значении $n_{экс.}$.

Результаты исследований получены в рамках выполнения работ по реализации комплексного проекта шифр «2017-218-09-151» Минобрнауки России.

О НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЯХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРЕГРАД ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ УДАРЕ САМОЛЕТОВ

Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В.

(Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва)

В работах [1-3] отмечается, что после террористических актов 11.09.2001 в США с применением авиалайнеров особое внимание стали уделять вопросам противодействия подобным террористическим атакам на опасные объекты, в том числе на атомные электростанции (АЭС) и хранилища ядерных отходов. В общем

случае проблема защиты подобных опасных объектов может решаться экспериментально путем натуральных испытаний или испытаний на уменьшенных моделях [4], а также расчетным путем [1, 3].

Если меры по борьбе с возможным ядерным терроризмом были приняты ООН в 2007 г. [1-3], то натурные испытания железобетонной преграды при ударе самолета были проведены гораздо ранее в 1988 г. на экспериментально-полигонной базе национальной лаборатории США Сандия (Sandia National Labs). Эта лаборатория в отличие от других лабораторий США, которые занимаются разработкой ядерного оружия, занимается разработкой и испытаниями ядерного оружия ударно-проникающего действия, способного перед подрывом проникать в грунто-бетонные преграды. Характерно, что испытание было проведено по контракту с японской научной организацией [5].

Результаты испытаний железобетонных преград не только от высокоскоростного удара самолета [6], но и от высокоскоростного удара наиболее опасных для защитных оболочек АЭС авиационных турбореактивных двигателей в натурном варианте и на уменьшенных моделях приведены в [7, 8]. Почти 30 лет спустя аналогичные испытания по высокоскоростному удару самолета были проведены в Китае [9]. Рассматриваются особенности проведения перечисленных испытаний и интерпретации полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00701-а).

Литература

1. *Markov V.A., Popov Yu. V., Pusev V.I., Selivanov V.V.* Computing the loads affecting a structure subjected to a high-velocity projectile impact using the Riera approach // Proc. of the All-Russian Conference «Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics» (FAPMM 2018). AIP Conf. Proc. Vol. 2103. Art. № 020010. P. 020010-1 – 020010-10. Published Online: 29 April 2019.

2. Исследование конструкций и характеристик внутреннего оборудования носовых отсеков летательных аппаратов / *В.И. Пусев, Г.В. Белов, В.А. Марков, Ю.В. Попов, В.В. Селиванов, В.В. Фролов* // Сб. трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, 19-24 августа 2019 г. В 4-х томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 521-523.

3. *Selivanov V.V., Markov V.A., Popov Yu.V., Pusev V.I.* About the calculation of the load on the building at high-speed aircraft impact based the Riera's approach // Proc. of the XLII Academic Space Conference. AIP Conf. Proc. Vol. 2171. Issue 1. P. 130007-1 – 130007-6. Published Online: 15 November 2019.

4. *Пусев В.И.* О физическом моделировании деформирования и разрушения конструкций при действии ударных и взрывных нагрузок // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1722-1724.

5. Sandia National Labs; News ... Footage of 1988 rocket-sled test. URL: <https://share.sandia.gov/news/recources/video-gallery/index.html#rocketsled> (дата обращения 02.08.2019).

6. Full-scale aircraft impact test for evaluation on impact force / *T. Sugano, H. Tsubota, Y. Kasai, N. Koshika, S. Orui, W.A. Riesemann, D.C. Bickel, M.P. Parks* // Nucl. Engng. and Des. 1993. Vol. 140. № 3. P. 373-385.

7. Local damage to reinforced concrete structures caused by impact of aircraft engine missiles. Part 1. The program, method and results / *T. Sugano, H. Tsubota, Y. Kasai, N. Koshika, S. Orui, W.A. Riesemann, D.C. Bickel, M.P. Parks* // Nucl. Engng. and Des. 1993. Vol. 140. № 3. P. 387-405.

8. Local damage to reinforced concrete structures caused by impact of aircraft engine missiles. Part 2. Evaluation of tests results / *T. Sugano, H. Tsubota, Y. Kasai, N. Koshika, S. Orui, W.A. Riesemann, D.C. Bickel, M.P. Parks* // Nucl. Engng. and Des. 1993. Vol. 140. № 3. P. 407-423.

9. Experimental research on impact loading characteristics by full-scale airplane impacting on concrete target / *Z. Duan, L. Zhang, L. Wen, C. Guo, Z. Bai, Z. Ou, F. Huang* // Nucl. Engng. and Des. 2018. Vol. 328. P. 292-300.

КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОКРЫТИЕМ

Михайлова Е.Ю.¹, Старовойтов Э.И.², Федотенков Г.В.^{1,3}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); Белорусский государственный университет транспорта, Гомель;
³НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

В рамках плоской постановки задачи исследуется процесс воздействия нестационарного давления на полупространство с покрытием типа мембраны. Задача рассматривается в декартовой прямоугольной системе координат Oxz , ось Ox которой направлена вдоль недеформированной поверхности полупространства, а Oz – вглубь полупространства. Задача ставится в безразмерной форме. Размерному времени t соответствует его безразмерный аналог τ .

В начальный момент времени к поверхности мембраны прикладывается нестационарное давление $p(\tau, x)$ являющиеся функцией, зависящей от времени и координаты (рис 1).

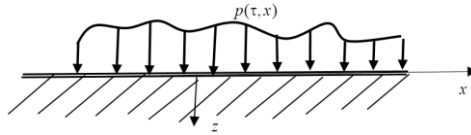


Рис. 1.

В постановке задачи содержатся уравнения движения полупространства в потенциалах упругих перемещений [1] и уравнения нестационарных колебаний мембраны [2].

Контакт между полупространством и мембраной происходит в условиях свободного проскальзывания

$$w(\tau, x)|_{z=0} = v(\tau, x)|_{z=0}. \quad (1)$$

Здесь $w(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$ - нормальные перемещения в полупространстве и прогиб мембраны соответственно, которые связаны с заданным давлением и контактными напряжениями σ_{330} посредством следующих интегральных соотношений

$$w(\tau, x) = G * \sigma_{330}, \quad v(\tau, x) = G_m * (p + \sigma_{330}), \quad (2)$$

где σ_{330} - нормальные напряжения в полупространстве, G, G_m - функции влияния для полупространства и мембраны [1- 3], звёздочка обозначает свёртку по времени τ и по координате x .

Полагаем, что полупространство и мембрана до начала взаимодействия находились в недеформированном состоянии.

Разрешающее интегральное уравнение относительно контактных напряжений $\sigma_{330}(x, \tau)$ вытекает из формул (1), (2) и имеет вид

$$(G - G_m) * \sigma_{330} = G_m * p, \quad (3)$$

в котором правая часть является известной функцией.

Для определения σ_{330} используется численно-аналитический алгоритм, основанный на методе квадратур. Заметим, что функция влияния для полупространства имеет подвижные сингулярные особенности, сосредоточенные на фронте фон Рэлея. Для вычисления соответствующих сингулярных интегралов применяется метод весовых коэффициентов с использованием канонической регуляризации.

В результате решения построены зависимости контактных напряжений и нормальных перемещений мембраны от времени и координаты при внешней нагрузке, заданной различными функциями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 20-08-01099 А, 20-58-00023 Бел_a).

Литература

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1995. — 352 с.
2. Mikhailova E.Yu, Tarlakovskii D.V, Fedotenkov G.V. The unsteady contact interaction problem of an absolutely rigid body and a membrane // Proceedings of the Second International Conference «Theoretical, Applied and Experimental Mechanics». - Springer Nature Switzerland AG, 2019. - P. 289-293.
3. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В., Тарлаковский Д.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Труды МАИ: электронный журнал. — 2014. — Вып. 78 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53499>

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОБРАЗУЮЩЕЙ НИЖНЮЮ СТЕНКУ КАНАЛА, ЗАПОЛНЕННОГО ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Могилевич Л.И.¹, Попов В.С.¹, Попова Е.В.², Черненко А.В.¹

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
²Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского, Саратов)

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях круглой трехслойной пластины, контактирующей с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости. Пластина является нижней стенкой узкого канала, полностью заполненного вязкой жидкостью, и состоит из двух несущих слоев и легкого несжимаемого заполнителя. Верхняя стенка канала – параллельный и соосный пластине жесткий диск. Пластина и диск жестко защемлены по контуру. Жидкость, на контуре канала, свободно истекает в торцевую полость, заполненную той же жидкостью, давление в которой гармонически пульсирует. Исследуем осесимметричную задачу, включающую уравнения динамики пластины, уравнения динамики жидкости для случая ползущего течения жидкости и соответствующие им граничные условия. Уравнения динамики пластины с учетом сил инерции в радиальном и нормальном направлениях, получены аналогично [1] для статики. В данных уравнениях нагрузка - напряжения вязкой жидкости. Вводятся малые параметры задачи: относительная толщина слоя жидкости и относительная амплитуда прогибов пластины. Применяя метод возмущений получаем уравнения динамики тонкого слоя жидкости и граничные условия на невозмущенной поверхности контакта жидкость-пластина. Решая уравнения динамики жидкости, находим законы изменения гидродинамических параметров жидкости как функции прогиба пластины. В результате получены уравнения вынужденных радиальных и изгибных

гидроупругих колебаний пластины. Решение данных уравнений проведено аналогично [2,3] используя ряды по собственным функциям соответствующей задачи Штурма-Лиувилля. Представлены результаты численного исследования зависимости амплитуд радиальных и изгибных колебаний пластины от частоты на основной моде колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект 18-01-00127а.

Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М: Физматлит, 2005. 576с.
2. Popov V.S., Mogilevich L.I., Grushenkova E.D. Hydroelastic response of three-layered plate interacting with pulsating viscous liquid layer // Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019, pp. 459 - 467. DOI: 10.1007/978-3-319-95630-5_49.
3. Попов В.С., Попова Е.В., Черненко А.В. Математическое моделирование гидроупругого взаимодействия между вибрирующим штампом и трехслойной балкой, установленной на основании Винклера // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. № 4. С. 37-56.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШТАМПА И УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ АДГЕЗИИ

Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С.

(Московский авиационный институт)

Рассматривается нестационарное взаимодействие жесткого выпуклого штампа с упругой изотропной полуплоскостью. На поверхности исследуемых тел оказывает влияние сила адгезионного поверхностного притяжения, описываемая моделью Можи. Процесс взаимодействия разделен на этап до вступления штампа и полуплоскости в контакт и на этап контактного взаимодействия с учетом адгезионных сил.

Для описания данного процесса была сформулирована математическая постановка задачи, включающая оба этапа взаимодействия штампа и упругой полуплоскости. Метод решения базируется на принципе суперпозиции. Был разработан оригинальный численно-аналитический алгоритм определения как перемещения границы упругой полуплоскости, так и носителя силы адгезионного взаимодействия. На первом этапе взаимодействия решение получено и проанализировано, выявлены характерные черты процесса, в частности, при определенном сочетании параметров процесса наблюдается многосвязный характер носителя адгезионного взаимодействия, учет которого существенен.

На втором этапе взаимодействия не известны как перемещения границы полуплоскости, границы носителя адгезионного взаимодействия, так и контактные напряжения. Получены разрешающие интегральные уравнения относительно контактных напряжений, также разработан численно-аналитический алгоритм решения задачи. Осуществляется разработка аналитических подходов к решению полученных интегральных уравнений, использующих интегральные преобразования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-58-04016 Бел_мол_а, № 20-08-01042 А).

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕМБРАНЫ И ШТАМПА ПОД ДЕЙСТВИЕМ АДГЕЗИОННЫХ СИЛ

Оконечников А.С., Пашков Я.В., Федотенков Г.В.

(Московский авиационный институт)

В работе исследуется воздействие штампа,двигающегося по заданному закону на встречу мембране при учете влияния адгезионных сил. Рассмотрено два случая адгезионного взаимодействия – модель Можи, согласно которой адгезионное притяжение постоянной интенсивности имеет место, если между поверхностями тел есть достаточно малый зазор, а также модель, описываемая потенциалом Леннарда-Джонса, которая учитывает как взаимное притяжение, так и отталкивание поверхностей тел.

Разработана постановка задачи для двухэтапного взаимодействия жесткого выпуклого штампа и бесконечной мембраны: в начальный момент времени между рассматриваемыми телами имеется зазор, при котором возникает адгезионная сила, зазор уменьшается во времени и наступает второй этап – контактное взаимодействие с учетом адгезии. На основе метода функций Грина разработан подход к решению задачи, построено разрешающее интегральное уравнение для случая контактного взаимодействия. Построен численно-аналитический алгоритм решения задачи для бесконтактного этапа взаимодействия. Проводится сравнение полученных результатов для двух моделей адгезионного взаимодействия. Представлены графические результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-58-04016 Бел_мол_а, № 20-08-01042 А).

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТО-СТРУКТУРИРОВАННЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД ПРИ ВИБРОВВОЗДЕЙСТВИЯХ

Павлова А.В.¹, Рубцов С.Е.¹, Телятников И.С.²

(¹Кубанский государственный университет, Краснодар, ²Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону)

Развитие теории сейсмических процессов, а также решение прикладных задач в различных областях, включая вибрационную геофизику и сейсмологию, связаны с изучением деформационных процессов корового уровня. Цель работы – исследование напряженно-деформированного состояния геологических структур, моделируемых системой покрытие – подложка, при вибрационных воздействиях.

В работе предложены факторизационные методы исследования и решения смешанных задач механики сплошных сред, моделирующих вибровоздействие на грунтовые массивы. В качестве моделей геоматериалов рассмотрены упругие слоистые структуры с покрытиями.

Моделью покрытия служит система пластин Кирхгофа, занимающих области Ω_j , $\bigcup_j \Omega_j = \mathbb{R}^2$, с осредненными по толщине свойствами, система уравнений

для амплитудных значений смещений $\mathbf{u}_j = \{u_{jk}\}$, $k = \overline{1,3}$, которых имеет вид [1]

$$\mathbf{R}_j(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_j(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega_j. \quad (1)$$

Основания могут моделироваться как кусочно-однородными упругими материалами, в том числе содержащими резонансные структуры (дефекты типа трещин и включений), так и гетерогенными пористыми средами (модели обводненных грунтов, прибрежных осадочных пород и пр.). Последние рассматриваются с целью более точного описания динамики изучаемых систем.

При наличии в рассматриваемом пакете пористых насыщенных жидкостью грунтовых слоев для них принимаются следующие допущения: слой состоит из скелета с сохраняющимися механическими свойствами и порового флюида (смесь жидкости и газа), причем изменения давления в поровой жидкости не оказывает влияния на деформацию скелета; фазовые переходы и температурные эффекты не учитываются; деформации и перемещения жидкой и твердой фаз являются малыми; размеры пор малы и не меняют кинематических характеристик движения; элементы тензора вязких напряжений и энергия пульсационного движения пренебрежимо малы; вязкость жидкости влияет только на силу межфазного взаимодействия.

Перемещения гетерогенного слоя описываются уравнениями Био – Френкеля [2, 3] в предположении линейности и изотропности твердого скелета. В плоскости контакта непроницаемого упругого ($m-1$ -го) и гетерогенного (m -го) слоя задаются условия неразрывности вида:

$$x_3 = -h_m : \mathbf{u}_m^+ = \mathbf{u}_m^-, u_{m3}^+ = v_{m3}^+, \tau_{jm}^{s,+} = \tau_{jm}^- \quad (j=1,2), \tau_{3m}^{s,+} + \tau_m^{f,+} = \tau_{3m}^-, \\ -\infty < x_1, x_2 < +\infty.$$

Здесь $\mathbf{v}_m^+ = \mathbf{v}^+(x_1, x_2, -h_m + 0) = \{v_{mj}^+\}$ – вектор амплитуд перемещений флюида в плоскости $x_3 = -h_m$, \mathbf{u}_m^+ соответствует смещению твердой фазы, $\tau_{jm}^{s,+}$, $\tau_m^{f,+}$ – описывают соответственно компоненты вектора амплитуд напряжений скелета и напряжения флюида.

Для описания процессов в разноразмерной гетерогенной блочной среде использован метод блочного элемента.

Рассмотренные модели могут быть полезны при изучении результатов вибрационных воздействий на геофизические среды, моделируемые слоистым основанием с покрытием. При рассмотрении в качестве основания многослойных структур, включающих заглубленные слои жидкости, могут быть использованы подходы работ [3, 5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00124).

Литература

1. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the problem of estimating the state of coated materials // Doklady Physics. – 2006. – Vol. 51(8). P. 423–428.
2. Молотков Л.А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. – Спб.: Наука, 2001. – 248 с.
3. Усошина Е.А., Суворова Т.В., Соловьев А.Н. Математические модели динамических систем, включающих слоистые обводненные пористоупругие основания // Вестник Донского государственного технического университета. 2016. – № 3(86). 10–16.
4. Block element method for body, localizations and resonances / Babeshko V.A. et al // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2014. – № 2. – С. 13–19.
5. Нижник М.П., Павлова А.В., Рубцов С.Е. К решению одной задачи для упругого полупространства с жидким включением // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2006. – № 2. – С. 40–43.

РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ВЫПУСКА ДВС С УЧЕТОМ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ ПОДВЕСА

Попов В.С.¹, Гаврюшин С.С.², Юдин С.И.¹, Надарейшвили Г.Г.¹

(¹ФГУП НАМИ, ²МГТУ имени Н.Э. Баумана, Москва)

Рассматривается задачи оптимизации подвески системы выпуска отработавших газов (СВОГ) с целью повышения ее вибрационных характеристик. Проведена расчетная оценка собственных частот и форм колебаний СВОГ методом конечных элементов с учетом преднагрузки системы силами тяготения и тепловыми граничными условиями 2-го рода. Также был проведен анализ вынужденных колебаний системы по гармоническому закону. В качестве нагрузки к входному фланцу сильфонного компенсатора СВОГ была приложена сила, имитирующая воздействие двигателя в диапазоне частот 0-100 Гц с постоянной амплитудой.

В результате расчета были получены значения виброускорений, перемещений и реакций опор на точках подвеса. Проведенный анализ показал необходимость учета жесткостных характеристик кузова.

Литература

1. *Попов В.С., Осипов Н.Л., Пирожков В.А.* Расчетно-экспериментальное исследование вибронегруженных выпускных систем двигателя внутреннего сгорания // *Машиноведение и инновации. Конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС-2017) материалы конференции.* 2018. Москва: 2017. С. 427-429.
2. *Shojaeifard M, Ebrahimi-Nejad R.S, Kamarkhani S.* Optimization of Exhaust System Hangers for Reduction of Vehicle Cabin Vibrations . *IJAE.* 2017; 7 (1) :2314-2324 p.
3. *Noorazizi M.S, Aminudin B.A. and Zetty M.I.* Systematic Fea Study of Vehicle Exhaust System Hanger Location Using Addofd Method. *Applied Mechanics and Materials,* 2013, 392 p., 161-164 p.

ОЦЕНКА МЕХАНИЧЕСКИХ И МОРФОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Семенова Е.В., Яикова В.В., Балтин М.Э., Каюмов А.Р., Саченков О.А.

(Казанский федеральный университет)

В настоящее время существует множество материалов, имеющих сложную внутреннюю архитектуру и представляющих интерес для исследования. Для количественного описания структуры таких материалов используют тензор структуры, это положительно определенный тензор второго ранга, который позволяет учесть особенности материала [1, 2].

Для построения тензора структуры нашел применение метод среднего расстояния между порами или МПЛ-метод [2, 3]. Для его применения в работе были реализованы два метода обработки данных, полученных с помощью КТ: пороговая бинаризация и бинаризация с линейным участком. Проведена оценка влияния данных томографического исследования на сходимость предложенной численной методики, решены тестовые задачи. Приведены результаты решения модельной задачи для участка диафиза бедренной кости. Полученные численные результаты отображают влияние точности аппроксимации геометрии образца, а также иллюстрируют зависимость поля перемещений от структуры материала.

В работе в качестве исходных данных была рассмотрена компьютерная томография диафиза бедренной кости крысы. Используя рассмотренную методику была описана структура образца. Таким образом были найдены векторные поля для случая бинаризации с порогом и с применением регуляризации.

Полученные данные позволяют произвести оценки осей ортотропии для изучаемого образца. А также оценивая поле собственных значений можно получить информацию о направлениях, соответствующим большей жесткости. Для такого вида набора данных могут быть применены стандартные статистические методы, например, сингулярная декомпозиция матрицы корреляций или иные факторные методы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 20-01-00535.

Литература

1. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И. Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани //Российский журнал биомеханики. - 2011. Т. 15, № 4. – С. 78–93.
2. Экспериментальные методы в биомеханике: учебное пособие / под редакцией Ю.И.Няшина, Р.М.Подгайца. – Пермь: Изд-во Пермского государственного технического университета, 2008. – 400 с.
3. Герасимов О.В., Бережной Д.В., Большаков П.В., Стаценко Е.О., Саченков О.А. Построение механической модели элементов гетерогенной среды на основе численно-цифрового алгоритма обработки данных компьютерной томографии// Российский журнал биомеханики. - 2019. Т. 23, № 1: С. 104–116.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Сердюк А.О.,¹ Сердюк Д.О.,¹ Федотенков Г.В.^{1,2}

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

В современном мире пластины представляют широко распространенный конструктивный элемент, применяемый во многих областях техники, таких, как авиа- и ракетостроение, машиностроение, строительная индустрия.

Уровень и динамика развития новых перспективных летательных аппаратов предъявляет все более высокие требования к знаниям закономерностей распространения волн в балках, пластинах и оболочках. Особое место занимают вопросы распространения нестационарных волн, поскольку в таких задачах изменчивость искомого решения существенно неоднородно по координатам и по времени [1-3]. Теоретический и прикладной интерес представляет напряженно-деформированное состояние пластин при ударных нагрузках, моделируемых импульсными функциями.

Исследуется процесс воздействия нестационарной нагрузки на тонкую неограниченную пластину постоянной толщины [4-5]. Материал пластины принят анизотропным и симметричным относительно срединной плоскости пластины. Для описания движения пластины использована теория Кирхгофа-Лява.

Подход к решению основан на методе функций влияния (функций Грина) и принципе суперпозиции, согласно которому искомое решение связано с нагрузкой посредством интегрального оператора типа свертки по пространственным переменным и по времени. Ядром этого оператора является функция влияния для пластины, которая представляет собой нормальные перемещения в ответ на воздействие единичной сосредоточенной по координатам и по времени нагрузки. Для математического описания этой нагрузки используются дельта-функции Дирака.

Для построения функции влияния применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Оригиналы интегрального преобразования Лапласа найдены аналитически, а для обратного интегрального преобразования Фурье использован численный метод интегрирования быстро осциллирующих функций.

Полученная функция влияния позволяет исследовать процессы нестационарных колебаний анизотропных пластин при воздействии нестационарных нагрузок путем представления искомого прогиба в виде интеграла свертки функции влияния с функцией нестационарного давления по пространственным переменным и по времени. Для вычисления интеграла свертки и построения искомого решения использован метод прямоугольников. Найденное фундаментальное ре-

шение позволяет исследовать нестационарные свободные колебания анизотропных пластин также и в случае ненулевых начальных условий. Кроме того, построенная функция влияния открывает возможность решения широкого круга нестационарных задач для анизотропных пластин, например, нестационарных контактных и обратных задач. Также она может быть использована при построении интегральных уравнений метода граничных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-08-00438 А, 20-58-00023 Бел_а).

Литература

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 472 с.
2. Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V., Vahterova Y. A. Identification of non-stationary load upon timoshenko beam // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, no. 4. — P. 439–447.
3. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Нестационарная обратная задача по идентификации дефектов в упругом стержне // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. — Т. 3. — РИЦ БашГУ Уфа, 2019. — С. 878–880
4. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Нестационарная динамика тонких ортотропных упругих пластин // Тезисы докладов VII Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. — ООО ТР-Принт Москва, 2018. — С. 108–109.
5. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Нестационарные функции влияния для анизотропной пластины типа Кирхгофа-Лява // Тезисы докладов. Ломоносовские чтения. — изд. Московского университета Москва, 2019. — С. 204–205.

ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Сердюк А.О.,¹ Сердюк Д.О.,¹ Федотенков Г.В.^{1,2}

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

Вопросы распространения нестационарных волн в упругих средах занимают особое место в исследовании динамических процессов, поскольку в таких задачах изменчивость искомого решения существенно неоднородна по координатам и по

времени [1-4]. В настоящей работе исследуется процесс воздействия нестационарной нагрузки на пластину.

Объектом исследования является тонкая неограниченная пластина постоянной толщины. Материал пластины упругий и анизотропный, имеющий плоскость симметрии относительно срединной поверхности пластины [5-6].

В начальный момент времени на пластину воздействует нестационарная нагрузка $p(x_1, x_2, t)$, распределённая произвольно по пространственным координатам x_1, x_2 и произвольно зависящая от времени t . Движение пластины рассматривается относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$. Плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения упругой пластины Кирхгофа-Лява, соответствующие геометрические и физические соотношения с учетом симметричных свойств материала исследуемой пластины. Начальные условия приняты нулевыми.

Материал анизотропной пластины Кирхгофа-Лява с учетом симметрии относительно срединной поверхности характеризуется шестью независимыми упругими постоянными $C^{1111}, C^{1112}, C^{1122}, C^{1212}, C^{1222}, C^{2222}$.

Уравнение движения анизотропной пластины Кирхгофа-Лява в перемещениях имеет вид:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -ID(w) + p,$$

$$D(w) = c_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + c_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + 2(c_{12} + 2c_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4c_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 4c_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3}.$$

Для решения дифференциального уравнения применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Оригинал интегрального преобразования Лапласа найден аналитически, а для обратного интегрального преобразования Фурье использован численный метод интегрирования быстро осциллирующих функций.

Полученное фундаментальное решение (функция влияния) позволяет исследовать пространственно-временные распространения нестационарных волн в неограниченной пластине Кирхгофа-Лява. При этом найденное фундаментальное решение является универсальным в вопросах материала пластины: может быть рассмотрена изотропная, трансверсально-изотропная, ортотропная или анизотропная пластина.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-58-00023 Бел_а).

Литература

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 472 с.

2. Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V., Vahterova Y. A. Identification of non-stationary load upon timoshenko beam // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, no. 4. — P. 439–447.

3. Вахтерова Я. А., Федотенков Г. В. Нестационарная обратная задача по идентификации дефектов в упругом стержне // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. — Т. 3. — РИЦ БашГУ Уфа, 2019. — С. 878–880

4. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д. Нестационарная динамика тонких анизотропных упругих цилиндрических оболочек // Материалы XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы Механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО "ТРП", 2020. – с. 89-91.

5. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Нестационарная динамика тонких ортотропных упругих пластин // Тезисы докладов VII Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. — ООО ТР-Принт Москва, 2018. — С. 108–109.

6. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Нестационарные функции влияния для анизотропной пластины типа Кирхгофа-Лява // Тезисы докладов. Ломоносовские чтения. — изд. Московского университета Москва, 2019. — С. 204–205.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОКРЫТИЯ УПРУГОГО ЭЛЛИПСОИДА ПО РАССЕЙАННОМУ ЗВУКУ

Скобельцын С.А., Толоконников Л.А.

(Тульский государственный университет, Тула)

На основе решения задачи о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием [1] решается задача определения законов неоднородности материальных параметров внешнего слоя препятствия по известному давлению в ближней зоне рассеянного акустического поля.

Предполагается, что в акустической среде с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 распространяется плоская звуковая волна, давление в которой представляется в виде

$$P_p = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (1)$$

где i - мнимая единица; \mathbf{k} - волновой вектор падающей волны; \mathbf{r} - радиус-вектор точки пространства; ω - угловая частота колебаний в волне; t - время.

Волна P_p рассеивается препятствием, внутренняя часть которого представляет собой однородный упругий эллипсоид Ω_1 с полуосями a, b, c , а внешняя часть – неоднородный упругий слой Ω фиксированной толщины h . В области Ω_1 известны плотность ρ_1 и модули упругости Ламе: λ_1, μ_1 . Для слоя Ω известен вид зависимостей материальных параметров

$$\begin{aligned} \rho(q) &= \rho^*(1 + \alpha(q - h/2)), \\ \lambda(q) &= \lambda^*(1 + \beta(q - h/2)), \quad \mu(q) = \mu^*(1 + \gamma(q - h/2)), \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ^*, λ^*, μ^* - известные средние значения материальных параметров; q - расстояние от поверхности Γ_1 однородной части препятствия ($0 \leq q \leq h$); α, β, γ - неизвестные параметры неоднородности слоя.

В процессе рассеяния волны (1) неоднородным упругим препятствием в окружающей жидкости формируется рассеянная акустическая волна, давление P_s в которой должно удовлетворять уравнению Гельмгольца [2]

$$\Delta P_s + k^2 P_s = 0, \quad (3)$$

где $k = |\mathbf{k}|$ - волновое число.

В упругом эллипсоиде возникают гармонические колебания, которые описываются векторным уравнением движения линейной упругой среды [3]

$$\text{Div } \sigma_1 = -\rho_1 \omega^2 \mathbf{u}_1, \quad (4)$$

где σ_1, \mathbf{u}_1 - тензор напряжений и вектор смещения в области Ω_1 .

Аналогичные уравнения описывают колебания в неоднородном слое препятствия

$$\text{Div } \sigma = -\rho \omega^2 \mathbf{u}, \quad (5)$$

где σ, \mathbf{u} - тензор напряжений и вектор смещения в области Ω .

На внешней поверхности Γ упругого тела должны выполняться условия равенства нормальных компонент смещений и напряжений в жидкости и упругой среде неоднородного слоя

$$\Gamma \ u_n = -1/(\rho_0 \omega^2) \partial P / \partial n, \quad \sigma_{nn} = -P, \quad \sigma_{n\tau} = 0 \quad (\tau = 1, 2), \quad (6)$$

где n - индекс внешней нормали к поверхности Γ ; τ - индекс касательной к поверхности Γ ; $P = P_p + P_s$ давление в итоговом акустическом поле; $u_n, \sigma_{nn}, \sigma_{n\tau}$ - компоненты вектора смещений \mathbf{u} и тензора напряжений σ .

Предполагается, что на поверхности Γ_1 контакта однородной части упругого препятствия и неоднородного слоя Ω выполняются условия склейки

$$\Gamma_1: \mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \quad \sigma_{nn} = \sigma_{1nn}, \quad \sigma_{n\tau} = \sigma_{1n\tau} \quad (\tau = 1, 2), \quad (7)$$

где σ_{1m}, σ_{1n} - тензора напряжений σ_1 .

Для решения (3), (4), (5) помимо граничных условий (6), (7) привлекаются условия излучения на бесконечности для давления в рассеянной волне [4]

$$P_s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r\left(\frac{\partial P_s}{\partial r} - ikP_s\right) = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где $r = |\mathbf{r}|$.

Параметры неоднородности слоя α, β, γ ищутся в заданных интервалах $[\alpha_1, \alpha_2], [\beta_1, \beta_2], [\gamma_1, \gamma_2]$ на основе известных значений давления P в множестве точек \mathbf{V} сферической поверхности $r=R$ (начало координат совмещено с центром упругого тела) подобно [5] на основе минимизации функции

$$\delta(\alpha, \beta, \gamma) = |P(\alpha, \beta, \gamma) - P_0|,$$

где $r = |\mathbf{r}|$; P_0 - вектор известных значений давления P в точках наблюдения; $P(\alpha, \beta, \gamma)$ - вектор значений давления P в точках \mathbf{V} , полученный в результате решения задачи дифракции (3)–(8) при фиксированных α, β, γ в (2).

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

Литература

1. Скобельцын С.А. Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19, вып. 1, С. 220 – 237.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI, Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2001. 736 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Исакович М.А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973. 496 с.
5. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Определение геометрических параметров конечного цилиндра, расположенного у границы полупространства, по рассеянному звуку // Сборник трудов междунар. научно-технич. конф. "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2018. С. 1263 – 1269.

ИСПЫТАТЕЛЬНЫЙ СТЕНД ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

Смирнов М.В.¹, Гаврюшин С.С.^{1,2}, Чебаков Д.В.³

(¹МГТУ им. Н.Э.Баумана, ²ИМАШ РАН им. А.А.Благонравова, ³Сколковский институт науки и технологии)

Исследуется процесс измерения параметров модели транспортного средства в движении.

За основу был взят испытательный стенд, представляющий собой тележку и некоторую наклонную плоскость, в которую установлен датчик веса. Тележка катится по наклонной направляющей, датчик фиксирует сигнал, изменение напряжения. Затем с помощью системы обработки данных, полученный аналоговый сигнал преобразуется в цифровое значение, определяя скорость и массу тележки, а также величину деформации.

Целью работы является методика измерения веса автомобиля в движении. Для этого необходимо смоделировать проезд колеса по поверхности и сравнить с показаниями, которые получатся в результате проведения эксперимента.

Литература

1. *Bernard Jacob, Veronique Feypell* Improving truck safety: potential of weigh-in-motion. – France: IATSS Research, July 2010. – p. 9 – 15.
2. *Lu Cheng, Hongjian Zhang, Qing Li* Design of a capacitive flexible weighing sensor for vehicle WIM-system. – China, Hangzhou: Sensors, 2007. – 15p.
3. *Krishna Vijayaraghavan, Sean Pruden, Rajesh Rajamani* Weight-In-Motion (WIM) sensor: Patent no.: US 2011/0127090 A1. – USA: Sunnyvale, Jun.2, 2011.
4. *Сенянский, М. В. Годзиковский В. А.* Тенденции развития автомобильных весов. – Автомобильные дороги, 2014. – № 4.
5. *Сенянский М.В., Годзиковский В.А.* Выбор датчиков для взвешивания автомобилей в движении — отечественные тензодатчики или импортные пьезодатчики. – Автомобильные дороги, 2015. – №9.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН СДВИГА В УПРУГОЙ СРЕДЕ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЯ КОНЦЕНТРИЧНЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Солиев А.А., Тарлаковский Д.В., Мусурмонова М.О., Шукуров А.М.

(Москва, Карши)

В работе рассматривается задача о распространении нестационарных волн сдвига от сферического включения в упругой среде, ограниченной двумя концентрическими сферическими поверхностями. Она сводится к решению бесконечной

системы линейных алгебраических уравнений в пространстве преобразований Лапласа по времени. Определены компоненты вектора перемещения и тензора напряжения.

Пусть линейно-упругая однородная изотропная среда ограничена двумя концентрическими сферическими поверхностями, радиусы которых равны соответственно R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Толщина сферического слоя равно h ($h < R_2 - R_1$).

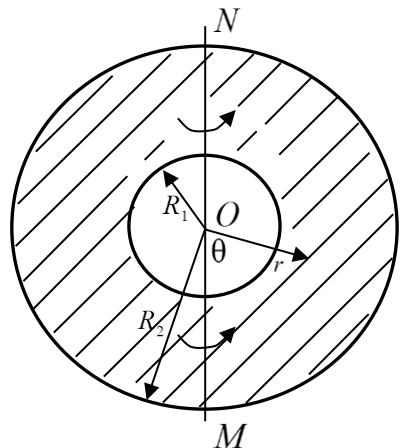
В начальный момент $\tau = 0$ времени в случае сферической полости к внутренней поверхности приложена осесимметричная заданная касательная поверхностная нагрузка $q(\tau, \theta)$, что образует вращательное движение среды вокруг оси NM , проходящей через центры сфер, а в случае абсолютно жесткого шара шар подвергается вращательному движению вокруг оси NM по заданному закону $V(\tau, \theta)$.

Внешняя поверхность среды свободна от давления или на ней перемещение равно нулю. С учетом осевой симметрии задачи движение среды относительно потенциала Ψ описывается волновым уравнением. Начальные условия – однородные.

Начально-краевая задача решается с применением интегрального преобразования Лапласа по времени τ . В пространстве изображений потенциал Ψ^L , компоненты w^L вектора перемещения и $\sigma_{r\theta}^L$ тензора напряжения, а также заданные функции $q(\tau, \theta)$, $V(\tau, \theta)$ представим в виде бесконечных рядов по полиномам Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x)$ [1].

Далее, удовлетворяя граничным условиям, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций [2], решение которой разыскивается в виде бесконечных рядов по экспонентам. Подставляя решение в систему, приравнивая коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях переменных x и y , получим рекуррентные соотношения для коэффициентов рядов по экспонентам и начальные условия к ним.

В пространстве изображений получены формулы для коэффициентов рядов компонент перемещений и тензора напряжений [3]. Проведены численные эксперименты.



Литература

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит, 1990. – 264 с.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Нестационарные колебания упругой среды, ограниченной двумя эксцентричными сферическими поверхностями // ПММ. - 1994. № 2. – С. 85-92.
3. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Распространение нестационарных волн сдвига от сферического включения в упругом полупространстве // Известия РАН, МТТ.- 2004.- № 6., С. 62-68.

ВЕДУЩЕЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗОНДОВ

Сотский М.Ю., Велданов В.А., Крутов И.С., Пусев В.И.

(Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва)

Проанализированы разработки в области создания средств и технологий динамического зондирования реологических сред, в том числе, с применением инерциальных зондов. Представлены реализованные конструкции ведущего устройства по патенту RU 2685011 к измерительному зонду баллистического модуля по патенту RU 2679946 для исследования динамических механических свойств поверхностных и заглубленных слоев исследуемых сред.

Проведена оценка возможности использования ведущего устройства для исследования динамических механических свойств конструкционных материалов [1, 2]. Указан диапазон конструктивных параметров ведущих устройств, обеспечивающий надежность функционирования зонда внутри пускового устройства и на этапе движения к исследуемой реологической среде. Продемонстрированы варианты использованных в опытах устройств и установок. Выявлены особенности и преимущества предложенных решений в сравнении с известными зондами, автономными регистрирующими устройствами и инерциальными измерительными модулями.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-08-00701-а) и с участием сотрудников кафедры “Высокоточные летательные аппараты” МГТУ им. Н.Э. Баумана Д.В. Гелина, Д.А. Лысова В.А. Маркова и А.В. Петюкова. Использовано оборудование для обеспечения проведения научных исследований по государственным заданиям ГЗ 3.6196.2017/7.8 и ГЗ 3.6257.2017/7.8.

Литература

1. Особенности реализации теста Тейлора при прямом и обращенном ударе / Г.В. Белов, А.П. Гусаров, В.А. Марков, А.Ф.Овчинников, В.И. Пусев, В.В. Селиванов, М.Ю. Сотский // Материалы XX Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г.Горшкова. Кременки, 17-21 февраля 2014 г. Т.2. М.: ООО «ТР-принт», 2014. С.52-58.

2. Определение динамических механических свойств сотовых конструкций из алюминиевых сплавов на основе теста Тейлора / Г.В. Белов, А.П. Гусаров, В.А. Марков, А.Ф.Овчинников, В.И. Пусев, В.В. Селиванов, М.Ю. Сотский // Там же. С.58-64.

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЯХ И ЭФФЕКТАХ В ДИНАМИКЕ НЕСУЩИХ И УПРАВЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Глеулинов М.К.

(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ)

Исследования динамики несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов в геометрически нелинейной постановке позволили обнаружить различные нелинейные явления и эффекты. Часть из них связана с явлением колебаний катастрофического изменения формы составных несущих и управляющих поверхностей [1-2]. Но есть еще ряд явлений, которые были обнаружены при моделировании динамического деформирования с помощью методов прямого интегрирования по времени.

Исследования колебаний консольного стержня, моделирующего несущую поверхность, показали, что при превышении вертикальными прогибами некоторой величины возникают хаотические крутильные колебания. Это явление можно обнаружить только с помощью геометрически нелинейной модели.

Другой случай возникновения хаотических колебаний связан с динамическим деформированием составных несущих и управляющих поверхностей. Хаотический характер колебаний в этих конструкциях был обнаружен не только в нелинейной, но и в линейной постановке. В докладе анализируются причины возникновения хаотических колебаний в линейной системе.

Литература

1. *Глеулинов М.К.* Об одном виде автоколебаний составных конструкций // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60. № 5 (357). С. 202-205.

2. *Тлеулинов М.К.* Бифуркация Пуанкаре-Андронов-Хопфа в колебаниях прощелкивания составных несущих и управляющих поверхностей // Письма в Журнал технической физики. 2019. Т. 45. № 15. С. 47-50.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА

Фам Дык Тхонг², Тарлаковский Д.В.^{1,2}

(¹ НИИ механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, ² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет))

Рассматриваются связанные нестационарные поперечные колебания бесконечного электромагнитоупругого стержня. Предполагается, что его материал является однородным изотропным проводником. При этом учитываются начальное электромагнитное поле, сила Лоренца, уравнения Максвелла и обобщенный закон Ома. В предположении о зависимости искомых функций только от продольной координаты и времени

Используются полученные в [1] из общей системы уравнений с учетом угла поворота нормального волокна для однородной изотропной электромагнитоупругой оболочки [2] уравнения для стержня, в которых за счет электромагнитного поля связаны продольные и поперечные движения. Выделен частный случай начального поля, при котором эти движения независимы.

Далее исследуются поперечные колебания. Искомые функции полагаются ограниченными, а начальные условия нулевыми. Решение задачи строится в интегральном виде с ядрами в виде функций Грина. В пространстве преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате найдены изображения ядер. Показано, что их структура не позволяет построить оригиналы как в явном виде, так и с использованием комбинации аналитического определения оригиналов по Лапласу и численного обращения преобразования Фурье.

Осуществлен переход к модели балки Бернулли-Эйлера. Несмотря на относительную простоту изображения и в этом случае приходится применять метод малого параметра, в качестве которого выбирается коэффициент, связывающий механическое и электромагнитное поля. В линейном приближении найден явный вид функции Грина. Приведены примеры расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-08-00493).

Литература

1. Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д.В. Нестационарный изгиб бесконечного электромагнитоупругого стержня // Материалы XXV Международного

симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. – М.: ООО "ТРИП", 2019. - С. 139.

2. *Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V.* The Model of Thin Electromagnetoelastic Shells Dynamics // Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. Structural Integrity. - Springer Nature Switzerland AG 2019 - P. 254-258.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИМ ПРИСТЕННЫМ СЛОЕМ И АНИЗОТРОПНЫМ ТЕЛОМ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Решение задач сопряженного теплопереноса между вязкими пристенными течениями и обтекаемыми телами в условиях аэродинамического нагрева – актуальная, значимая с точки зрения практики теплового проектирования ЛА, в том числе гиперзвуковых ЛА, но также сложная комплексная проблема. Математически эта проблема выражается в одновременном решении задач теплогазодинамики и теплопроводности, имеющих разную физическую природу и описываемых различными уравнениями в частных производных. Трудности здесь связаны, прежде всего, с отысканием краевых условий на границе сопряжения газа и твердого тела [1-5], и существенно возрастают при увеличении размерности по пространственным переменным, учете анизотропии тепловых свойств обтекаемого тела [6–12].

В работе получено новое приближенно-аналитическое решение системы уравнений теплового пограничного слоя, которое определяет тепловые потоки к обтекаемому телу. Последние затем использованы в качестве граничных условий для аналитического решения задачи теплопроводности в анизотропном теле (с тензором теплопроводности в общей форме). Неизвестным параметром сопряжения выступает температура на границе газа и твердого тела, через которую определяются все газодинамические функции, а также распределение температур в анизотропном теле. Сама эта температура находится из условия непрерывности тепловых потоков на границе сопряжения. Таким образом, поставлены и решены одновременно задача сопряженного теплообмена в пограничном слое и задача теплопроводности в анизотропном теле. Решение комплексной проблемы сопряженного теплообмена представлено в виде интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

Предлагаемый метод решения сопряженных задач пограничного слоя и теп-

лопроводности продемонстрирован на простейшей задаче обтекания затупленного клина в окрестности критической точки за прямой частью ударной волны, где скорость течения дозвуковая. При этом теплофизические характеристики набегающего потока взяты стандартными для высоты 12 тыс.м, а его скорость – 3 км/с, что соответствует числу Маха в 10 единиц. На внешней границе пограничного слоя рассчитаны газодинамические характеристики газа: температура, давление, плотность, а также продольный компонент вектора скорости, которые позволили получить распределение температур в анизотропном теле, а затем уже распределение теплового потока и температуры на границе сопряжения в различные моменты времени. Численная реализация подтверждает адекватность предлагаемых в работе математических моделей и метода решения.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 18-01-00446, № И 18-01-00444 А).

Литература

1. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Математическое моделирование аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел// М.: Изд-во МАИ, 2016.- 160с.
2. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Методика, алгоритм и программный комплекс по определению теплового состояния охлаждаемых микро ракетных двигателей //Труды МАИ. 2014. №78.
3. Колесник С. А., Формалев В. Ф., Селин И. А. Математическая модель и программный комплекс сопряженного теплообмена между вязкими газодинамическими течениями и охлаждаемыми лопатками газовых турбин //Труды МАИ. 2015. №80.
4. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Селин И.А. О сопряженном теплообмене при аэродинамическом нагреве анизотропных тел с высокой степенью анизотропии //Тепловые процессы в технике. 2016. Т.8, №9. С.388-394.
5. Колесник С.А. Метод идентификации нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов //Математическое моделирование. 2014. Т. 26, №2. С. 119-132.
6. Колесник С.А. Идентификация компонентов тензора теплопроводности анизотропных композиционных материалов //Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т.18, №1. С. 111-120.
7. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование теплового состояния анизотропной пластины при наличии теплообмена на свободных границах //Математическое моделирование. 2003. Том 15, №6. С.107-110.
8. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование сопряженного теплообмена на границах анизотропных тел //Теплофизика высоких температур. 2002. Том 40, №6. С.993-999.

9. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Влияние продольной неизотермичности на сопряженный теплообмен между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами //Теплофизика высоких температур. 2009. Т.47, №2. С.456-463.

10. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А. Аналитическое исследование теплопереноса при плёночном охлаждении тел //Теплофизика высоких температур. 2006. Т.44, №1. С.107-112.

11. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Сопряженный теплоперенос между пристенными газодинамическими течениями и анизотропными телами //Теплофизика высоких температур. 2007. Т.45, №1. С.85-93.

12. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Методология решения обратных коэффициентных задач по определению нелинейных теплофизических характеристик анизотропных тел //Теплофизика высоких температур. 2013. Т.51, №6. С.875-883.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ НА ОСНОВЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО ЗАКОНА РАЗЛОЖЕНИЯ СВЯЗУЮЩИХ

Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Теплозащитные композиционные материалы (КМ) в условиях аэродинамического нагрева сверх- и гиперзвуковых летательных аппаратов (ЛА) подвергаются фазовым превращениям, а именно разложению связующих (пиролизу) КМ с образованием газовой компоненты и пористого остатка, через который пиролизные газы фильтруются и вдуваются в высокотемпературный пограничный слой, уносу массы с наружной границы ЛА под действием высоких температур и касательных напряжений в пограничном слое, а также различным гетерогенным и гомогенным химическим реакциям внутри КМ. При проектировании тепловой защиты, изготавливаемой из теплозащитных КМ, необходимо, прежде всего, определять массовую скорость разложения связующих КМ, с учетом эндотермического эффекта, массовую и линейную скорости движения зоны пиролиза, массовую и линейную скорости фильтрации газов через пористый остаток с учетом конвективного охлаждения, а также тепловой эффект вдува в температурный пограничный слой. Все эти процессы происходят под действием высоких тепловых потоков от пограничного слоя к телу и температур и параллельно с тепломассопереносом внутри КМ.

Для каждого теплозащитного КМ до настоящего времени разрабатывается своя физико-математическая модель разложения связующих с учетом их химиче-

ского состава, возможных химических реакций как между химическими элементами пиролизного газа (гомогенные реакции), так и реакции между пиролизными газами и коксовым остатком КМ (гетерогенные реакции). При тепловом проектировании другого КМ необходимо разрабатывать свою физико-химическую и тепловую модель. Такой путь проектирования тепловой защиты бесперспективен.

Поскольку моделирование тепломассопереноса в теплозащитных КМ является комплексной проблемой, то необходимо взаимосвязанно рассматривать модели разложения связующих, фильтрации, фильтрации, прогрева с учетом подвижной зоны пиролиза и фильтрации, вдува в пограничный слой и многие другие проблемы для большинства теплозащитных КМ.

Задачи прогрева с учетом подвижных границ фазовых превращений рассматривались во многих работах [1–3], модели разложения связующих [1–6], теплопроводности в составных телах [6–12].

В работе, на основе идентифицированного закона разложения связующих большинства теплозащитных композиционных материалов построена физико-математическая модель тепломассопереноса в условиях фазовых превращений при высокотемпературном аэродинамическом нагреве скоростных летательных аппаратов. Математическая модель включает в себя описание возникновения и продвижения зоны разложения связующих (пиролиза), ограниченной двумя подвижными границами фазовых превращений, теплопереноса и фильтрации пиролизных газов в пористом коксовом остатке, их вдува в газодинамический пограничный слой, а также распределения температуры и плотности композиционного материала в зоне пиролиза. Математическая модель и метод аналитического решения нелинейной задачи тепломассопереноса позволяет свести задачу типа Стефана к решению трансцендентного уравнения относительно массовой скорости движения зоны пиролиза. Получены результаты по температурным полям с учетом фильтрации в пористом остатке и распределения давления пиролизных газов, а также температурные поля в зоне пиролиза и в незатронутым разложением связующего материала, а также распределение плотности пиролизных газов в зоне пиролиза.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (№ 18-01-00446, №20-01-00523 А) и гранта Президента РФ (МД-1798.2019.8).

Литература

1. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Математическое моделирование аэродинамического нагрева затупленных анизотропных тел// М.: Изд-во МАИ, 2016.- 160с.
2. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Методика, алгоритм и программный комплекс по определению теплового состояния охлаждаемых микроракетных двигателей //Труды МАИ. 2014. №78.

3. Колесник С. А., Формалев В. Ф., Селин И. А. Математическая модель и программный комплекс сопряженного теплообмена между вязкими газодинамическими течениями и охлаждаемыми лопатками газовых турбин //Труды МАИ. 2015. №80.
4. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Селин И.А. О сопряженном теплообмене при аэродинамическом нагреве анизотропных тел с высокой степенью анизотропии //Тепловые процессы в технике. 2016. Т.8, №9. С.388-394.
5. Колесник С.А. Метод идентификации нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов //Математическое моделирование. 2014. Т. 26, №2. С. 119-132.
6. Колесник С.А. Идентификация компонентов тензора теплопроводности анизотропных композиционных материалов //Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т.18, №1. С. 111-120.
7. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование теплового состояния анизотропной пластины при наличии теплообмена на свободных границах //Математическое моделирование. 2003. Том 15, №6. С.107-110.
8. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование сопряженного теплообмена на границах анизотропных тел //Теплофизика высоких температур. 2002. Том 40, №6. С.993-999.
9. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Влияние продольной неизомеричности на сопряженный теплообмен между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами //Теплофизика высоких температур. 2009. Т.47, №2. С.456-463.
10. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А. Аналитическое исследование теплопереноса при плёночном охлаждении тел //Теплофизика высоких температур. 2006. Т.44, №1. С.107-112.
11. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Сопряженный теплоперенос между пристенными газодинамическими течениями и анизотропными телами //Теплофизика высоких температур. 2007. Т.45, №1. С.85-93.
12. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Методология решения обратных коэффициентных задач по определению нелинейных теплофизических характеристик анизотропных тел //Теплофизика высоких температур. 2013. Т.51, №6. С.875-883.

ПЕРСониФИЦИРОВАННАЯ ОЦЕНКА НДС ЭНДОПРОТЕЗИРОВАННОГО ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА

*Хабибуллин А.А., Коваленко А.Н., Габсаттаров Р.М., Коноплев Ю.Г.,
Саченков О.А.*

(Казанский федеральный университет)

Развитие аддитивных технологий нашло применение в современной артропластике. Такой подход позволяет проектировать эндопротезы с учетом индивидуальных особенностей пациента, в этом случае конструкция может нивелировать негативные эффекты от патологий анатомии пациента [1,2,3]. В этом случае необходимо выработать рекомендации к проектированию таких конструкций. В этом случае необходимо выстроить методику оценки напряженно-деформированного состояния.

На первом этапе возникает задача восстановления цифрового прототипа органа. При сканировании с установленным эндопротезом, в случае проверочного расчета, эта задача усложняется в виду наличия артефактов. Задачей второго этапа является восстановление границы исследуемого объема. Получаемая в результате триангуляция подвергается оптимизации. В результате можно получить описание интересующего объема. Третий этап включается в себя конечно-элементную дискретизацию исследуемой области и формулировка граничных условий.

В работе представлен пример реализации описанной методики для конкретного пациента и предлагаются подходы к выработке общих рекомендации к проектированию.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, задание № 13556.2019/13.1.

Литература

1. *Большаков П.В., Тихилов Р.М., Мазуренко А.В., Коноплев Ю.Г., Пряжевский Р.Д., Саченков О.А.* Численное исследование влияния степени недопокрытия вертлужного компонента, подкрепленного винтом, на несущую способность эндопротеза тазобедренного сустава // *Российский журнал биомеханики.* — 2018. — Т. 22. № 1. — С. 19 — 30.
2. *Коноплев Ю.Г., Мазуренко А.В., Саченков О.А., Тихилов Р.М.* Численное исследование влияния степени недопокрытия вертлужного компонента на несущую способность эндопротеза тазобедренного сустава // *Российский журнал биомеханики.* — 2015. — Т. 19. № 4. — С. 330 — 343.

3. Коноплев Ю.Г., Мазуренко А.В., Митряйкин В.И., Саченков О.А., Тихилов Р.М. Экспериментальное исследование влияния степени недопокрытия вертлужного компонента на несущую способность эндопротеза // Российский журнал биомеханики. — 2014. — Т. 18. № 3. — С. 333 — 344.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОРТОТРОПНЫХ СВОЙСТВ ОБЪЕКТА ПО ДАННЫМ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Харин Н.В., Герасимов О.В., Саченков О.А., Тазюков Б.Ф., Семенова Е.В.

(Казанский федеральный университет)

В настоящее время актуальной задачей является определение связи между структурными и механическими свойствами материала [1,2]. Эта задача особенно остро стоит для клинической медицины. Так, информация о качестве костной ткани может сыграть решающую роль при планировании лечения, такие данные позволят улучшить качество биомеханического моделирования суставов и органов опорно-двигательной системы [2]. Для оценки механических свойств биологических объектов широко применяются методы численного моделирования. В работе представлен подход для построения репрезентативной модели по данным компьютерной томографии [3].

Образец подвергался сканированию на компьютерном томографе Vatech РаХ-1 3D. Для бинаризации полученных данных был использован методом Отцу. Полученные данные дискретизировались на репрезентативные элементы. Для получения репрезентативного элемента строилась регулярная гексагональная сетка из 8-ми узловых конечных элементов с линейной аппроксимацией. Размер каждого элемента определяется размером вокселя для сканированного образца.

Полученная модель может быть использована для определения интегральных механических свойств репрезентативного элемента. Первоначально из предположения изотропности материала были определены модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Таким образом было получено распределение интегральных механических свойств всего образца с заданным уровнем дискретизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160025.

Литература

1. Саченков О.А., Хасанов Р.Ф., Андреев П.С., Коноплев Ю.Г. Численное исследование напряженно-деформированного состояния тазобедренного сустава при ротационной остеотомии проксимального участка бедренной кости // Российский журнал биомеханики. — 2016. — Т. 20. № 3. — С. 257 — 271.

2. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И. Математическое описание поведения губчатой костной ткани под нагрузкой // Математическое моделирование в естественных науках. – 2013. – № 1. – С. 84 – 85.

3. Харин Н.В., Воробьев О.В., Бережной Д.В., Саченков О.А. Методика построения репрезентативной модели по данным компьютерной томографии // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 3. – С. 95 – 102.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

Шакирзянов Ф.Р.^{1,2}

¹Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань,

²Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ))

Разрабатываются упрощенные определяющие соотношения (ОС) ползучести ПКМ, которые позволят проще определять их механические характеристики. Напряженное состояние считается плоским. Используется подход, основанный на уменьшении числа аргументов в ОС путем их асимптотического анализа [1, 2]. Это позволяет в первом приближении оставить только одномерные функции, отсыскиваемые из экспериментов.

Для описания деформаций ползучести волокнистых композитов часто используют модель вязко упругого материала. Однако анализ литературы и проведенные эксперименты показывают [3], что все же часть деформаций ползучести не восстанавливается. Это говорит о том, что эта часть деформаций должна быть описана соотношениями теории ползучести.

Закон ползучести для ПКМ запишем согласно теории течения в виде:

$$\xi_{ij} = f(\sigma_{ij}), \quad (1)$$

где $\xi_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{cr}$ – скорости деформаций ползучести, σ_{ij} – напряжения.

Аналогично теории пластичности для случая установившейся ползучести можно ввести $\Phi(\sigma_{ij})$ потенциал скоростей ползучести [4]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = h(\sigma_{ij}) \frac{\partial L}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (2)$$

В процессе нагружения мощность диссипации энергии не убывает и пусть мощность дополнительных воздействий будет неотрицательной [4]:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \xi_{ij} \geq 0. \quad (3)$$

Тогда следует, что поверхность $\Phi(\sigma_{ij}) = const$ выпукла.

Для упрощения анализа ОС введем обозначение:

$$\zeta_1 = \xi_{11}, \zeta_2 = \xi_{22}, \zeta_3 = 2\xi_{12}, \tau_1 = \sigma_{11}, \tau_2 = \sigma_{22}, \tau_3 = \sigma_{12}. \quad (4)$$

Запишем выражение для приращений скоростей деформаций ползучести

$$d\zeta_i = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau_i \partial \tau_j} d\tau_j = B_{ij} d\tau_j \quad (5)$$

Ввиду выпуклости поверхности $\Phi(\sigma_{ij}) = const$ следует, что матрица B^{ij} будет положительно определена.

Для ПКМ характерна большая податливость деформациям ползучести при сдвиге и деформациям поперек волокон в сравнении с податливостью деформаций вдоль волокон. Это означает, что $B_{11} \sim B_{22} \leq B_{33}$. Пусть

$$\eta^2 = \max(B_{11} / B_{22}) \sim 1, \quad \theta^2 = \max(B_{22} / B_{33}) \leq 1. \quad (6)$$

Ввиду малости η, θ элементы матрицы B_{ij} / B_{33} имеют различный порядок малости. Из условия положительной определенности матрицы B_{ij} , вытекает, что

$$B_{12}^2 < B_{11}B_{22} \leq B_{33}^2 \eta^2 \theta^4. \text{ Аналогично, } B_{13}^2 < B_{33}^2 \eta^2 \theta^2, \quad B_{23}^2 < B_{33}^2 \theta^2.$$

Выразим η, θ через один малый параметр α :

$$\eta = \alpha^m, \quad \zeta = \alpha^n. \quad (8)$$

Тогда можно записать следующее соотношение для элементов матрицы B :

$$B \sim B_{33} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^{2m+2n} & \alpha^{n+m+sm} & \alpha^{mq+np} \\ \alpha^{n+m+sm} & \alpha^{2n} & \alpha^{kn} \\ \alpha^{mq+np} & \alpha^{kn} & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Здесь $k, p, q, r, s \geq 1$. Из соотношения (9) следует, что от некоторых τ_i скорости ξ_i зависят сильно, а от некоторых – несущественно. Для упрощения модели ползучести будем отбрасывать слагаемые с малыми множителями и ограничимся первыми членами в следующих асимптотических рядах:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \alpha^{2m+2n} \varphi_{11}(\tau_1, \tau_2, \tau_3^2) + \alpha^{n+m+sm} \varphi_{12}(\tau_2, \tau_3^2) + \alpha^{qm+pn} \varphi_{13}(\tau_3^2) + o(\alpha^\beta) B_{33}, \\ \zeta_2 &= \alpha^{n+m+sm} \varphi_{21}(\tau_1, \tau_2, \tau_3^2) + \alpha^{2n} \varphi_{22}(\tau_2, \tau_3^2) + \alpha^{kn} \varphi_{23}(\tau_3^2) + o(\alpha^\gamma) B_{33}, \\ \zeta_3 &= \tau_3 [\alpha^{qm+pn} \varphi_{31}(\tau_1, \tau_2, \tau_3^2) + \alpha^{kn} \varphi_{32}(\tau_2, \tau_3^2) + \varphi_{33}(\tau_3^2)] + o(\alpha^\delta) B_{33}, \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда с учетом обозначений (4) соотношения (1) примут вид:

$$\zeta_1 = \alpha^{2n+2m} \varphi_{11}(\tau_1), \quad \zeta_2 = \alpha^{2n} \varphi_{22}(\tau_2), \quad \zeta_3 = \varphi_{33}(\tau_3^2). \quad (11)$$

Таким образом асимптотический анализ соотношений ползучести ПКМ позволяет записать упрощенные модели деформирования ползучести ПКМ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-08-00349) и Российского научного фонда (проект № 19-19-00059).

Литература

1. *Терегулов И.Г.* Определяющие соотношения для анизотропных и волокнисто-композитных оболочек при конечных деформациях //Изв. АН СССР, Механика тв. тела. – 1989, № 3. – С.167-173.

2. *Каюмов Р. А., Терегулов И. Г.* Структура определяющих соотношений для армированных жесткими волокнами наследственно-упругих материалов // Журнал ПМТФ. – 2005, № 3. – С. 120-128.

3. *Паймушин В.Н., Каюмов Р.А., Холмогоров С.А.* Особенности и модели деформирования косоугольно армированных волокнистых композитов со структурой $[\pm 45]_2s$ при растяжении // Механика композитных материалов. – 2019. – Т. 55, №2, С. 205-224. DOI: 10.1007/s11029-019-09800-5.

4. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М: Наука, 1966. – 753 с.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСТРАНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В МОМЕНТ ОСТАНОВКИ ПОСЛЕ КОНЕЧНОГО ПЕРЕДВИЖЕНИЯ

Шклярчук Ф.Н.^{1,2}, Русских С.В.^{2,1}

(¹Институт прикладной механики Российской академии наук, ²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва)

Для решения задачи устранения колебаний нелинейной системы и системы с переменными параметрами, описываемой конечным числом степеней свободы, обобщенные координаты на конечном интервале времени управления представляются в виде конечных рядов по заданным функциям времени с неизвестными коэффициентами. Уравнения для определения этих коэффициентов получаются путем удовлетворения уравнений колебаний системы по методу Бубнова-Галеркина. Неизвестные управляющие воздействия также представляются в виде рядов по подходящим заданным функциям с неизвестными коэффициентами, которые определяются так, чтобы удовлетворялись начальные и конечные условия. Например, при передвижении системы из одного состояния покоя в другое требуется, чтобы перемещения и скорости системы в начальный и конечный моменты времени были равны нулю. В результате задача сводится к системе алгебраических уравнений для всех неизвестных коэффициентов.

В качестве примера рассмотрена система с двумя степенями свободы в виде тяжелого тела, подвешенного на нерастяжимом тросе переменной длины. Решена задача управляемого передвижения тела из одного положения покоя в другое заданное положение за определенное время. В качестве управляющего воздействия рассматривается горизонтальное перемещение верхней точки подвеса троса или соответствующая горизонтальная сила, приложенная к этой точке. При этом закон изменения длины троса задан; подъем или опускание тела происходит одновременно с горизонтальным перемещением точки подвеса. Углы поворота троса и тела считаются умеренными (в пределах одного радиана), а трос – натянутым.

Выполнен анализ точности и сходимости результатов при использовании различных рядов заданных функций для обобщенных координат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект №18-08-00778а).

Литература

1. *Русских С.В., Шклярчук Ф.Н.* Передвижение тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, с устранением колебаний // ПММ. – 2019. – Т. 83. – № 4. – С. 549-561.

О ВЛИЯНИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА СТРУКТУРУ КОСТНОЙ ТКАНИ

Якова В.В., Семенова Е.В., Герасимов О.В., Балтин М.Э., Балтина Т.В., Саченков О.А.

(Казанский федеральный университет)

Понимание процесса формирования костной ткани является актуальной задачей современной медицины. Травмы, долгий постельный режим запускают процессы охрупчивания костной ткани [1]. При этом многие исследователи наблюдали связь между физической активностью и развитием костной ткани.

В рамках исследования производились натурные эксперименты на крысах породы Wistar. Животные подвергались антиортостатическому вывешиванию, тенотомии мышц антагонистов и синергистов, а также денервации. После этого анализу подвергалась активность мышц и механические и структурные свойства костей животных. Известно, что плотность, пористость и ориентация пор в костной ткани так же, как и упругие свойства костной ткани, изменяются в довольно широком диапазоне в зависимости от исследуемой области. Оценка механических свойств костной ткани производилась в интегральных терминах модуля Юнга и предела прочности, тензора структуры, тензора упругих констант [2, 3, 4].

В математическом формализме Коэна был использован закон Вольфа. Для

численного моделирования использовался метод конечных элементов. В численных экспериментах исследовались регулярные области, внешние нагрузки моделировали натурные эксперименты. Модель верифицировалась данными с экспериментов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-75-10027).

Литература

1. Саченков О.А., Хасанов Р.Ф., Андреев П.С., Коноплев Ю.Г. Численное исследование напряженно-деформированного состояния тазобедренного сустава при ротационной остеотомии проксимального участка бедренной кости // Российский журнал биомеханики. – 2016. – Т. 20. № 3. – С. 257–271.

2. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И. Математическое описание поведения губчатой костной ткани под нагрузкой // Математическое моделирование в естественных науках. – 2013. – № 1. – С. 84 – 85.

3. Харин Н.В., Воробьев О.В., Бережной Д.В., Саченков О.А. Методика построения репрезентативной модели по данным компьютерной томографии // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 3. – С. 95 – 102.

4. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Заборских А.А. Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15. № 4. – С. 78 – 93.

МОДЕЛЬ КОЭНА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ФОРМИРОВАНИЯ КОСТНОЙ ТКАНИ

Яикова В.В., Семенова Е.В., Балтин М.Э., Балтина Т.В., Саченков О.А.

(Казанский федеральный университет)

При решении задач биомеханики в разделе опорно-двигательной системы человека необходимо описать напряженно-деформированное состояние (НДС) костной ткани, учитывая изменение её структуры со временем [1-3]. Поэтому появляется необходимость получения метода, благодаря которому будет количественно описываться изменение структуры костной ткани под воздействием постоянной нагрузки. Закон Вольфа гласит: кость приспосабливает свою структуру к тем нагрузкам, которые она должна выдержать [3]. В равновесном состоянии главные оси тензора деформаций должны совпадать с главными осями девиатора тензора структуры. Из литературы известны эволюционные соотношения. Модель Коэна позволяет выразить девять компонент тензора ортотропии через нормированные собственные значения тензора структуры, второй инвариант тензора структуры и девять функций плотности костного матрикса.

Расчеты производились на основе метода конечных элементов. При расчетах использовался восьми узловой конечный элемент с линейной аппроксимацией. На нижней поверхности модель ограничена в перемещениях по всем направлениям, на верхней поверхности было приложено давление. Был реализован итерационный процесс пошагового определения неизвестных на каждом временном слое. Для определения качества перестройки костной структуры была реализована визуализация НДС и распределение пористости в фиксированные моменты времени. При решении использовалось 320 итераций и шаг по времени 0.05, что составляет порядка 1.2 часа. В численных результатах было получено, что костная структура приходит в состояние гомеостатического равновесия приблизительно через 5 суток.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 20-01-00535.

Литература

1. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Лохов В.А. Постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани // Российский журнал биомеханики. 2012. Т. 16, № 4 (58): 36–52.
2. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Лохов В.А. О приложении теории перестройки трабекулярной костной ткани // Российский журнал биомеханики. 2012. Т. 16, № 4 (58): 53–72.
3. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Симановская Е.Ю., Еловицова А.Н. Становление и развитие классической теории описания структуры костной ткани // Российский журнал биомеханики. 2008. Т. 12, № 1: 69–89.

ИЗБРАННЫЕ ДОКЛАДЫ

К РАСЧЁТНОЙ МОДЕЛИ ВНУТРЕННЕГО ОБОРУДОВАНИЯ НОСОВОГО ОТСЕКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ И УПЛОТНЕНИИ

Белов Г.В., Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.

(Россия, МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва)

Носовые приборные отсеки (НО) летательных аппаратов (ЛА) представляют собой сложные системы взаимосвязанных блоков бортовой аппаратуры (БА) и относятся к 3-м – 5-м уровням разукрупнения радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) согласно ГОСТ Р 522003-2003 и ГОСТ Р 51676-2000. НО занимают достаточно большой ресурс, как массы, так и габаритов ЛА, а потому должны учитываться в расчётах высокоскоростного взаимодействия ЛА с различными преградами [1]. В частности, при рассмотрении задачи о высокоскоростном соударении ЛА с защищённой конструкцией реакторов современных АЭС, входящей в официальный перечень аварийных ситуаций, для которых необходимо обеспечить безопасность объектов атомной отрасли [2]. При этом в настоящее время подобные задачи решаются по подходу Дж. Риеры, не учитывающему реальную конструкцию ЛА [3, 4]. Для корректного решения подобного класса задач необходимо получить модель НО, адекватно описывающую его при высокоскоростном нагружении.

При создании корректной расчётной модели НО и получения его диаграммы деформирования целесообразно воспользоваться методом аддитивности [5]. Метод предполагает, что диаграмма деформирования НО представляет собой сумму диаграмм деформирования отдельных блоков БА.

$$\sigma_{НО}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\varepsilon) \varepsilon,$$

где $\sigma_{НО}$ – значение напряжения в НО; σ_i – значение напряжения в i -м блоке БА, n – общее количество блоков БА в НО ЛА.

Для отработки модели проведем определение диаграммы деформирования части НО ЛА, состоящей из 2-х блоков БА расположенных на общей раме (рис. 1). Геометрия блоков БА выполнена со степенью детализации достаточной для определения качественных и количественных показателей их деформирования и разрушения. На её основе выполнялась расчётная сетка, состоящая из ~776 тысяч гексагональных 8-точечных элементов типа Solid. В полученной конечно-элементной модели для задания деформирования металлических материалов использовалась упругопластическая среда с моделью пластического течения Прандтля-

Рейсса в программной реализации Джонсона-Кука, а физико-механические свойства стеклотекстолитовых печатных плат, составлявших внутреннее наполнение блока, определялись по ортотропной модели с критерием разрушения Чанга-Чанга [6].

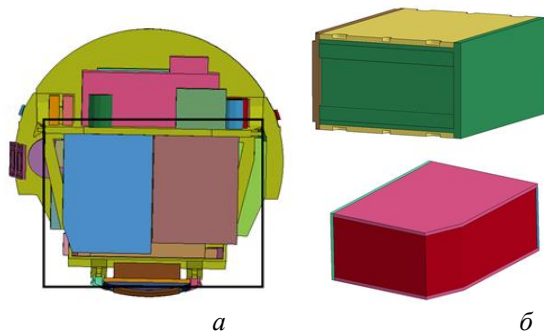


Рис. 1. Исходная геометрия для моделирования ПО: *а* – общий вид НО ЛА; *б* – блоки БА, входящие в состав рассматриваемой части НО

Для проверки возможности применения метода аддитивности расчёт проводился следующим образом: в начале методом квазистатического сжатия до разрушения определялись диаграммы деформирования отдельных блоков, входящих в модель, затем блоки объединялись в единой расчётной области и нагружались сжимающим давлением уже совместно (рис. 2). По результатам этих расчётов выполнялось построение диаграмм деформирования: 1-го блока, 2-го блока (рис. 3), совместной диаграммы, а также графика, представляющего собой сумму диаграмм для 1-го и 2-го блоков (рис. 4).

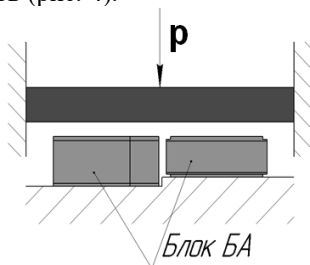


Рис. 2. Схема нагружения части НО, состоящего из 2-х блоков

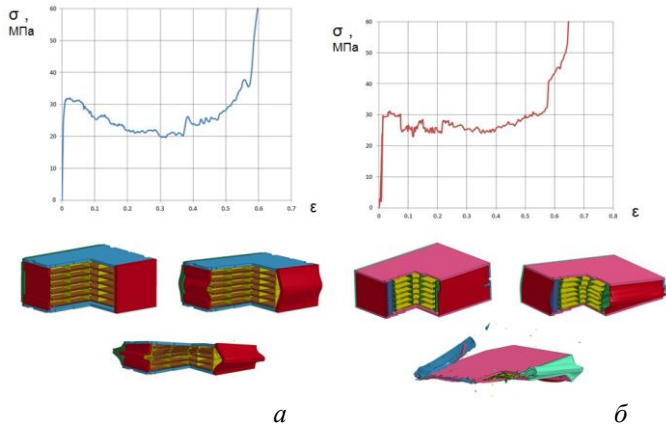


Рис. 3. Диаграммы деформирования и кинограммы разрушения отдельных блоков НО: *a* – 1-го блока; *б* – 2-го блока

Структурно диаграмма деформирования рассматриваемой части НО повторяет диаграммы входящий в неё элементов и имеет 3 основных участка: линейно-упругий участок, участок пластического деформирования и последующего уплотнения (рис. 4).

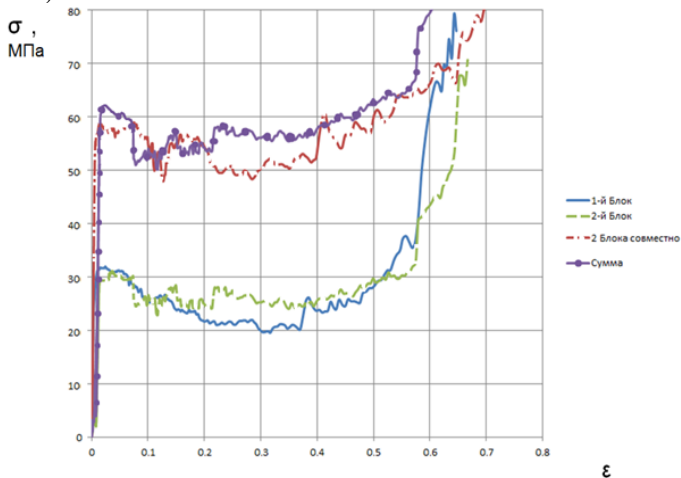


Рис. 4. Диаграмма деформирования части НО

Результаты расчёта подтверждают выявленную экспериментально А.П. Гусаровым гипотезу о возможности построения диаграммы деформирования ПО

методом аддитивности: выполняя суммирование диаграмм деформирования входящих в состав НО отдельных блоков БА. Данное обстоятельство позволяет в дальнейшем строить модельные эквиваленты НО, руководствуясь данными о механическом поведении отдельных блоков, а также использовать обобщённые модели НО при расчёте высокоскоростного взаимодействия ЛА с различными преградами в т.ч. защитными конструкциями АЭС.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00701а).

Литература

1. Белов Г.В., Марков В.А., Пусев В.И., Селиванов В.В. О разработке механических эквивалентов конструкций внутреннего оборудования носовых отсеков летательных аппаратов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 1 (13). С. 30.
2. Вильданов М. О состоянии защищенности атомных электростанций США // Зарубежное военное обозрение. 2007. № 2. С. 19-21.
3. Riera J.D. On the stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces // Nucl. Engng. and Des. 1968. Vol. 8. P. 415-426.
4. Riera J.D. A critical reappraisal of nuclear power plant safety against accidental aircraft impact // Nucl. Engng. and Des. 1980. Vol. 57. P. 193-206.
5. Марков В.А., Овчинников А.Ф., Пусев В.И. Модельная среда для внутреннего оборудования носовых отсеков летательных аппаратов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение», 2010. № S. С. 196-206. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modelnaya-sreda-dlya-vnutrennego-oborudovaniya-nosovyh-otsekov-letatelnyh-apparatov.pdf> (дата обращения 12.02.2020).
6. LS-DYNA, Keyword User's Manual, Version 970. Livermore Software Technology Corporation, 2003

О ДЕФОРМИРОВАНИИ И УПЛОТНЕНИИ БЛОКА ВНУТРЕННЕГО ОБОРУДОВАНИЯ НОСОВОГО ОТСЕКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Белов Г.В., Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.

(Россия, МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва)

Блоки внутреннего оборудования носовых отсеков (НО) летательных аппаратов (ЛА), относящиеся согласно ГОСТ Р 522003-2003 и ГОСТ Р 51676-2000 ко второму уровню разукрупнения элементов радио-электронной аппаратуры (РЭА), занимают достаточно большой объём в общей компоновке ЛА (до 25 % массы пустого ЛА [1]). При этом их объёмная и массовая доля в современных ЛА как военного, так и гражданского назначения имеет тенденцию к увеличению. В силу своего расположения в НО ЛА блоки бортовой аппаратуры (БА) оказывают

существенное влияние на процесс высокоскоростного взаимодействия ЛА с различными преградами [2]. В частности при рассмотрении задачи о высокоскоростном соударении ЛА с защищённой конструкцией реакторов современных АЭС, входящей в официальный перечень аварийных ситуаций, для которых необходимо обеспечить безопасность объектов атомной отрасли [3], не учёт вклада БА может привести к серьёзным погрешностям. Всё это требует знания механических свойств блоков БА при проектировании современных ЛА. В данной работе проведено математическое моделирование типового блока БА с целью определения его механических свойств.

В настоящее время типовые блоки РЭА имеют следующее строение (рис. 1): силовой корпус с крышками из алюминиевого сплава содержит внутреннее наполнение – печатные платы, закреплённые на несущих модулях [4]. Платы устанавливаются на модулях посредством крепежных винтов, а сами модули соединяются друг с другом шпильками и образуют монолитный пакет.

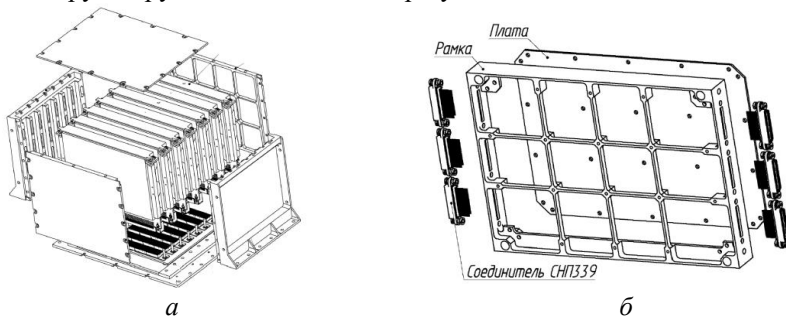


Рис. 1. Типовой блок БА: а – общий вид конструкции; б – общий вид несущего модуля

По приведенным выше исходным данным разработан обобщённый блок БА НО ЛА, состоящий из корпуса (1), крышек (2) и наполнения (3) (рис. 2). Общая масса блока составляла 6,5 кг, а его средняя плотность $1,375 \text{ г/см}^3$, что соответствует типовым значениям массы и плотности для бортового оборудования ЛА [5]. Согласно стандартам, применяемым в авиастроительной отрасли и принятой практике проектирования корпус, крышки и несущие модули принимались выполненными из высокопрочного алюминиевого сплава Д16Т ГОСТ 4784-97, печатные платы из стеклотекстолита ГОСТ 12652-74, а крепежные элементы из стали 3 ГОСТ 380-2005.

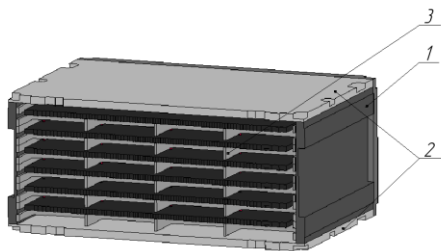


Рис. 2. Конструкция обобщённого блока БА

Для проведения расчётов была разработана детализированная конечно-элементная модель блока БА, пригодная для использования в пакете численного моделирования нестационарных процессов LS-DYNA. Модель включала в себя ~71 тысячи гексагональных 8-точечных элементов типа Solid.

Математическая модель физико-механического поведения металлических материалов использовала упругопластическую среду с моделью пластического течения Прандтля-Рейсса в программной реализации Джонсона-Кука, а физико-механические свойства стеклотекстолита определялись по ортотропной модели с критерием разрушения Чанга-Чанга [6].

Постановка задачи предполагала квазистатическое сжатие блока до его разрушения. В процессе расчёта регистрировались параметры напряжений и деформаций, возникающих в конструкции, как функции времени, а затем по этим данным выполнялось построение диаграмм деформирования. Для определения вклада корпуса конструкции в полученную диаграмму был также проведен расчёт силового корпуса, без внутреннего наполнения.

По результатам расчёта удалось получить основные стадии разрушения блока БА (рис. 3), а также построить диаграммы деформирования (рис. 4). На данных диаграммах можно выделить участки, характерные для прочных композиционных материалов. В частности, имеется линейно-упругий участок, участок пластического деформирования и последующего уплотнения.

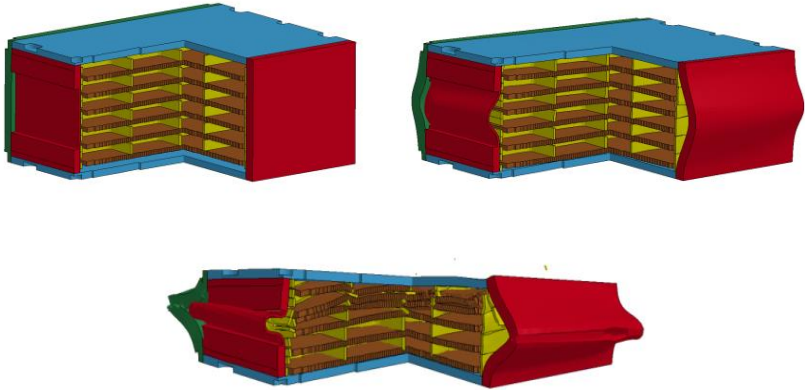


Рис. 3. Кинограммы процесса разрушения блока БА под действием внешней сжимающей силы

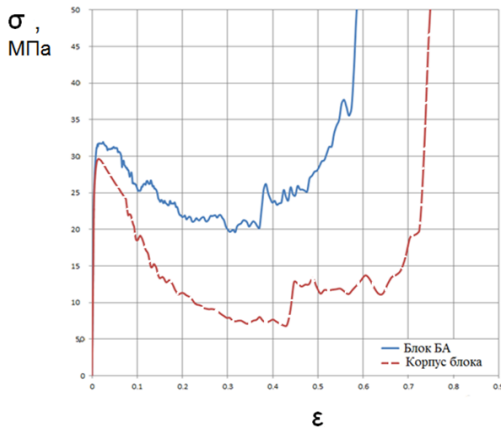


Рис. 4. Диаграммы деформирования блока БА и его корпуса

Для проверки влияния материала корпуса блока, а также способа нагружения на диаграмму деформирования были выполнены следующие дополнительные расчёты: расчёт деформирования до разрушения для блоков той же геометрии, но с материалами корпуса из сплавов АМг6 и АМг6М ГОСТ 17232-99; а также расчёт деформирования исходного блока с разгрузкой.

Результаты данных дополнительных расчётов показали, что основные различия в диаграммах для корпусов из различных материалов приходятся на линейно-упругий участок диаграммы и величину эффективного предела текучести,

а при расчёте с разгрузкой площадка текучести диаграммы располагается на ~15 % ниже (рис. 5).

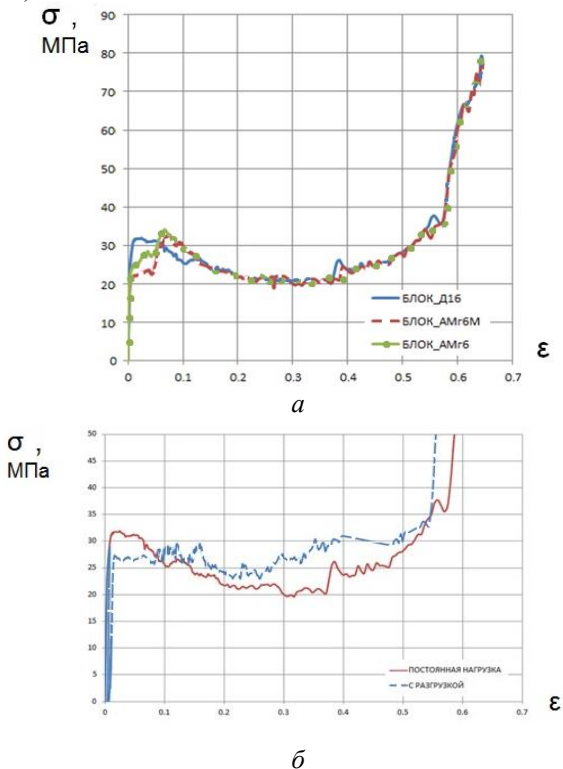


Рис. 5. Диаграммы деформирования блоков БА: *а* – расчёт для корпусов из различных материалов; *б* – сравнение расчётов с постоянной нагрузкой и с разгрузкой

По результатам расчёта получена диаграмма деформирования типового блока БА НО ЛА. На данной диаграмме можно выделить следующие основные участки: линейно-упругий, пластического деформирования и последующего уплотнения. Следовательно, блок БА можно рассматривать как композиционный материал с эффективным пределом текучести порядка 30 МПа., а полученные подобным образом диаграммы деформирования можно использовать в расчётах высокоскоростного взаимодействия ЛА с различными преградами в т.ч. защитными конструкциями АЭС.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00701а).

Литература

1. Дробышевский В.Г. Сборник справочных, методических и статистических материалов по военному и гражданскому самолетостроению: учеб. пособие. Нижний Новгород: НГТУ им. Р.Е.Алексеева. 2015. 192 с
2. Белов Г.В., Марков В.А., Пусев В.И., Селиванов В.В. О разработке механических эквивалентов конструкций внутреннего оборудования носовых отсеков летательных аппаратов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 1 (13). С. 30.
3. Вильданов М. О состоянии защищенности атомных электростанций США // Зарубежное военное обозрение. 2007. № 2. С. 19-21.
4. Калягин М.Ю. Моделирование приборных отсеков летательных аппаратов пористо-смесевыми ударниками // Труды МАИ. Выпуск №98. 2017. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84442>
5. Марков В.А., Овчинников А.Ф., Пусев В.И. Модельная среда для внутреннего оборудования носовых отсеков летательных аппаратов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение», 2010. № 5. С. 196-206. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modelnaya-sreda-dlya-vnutrennego-oborudovaniya-nosovyh-otsekov-letatelnyh-apparatov.pdf> (дата обращения 12.02.2020).
6. LS-DYNA, Keyword User's Manual, Version 970. Livermore Software Technology Corporation, 2003

ОСОБЕННОСТИ НАГРУЖЕНИЯ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ ПРИ УДАРЕ ВЫСОКОПОРИСТОГО ЦИЛИНДРА

Белов Г.В., Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.

(Россия, МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва)

В настоящее время возможность падения самолета на сооружения атомных электростанций предусмотрена отечественными [1] и зарубежными нормами. В отечественных нормах [1] расчет сооружений ведется для нагрузки при ударе самолета массой 20 т при скорости 200 м/с. Эта ситуация характерна для падения самолета военного назначения типа истребителя F-4 Phantom II [2].

В современной проектной практике принято проводить декомпозицию задачи об ударе самолета. При таком экстремальном воздействии сначала определяют внешнюю ударную нагрузку, а затем исследуют динамический отклик конструкции под действием заданной нагрузки. Таким образом внешняя нагрузка при ударе самолета рассматривается изолированно от реальных преград и определяется обычно по подходу Дж. Риеры [3, 4], который рассматривал взаимодействие с жесткой стенкой жесткопластического стержня, эквивалентного самолету.

Подход Дж. Риеры, основанный на законе сохранения импульса, позволяет проводить расчет нагрузки на жесткую стенку $F_x(t)$ при ударе стержня с распределенной по длине погонной массой $\mu(x)$ и предельной нагрузкой разрушения $P_c(x)$ в виде [3, 4]

$$F_x(t) = P_c[x_c(t)] + \mu[x_c(t)] \cdot V^2(t), \text{ где } x_c(t) = \int_0^l V(\xi) d\xi.$$

Сам Дж. Риера отмечает [4], что различия в результатах у разных исследователей связано с использованием разных зависимостей $P_c(x)$, но в [3, 4] не предлагает никаких рекомендаций.

Ранее в [5] было показано (рис. 1 [5]), что нагрузка по нормам России [1] является огибающей нагрузки, рассчитанной по подходу Дж. Риеры (за некоторыми исключениями). При этом в известных авторам работах при рассмотрении погонной массы и предельной нагрузкой разрушения исследователи не упоминают и не учитывают механические свойства бортовой аппаратуры (БА), которая на самолетах военного назначения размещается в том числе в носовой части. При этом количество БА на самолетах военного назначения продолжает увеличиваться как по массе, так и по доле БА в массе самолета [6]. Это связано с повышением требований к надежности аппаратуры.

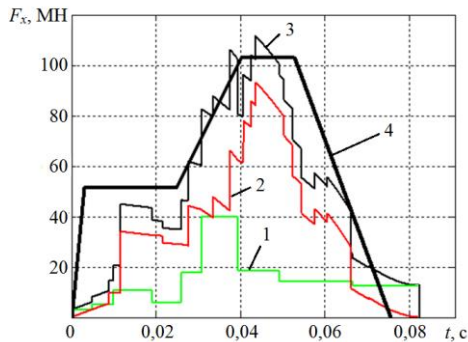


Рис. 1. Нагрузка на жесткую стенку:

1 – прочностная составляющая нагрузки; 2 – инерционная составляющая нагрузки; 3 – рассчитанная нагрузка на жесткую стенку; 4 – нагрузка по нормам России

В [7] показано, что блоки БА составляют 70-75 % массы внутреннего оборудования носовых отсеков летательных аппаратов и заполняют 90-95 % площади поперечного сечения отсека. Механические свойства БА носовых отсеков самолетов будут определяться в основном механическими свойствами блоков БА [7].

Блоки БА являются композиционной высокопористой средой, которая по своим компоновочным характеристикам, составу материалов и механическим свойствам весьма близка к высокопористым алюминиевым сплавам и сотовым конструкциям из алюминиевых сплавов и может быть применена в качестве модельной среды для внутреннего оборудования носовых отсеков ЛА как в расчетной, так и в экспериментальной областях [7].

В связи с этим в работе были проведены расчетно-экспериментальное исследование нагружения жесткой стенки при высокоскоростном ударе механических эквивалентов БА (стержней из высокопористого алюминиевого сплава [8]).

Экспериментальные образцы представляли собой объемно-перфорированные стержни из алюминиевого сплава Д16Т. Размеры образцов (обозначение соответствует рис. 2 [9]): $D = 24$ мм; $H_0 = 60$ мм; $d = 2,0$ мм; $z = 5,2$ мм ($\alpha_0 = 2,16$); $z = 4,8$ мм ($\alpha_0 = 2,59$); $z = 4,3$ мм ($\alpha_0 = 3,77$); $z = 4,1$ мм ($\alpha_0 = 4,83$). Полученные результаты верифицировались с экспериментами (по остаточной длине ударника [9]).

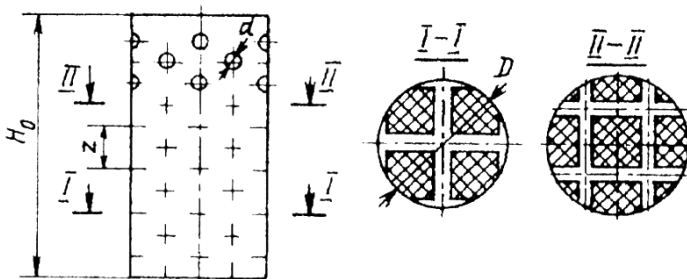


Рис. 2. Схема и поперечные сечения объемно-перфорированного образца для испытаний в тесте Тейлора

Для определения предельной нагрузки разрушения в сечении и расчета по подходу Дж. Риеры использовались эффективные пределы текучести из результатов численного моделирования сжатия образцов в квазистатическом приближении в трехмерной постановке с прямым заданием пористости [9].

Полученные в результате численного моделирования в LS-DYNA истории нагружения жесткой стенки сравнивались с результатами расчета нагрузки по Дж. Риере [2] и численным решением в авторской программе (рис. 3). В авторской программе в одномерной постановке проводилось решение конечно-разностных уравнений механики сплошной среды, а для описания поведения высокопористой среды использовалась модель «полых сфер» Кэрролла-Холта [10]. Пунктирной линией (.....) показана нагрузка по авторской программе. Штриховой линией (---) показана нагрузка, рассчитанная по подходу Дж. Риеры. Сплошной линией (—) показана нагрузка, рассчитанная в LS-DYNA для 3D постановки.

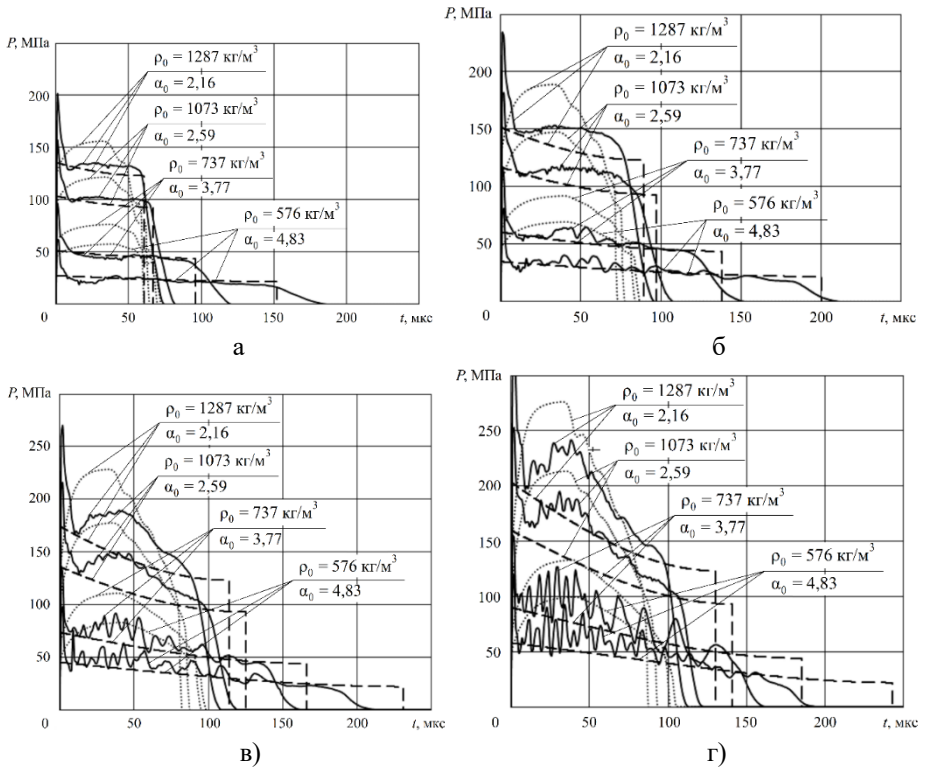


Рис. 3. Истории нагружения жесткой стенки при скорости удара: 100 м/с (а), 150 м/с (б), 200 м/с (в) и 250 м/с (г)

Модель полых сфер в силу допущений дает верхнюю оценку давления, реализуемого в высокопористой среде и истории нагружения, полученные таким образом являются огибающими к истинным.

При скорости удара 100 м/с модель Дж. Риеры достаточно близка к результату численного моделирования с прямым моделированием пористости, особенно для менее плотных образцов. При этом важно отметить, что для оценки прочностной составляющей нагрузки использовались данные по эффективному пределу текучести из результатов прямого моделирования. Это и определило хорошее соответствие за исключением начального и конечного этапа нагрузки, когда нагрузка/разгрузка определяется волновыми эффектами.

С увеличением скорости удара до 150 м/с у более плотных образцов начи-

нает сказываться упрочнение, что не учитывается в модели Дж. Риеры. При скорости 200 м/с у менее плотных образцов появляются колебания нагрузки, связанные со схлопыванием пор. При увеличении скорости до 250 м/с указанные эффекты только усиливаются, что приводит к нагрузкам выше рассчитанных по Дж. Риере.

Расчетно-экспериментальное исследование высокоскоростного деформирования механических эквивалентов БА показало, что на начальной стадии нагружения наблюдается значительный (в 1,5-2 раза) пик нагрузки, связанный с ее ударным характером. Длительность пика соответствует длительности нескольких пробегов волн разгрузки. При этом спад нагрузки на жесткую стенку плавный. Также имеет место упрочнение, а нагрузка по подходу Дж. Риеры учитывала значение только эффективного предела текучести.

Одномерное приближение с применением для описания поведения материала модели «полых сфер» Кэрролла-Холта позволят получить нагрузку, которая является огибающей к истинной по амплитудному значению, но не позволяет моделировать начальный пик нагрузки, так как используются осредненные характеристики среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00701-а).

Литература

1. Нормы строительного проектирования АС с реакторами различного типа. Правила и нормы в атомной энергетике. ПиН АЭ-5.6: Изд. Минатомэнерго СССР. 1986. 21 с.
2. Бирбраер А.Н. Экстремальные воздействия на сооружения / А.Н. Бирбраер, А.Ю. Роледер. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 594 с.
3. Riera J.D. On the stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces // Nucl. Engng. and Des. 1968. Vol. 8. № 4. P. 415-426.
4. Riera J. D. A critical reappraisal of nuclear power plant safety against accidental aircraft impact // Nucl. Engng. and Des. 1980. Vol. 57. № 1. P. 193-206.
5. Computing the loads affecting a structure subjected to a high-velocity projectile impact using the Riera approach / V.A. Markov, Y.V. Popov, V.I. Pusev, V.V. Selivanov // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2103. Art.no 020010. Available at: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5099874> accessed 16.09.2019. DOI: 10.1063/1.5099874.
6. Особенности внутреннего оборудования носовых отсеков летательных аппаратов военного назначения / Г.В. Белов, В.А. Марков, Ю.В. Попов, В.И. Пусев, В.В. Селиванов, В.В. Фролов // XXV Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Вятчи, 18-22 марта 2019 г.: Материалы симпозиума. Т. 2. М.: ООО "ТРИП", 2019. С. 150-154.

7. Марков В.А., Овчинников А.Ф., Пусев В.И. Модельная среда для внутреннего оборудования носовых отсеков летательных аппаратов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение», 2010. № S. С. 196-206. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modelnaya-sreda-dlya-vnutrennego-oborudovaniya-nosovyh-otsekov-letatelnyh-apparatov.pdf> (дата обращения 12.02.2020).

8. Об исследовании динамических механических свойств высокопористого алюминиевого сплава / Г.В. Белов, А.П. Гусаров, В.А. Марков, А.Ф. Овчинников, В.И. Пусев, В.В. Селиванов // XVII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Ярополец, 14-18 февраля 2011 г.: Материалы симпозиума. Т. 2. М.: ООО "ТР-принт", 2011. С. 82-87.

9. Применение теста Тейлора для исследования динамических механических свойств высокопористого алюминиевого сплава / Г.В. Белов, А.П. Гусаров, В.А. Марков, В.И. Пусев, А.Ф. Овчинников, В.В. Селиванов, М.Ю. Сотский // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012 № 9. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/15395303> (дата обращения 12.02.2020).

10. Carroll M.M., Holt A.C. Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials // J. Appl. Phys. 1972. Vol. 43. № 4. P. 1626-1636.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕСУРСА ЛОПАТКИ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ ПРИ АСИММЕТРИЧНОМ ЦИКЛЕ ЭКСПЛУАТАЦИОННОГО НАГРУЖЕНИЯ

Завойчинская Э.Б.

(МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

В рамках исследований по проблеме обеспечения безопасной эксплуатации турбин и компрессоров в газо- и паротурбостроении и управлению ресурсом критически важных участков в поврежденных состояниях в данной работе проводится изучение закономерностей стохастического процесса зарождения и развития усталостных микро- и макротрещин в конструкциях лопаточного аппарата и предлагается метод оценки ресурса лопаток при нагружении центробежными и аэродинамическими силами в условиях много- и гигацикловой усталости.

Охлаждаемые компрессорные или турбинные лопатки в процессе эксплуатации подвергаются растяжению при вращении вала двигателя, в них возникают изгибающие и крутящие моменты от центробежных и аэродинамических сил. В общем случае лопатки находятся в условиях сложного нагружения, представляющего собой случайный набор разнообразных по частоте и амплитуде несимметричных циклов.

Разрушение рабочих лопаток вызывается, в основном, высоким уровнем переменных напряжений в областях концентрации при их резонансных вынужденных колебаниях [1-6]. Причинами вынужденных колебаний являются: турбулентные газовые потоки при вращении вала, связанные с образованием вихрей газа по всей длине лопатки на входных и выходных кромках вследствие различных параметров газового потока по окружности проточной части перед и за ступенью, при которой аэродинамические силы, действующие со стороны газа на лопатку, оказываются переменными при различных углах поворота вала; парциальность подвода газа в цикле работы; неравномерность потока из сопловых каналов с разной скоростью и под разными углами к вращающейся лопатке при прохождении ее через сопло и др. Анализ отказов промышленных турбоагрегатов показывает, что в 80% случаев аварии происходят из-за усталостных разрушений лопаток.

Усталостным разрушениям наиболее подвержены лопатки авиационных газотурбинных двигателей, т.к. за эксплуатационный цикл: запуск - основной режим - остановка, происходит смена режимов работы и лопатка попадает на короткий период времени в условия вынужденных резонансных колебаний по одной из частот [1,6]. На ранних стадиях эксплуатации это приводит к развитию субмикро- и микродефектов, в зависимости от числа актов вхождения в резонанс и образованию блоков микролиний, далее мезолиний и макроусталостных линий, что выявляется на фрактограммах.

Усталостные разрушения связаны прежде всего с состоянием поверхностного слоя, в т.ч. дефектами механической обработки, остаточными напряжениями растяжения и др. Другими факторами являются технологическая наследственность (условия заливки металла в форму и кристаллизации расплава и др.), и структурная неоднородность материала: дефекты микро- и макроструктуры, поры, литейные дефекты, размеры макрорезерен и др. Усталостные трещины могут развиваться в местах концентрации напряжений от различных микро- и макротрещин, возникших при некачественной сборке или монтаже, вследствие коррозионных и эрозионных воздействий газового потока, механических повреждений поверхностного слоя в результате попадания посторонних предметов, фреттинга по контактирующим поверхностям основания лопатки и межпазового выступа диска, образования вмятин, надрывов пера, разрушения бандажных полок и др. В корневой части лопаток в зоне перехода к диску в современных конструкциях, где лопатки и диск представляют собой одну деталь, также могут накапливаться усталостные дефекты, приводящие к макроразрушению в области гигацикловой усталости. Эксплуатация газовых турбин в областях много- и гигацикловой усталости происходит при возможном наличии дефектов в лопатках, и возникает необходимость изучения процессов разрушения на разных масштабно-структурных уровнях и оценки остаточного ресурса по уровням дефектности.

Экспериментально обнаруживается, что усталостные микро- и макротрещины возникают перпендикулярно оси лопатки в корневом сечении в зоне концентрации напряжений от изгибных форм колебаний. Поэтому в этой работе определяющим считается осевое напряжение в корневом сечении лопатки и рассматривается одночастотное нагружение в виде суммы постоянной составляющей напряжения σ_m и переменной с амплитудой σ_a и круговой частотой ω (рассматривается наименьшая частота, при которой возможны вынужденные резонансные колебания) таким образом:

$$\sigma = \sigma_a (\alpha + \sin \omega t), \quad \alpha = \sigma_m / \sigma_a, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

где T – время работы лопатки. Компонента σ_m в (1) определяется при заданной геометрии лопаток, их числе, частоте вращения диска и известных характеристик потока газа по известным соотношениям для упругой консольной балки с прямой осью [7], проходящей через центры масс сечений, как максимальное значение в корневом сечении суммы растягивающего напряжения от центробежных сил и изгиба от аэродинамических сил в точке их приложения. Амплитуды σ_a определяются из известного решения задачи изгиба при различных прогибах упругой балки, жестко закрепленной в обод диска без связей. Отсюда находится асимметрия цикла α .

Предлагаемый метод оценки ресурса лопатки при нагружении (1) основан на теории масштабно-структурного разрушения материала [8-12], согласно которой стохастический процесс усталостного разрушения рассматривается на шести масштабно-структурных уровнях, отвечающих разным стадиям эволюции материала по различным физическим механизмам. Вводится понятие дефекта i -го уровня, $i = 1, \dots, 6$, задаваемого средним размером $l_i = l_i(t)$ и плотностью $q_i = q_i(t)$ в некотором представительном объеме V_c (в котором возможно зарождение единичной макротрещины конечной длины L). К дефектам микроуровня относятся: вакансионные кластеры, цепочки межузельных атомов, поры, включения, субмикротрещины, примесные комплексы, сетки дефектов в субграницах, $i = 1$ и микротрещины, $i = 2$; к мезодефектам – нераспространяющиеся, $i = 3$, и распространяющиеся короткие, $i = 4$, трещины соответственно; к макродефектам – транскристаллитные и зернограничные макротрещины размеров ансамблей зерен, $i = 5, 6$. Основываясь на результатах исследований закономерностей развития разрушения полагается, что образование дефектов каждого уровня происходит вследствие последовательного зарождения, развития и слияния дефектов

всех предыдущих уровней. Рассматривается непрерывная возрастающая усредняющая функция $l_i^* = l_i^*(t) : l_i^*(t) = l_i(t)(q_i(t)V_c)^\gamma$, $t \in [0, T]$, γ – константа, $i = 1, \dots, 6$. В момент времени t значения функции l_i^* являются случайными величинами.

Вводится функция распределения вероятностей $F_i = F_i(l_i^*)$, $0 \leq F_i \leq 1$, определяющая вероятность, с которой случайная величина l_i^* принимает значения меньше своего предельного значения в момент времени t : $F_i = P(l_i^* < l_{f,i}^*)$, $P(l_i^* = l_{f,i}^*) = 0$, $i = 1, \dots, 6$. В качестве этой функции предлагается рассматривать усеченные нормальные распределения с плотностью распределения $f_i = f_i(l_i^*)$:

$F_i = \int_0^{l_i^*} f_i(x) dx$, следующего вида:

$$f_i(l_i^*) = \frac{c_i}{\sqrt{2\pi D_i}} \exp\left(-\frac{(l_i^* - M_i)^2}{2D_i}\right), c_i = \int_0^{l_i^*} f_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2)$$

где $M_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f_i(x) dx$ и $D_i = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_i)^2 f_i(x) dx$ – математическое ожидание и дисперсия случайной величины l_i^* соответственно. Вероятность хрупкого разрушения по дефектам i -го уровня определяется следующей функцией $Q_i = Q_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$, $t \in [0, T]$:

$$Q_i(t) = Q_{i,th} - F_i(l_i^*(t)), \quad 0 \leq Q_{i,th} \leq 1 \quad (3)$$

для которой формулируется рекуррентная система определяющих соотношений.

Строится серия кривых усталости по уровням дефектности:

$$Q_i(t_{i+1}) = Q_{i,th}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4)$$

В (4) входят моменты времени t_{i+1} , при которых дефекты i -го уровня достигают предельного состояния с вероятностью $Q_{i,th}$, усредняющая функция $l_i^* = l_i^*(t)$ – предельного значения $l_{f,i}^*$ и зарождаются дефекты $(i+1)$ -го уровня.

На макроуровне вероятность разрушения $Q = Q(t)$, $t \in [0, T]$, $0 \leq Q \leq 1$, записывается в виде:

$$Q(t) = \sum_{i=4}^6 \frac{Q_i(t)}{1 - Q_i(t)} \prod_{j=4}^6 (1 - Q_j(t)), \quad (5)$$

где $Q_i = Q_i(t)$ – вероятности разрушения по дефектам i – го мезоуровня; и кривая усталости по образованию макротрещин конечной длины:

$$Q(t_f) = 1, \quad (6)$$

t_f – долговечность по образованию макротрещины конечной длины. Следуя положениям механики разрушения записаны выражения для роста макротрещин.

В предположении равномерного распределения дефектов в объеме V_c предполагается следующая система соотношений для $Q_i = Q_i(\sigma_a, n)$ (n – число циклов нагружения) и уравнений кривых усталости по i – му уровню накопленных дефектов [9] при нагружении (1):

при $i = 1, 2, 3$ и условиях $\sigma_a \geq \sigma_{i-1}$, $\lg n \geq \lg n_i(\sigma_a)$, $\sigma_0 = 0$, $n_1 = 1$, имеем:

$$Q_i = F_i \left(\frac{\sigma_a - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} \right) R_i \left(\frac{\lg n - \lg n_i(\sigma_a)}{\lg N_i - \lg n_i(\sigma_i)} \right), \quad (7)$$

$$Q_i(n_{i+1}) = Q_{i,th}; \quad (8)$$

при $i = 4, 5, 6$ и $\sigma_3 \leq \sigma_a$, $\lg n \geq \lg n_4(\sigma_a)$

$$Q_4 = F_4 \left(\frac{\sigma_a - \sigma_3}{\sigma_4 - \sigma_3} \right) R_4 \left(\frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_4 - \lg n_4(\sigma_4)} \right), \quad (9)$$

$$Q_4(n_5) = Q_{th}, \quad (10)$$

при $\sigma_4 \leq \sigma_a$, $\lg n \geq \lg n_5(\sigma_a)$

$$Q_5 = F_5 \left(\frac{\sigma_a - \sigma_4}{\sigma_5 - \sigma_4} \right) R_5 \left(\frac{\lg n - \lg n_5(\sigma_a)}{\lg N_5 - \lg n_5(\sigma_5)} \right), \quad Q_4 = G_4 \left(\frac{\sigma_5 - \sigma_a}{\sigma_5 - \sigma_4} \right) R_4 \left(\frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_4 - \lg n_4(\sigma_4)} \right), \quad Q_6 = 0, \quad (11)$$

$$Q_5(n_6) = Q_{th}, \quad (12)$$

при $\sigma_5 \leq \sigma_a$, $\lg n \geq \lg n_6(\sigma_a)$

$$Q_6 = F_6 \left(\frac{\sigma_a - \sigma_5}{\sigma_6 - \sigma_5} \right) R_6 \left(\frac{\lg n - \lg n_6(\sigma_a)}{\lg N_6 - \lg n_6(\sigma_6)} \right), \quad Q_5 = G_5 \left(\frac{\sigma_6 - \sigma_a}{\sigma_6 - \sigma_5} \right) R_5 \left(\frac{\lg n - \lg n_5(\sigma_a)}{\lg N_5 - \lg n_5(\sigma_5)} \right) \quad Q_4 = 0, \quad (13)$$

$$Q_6(n_7) = Q_{th} \quad (14)$$

В системе (7), (9), (11), (13) последующее уравнение связано с предыдущим через числа циклов $n_{i+1} = n_{i+1}(\sigma_a)$, при которых функция $l_i^* = l_i^*(n)$ достигает

предельного значения $l_{f,i}^*$, дефект i -го уровня – предельного состояния, и зарождаются дефекты $(i+1)$ -го уровня.

Предлагаемая модель позволяет подбирать вид функций $F_i = F_i(\sigma_a)$ и $R_i = R_i(n)$, $i = 1, \dots, 6$, в выражениях (7)–(14) для конкретных материалов. В данной работе рассмотрение ограничено функциями следующего вида:

$$F_i = \left(\frac{\sigma_a - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} \right)^{\beta_i}, \quad R_i = \left(\frac{\lg n - \lg n_i(\sigma_a)}{\lg N_i - \lg n_i(\sigma_i)} \right)^{\phi_i}, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (15)$$

$$F_i = \left(\frac{\sigma_a - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} \right)^{\chi_i}, \quad R_i = \left(\frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_i - \lg n_4(\sigma_i)} \right)^{\phi_i}, \quad i = 5, 6; \quad G_i = \left(\frac{\sigma_{i+1} - \sigma_a}{\sigma_{i+1} - \sigma_i} \right)^{\chi_i}, \quad i = 4, 5$$

где $\sigma_i = \sigma_i(\alpha, \omega)$, $\beta_i = \beta_i(\alpha, \omega)$, $\phi_i = \phi_i(\alpha, \omega)$, $\chi_i = \chi_i(\alpha, \omega)$ – материальные функции модели. В данном рассмотрении полагаются следующие значения констант: $\beta_i = 1$, $\chi_i = 1$, $i = 1, \dots, 6$; $\phi_1 = 1/2$, $\phi_i = 4$, $i = 2, \dots, 6$.

Система материальных функций σ_i , $i = 1, \dots, 6$, входящих в (7) – (15) для нагружения (1) представляется в виде [9]:

$$\sigma_i = \sigma_i(N_i, \omega) \tilde{\sigma}(\alpha, \eta), \quad i = 1, \dots, 6, \quad (16)$$

где $\eta = \sigma_{-1}(N_{-1}, \omega) / \sigma_{-1}^0(N_{-1}, \omega)$, $\sigma_{-1} = \sigma_{-1}(N_{-1}, \omega)$ и $\sigma_{-1}^0 = \sigma_{-1}^0(N_{-1}, \omega)$ – пределы усталости при симметричном и пульсирующем циклах соответственно.

Для определения функций $\sigma_i = \sigma_i(N_i, \omega)$, $i = 1, \dots, 6$, в (16) необходимо проводить достаточно большое количество макроэкспериментов при одноосном симметричном нагружении с обработкой шлифов стандартными исследованиями микроструктуры. В известных работах, справочниках и других источниках содержится ограниченный объем данных. Для материалов, имеющих предел выносливости и горизонтальный участок в области гигацикловой усталости, ранее на основе ряда предположений был предложен метод определения материальных функций [8-12] по известным данным усталостной прочности металлов и подтвержден сравнением результатов расчетом с экспериментальными данными для представительного ряда металлов и сплавов. В данной статье рассматриваются материалы, пределы усталости которых в области гигацикловой усталости уменьшаются. Для них на основе анализа большого количества работ [1,4–6,13–16] можно предположить, что существует экспериментально определяемая предельная амплитуда напряжений $\sigma_{-1} = \sigma_{-1}(N_{-1}, \omega)$ при макроразрушении по дефектам

четвертого уровня, меньше которой происходит переход из области многоцикло-вой в область гигацикловой усталости со сменой механизмов разрушения. Полагается также, что существует экспериментально определяемая предельная амплитуда $\sigma_{-2} = \sigma_{-2}(N_{-2}, \omega) = \sigma_4$, $\sigma_{-2} < \sigma_{-1}$, при которой наблюдается макроразрушение по дефектам четвертого уровня при числе циклов $N_{-2} = N_4$, $N_{-2} > N_{-1}$, и кривая усталости имеет горизонтальный участок $\sigma_{-2}(n) = const$ при $n \geq N_{-2}$. В области гигацикловой усталости при $n \geq N_{-1}$ возможно развитие и достижение предельных состояний дефектами первого, второго и третьего уровней, развитие дефектов четвертого уровня и макроразрушение по дефектам четвертого уровня. При выборе функций (15) требуется, чтобы уравнение (10) проходило через точку $\sigma_{-1} = \sigma_{-1}(N_{-1}, \omega)$. Базовые числа циклов выбираются равными $N_i = N_4$, $i = 1, 2, 3$. Базовые константы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяются так, чтобы уравнение (8), $i = 1$, проходило через точки $(\sigma_{-1}, \lg N_{-1} - 3)$ и $(\sigma_{-2}, \lg N_{-1})$, при $i = 2$ – через точки $(\sigma_{-1}, \lg N_{-1} - 2)$ и $(\sigma_{-2}, 2 \lg N_{-1} / 3 + \lg N_{-2} / 3)$, при $i = 3$ – через точки $(\sigma_{-1}, \lg N_{-1} - 1)$ и $(\sigma_{-2}, \lg N_{-1} / 3 + 2 \lg N_{-2} / 3)$.

Функцию $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\alpha, \eta)$ в (17) предлагается определять в виде [9]:

$$\tilde{\sigma} = \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) |\alpha| + 1 \quad (17)$$

Представленный метод применяется для лопатки турбины из алюминиевого сплава [7]. По известным характеристикам потока газа, лопатки и диска [7] (при круговой частоте вращения диска $\omega_d = 416 \frac{\text{обор.}}{\text{сек}}$) находится $\sigma_m = 30 \text{ МПа}$. Из решения задачи изгиба при прогибе лопатки $w = 1.7 \text{ мм}$ амплитуда $\sigma_a = 7 \text{ МПа}$, $\alpha = 4.3$, при прогибе $w = 3 \text{ мм}$ – $\sigma_a = 15 \text{ МПа}$, $\alpha = 3$. На рис. 1 в координатах $(\sigma_a, \lg n)$ построены области развития дефектов шести уровней по (7), (9), (11), (13) и кривые усталости (8), (10), (12), (14), $Q_{th} = 1$, для соответствующих уровней дефектности, а также кривая усталости ft по образованию макротрещины конечной длины по (5), (6). Из рисунка 1 (а) видно, что при $\sigma_a = 7 \text{ МПа}$ (линия А) возможно развитие дефектов первого уровня, на базе $N = 10^8$ циклов (419 часов наработки (линия В)) – коротких трещин при $\sigma_a = 21 \text{ МПа}$, микротрещин – при

$\sigma_a = 17 \text{ МПа}$. Из рис. 1 (b) видно, что при $\sigma_a = 15 \text{ МПа}$ возможно развитие дефектов первого уровня, при $N = 10^8$ циклов – микротрещин при $\sigma_a = 25 \text{ МПа}$ и коротких трещин при $\sigma_a = 29 \text{ МПа}$. При $N = 10^{10}$ циклов (наработке 41. 900 часов) и $\sigma_a = 22 \text{ МПа}$ в лопатке возможно образование микротрещин.

Проводится анализ развития усталостного разрушения в лопатках турбины из алюминиевого сплава ВД-17 [1] в области гигациклового усталости (рис.2). По имеющимся данным о геометрии и числе лопаток, частоте вращения и радиусе диска и параметрах потока газа определяется, что в лопатке имеет место почти симметричное нагружение. Строятся области дефектов I-IV по (7), (9) и кривые усталости 1-1–3-3 по (8) (рис.2). Кривая 4-4 по (11) (f_t на рис.2) определяет макроразрушение по коротким трещинам.

Для лопаток турбины из сплава ВД-17 двигателя Д30 ($\omega_d = 105-107 \text{ обор./сек}$) была определена частота $f \in [3750, 3800] \text{ Гц}$ и амплитуда $\sigma_a \in [19, 22] \text{ МПа}$ вынужденных колебаний [1]. В испытаниях наблюдались усталостные разрушения

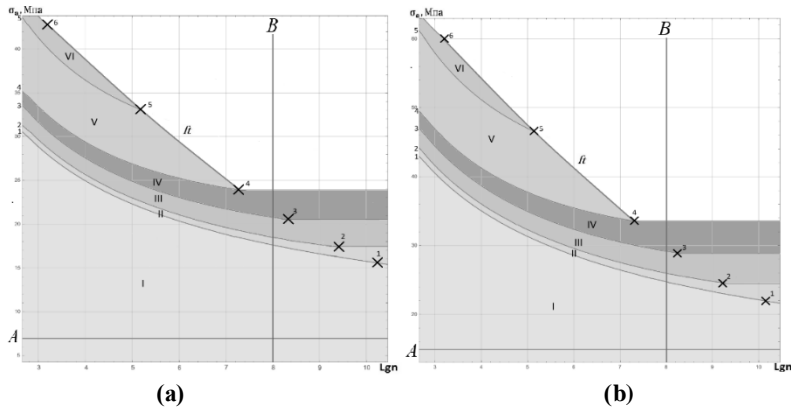


Рис.1. Области развития дефектов I-VI, кривые усталости 1-1–5-5 и f_t для алюминиевого сплава [7], (a) $\alpha = 4.3$, (b) $\alpha = 3$; предел текучести $\sigma_s = 75 \text{ МПа}$, временное сопротивление $\sigma_{sp} = 85 \text{ МПа}$, пределы выносливости сплава при симметричном $\sigma_{-1} = 42 \text{ МПа}$ и пульсирующем $\sigma_{-1}^0 = 37.8 \text{ МПа}$ нагружениях на базе $N_4 = 2 * 10^6$ циклов; крестиками отмечены базовые константы модели отдельных лопаток и неразрушенные лопатки с усталостными трещинами, зародившимися из-под поверхности лопаток при наработке около 18 000 часов (

$N \in (2.43 - 2.46) * 10^{11}$ циклов). По модели в этом диапазоне (линия В на рис. 2) макроразрушение сплава достигается при амплитуде, в среднем, равной $\sigma_f = 98 МПа$. В разрушенных лопатках имела место концентрация напряжений с коэффициентом $K = 4.7$, с большой долей вероятности связанная с возникшими резонансными колебаниями лопаток. При наработке до 50 000 часов, $N = 6.8 * 10^{11}$ циклов (линия С на рис. 2) макроразрушение возможно при амплитуде номинальных напряжений $\sigma_a = 20.2 МПа$, образование микротрещин – при амплитуде $\sigma_a = 9.8 МПа$.

Проведены расчеты для лопатки турбокомпрессора из жаропрочного литейного никелевого сплава ЖС6К [1,16]. На рис. 3 (а) представлены области развития дефектов пяти уровней по (7), (9), (11) для симметричного нагружения сплава. В области $N \in [2 * 10^3, 5 * 10^5]$ циклов строится кривая усталости ft по согласно (6) с учетом (11) и по (12), $Q_{th} = 1$. При $N \in [5 * 10^5, 2 * 10^{10}]$ циклов строится участок кривой усталости по макроразрушению по дефектам четвертого уровня по (10). Кривая ft хорошо описывает опытные данные по многоциклового усталости при $N_f \in [5 * 10^5, 10^6]$ циклов.

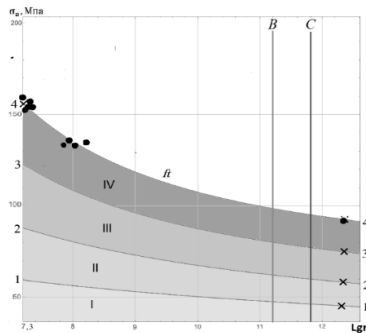


Рис.2. Области развития дефектов I-IV, кривые усталости 1-1-3-3 и кривая усталости ft макроразрушения по дефектам четвертого уровня алюминиевого сплава ВД-17, крестиками отмечены базовые константы модели, сплошными кружками – опытные данные; $\sigma_s = 260 МПа$, $\sigma_{ep} = 400 МПа$, $\sigma_{-1} = 155 МПа$ на базе $N_{-1} = 2 * 10^7$ циклов, $\sigma_{-2} = 0.6 \sigma_{-1}$ при $N_{-2} = 2 * 10^{12}$ циклов

По данным о геометрии и числе лопаток, частоте вращения и радиусе диска и характеристикам потока газа [1] определяется $\sigma_m = 22.5 \text{ МПа}$. При прогибе лопатки $w = 1.7 \text{ мм}$ амплитуда возможных упругих колебаний $\sigma_a = 110 \text{ МПа}$, $\alpha = 0.2$ (линия А на рис. 3 (b)). Из рисунка видно, что при этой амплитуде и числе $N \in [6 * 10^4, 10^8]$ циклов в лопатке возможно развитие дефектов второго уровня (микротрещин), далее по числу циклов зарождаются и развиваются дефекты третьего уровня и достигают предельного состояния с образованием дефектов четвертого уровня (типа коротких трещин) на базе $N = 2 * 10^{10}$ циклов. Макроразрушения в этих областях не возникает. При прогибе $w = 2.5 \text{ мм}$ амплитуда $\sigma_a = 160 \text{ МПа}$ и имеет место практически симметричное нагружение (на рис. 2(a) изображено линией В). При $N = 5 * 10^7$ циклов возможно зарождение дефектов четвертого уровня, при $N = 5 * 10^9$ циклов по ним происходит макроразрушение. При эксплуатации двигателей М-601 самолета Л-410 были зафиксированы случаи обрыва рабочих лопаток турбокомпрессора из сплава ЖС6К [1] (на рис. 4 изображены фрактографии усталостного излома). Наличие блоков мезолиний (рис. 4 с) говорит о том, что лопатка многократно входила в резонанс. Нароботка к моменту разрушения составляла 370-1670 часов ($N_f \in (0.53 - 2.4) * 10^{10}$ циклов). Лопатки имели частоту собственных колебаний по первой изгибной форме в диапазоне $f \in [4, 42 - 4, 52] \text{ кГц}$. Согласно паспортным данным амплитуда вынужденных колебаний составляла $\sigma_a = 48 \text{ МПа}$ при частоте $f \in [4, 05 - 4, 2] \text{ кГц}$. Следовательно, были возможны резонансные колебания некоторых лопаток. По модели

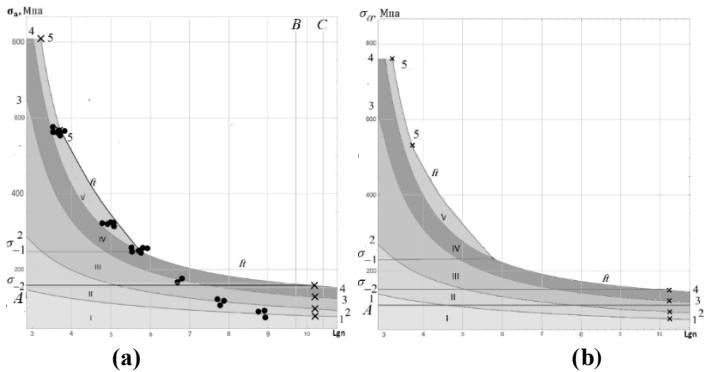


Рис.3. Области развития дефектов I-V, кривые усталости 1-1-5-5 и ft никелевого сплава ЖС6К: (а) – при симметричном нагружении, (б) – при $\alpha = 0.2$; крестиками отмечены константы модели, сплошными кружками – экспериментальные данные; $\sigma_s = 810 \text{ МПа}$, $\sigma_{sp} = 880 \text{ МПа}$, $\sigma_{-1} = 250 \text{ МПа}$ и $\sigma_{-1}^0 = 177 \text{ МПа}$ при $N_{-1} = 5 \cdot 10^5$ циклов $f \in (1,3) \text{ кГц}$, $\sigma_{-2} = 160 \text{ МПа}$ при $N_{-2} = 2 \cdot 10^{10}$ циклов

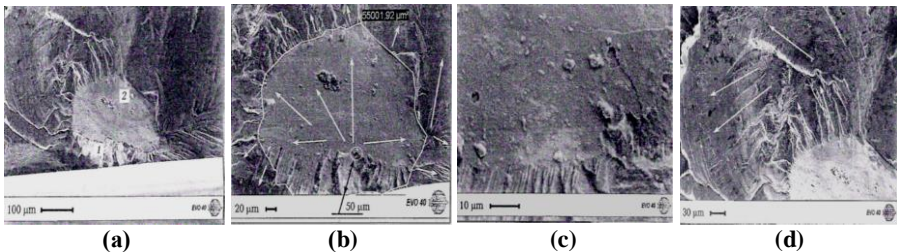


Рис. 4. Фрактографии излома лопатки из никелевого сплава ЖС6К: (а) – участок излома в районе зарождения микротрещины в зерне 1, (б) – схема движения коротких трещин (фокус излома отмечен кружком) по зерну 1, цифрой указана площадь фасетки, (с) – ступеньки на поверхности фасетки зерна 2, (д) – участок излома около границы выхода макротрещины на поверхность корневого сечения, стрелками указан разворот трещины под действием скручивающего момента [1]
 получено, что симметричное нагружение в этом диапазоне чисел циклов (на рис. 4 (а) отмечено вертикальными линиями В и С) приводит к макроразрушению по дефектам четвертого уровня в интервале амплитуд $\sigma_f \in [155, 165] \text{ МПа}$, т.е. имеет место концентрация напряжений с эффективным коэффициентом концентрации $K = 3.3$. Таким образом, в эксплуатации совпадение частот вынужден-

ных и собственных колебаний привело к нерасчетному режиму нагружения с увеличением амплитуды, в среднем, более, чем в три раза, и макроразрушению в области гигацикловой усталости.

Таким образом, предложена иерархическая система определяющих соотношений для вероятности разрушения лопаток. Построены кривые усталости по уровням дефектности для лопаток турбины из алюминиевых сплавов и компрессора из никелевого сплава в области много- и гигацикловой усталости. Для лопаток турбины из сплава ВД-17 получено, что в разрушенных лопатках [1] при наработке около 18 000 часов имела место концентрация напряжений с эффективным коэффициентом концентрации, в среднем, равным $K = 4.7$, вероятно, возникшая из-за резонансных колебаний. Найдены амплитуды напряжений, при которых возможно образование микротрещин и коротких трещин, и амплитуда напряжений при макроразрушении лопаток при наработке до 50 000 часов. Для лопаток турбокомпрессора из никелевого сплава ЖС6К [1,16] по модели определено, что в разрушенных лопатках с большой вероятностью возникли резонансные колебания с амплитудой, в 3.3 раза превышающей экспериментальную номинальную расчетную амплитуду вынужденных колебаний при наработке 370-1670 часов.

Литература

1. *Шаняевский А.А.* Моделирование усталостных разрушений металлов. Синергетика в авиации. –Уфа: Изд-во н.-т. лит-ры «Монография», 2007. – 500 с.
2. Динамика авиационных газотурбинных двигателей / под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1981. – 232 с.
3. *Левин А.В.* Рабочие лопатки и диски паровых турбин. – М.: Машиностроение, 1989. – 624 с.
4. *Капралов В.М.* Методология экспериментальной оценки накопления повреждений многоцикловой усталости, вибропрочности и пределов выносливости лопаток турбомашин. Автореферат докт. дисс. – СПб, 2010. –35 с.
5. *Ножницкий Ю.А., Балувев Б.А., Федина Ю.А.* Экспериментальные исследования прочностной надежности перспективных газотурбинных двигателей // Вестник УГАТУ, т.19, № 3 (69), 2015. – с. 3-14.
6. *Шаняевский А.А., Солдатенков А.П.* Масштабные уровни предела усталости металлов // Физическая мезомеханика, № 22 (1), 2019. – с. 44-53.
7. *Скубачевский Г. С.* Авиационные газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей. – Москва: «Машиностроение», 1969. – 543 с.
8. *Завойчинская Э.Б.* Микро- и макро-механика разрушения элементов конструкций //Механика твердого тела, № 3, 2012. – с. 54–77.
9. *Завойчинская Э.Б.* Усталостное масштабнo-структурное разрушение и долговечность конструкций при пропорциональных процессах нагружения. Автореф. докт. дисс. – М.: ООО "Генезис", 2018. – 46 с.

10. *Завойчинская Э.Б.* О теории усталостного разрушения при сложном напряженном состоянии металлов с учетом структурных изменений // Вестник Московск. Ун-та. Сер. I: Математика. Механика, № 2, 2019. – с. 29-34.

11. *Завойчинская Э.Б.* О стохастической теории усталостного масштабного структурного разрушения металлов // в сб. «Современные проблемы математики и механики». Материалы межд. конф., посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко. – М.: ООО «МАКС Пресс», 2019. – с. 694-697.

12. *Завойчинская Э.Б.* Прогнозирование долговечности протяженных конструкций при эксплуатационном нагружении // Сб. тр. XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Уфа, т. 3, 2019. – с. 607-609.

13. *Bathias C., Paris P.C., Huang Z., Wagner D.* Subsurface crack initiation and propagation mechanisms in gigacycle fatigue // Acta Materialia, V.58, 2010. – p.6046-6054.

14. *Wang P., Wang W., Li A., Zhang M., Li J., Chen S.* Influence of microstructure and inclusions on very high cycle fatigue behaviour of compressor blade steels. –Transactions, SMiRT-23 Manchester, United Kingdom, August 10-14, 2015, Division II, Paper ID 595.

15. *Burago N., Nikitin I.* Multiaxial Fatigue Criteria and Durability of Titanium Compressor Disks in Low- and Very-high-cycle Fatigue Modes // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures, Computational Methods in Applied Sciences 40. –Springer, 2016. – p. 117-130.

16. *Жуков, Н.Д.* Влияние факторов кристаллизации на выносливость литейных никелевых сплавов// Проблемы прочности, № 7, 1974. – с. 99-105.

ИЗОТРОПНАЯ МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ ПЛАСТИНА КИРХГОФА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГОДИФфуЗИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Земсков А.В.^{1,2}, Тарлаковский Д.В.^{2,1}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Рассматривается задача о нестационарных колебаниях прямоугольной изотропной N – компонентной пластины Кирхгофа, находящейся в поле совместного действия механических и диффузионных возмущений. Схема приложенных сил и изгибающих моментов, а также ориентация осей прямоугольной декартовой системы координат представлена на рис. 1.

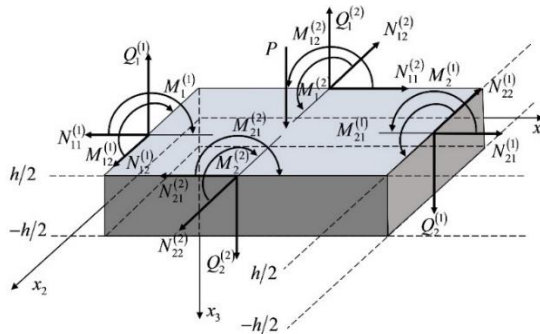


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи.

Уравнение поперечных колебаний пластины при отсутствии распределенных поверхностных моментов и поперечных сил, имеет вид (точки обозначают производную по времени) [1]

$$\Delta \ddot{w} - \frac{12}{h^2} \ddot{w} = \Delta \Delta w + \sum_{q=1}^N \alpha_q \Delta H_q, \quad \dot{H}_q = D_q \Delta H_q + \Lambda_q \Delta \Delta w. \quad (1)$$

Все величины в (1) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения

$$x_i = \frac{x_i^*}{l}, \quad w = \frac{w^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad \lambda = \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, \quad \mu = \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, \quad l_m = \frac{l_m^*}{l},$$

$$\alpha_q = \frac{\alpha_q^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, \quad D_q = \frac{D_q^*}{Cl}, \quad \Lambda_q = \frac{m^{(q)} D_q^* \alpha_q^* n_0^{(q)}}{\rho R T_0 Cl}, \quad C^2 = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}, \quad h = \frac{h^*}{l},$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; w^* – прогибы пластины; l – характерный линейный размер в задаче (в данном случае – диагональ пластины, которая имеет размеры $l_1^* \times l_2^*$ и толщину h^*); H_q – приращение концентрации q -ой компоненты вещества в составе N – компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрации q -го вещества; λ^* и μ^* – упругие постоянные Ламе; ρ – плотность; α_q^* – коэффициенты, характеризующие объемное изменение среды за счёт диффузии; D_q^* – коэффициенты самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества.

Уравнения (1) дополняются начально-краевыми условиями, которые в случае чистого изгиба под действием изгибающих моментов $M_k^{(l)}$, изображенных на рисунке 1, имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_q H_q \right) \Big|_{x_1=0} &= f_{111}(x_2, \tau), \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_q H_q \right) \Big|_{x_1=l_1} &= f_{112}(x_2, \tau), \\ \left(\lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_q H_q \right) \Big|_{x_2=0} &= f_{121}(x_1, \tau), \\ \left(\lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_q H_q \right) \Big|_{x_2=l_2} &= f_{122}(x_1, \tau); \\ w \Big|_{x_1=0} &= f_{211}(x_2, \tau), \quad w \Big|_{x_1=l_1} = f_{212}(x_2, \tau), \quad w \Big|_{x_2=0} = f_{221}(x_1, \tau), \quad w \Big|_{x_2=l_2} = f_{222}(x_1, \tau), \\ H_q \Big|_{x_1=0} &= f_{q+2,11}(x_2, \tau), \quad H_q \Big|_{x_1=l_1} = f_{q+2,12}(x_2, \tau), \\ H_q \Big|_{x_2=0} &= f_{q+2,21}(x_1, \tau), \quad H_q \Big|_{x_2=l_2} = f_{q+2,22}(x_1, \tau), \\ f_{111}(x_2, \tau) &= -\frac{12}{h^3} M_1^{(1)}(x_2, \tau), \quad f_{112}(x_2, \tau) = -\frac{12}{h^3} M_2^{(1)}(x_2, \tau), \\ f_{121}(x_1, \tau) &= -\frac{12}{h^3} M_1^{(2)}(x_1, \tau), \quad f_{122}(x_1, \tau) = -\frac{12}{h^3} M_2^{(2)}(x_1, \tau). \end{aligned} \tag{2}$$

Начальные условия полагаются нулевыми.

Решения полученных задачи (1), (2) ищется в интегральной форме

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, \tau) &= \\ &= \sum_{k=1}^{N+2} \int_0^{l_2} [G_{1k1}(x_1, x_2, \zeta, \tau) * f_{k11}(\zeta, \tau) + G_{1k1}(l_1 - x_1, x_2, \zeta, \tau) * f_{k12}(\zeta, \tau)] d\zeta + \\ &+ \sum_{k=1}^{N+2} \int_0^{l_1} [G_{1k2}(x_1, x_2, \xi, \tau) * f_{k21}(\xi, \tau) + G_{1k2}(x_1, l_2 - x_2, \xi, \tau) * f_{k22}(\xi, \tau)] d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_q(x_1, x_2, \tau) &= \\
&= \sum_{k=1}^{N+2} \int_0^{l_2} \left[G_{q+1, k1}(x_1, x_2, \zeta, \tau) * f_{k11}(\zeta, \tau) + G_{q+1, k1}(l_1 - x_1, x_2, \zeta, \tau) * f_{k12}(\zeta, \tau) \right] d\zeta + \\
&+ \sum_{k=1}^{N+2} \int_0^{l_1} \left[G_{q+1, k2}(x_1, x_2, \xi, \tau) * f_{k21}(\xi, \tau) + G_{q+1, k2}(x_1, l_2 - x_2, \xi, \tau) * f_{k22}(\xi, \tau) \right] d\xi,
\end{aligned}$$

где G_{ikl} - поверхностные функции Грина задачи (1), (2), которые удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \ddot{G}_{ikl} - \frac{12}{h^2} \dot{G}_{ikl} = \Delta \Delta G_{ikl} + \sum_{q=1}^N \alpha_q \Delta G_{q+1, kl}, \quad \dot{G}_{q+1, kl} = D_q \Delta G_{q+1, kl} + \Lambda_q \Delta \Delta G_{ikl}, \quad (3)$$

и следующим граничным условиям

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 G_{ikl}}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 G_{ikl}}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+1, kl} \right) \Bigg|_{x_1=0} &= \delta_{1k} \delta_{1l} \delta(\tau) \delta(x_2 - \zeta), \\
\left(\lambda \frac{\partial^2 G_{ikl}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G_{ikl}}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+1, kl} \right) \Bigg|_{x_2=0} &= \delta_{1k} \delta_{2l} \delta(\tau) \delta(x_1 - \xi), \\
\left(\frac{\partial^2 G_{ikl}}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 G_{ikl}}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+1, kl} \right) \Bigg|_{x_1=l_1} &= 0, \\
\left(\lambda \frac{\partial^2 G_{ikl}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G_{ikl}}{\partial x_2^2} + \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+1, kl} \right) \Bigg|_{x_2=l_2} &= 0, \\
G_{ikl} \Big|_{x_1=0} &= \delta_{2k} \delta_{1l} \delta(\tau) \delta(x_2 - \zeta), \quad G_{ikl} \Big|_{x_2=0} = \delta_{2k} \delta_{2l} \delta(\tau) \delta(x_1 - \xi), \\
G_{q+1, kl} \Big|_{x_1=0} &= \delta_{q+2, k} \delta_{1l} \delta(\tau) \delta(x_2 - \zeta), \quad G_{q+1, kl} \Big|_{x_2=0} = \delta_{q+2, k} \delta_{2l} \delta(\tau) \delta(x_1 - \xi), \\
G_{ikl} \Big|_{x_1=l_1} &= 0, \quad G_{ikl} \Big|_{x_2=l_2} = 0, \quad G_{q+1, kl} \Big|_{x_1=l_1} = 0, \quad G_{q+1, kl} \Big|_{x_2=l_2} = 0.
\end{aligned} \quad (4)$$

Для нахождения функций Грина G_{ikl} используются разложения в неполные двойные тригонометрические ряды Фурье и преобразование Лапласа по времени [2-4]. В результате, задача (3), (4) приводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений (s - параметр преобразования Лапласа)

$$k_1(v_{nm}, s) G_{1kl}^{Lss}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) - \sum_{q=1}^N \alpha_q v_{nm}^2 G_{q+1,kl}^{Lss}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) =$$

$$= F_{1kl}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s), \quad (5)$$

$$-\Lambda_q v_{nm}^4 G_{1kl}^{Lss}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) + k_{q+1}(v_{nm}, s) G_{q+1,kl}^{Lss}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) =$$

$$= F_{q+1,kl}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s),$$

где $\lambda_n = \pi n / l_1$, $\mu_m = \pi m / l_2$, остальные величины определяются так

$$k_1(v_{nm}, s) = s^2 \left(v_{nm}^2 + \frac{12}{h^2} \right) + v_{nm}^4, \quad k_{q+1}(v_{nm}, s) = s + D_q v_{nm}^2, \quad v_{nm}^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2,$$

$$F_{1kl}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) = -\frac{4\lambda_n}{l_1 l_2} \delta_{1l} \left\{ \delta_{1k} - \delta_{2k} \left[\lambda_n^2 + (2-\lambda) \mu_m^2 + s^2 \right] \right\} \sin \mu_m \zeta -$$

$$-\frac{4\mu_m}{l_1 l_2} \delta_{2l} \left\{ \delta_{1k} - \delta_{2k} \left[\mu_m^2 + (2-\lambda) \lambda_n^2 + s^2 \right] \right\} \sin \lambda_n \xi, \quad (6)$$

$$F_{q+1,kl}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) = -\frac{4}{l_1 l_2} \Lambda_q \lambda_n \delta_{2k} \delta_{1l} \left[\lambda_n^2 + (2-\lambda) \mu_m^2 \right] \sin \mu_m \zeta -$$

$$-\frac{4}{l_1 l_2} \Lambda_q \mu_m \delta_{2k} \delta_{2l} \left[(2-\lambda) \lambda_n^2 + \mu_m^2 \right] \sin \lambda_n \xi +$$

$$+\frac{4}{l_1 l_2} \left[\Lambda_q \delta_{1k} + D_q \delta_{q+2,k} - \Lambda_q \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{j+2,k} \right] (\mu_m \delta_{2l} \sin \lambda_n \xi + \lambda_n \delta_{1l} \sin \mu_m \zeta),$$

$$G_{ikl}^{Lss}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} G_{ikl}^L(x_1, x_2, \xi, \zeta, s) \sin \lambda_n x_1 \sin \mu_m x_2 dx_2 dx_1, \quad (7)$$

$$G_{ikl}^L(x_1, x_2, \xi, \zeta, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{ikl}^{Lss}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) \sin \lambda_n x_1 \sin \mu_m x_2$$

Решение системы (5) имеет вид $(q, p = \overline{1, N}, l = 1, 2)$

$$G_{1kl}^{Lss}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) = \frac{P_{1kl}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s)}{P(v_{nm}, s)},$$

$$G_{q+1,kl}^{Lss}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) = \frac{4\Lambda_q (\delta_{1l} \lambda_n \sin \mu_m \zeta + \delta_{2l} \mu_m \sin \lambda_n \xi)}{l_1 l_2 k_{q+1}(v_{nm}, s)} + \frac{P_{q+2,kl}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s)}{Q_q(v_{nm}, s)},$$

$$\begin{aligned}
 G_{q+1,2l}^{Ls}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) &= -\frac{4 \Lambda_q \lambda_n \delta_{1l} [\lambda_n^2 + (2-\lambda) \mu_m^2] \sin \mu_m \zeta}{l_1 l_2} \frac{k_{q+1}(v_{nm}, s)}{k_{q+1}(v_{nm}, s)} - \\
 &= -\frac{4 \Lambda_q \mu_m \delta_{2l} [(2-\lambda) \lambda_n^2 + \mu_m^2] \sin \lambda_n \xi}{l_1 l_2} \frac{k_{q+1}(v_{nm}, s)}{k_{q+1}(v_{nm}, s)} + \frac{P_{q+2,2l}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s)}{Q_q(v_{nm}, s)} \\
 G_{q+1,p+2,l}^{Ls}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) &= \frac{4 \Lambda_q \delta_{1l} \lambda_n (D_q \delta_{qp} - \Lambda_q \alpha_p) \sin \mu_m \zeta}{l_1 l_2} \frac{k_{q+1}(v_{nm}, s)}{k_{q+1}(v_{nm}, s)} + \\
 &+ \frac{4 \Lambda_q \delta_{2l} \mu_m (D_q \delta_{qp} - \Lambda_q \alpha_p) \sin \lambda_n \xi}{l_1 l_2} \frac{k_{q+1}(v_{nm}, s)}{k_{q+1}(v_{nm}, s)} + \frac{P_{q+2,p+2,l}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s)}{Q_q(v_{nm}, s)}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

где

$$P(v_{nm}, s) = k_1 \Pi - v_{nm}^6 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j, \quad Q_q(v_{nm}, s) = k_q(v_{nm}, s) P(v_{nm}, s).$$

$$P_{11l}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) = -\frac{4}{l_1 l_2} \left(\Pi - v_{nm}^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j \right) (\lambda_n \delta_{1l} \sin \mu_m \zeta + \mu_m \delta_{2l} \sin \lambda_n \xi),$$

$$\begin{aligned}
 P_{12l}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) &= \\
 &= \frac{4 \lambda_n}{l_1 l_2} \delta_{1l} \left\{ [\lambda_n^2 + (2-\lambda) \mu_m^2 + s^2] \Pi - v_{nm}^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j [\lambda_n^2 + (2-\lambda) \mu_m^2] \Pi_j \right\} \sin \mu_m \zeta + \\
 &+ \frac{4 \mu_m}{l_1 l_2} \delta_{2l} \left\{ [\mu_m^2 + (2-\lambda) \lambda_n^2 + s^2] \Pi - v_{nm}^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j [\mu_m^2 + (2-\lambda) \lambda_n^2] \Pi_j \right\} \sin \lambda_n \xi,
 \end{aligned}$$

$$P_{1,q+2,l}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) = \frac{4 \alpha_q v_{nm}^2}{l_1 l_2} \left(D_q \Pi_q - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j \right) (\lambda_n \delta_{1l} \sin \mu_m \zeta + \mu_m \delta_{2l} \sin \lambda_n \xi),$$

$$P_{q+1,kl}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s) = \Lambda_q v_{nm}^4 P_{1kl}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s),$$

$$\Pi(v_{nm}, s) = \prod_{j=1}^N k_{j+1}(v_{nm}, s), \quad \Pi_j(v_{nm}, s) = \prod_{r=1, r \neq j}^N k_{r+1}(v_{nm}, s).$$

Так как $P_{rkl}(\lambda_n, \mu_m, \xi, \zeta, s)$ - рациональные функции параметра преобразования s , то переход в пространство оригиналов в равенствах (8) осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-08-00589 А).

Литература

1. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Модель нестационарных упругодиффузионных колебаний пластины Кирхгофа // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4

томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела.— Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. — С. 906 – 909.

ИЗГИБ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ - ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ

Земсков А.В.^{1,2}, Файкин Г.М.¹

(¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва)

Рассматривается нестационарная задача о плоском упругодиффузионном изгибе консольно-закрепленной однородной изотропной балки Бернулли- Эйлера.

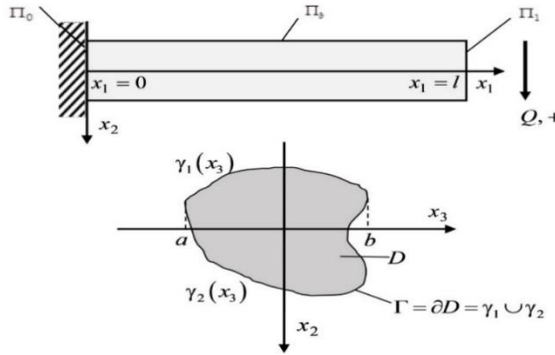


Рис.1. Иллюстрация к постановке задачи

Математическая модель поперечных колебаний имеет вид [1,2]:

$$\ddot{v}'' - a\dot{v} = v^{IV} + \sum_{j=1}^N \alpha_j H_j'', \quad \dot{H}_q = D_q H_q'' + \Lambda_q v^{IV}, \quad \frac{F}{J_3} = a. \quad (1)$$

Здесь точки обозначают производную по времени, штрихи – производную по координате x_1 . Все величины в (1) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения

$$x_i = \frac{x_i^*}{l}, \quad v = \frac{v^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C^2 = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}, \quad \alpha_q = \frac{\alpha^{(q)}}{\lambda^* + 2\mu^*}, \quad D_q = \frac{D^{(q)}}{Cl},$$

$$\Lambda_q = \frac{m^{(q)} D^{(q)} \alpha^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho RT_0 Cl}, \quad \lambda = \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, \quad F = \frac{F^*}{l^2}, \quad J_3 = \frac{J_3^*}{l^2},$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; v^* – поперечный прогиб балки; l – длина балки; H_q – приращение концентрации q -ой компоненты

вещества в составе N – компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрация q -го вещества; λ^* и μ^* – упругие постоянные Ламе; ρ – плотность; $\alpha^{(q)}$ – коэффициент, характеризующий объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D^{(q)}$ – коэффициенты самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества, F^* – площадь сечения, J_3^* – момент инерции сечения балки относительно оси Ox_3 .

Начальные условия полагаем нулевыми. Граничные условия в соответствии с моделью консольного изгиба балки имеют вид ($x = x_1$):

$$\begin{aligned} v'|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=0} = 0, \quad H_q|_{x=0} = 0, \\ \left(v'' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H_j \right) \Big|_{x=1} = 0, \quad \left(v''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H_j' - \ddot{v}' \right) \Big|_{x=1} = f_{22}(\tau), \quad (D_q H_q' + \Lambda_q v''') \Big|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение задачи ищется с помощью метода эквивалентных граничных условий [3,4]. Для этого рассматривается вспомогательная задача

$$\begin{aligned} v'|_{x=0} = 0, \quad \left(v''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H_j' - \ddot{v}' \right) \Big|_{x=0} = f_{21}^*(\tau), \quad (D_q H_q' + \Lambda_q v''') \Big|_{x=0} = f_{q+2,1}^*(\tau), \\ v'|_{x=1} = f_{12}^*(\tau), \quad \left(v''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H_j' - \ddot{v}' \right) \Big|_{x=1} = f_{22}(\tau), \quad (D_q H_q' + \Lambda_q v''') \Big|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где функции $f_{12}^*(\tau)$, $f_{1,q+2}^*(\tau)$, $f_{21}^*(\tau)$ подлежат определению.

Решение задачи (1), (3) имеет вид

$$\begin{aligned} v(x, \tau) = & \int_0^\tau [G_{12}(x, \tau-t) f_{21}^*(t) - G_{12}(1-x, \tau-t) f_{22}(t)] dt + \\ & + \sum_{p=1}^N \int_0^\tau G_{1,p+2}(x, \tau-t) f_{p+2,1}^*(t) dt - \int_0^\tau G_{11}(1-x, \tau-t) f_{12}^*(t) dt, \\ \eta_q(x, \tau) = & \int_0^\tau [G_{q+2,2}(x, \tau-t) f_{21}^*(t) - G_{q+2,2}(1-x, \tau-t) f_{22}(t)] dt + \\ & + \sum_{p=1}^N \int_0^\tau G_{q+2,p+2}(x, \tau-t) f_{p+2,1}^*(t) dt - \int_0^\tau G_{q+2,1}(1-x, \tau-t) f_{12}^*(t) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где G_{mk} – поверхностные функции Грина задачи (1), (3), которые являются решениями следующих задач

$$\ddot{G}_{1k}'' - a \ddot{G}_{1k} = G_{1k}^{IV} + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}'', \quad \dot{G}_{q+1,k} = D_q G_{q+1,k}'' + \Lambda_q G_{1k}^{IV}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\left(G_{1k}''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,k} - \ddot{G}'_{1k} \right) \Big|_{x_1=0} &= \delta_{2k} \delta(\tau), \quad \left(G_{1k}''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,k} - \ddot{G}'_{1k} \right) \Big|_{x_1=1} = 0, \\
G'_{1k} \Big|_{x_1=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), \quad G'_{1k} \Big|_{x_1=1} = 0, \\
\left(D_q G'_{q+1,k} + \Lambda_q G'''_{1k} \right) \Big|_{x_1=0} &= \delta_{q+2,k} \delta(\tau), \quad \left(D_q G'_{q+1,k} + \Lambda_q G'''_{1k} \right) \Big|_{x_1=1} = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Решения (4) будут удовлетворять задаче (1), (2) если функции $f_{12}^*(\tau)$, $f_{1,q+2}^*(\tau)$, $f_{21}^*(\tau)$ будут удовлетворять следующей системе интегральных уравнений [4,5]

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \left[G_{12} \ 0, \tau-t \ f_{21}^* \ t + \sum_{p=1}^N G_{1,p+2} \ 0, \tau-t \ f_{p+2,1}^* \ t - G_{11} \ 1, \tau-t \ f_{12}^* \ t \right] dt = \\
& = \int_0^\tau G_{12} \ 1, \tau-t \ f_{22} \ t \ dt, \\
& \int_0^\tau \left[G_{12}'' \ 1, \tau-t + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,2} \ 1, \tau-t \right] f_{21}^* \ t \ dt + \\
& + \sum_{p=1}^N \int_0^\tau \left[G_{1,p+2}'' \ 1, \tau-t + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,p+2} \ 1, \tau-t \right] f_{p+2,1}^* \ t \ dt - \\
& - \int_0^\tau \left[G_{11}'' \ 0, \tau-t + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,1} \ 0, \tau-t \right] f_{12}^* \ t \ dt = \\
& = \int_0^\tau \left[G_{12}'' \ 0, \tau-t + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,2} \ 0, \tau-t \right] f_{22} \ t \ dt, \\
& \int_0^\tau \left[G_{q+2,2} \ 0, \tau-t \ f_{21}^* \ t + \sum_{p=1}^N G_{q+2,p+2} \ 0, \tau-t \ f_{p+2,1}^* \ t - G_{q+2,1} \ 1, \tau-t \ f_{12}^* \ t \right] dt = \\
& = \int_0^\tau G_{q+2,2} \ 1, \tau-t \ f_{22} \ t \ dt.
\end{aligned} \tag{7}$$

Решение задачи (5), (6) ищется с помощью преобразования Лапласа и разложения в ряды по косинусам. В этом случае задача (5), (6) сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений (верхний индекс «L» обозначает трансформанту Лапласа, s - параметр преобразования Лапласа)

$$\begin{aligned}
k_1(\lambda_n, s) G_{1k}^{LF}(\lambda_n, s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}^{LF}(\lambda_n, s) &= -2\lambda_n^2 \delta_{1k} + 2\delta_{2k}, \\
-\Lambda_q \lambda_n^4 G_{1k}^{LF}(\lambda_n, s) + k_{q+1} G_{q+1,k}^{LF}(\lambda_n, s) &= 2\lambda_n^2 \Lambda_q \delta_{1k} - 2\delta_{q+2,k},
\end{aligned} \tag{8}$$

$$k_1(\lambda_n, s) = \lambda_n^2 s^2 + as^2 + \lambda_n^4, \quad k_{q+1}(\lambda_n, s) = s + \lambda_n^2 D_q,$$

$$2 \int_0^1 G_{mk}^L(x, s) \cos(\lambda_n x) dx = G_{mk}^{LF}(\lambda_n, s) \quad (m = \overline{1, N+1}, k = \overline{1, N+2}),$$

$$G_{mk}^L(x, s) = \frac{G_{mk}^{LF}(\lambda_n, s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{mk}^{LF}(\lambda_n, s) \cos(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \pi n.$$

Решение системы (8) имеет вид

$$G_{1k}^{LF} = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}, \quad G_{q+1,1}^{LF} = \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2}{k_{q+1}} + \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)},$$

$$G_{q+1,2}^{LF} = \frac{P_{q+1,2}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \quad G_{q+1,p+2}^{LF} = -\frac{2\delta_{qp}}{k_{q+1}} + \frac{P_{q+1,p+2}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)},$$

$$G_{q+1,k}^{LF} = \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{1k}}{k_{q+1}} - \frac{2\delta_{q+2,k}}{k_{q+1}} + \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)},$$

$$Q_q(\lambda_n, s) = k_{q+1}(\lambda_n, s) P(\lambda_n, s),$$

$$P(\lambda_n, s) = k_1 \prod_{q=1}^N k_{q+1}(\lambda_n, s) - \lambda_n^6 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{q=1, q \neq j}^N k_{q+1}(\lambda_n, s)$$

$$\Pi(\lambda_n, s) = \prod_{q=1}^N k_{q+1}(\lambda_n, s), \quad \Pi_j(\lambda_n, s) = \prod_{q=1, q \neq j}^N k_{q+1}(\lambda_n, s)$$

$$P_{11}(\lambda_n, s) = -2\lambda_n^2 \left[\Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j(\lambda_n, s) \right],$$

$$P_{12}(\lambda_n, s) = 2\Pi(\lambda_n, s), \quad P_{1,q+2}(\lambda_n, s) = -2\lambda_n^2 \alpha_q \Pi_q(\lambda_n, s),$$

$$P_{q+1,k}(\lambda_n, s) = \lambda_n^4 \Lambda_q P_{1k}(\lambda_n, s).$$

Так как многочлены $P_{mk}(\lambda_n, s)$ являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа s , то переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

Литература

1. Файкин Г.М., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Постановка задачи о Консольном изгибе балки Эйлера-Бернулли с учетом диффузии // Материалы XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. – М.: ОО

«ТРИ», 2019. – С. 136-139.

2. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Файкин Г.М. Постановка задачи о нестационарном изгибе консольно-закрепленной балки Эйлера-Бернулли с учетом диффузии // Проблемы безопасности на транспорте: матер. IX Междунар. научн.-практ. конф., Гомель, 28–29 ноябр. 2019 г. – Гомель: БелГУТ, 2019. – Ч. 2. – С. 215-217

3. *Zemskov A.V., Tarlavovskiy D.V.* Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // *Materials Physics and Mechanics*, No1, Vol 23 (2015), pp. 36-41

4. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Решение двумерных задач механодиффузии с помощью интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016, №1. С. 49-56.

МОДЕРНИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИИ ВЕДЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗОНДОВ НА ЭТАПЕ УСКОРЕНИЯ

Сотский М.Ю., Велданов В.А., Крутов И.С., Пусев В.И.

(Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва)

Разработка относится к области расчетно-экспериментального исследования динамических механических свойств реологических сред [1]. Знания о свойствах сред, закономерностях изменения свойств со скоростью контактирования, со скоростью деформирования среды, необходимы при решении динамических контактных задач. В технологиях и установках динамического контактного зондирования существуют такие, в которых инерциальный измерительный зонд ускоряется в направляющем элементе для последующего внедрения в исследуемый объект или среду [2 - 5]. В отмеченных установках зонд содержит автономное устройство для регистрации истории замедления на этапе проникания зонда в среду до полной остановки. Существуют современные акселерометры и инерциальные измерительные модули, которые применяются для управления подвижными объектами, в пилотажном и навигационном оборудовании [6]. Однако рабочий диапазон известных акселерометров и модулей более чем на порядок меньше требуемого. В наших же исследованиях используется традиционная, менее дорогостоящая, технология с применением ударостойких акселерометров и непрерывной проводной электрической связи с регистратором [7]. В подобных опытах определяются также (путем применения точной операции интегрирования истории замедления) данные о скорости и глубине внедрения зонда в любой момент времени проникания. Погрешность определения обусловлена погрешностью регистрации величины замедления (отрицательного ускорения зонда) в опыте. Геометрические и массогабаритные характеристики зонда позволяют определить и значения

сил, действующих на зонд в любой момент времени. Кроме этого, появляется возможность определения и давлений со стороны исследуемой среды на поверхность зонда, при условии знания о площади поверхности, контактирующей со средой.

В серии докладов на XX - XXV Международных симпозиумах “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г.Горшкова описаны используемые нами методы и технологии непрерывной проводной электрической регистрации замедления зонда при его проникании в среду до полной остановки. В частности, эти методы применены в условиях высокоскоростного удара пластически деформирующегося измерительного зонда по жесткой стенке. Установлены особенности реализации теста Тейлора при прямом и обратном ударе. Представлена методика определения динамических механических свойств сотовых конструкций из алюминиевых сплавов на основе теста Тейлора. Проведены исследования механических свойств высокопористых сотовых конструкций из алюминиевых сплавов. Представлено разработанное устройство для изучения реологических сред с применением инерциальных измерительных зондов (патент RU 2679946 Баллистический модуль и способ проводной электрической связи для регистрации параметров функционирования метаемого измерительного зонда в полном баллистическом цикле. 2019).

Для создания возможности для проведения дальнейших исследований на моделях летательных аппаратов, содержащих узел имитации бортового оборудования из высокопористого алюминиевого сплава, потребовалась модернизация разработанного устройства. Технология визуализации баллистических процессов (патент RU 2685011 Поддон для метаемого измерительного зонда. 2019) применена для разработки и реализации конструкции поддона для ведения измерительных зондов [8]. Модернизация обеспечивает повышение точности экспериментальных данных о динамических механических свойствах реологических сред, а также возможность создания измерительной модели с формой внешней поверхности, адекватной моделируемому летательному аппарату. Для баллистического измерительного модуля разработаны дополнительные конструктивные решения. Изменения направлены на повышение стабильности получения результатов измерений. Созданы условия для регулярной укладки провода связи при ускорении сборки с измерительным зондом. Повышается также надежность получения данных о процессе функционирования зонда путем получения регулярной формы провода связи при его движении впереди сборки до дульного среза направляющего элемента и, в дальнейшем, при движении за зондом на траектории. Технической задачей разработанного поддона для метаемого зонда является создание необходимых конструктивных условий и элементов для повышения надежности и регулярности получения достоверных данных при использовании измерительных зондов. Уменьшается количество необходимых опытов в серии для получения

достоверных данных об исследуемом процессе. Это обусловлено регулярностью (однообразностью) формы движущегося провода связи в сериях опытов. Обеспечивается также, уменьшение необходимой для проведения опытов длины баллистической трассы и исключение влияния на процесс функционирования метаемых измерительных зондов средств их разделения с поддоном. Как показано на рис.1, поддон для метаемого измерительного зонда выполнен конструктивно единым элементом, содержащим две характерных зоны или части.

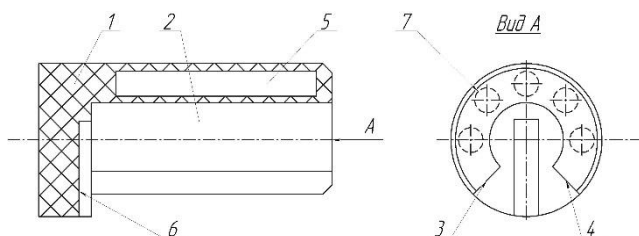


Рис. 1

Толкающая часть 1 обеспечивает в процессе метания обтюрацию и передачу усилий для ведения метаемого измерительного зонда в пусковом устройстве. Удерживающая часть 2 обеспечивает в процессе ведения удержание зонда, его центровку и поступательное движение зонда при ускорении. Данный поддон, классифицируется как поддон толкающего типа. Кроме того, поддон обеспечивает проведение испытаний с измерениями баллистических параметров функционирования метаемых зондов на всей траектории их перемещения в пространстве. Удерживающая часть 2 выполнена с полостью, например, осесимметричной, как на рис.1. В процессе ускорения в направляющем элементе в удерживающей части 2 поддона размещается измерительный зонд. Зонд содержит ударостойкий акселерометр и элементы, обеспечивающие непрерывную проводную электрическую связь с внешней измерительно-регистрирующей аппаратурой. Совокупность поддона и измерительного зонда представляет собой метаемую измерительную сборку. В удерживающей части 2 поддона выполнена продольная прорезь для размещения элементов обеспечения непрерывной связи при перемещении сборки внутри направляющего элемента. Прорезь в удерживающей части 2 образована плоскостями 3 и 4, расположенными под углом друг к другу. Значение угла между плоскостями 3 и 4 определяется необходимым объемом, требуемым для размещения элементов обеспечения непрерывной связи при перемещении сборки внутри направляющего элемента до его дульного среза. Угловое расположение плоскостей способствует регулярной форме изгибов провода в процессе укладки его в полости на участке перемещения сборки

до дульного среза. Максимальный размер прорези в поперечном направлении в месте ее примыкания к полости меньше поперечного размера измерительного зонда, а максимальный поперечный размер прорези на поверхности удерживающей части 2 меньше диаметра удерживающей части 2. Такой диапазон размеров прорези обеспечивает сохранность начального положения измерительного зонда относительно осевой линии ствола до момента перемещения сборки за дульный срез. На этапе перемещения сборки вне ствола выборка материала в нижней части поддона и продольная прорезь обеспечивают беспрепятственное отделение измерительного зонда и элементов связи от поддона и штатное функционирование элементов, обеспечивающих непрерывную проводную электрическую связь с внешней измерительно-регистрающей аппаратурой. С целью расширения баллистических характеристик метания, в удерживающей части 2 сделана выборка материала 5, например, в форме удлинненных цилиндров 7. На рис.1 справа эти внутренние выборки 5 показаны штриховой линией. Если условиями проведения испытаний обеспечивается сохранение формы поддона при ускорении, то такие выборки 5, например, выполняемые с использованием 3D технологии, способствуют уменьшению массы поддона. С целью размещения и сохранения целостности при ускорении элементов обеспечения непрерывной связи измерительного зонда, в толкающей части 1 сделана выборка 6 по форме размещаемых элементов с объемом, превышающим объем размещаемых элементов. В варианте поддона на рис.2 прорезь в удерживающей части 2 образована единой плоской поверхностью 8, что повышает технологичность изготовления поддона за счет применения упрощенных технологий резания.

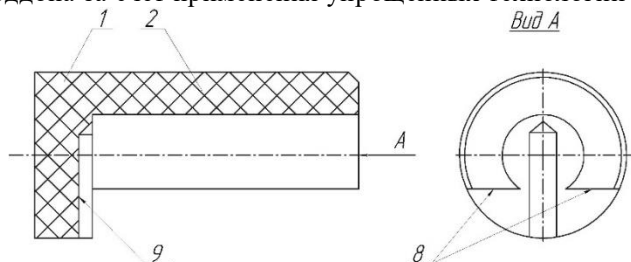


Рис. 2

С этой же целью при изготовлении в толкающей части 1 поддона выборки 9 может быть использована технология сверления. Представленный на рис.3 и рис.4 вариант многоэлементного поддона обеспечивает более быстрое отделение поддона от измерительного зонда на этапе движения сборки за дульным срезом направляющего элемента.

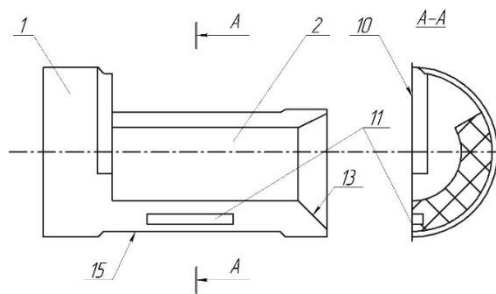


Рис. 3

Такой вариант используется для сокращения дистанции отделения, что имеет важное значение в лабораторных условиях для уменьшения необходимой длины баллистической трассы. Поддон (в данном случае двухэлементный) выполнен, по меньшей мере, с одной поверхностью разреза 10 в толкающей 1 и удерживающей 2 частях. Поверхности разреза каждого из элементов выполняются с формой, ответной по отношению друг к другу. Представленные на рис. 3 выборка материала 11 и соответствующий ей выступ 12 на фиг. 4 исключают взаимное смещение соприкасающихся разъемных элементов поддона в процессе его ускорения при метании.

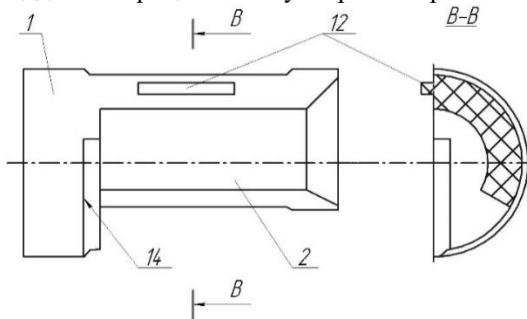


Рис. 4

Поверхность разреза соприкасающихся элементов поддона в поперечном направлении может быть перекрыта взаимными выборками и выступами материала в его толкающей части. Это увеличивает обтюрирующие свойства поддона при его движении внутри направляющего элемента. Форма выборок и выступов выбирается подобной форме выборки 11 (рис.3) и выступа 12 на (рис.4). С целью воздействия на движущиеся впереди поддона элементы обеспечения непрерывной связи, в толкающей части 1 может быть сделана продольная прорезь с одной или с двух сторон от выборки 6 на рис.1 (или 9 на рис.2) по форме размещаемых элементов измерительного зонда (на рисунках не показана). Эта же цель может быть достигнута при

выполнении толкающей части 1 продольных отверстий необходимого диаметра. Выборка материала в передней торцевой части элементов с конусообразной поверхностью 13 (рис.3) обеспечивает отделение элементов от измерительного зонда в поперечном направлении относительно траектории перемещения. Выборка материала 14 (рис.4), выполненная в толкающих частях элементов, имеет то же назначение, что и выборка б на рис.1. Выборка материала 15 (рис.3), выполненная на внешней поверхности элементов поддона, способствует его облегчению и уменьшению площади внешней поверхности поддона, соприкасающейся с внутренней поверхностью канала направляющего элемента. Эти факторы повышают возможные в испытаниях скоростные параметры баллистики зондов.

Разработанное техническое решение реализовано в опытах при проведении испытаний с непрерывной регистрацией параметров функционирования метаемых измерительных зондов, в различных вариантах, при их движении в направляющем элементе, на траектории и в исследуемой среде. В проведенных испытаниях реализована также высокоскоростная (до 120000 кадров в секунду) видеорегистрация функционирования провода непрерывной электрической связи на всех этапах баллистического цикла. Диаметр поддона метаемого измерительного зонда составлял в опытах величину 30, 50 и 80 мм, а скорость движения поддонов в зоне их перемещения за дульным срезом направляющего элемента реализована в опытах в диапазоне скоростей 20...320 м/с.

Выводы:

В работе представлены разработанные ведущие устройства, обеспечивающие надежность функционирования зонда внутри направляющего элемента баллистического модуля и на этапе движения к исследуемой реологической среде. Проведена оценка возможности использования ведущего устройства в баллистическом модуле для исследования динамических механических свойств конструкционных материалов и реологических сред. Модернизация технологии ведения сборки (поддона с измерительным зондом и элементами проводной связи) на этапе ее ускорения обеспечила адекватность моделирования процесса движения измерительной модели в среде на этапе проникания. Выявлены особенности и преимущества предложенных решений в сравнении с известными зондами, автономными регистрирующими устройствами и инерциальными измерительными модулями.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-08-00701-а) и с участием сотрудников кафедры “Высокоточные летательные аппараты” МГТУ им. Н.Э. Баумана Д.В. Гелина, Д.А. Лысова В.А. Маркова и А.В. Петюкова. Использовано

оборудование для обеспечения проведения научных исследований по государственным заданиям ГЗ 3.6196.2017/7.8 и ГЗ 3.6257.2017/7.8.

Литература

1. Брагов А.М., Баландин Вл.В., Котов В.Л., Баландин Вл.Вл., Линник Е.Ю. Экспериментальное исследование удара и проникания конического ударника в мерзлый песчаный грунт // ПМТФ. 2018. Т. 59. №3. С.111-120.
2. Forrestal M.J., Frew D.J., Hickerson J.P., Rohwer T.A. Penetration of Concrete Targets with Deceleration-Time Measurement. *Int. J. Imp. Eng.* 2003. V. 28 (5). P. 479–497.
3. Wendong Zhang, Lujiang Chen, Jijun Xiong, Youchun Ma. Ultra-high g deceleration-time measurement for the penetration into steel target // *Int. J. Impact Eng.* 2007. V. 34. P. 436 – 447.
4. J.-M. Sibeaud, A. Delmas, A. Hottélet and D.-P. Zappa. Kinetic Energy Perforation of Concrete Slabs: Investigation of Embedded High G-Load Sensing. *Proc. of the 27th Intern. Symp. on Ballistics.* Freiburg, Germany. 2013. V. 2. P.1557-1567.
5. Батарев С.В., Калмыков П.Н., Кортюков И.И., Осокин А.П. Ударостойкий регистратор ускорений // Сборник статей XXV Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции школы семинара “Передача, прием, обработка и отображение информации о быстропротекающих процессах”. 2014. М.: РПА «АПР». С.66-69.
6. Бекмачев А.Е. Инерциальные МЭМС-датчики и модули европейских производителей. Обзор новинок // *Электроника НТБ.* 2014. № 2. С. 38–49. <http://www.electronics.ru/journal/article/4075> (дата обращения 25.03.2020).
7. Велданов В.А., Марков В.А., Пусев В.И., Ручко А.М., Селиванов В.В., Сотский М.Ю., Федоров С.В. Применение акселерометрии для исследования динамических механических свойств материалов в усложненных условиях проведения измерений // *электронный журнал «Наука и образование».* 2012. №8. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/428828.html> DOI: 10.7463/0812.0428828 (дата обращения 23.02.2020).
8. Новые технологии визуализации и измерения параметров баллистических процессов и динамических течений / М.Ю.Сотский, Д.В. Гелин, И.С. Крутов, Д.А. Лысов, В.А. Марков, И.В. Марков, М.Ю. Четвернин // ПМТФ. 2019. № 5. С. 217-224.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ СКВОЗЬ КОМПОЗИТНУЮ ПЛАСТИНУ, НАХОДЯЩУЮСЯ МЕЖДУ ПРЕГРАДАМИ, НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Паймушин В.Н.^{1,2}, Газизуллин Р.К.¹

(¹Казанский национальный исследовательский технический университет имени
А.Н. Туполева-КАИ, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный
университет, Казань)

Исследованию процесса прохождения звуковых волн сквозь тонкие пластины (в том числе и композитные) посвящено достаточно большое количество работ [1–5 и др.]. В них для описания механики деформирования пластины, как правило, используются простейшие соотношения теории пластин, основанные на введении ряда известных упрощающих гипотез и предположения о том, что при прохождении звуковой волны в пластине формируются, главным образом, лишь тангенциальные компоненты тензора напряжений. С целью дальнейшего развития полученных ранее результатов [6] и исследования влияния частоты падающей на пластину звуковой волны на параметры формирующегося в пластине динамического напряженно-деформированного состояния для постановки рассматриваемой задачи о прохождении сквозь пластину звуковой волны используется разработанная ранее дискретно структурная модель деформирования многослойных пластин [6], позволяющая получить решения, практически приближающиеся к решению на основе уравнений трёхмерной теории упругости.

Рассматривается задача о прохождении моногармонической звуковой волны сквозь многослойную прямоугольную пластину бесконечных размеров, лежащей на системе абсолютно жестких ребер, расположенных в тангенциальных направлениях с шагами a и b , соответственно (рис.1). Пластина состоит из $M = N - 1$ слоев, имеющих толщины $h_{[k]}$ ($k = \overline{1, M}$ – номер слоя). В пределах толщины каждого слоя для компонент перемещений $U_i^{[k]}, U_3^{[k]}$ ($i = 1, 2$) принимаются аппроксимации

$$(-h_{[k]}/2 \leq h_{[k]}/2)$$

$$U_i^{[k]} = \frac{u_i^{(k+1)}}{2} + \frac{z_{[k]}}{h_{[k]}} (u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}), \quad U_3^{[k]} = \frac{w^{(k+1)}}{2} + \frac{z_{[k]}}{h_{[k]}} (w^{(k+1)} - w^{(k)}).$$

Предполагается, что пластина представляет собой перегородку, разделяющую два смежных пространства V_1 и V_2 . На расстояниях $z = -l_1$ и $z = l_2$ от пластины расположены абсолютно жесткие преграды бесконечной протяженности в направлениях

осей x и y (рис. 1). Одна из них совершает в направлении оси z гармонические колебания с круговой частотой ω и амплитудой \tilde{U}_* , а вторая неподвижна и имеет маложесткое деформируемое покрытие в виде слоя толщиной h_c . Будем считать, что граничная плоскость $z = l_2 + h_c$ покрытия неподвижна, а точки граничной плоскости $z = l_2$ за счет его деформаций получают подлежащие определению перемещения

$$U = U(x, y, \tau), \quad V = V(x, y, \tau), \quad W = W(x, y, \tau).$$

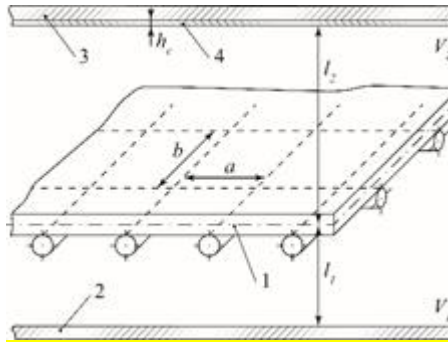


Рис. 1. Расчетная схема: 1 – пластина, 2 – жесткая преграда (генератор звуковых волн), 3 – жесткая преграда, 4 – маложесткое покрытие

Пространства V_k ($k = 1, 2$) заполнены акустическими средами с плотностями ρ_k и скоростями звука c_k . Тогда за счет гармонических колебаний преграды $z = -l_1$ в пространствах V_k будут сформированы звуковые волны с давлениями p_1 и p_2 . Для определения давления p_1 , приложенного к граничной плоскости первого слоя пластины, и давления p_2 , приложенного к граничной плоскости N -ого слоя пластины, необходимо найти решения волновых уравнений

$$\Phi_{s,xx} + \Phi_{s,yy} + \Phi_{s,zz} - c_s^{-2} \ddot{\Phi}_s = 0, \quad s = 1, 2, \quad (1)$$

записанных относительно потенциалов скоростей звуковых волн Φ_1, Φ_2 . Давления p_s , p_s и компоненты скоростей $v_z^s, v_x^s, v_y^s, v_z^s$ в полупространствах V_1, V_2 через функции Φ_s, Φ_s выражаются зависимостями

$$p_s = -\rho_s \dot{\Phi}_s, \quad v_x^s = \Phi_{s,x}, \quad v_y^s = \Phi_{s,y}, \quad v_z^s = \Phi_{s,z}. \quad (2)$$

При формировании в пространстве V_2 излучаемых пластиной акустических волн под действием давления $p_2^+ = p_2|_{z=l_2}$ маложесткое покрытие неподвижной пре-

грады будет деформироваться. Будем считать, что главные в ней – нормальное напряжение σ_z^c и касательные напряжения τ_{xz}^c, τ_{yz}^c , связанные с соответствующими компонентами деформаций ε_z^c и $\gamma_{xz}^c, \gamma_{yz}^c$ при учете вязкоупругих свойств материала по модели Кельвина–Фойгта соотношениями упругости следующего вида

$$\sigma_z^c = E_z^c D_z^c \varepsilon_z^c, \quad \tau_{xz}^c = G_c D_\gamma^c \gamma_{xz}^c, \quad \tau_{yz}^c = G_c D_\gamma^c \gamma_{yz}^c. \quad (3)$$

Здесь

$$D_z^c = 1 + \frac{\delta_z^c}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad D_\gamma^c = 1 + \frac{\delta_\gamma^c}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau},$$

в которых $E_z^c, G_c, \delta_z^c, \delta_\gamma^c$ – соответствующие упругие и демпфирующие характеристики материала покрытия. В предположении о том, что $h_c \ll a, b$, в работе [6] для компонент перемещений в покрытии приняты аппроксимации

$$(u_c, v_c, w_c) = \left(1 - \frac{z - l_2}{h_c}\right) (U, V, W),$$

исходя из которых при использовании соотношений (3) в случае действия на покрытие поперечной нагрузки p_2^+ получена система трех дифференциальных уравнений движения покрытия следующего вида [7]

$$\begin{aligned} G_c D_\gamma^c \left(\frac{U}{h_c} - \frac{W_{,x}}{2} \right) + \frac{\rho_c h_c}{3} \ddot{U} = 0, \quad G_c D_\gamma^c \left(\frac{V}{h_c} - \frac{W_{,y}}{2} \right) + \frac{\rho_c h_c}{3} \ddot{V} = 0, \\ \frac{E_z^c}{h_c} D_z^c W + \frac{\rho_c h_c}{3} \ddot{W} - G_c D_\gamma^c \left[\frac{h_c}{3} (W_{,xx} + W_{,yy}) - \frac{1}{2} (U_{,x} + V_{,y}) \right] - p_2^+ = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ_c – плотность материала покрытия.

Решения уравнений движения пластины, а также волновых уравнений (1) и уравнений (4) в рассматриваемом случае должны удовлетворять условиям кинематического сопряжения

$$\dot{w}^{(1)} = v_z^1 \Big|_{z=0}, \quad \dot{w}^{(N)} = v_z^2 \Big|_{z=0}, \quad \dot{W} = v_z^2 \Big|_{z=l_2}, \quad \dot{U}_* = v_z^1 \Big|_{z=-l_1}, \quad (5)$$

где $\dot{w}^{(1)}, \dot{w}^{(N)}$ – прогибы граничных плоскостей первого и $[N-1]$ -го слоев, соответственно.

Процесс динамического деформирования пластины описывается полученными в работе [6] уравнениями теории многослойных пластин с учетом поперечных сдвигов и поперечного обжатия в каждом слое. Внутреннее трение материала каждого слоя пластины учитывается по гистерезисной модели Кельвина–Фойгта, в соответствии с которой для формирующихся в пластине напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}^{[k]}, \sigma_{\alpha\beta}^{[k]}$; $\alpha \neq \beta$; $\alpha = \overline{1,3}$; $\beta = \overline{1,3}$. и деформаций $\varepsilon_\alpha^{[k]}, \gamma_{\alpha\beta}^{[k]}$ имеют место физические

соотношения (δ_α , $\delta_{\alpha\beta}$ – логарифмические декременты колебаний при осевых и сдвиговых деформациях, соответственно; τ – время)

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{[k]} = \tilde{g}_{\alpha 1}^{[k]} \varepsilon_1^{[k]} + \tilde{g}_{\alpha 2}^{[k]} \varepsilon_2^{[k]} + \tilde{g}_{\alpha 3}^{[k]} \varepsilon_3^{[k]}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{[k]} = \tilde{G}_{\alpha\beta}^{[k]} \gamma_{\alpha\beta}^{[k]},$$

где

$$\tilde{E}_\alpha^{[k]} = E_\alpha^{[k]} \left(1 + \frac{\delta_\alpha^{[k]}}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \quad \tilde{G}_{\alpha\beta}^{[k]} = G_{\alpha\beta}^{[k]} \left(1 + \frac{\delta_{\alpha\beta}^{[k]}}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \quad \tilde{g}_{11}^{[k]} = \frac{\tilde{E}_1^{[k]} \left(1 - \nu_{23}^{[k]} \nu_{32}^{[k]} \right)}{\Delta^{[k]}},$$

$$\tilde{g}_{12}^{[k]} = \frac{\tilde{E}_1^{[k]} \left(\nu_{21}^{[k]} + \nu_{23}^{[k]} \nu_{31}^{[k]} \right)}{\Delta^{[k]}}, \quad \overline{1, 2, 3}, \quad \Delta^{[k]} = 1 - \nu_{12}^{[k]} \nu_{21}^{[k]} - \nu_{23}^{[k]} \nu_{32}^{[k]} - \nu_{31}^{[k]} \nu_{13}^{[k]} - 2\nu_{12}^{[k]} \nu_{23}^{[k]} \nu_{31}^{[k]}.$$

В качестве неизвестных приняты компоненты перемещений $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, $w^{(k)}$ точек лицевых плоскостей первого и последнего слоев, а также точек внутренних плоскостей сопряжения слоев. Если для функции $U_*(\tau)$ принять представление вида [7]

$U_* = \tilde{U}_* e^{i\omega\tau}$, то для функций перемещений в соответствии с рис.1 справедливы представления

$$u_1^{(k)} = e^{i\omega\tau} \sum_{m,n=1,3,\dots} \tilde{u}_{1mn}^{(k)} \cos \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad u_2^{(k)} = e^{i\omega\tau} \sum_{m,n=1,3,\dots} \tilde{u}_{2mn}^{(k)} \sin \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y,$$

$$w^{(k)} = e^{i\omega\tau} \sum_{m,n=1,3,\dots} \tilde{w}_{mn}^{(k)} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad \lambda_m = m\pi/a, \quad \lambda_n = n\pi/b;$$

при учете которых в силу первых двух условий (5) решения уравнений (1) должны иметь вид

$$\Phi_s = e^{i\omega\tau} \sum_{m,n=1,3,\dots} \tilde{\Phi}_s^{mn}(z) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y. \quad (7)$$

В свою очередь, в силу последних двух условий (5) и представлений (6) – (7) для отыскания решений уравнений (4) примем представления

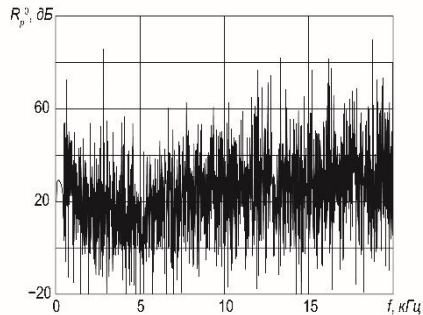
$$U = e^{i\omega\tau} \sum \tilde{U}_{mn} \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y, \quad V = e^{i\omega\tau} \sum \tilde{V}_{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y$$

$$W = e^{i\omega\tau} \sum \tilde{W}_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \quad (8)$$

На основе принятых представлений (6) – (8) найдено решение сформулированной задачи в аналитическом виде, которое следует считать точным при $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$. Найденное решение позволяет вычислить параметр звукоизоляции пластины $R_p^0 = -20 \lg \left| \tilde{p}_2 \Big|_{z=0} / \tilde{p}_1 \Big|_{z=0} \right|$ и определить амплитудные значения всех параметров ее напряженно-деформированного состояния.

На основе найденного решения проведены исследования для пластины, имеющей геометрические размеры $a = 480$ мм, $b = 560$ мм, $t = 3$ мм и выполненной из композиционного материала на основе углеродной ткани Porcher 3692 и связующего

ЭДТ-69НМ. Данный материал при динамических процессах деформирования имеет следующие механические характеристики и логарифмические декременты колебаний [8] $E_{1,d} = E_{2,d} = 40$ ГПа, $E_{3,d} = 5.9$ ГПа, $G_{12,d} = G_{13,d} = G_{23,d} = 4$ ГПа, $\nu_{12} = 0.163$, $\nu_{13} = \nu_{23} = 0.3$, $\rho = 1500$ кг/м³, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.012$, $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0.03$. Считается, что пластина окружена с двух сторон воздухом, имеющим параметры $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 1.225$ кг/м³, $c_1 = c_2 = c = 340$ м/с. С целью иллюстрации на рис. 2а приведены зависимости параметра звукоизоляции R_p^0 в центральной точке пластины от частоты $f = \omega/(2\pi)$, а на рис. 2б, в в логарифмическом масштабе по оси $\tilde{\sigma}$ приведены графики зависимостей максимальных амплитудных значений формирующихся в пластине нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_{11}$ (отмечены на рис. 1б, в цифрой 1), $\tilde{\sigma}_{33}$ (отмечены на рис. 1б цифрой 2) и касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{13}$ (отмечены на рис. 1в цифрой 3) от частоты f . Расчеты проведены для пластины, находящейся на расстояниях $l_1 = l_2 = 2.3$ м от преград, при значении параметра $\tilde{U}_* = 0.01$ мм и толщине покрытия жесткой преграды $h_c = 0.3$ м, имеющего упругие характеристики, плотность и параметр внутреннего демпфирования $E_c = 16$ ГПа, $\nu_c = 0.17$, $\rho_c = 500$ кг/м³, $\delta_c = 0.02$ (например, соответствующие бетону), практически не влияющие на изучаемые процессы деформирования пластины. Заметим, что для большей наглядности кривых на рис. 2б, в сглажены при помощи скользящих средних.



а

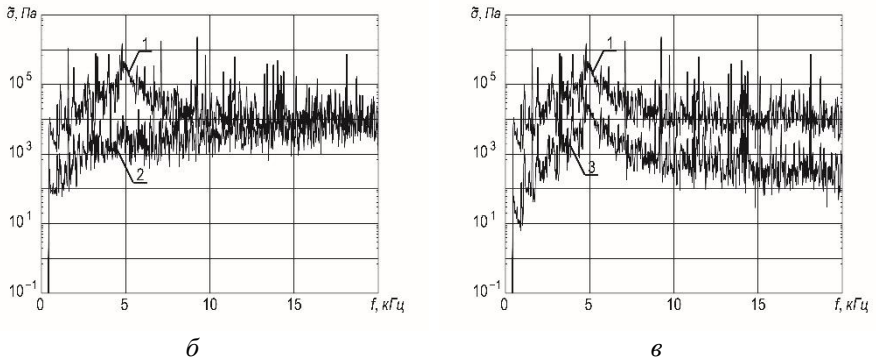


Рис. 1. Зависимости параметра звукоизоляции (а) и напряжений $\tilde{\sigma}_{11}$, $\tilde{\sigma}_{33}$ и $\tilde{\sigma}_{13}$ (б, в) от частоты

Как и следовало ожидать, при низких частотах звуковой волны основными в пластине являются тангенциальные компоненты тензора напряжений (значения $\tilde{\sigma}_{33}$ на два порядка меньше значений $\tilde{\sigma}_{11}$) и описание динамического напряженно-деформированного состояния пластины классическими двумерными уравнениями теории пластин вполне допустимо. В то же время при высоких частотах в пластине формируются напряжения $\tilde{\sigma}_{33}$ того же порядка, что и напряжения $\tilde{\sigma}_{11}$ и даже превышают их. Более детальное исследование в окрестностях отдельных резонансных частот показало, что значения напряжения σ_{33} могут превышать значения σ_{11} в узких частотных зонах уже в спектре средних частот, начиная с частоты $f \approx 1$ кГц. Отсюда следует принципиально важный вывод о том, что при высоких частотах корректное описание механики деформирования пластин при постановке задач рассматриваемого класса возможно лишь на основе уточненных уравнений при обязательном учете поперечного обжатия. Это особенно важно при исследовании акустического воздействия на тонкостенные элементы конструкций, выполненных из волокнистых композиционных материалов. Такие материалы, как правило, имеют в поперечном направлении упругие и прочностные характеристики, которые на несколько порядков меньше аналогичных характеристик в тангенциальных направлениях. Следует отметить, что полученные зависимости $\tilde{\sigma}_{13} = \tilde{\sigma}_{13}(f)$ и $\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\sigma}_{11}(f)$ имеют одинаковый характер изменения (рис.2в). Как показал проведенный анализ результатов расчетов, максимальные значения касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{13}$ на порядок меньше максимальных значений напряжений $\tilde{\sigma}_{11}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00058).

Литература

1. *Pretlove A.J.* Free vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity // *Journal of Sound and Vibration*. – 1965. – V. 2, No. 3. – P. 197–209.
2. *Pretlove A.J.* Forced vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity // *Journal of Sound and Vibration*. – 1966. – V. 3, No. 3. – P. 252–261.
3. *Jeyaraj P., Ganesan N., Padmanabhan C.* Vibration and acoustic response of a composite plate with inherent material damping in a thermal environment // *Journal of Sound and Vibration*. – 2009. – V. 320, No. 1. – P. 322–338.
4. *Li X., Yu K., Han J., Song H., Zhao R.* Buckling and vibro-acoustic response of the clamped composite laminated plate in thermal environment // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2016. – V. 119. – P. 370–382.
5. *D'Alessandro V., Petrone G., Franco F., De Rosa S.* A review of the vibroacoustics of sandwich panels: Models and experiments. // *Journal of Sandwich Structures and Materials*. – 2013. – V. 15, No. 5. – P. 541–582.
6. *Паймушин В. Н., Газизуллин Р. К.* Статическое и моногармоническое акустическое воздействия на многослойную пластину. // *Механика композитных материалов*. – 2017. – Т. 53, № 3. – P. 407–436.
7. *Газизуллин Р. К., Паймушин В. Н.* Прохождение звуковой волны сквозь прямоугольную пластину, находящуюся между преградами. // *Прикладная математика и механика*. – 2016. – Т. 80. № 5. – С. 597–613.
8. *Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Гюнал И., Шишкин В.М.* Идентификация характеристик упругости и демпфирования углепластика на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2016. – Т. 57. № 4 (338). – С. 170–181.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ ИЗ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ ПО ТРЕМ УТОЧНЕННЫМ ВАРИАНТАМ ТЕОРИИ

Паймушин В.Н.^{1,2}, Макаров М.В.^{1,2}, Полякова Н.В.¹, Шишов М.А.¹

(¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань)

1. Решения задач о макромасштабных ФПУ при сжатии тест-образца со структурой $[0^0]_s$ на основе уравнений простейшей уточненной теории типа С.П. Тимошенко

Рассмотрим стержень (тест-образец) из однонаправленного волокнистого композита со структурой $[0^0]_s$, для которого имеет место равенство $G_{13} = G_{12}(\gamma_{12})$. Стержень имеет прямоугольное поперечное сечение, толщину h , ширину b , длину L и подвержен осевому сжатию погонной силой $P = h\sigma_{11}^0$. Предполагаем, что его осевая линия $x = x_1$ имеет несовершенство в виде начального прогиба $w_0(x)$, в силу которого при сжатии стержень будет находиться в условиях продольно-поперечного изгиба. Задача о таком изгибе по уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко в первом приближении может быть описана уравнениями следующего вида

$$D\gamma'' - \hat{B}_{13}(w' + \gamma) = 0, \left[\hat{B}_{13}(w' + \gamma) \right]' - P(w'' + w_0'') = 0, \quad (1)$$

где w – прогиб осевой линии, γ – угол поворота поперечного сечения $x = const$, $D = E_1 h^3/12$ – изгибная жесткость, $\hat{B}_{13} = k_c \hat{G}_{13} h$ – поперечная сдвиговая жесткость, в которой k_c – коэффициент поперечно сдвига, $\hat{G}_{13} = \hat{G}_{13}(\gamma_{13})$ – секущий модуль поперечного сдвига, определяемый в предположении $G_{13} = G_{12}$ при заданном значении P и достигнутом уровне деформации поперечного сдвига $\gamma_{13} = w' + \gamma$ исходя из построенных в [1,2] диаграмм.

При возрастании внешней силы P в силу наличия начального прогиба $w_0(x)$ в поперечных сечениях стержня будут формироваться касательные напряжения $\sigma_{13}(x, z)$, что приводит одновременно и к изменению модулей поперечного сдвига \hat{G}_{13} и \tilde{G}_{13} во всех сечениях стержня. С целью проведения качественного анализа предположим, что при некотором критическом значении нагрузки

$P = P_{cr}$, наряду со сформированным напряженно-деформированном состоянием, возможно существование и смежного равновесного состояния, переход к которому осуществляется за счет приращений неизвестных функций $\Delta w, \Delta \gamma$ по чисто упругой модели деформирования, когда в возмущенном состоянии для приращения функций имеет место зависимость

$$\Delta \sigma_{13} = 2\tilde{G}_{13}\Delta \varepsilon_{13} = \tilde{G}_{13}(\Delta w' + \Delta \gamma), \quad (2)$$

где \tilde{G}_{13} – касательный модуль поперечного сдвига в плоскости xz . Записывая вместо уравнений равновесия (1) уравнения возмущенного равновесного состояния относительно функций $w^* = w + \Delta w, \gamma^* = \gamma + \Delta \gamma$ и вычитая из них уравнения (1) невозмущенного состояния, получим

$$D\Delta \gamma'' - \tilde{B}_{13}(\Delta w' + \Delta \gamma) = 0, \quad \tilde{B}_{13}(\Delta w'' + \Delta \gamma') - P_{cr}\Delta w'' = 0, \quad (3)$$

где принято предположение о том, что жесткость $\tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} h$ является постоянной по всей длине образца и равна минимальной достигнутой жесткости в одном из поперечных сечений. Внося во второе уравнение системы (3) следующую из первого уравнения зависимость $\Delta w' = (D/\tilde{B}_{13})\Delta \gamma'' - \Delta \gamma$, получим уравнение

$$D\left(1 - P_{cr}/\tilde{B}_{13}\right)\Delta \gamma''' + P_{cr}\Delta \gamma' = 0$$
 и его первый интеграл

$$D\left(1 - \frac{P_{cr}}{\tilde{B}_{13}}\right)\Delta \gamma'' + P_{cr}\Delta \gamma = c_1, \quad (4)$$

где c_1 – постоянная интегрирования. При

$$P_{cr}^s = \tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} h \quad (5)$$

из (4) следует решение (c_2 – постоянная интегрирования) $\Delta \gamma = c_1/P_{cr}^s$, $\Delta w' = -\Delta \gamma = -c_1/P_{cr}^s$, $\Delta w = -c_1 x/P_{cr}^s + c_2$, которое соответствует реализации чисто поперечно-сдвиговой форме потери устойчивости стержня по концепции Шенли. Такая ФПУ может реализоваться только у достаточно коротких стержней при значении $\tilde{B}_{13} = B_{13}^* = k_c \tilde{G}_{13}^* h$, где в соответствии с результатами многих исследований принято считать $\tilde{G}_{13}^* = \sigma_1^{*-}$ (σ_1^{*-} – предельное напряжение сжатия тест-образца, имеющего структуру $[0^0]_s$).

Критические значения усилия P , соответствующие реализации других (изгибно-сдвиговых) ФПУ стержня, зависят от условия закрепления торцевых сечений.

Шарнирное опирание торцевых сечений. Для исследуемых ФПУ стержня при шарнирном опирании торцевых сечений имеют место решения

$$\Delta w = w_n \sin \lambda_n x, \quad \Delta \gamma = \gamma_n \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

при подстановке которых в уравнения (3) из условия нетривиальности амплитудных значений w_n , γ_n приходим к формуле

$$P_{cr}^a = \tilde{B}_{13} \left(1 - \frac{1}{1 + D\lambda_n^2 / \tilde{B}_{13}} \right) = \frac{D\lambda_n^2}{1 + D\lambda_n^2 / \tilde{B}_{13}}. \quad (7)$$

В ней определяемая по формуле $\tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} h$ жесткость должна быть больше жесткости $B_{13}^* = k_c \tilde{G}_{13}^* h = k_c \sigma_1^{-*} h$, т.к. реализация изгибно-сдвиговой ФПУ стержня возможна только при его достаточно большой длине и при $\tilde{G}_{13} > \tilde{G}_{13}^*$. Из (7) следует, что при $\lambda_n \rightarrow \infty$ (т.е. при $n \rightarrow \infty$) решение (7) стремится к решению (5), что, вообще говоря, не поддается какой-либо физической трактовке и, по-видимому, является особенностью решений рассматриваемой задачи в рамках простейшей используемой математической модели изучаемого процесса. В формуле (7) слагаемое $1/(1 + D\lambda_n^2 / \tilde{B}_{13})$ достигает максимума при волновом числе $n = 1$.

При таком значении n величина P_{cr}^a является минимальной и ей всегда соответствует изгибно-сдвиговая ФПУ, описываемая функциями (6).

Защемление торцевых сечений. Введя в рассмотрение безразмерные независимую переменную $\eta = x/L$, функцию $\tilde{w} = \Delta w/t$ и параметр усилия $m = pL^2/D$, систему уравнений (3) приведем к виду (здесь и в дальнейшем без символов приращений Δ для краткости)

$$\frac{d^2 \gamma}{d\eta^2} + k^2 \gamma = \frac{c_1}{r}, \quad \frac{d\tilde{w}}{d\eta} = \frac{1}{t_0} \left(r \frac{d^2 \gamma}{d\eta^2} - \gamma \right), \quad (8)$$

где c_1 – постоянная интегрирования, а

$$h_0 = \frac{h}{L}, \quad k^2 = \frac{m}{1 - mr}, \quad r = \frac{E_1 h_0^2}{12 G_{13} k_c}. \quad (9)$$

Решение уравнений (8) имеет вид

$$\gamma = \frac{c_1}{k^2 r} + c_2 \sin k\eta + c_3 \cos k\eta, \quad (10)$$

$$\tilde{w} = c_4 - \frac{c_1 \eta}{t_0 r k^2} - \frac{1}{t_0 k} (1 + k^2 r) (c_3 \sin k\eta - c_2 \cos k\eta). \quad (11)$$

Если подчинить решение (10) условиям $\gamma'(0) = \gamma'(1) = 0$, имеющим место при шарнирном опирании торцевых сечений, то $c_2 = 0$, а из условия $c_3 \neq 0$ найдем решение $k = n\pi, n = 1, 2, \dots$, соответствующее формуле (7).

При подчинении решений (10), (11) условиям защемления $\tilde{w}(0) = \tilde{w}(1) = \gamma(0) = \gamma(1) = 0$ приходим к характеристическому уравнению $k \sin k / (1 + k^2 r) - 2(1 - \cos k) = 0$, минимальный корень которого равен $k = 2\pi$. Заметим, что в случае защемления торцевых сечений при всех значениях r минимальному значению $P_{cr}^{\dot{a}}$ соответствует корень $k = 2\pi$, в то время как при шарнирном закреплении торцевых сечений $k = \pi$. Следовательно, в обоих случаях для определения m и $P_{cr}^{\dot{a}}$ получаются формулы

$$m = \frac{k^2}{1 + rk^2}, \quad P_{cr}^{\dot{a}} = \frac{Dm}{L^2}. \quad (12)$$

Принимая $k_c = 5/6$, при фиксированных геометрических и жесткостных характеристиках тест-образца $L = 25$ мм, $h = 4$ мм, $E_1 = 130$ ГПа по формуле (7) были проведены расчеты по определению критического напряжения $\sigma_{cr} = P_{cr}^e/h$ при варьировании значениями \tilde{G}_{13} и числом полуволн потери устойчивости n . Установлено, что при всех значениях \tilde{G}_{13} минимальным значениям σ_{cr} соответствует волновое число $n = 1$, а по мере уменьшения \tilde{G}_{13} наблюдается значительное сближение значений σ_{cr} при увеличении значения n . Следовательно, предельное значение сжимающего напряжения $\sigma = \sigma^*$, при достижении которого в экспериментах наблюдается разрушение образца, вполне допустимо принять за критическое напряжение $\sigma_{cr} = \sigma_1^{-*} = G_*$, соответствующее реализации чисто поперечно сдвиговой ФПУ в виду его близости к значению σ_{cr} , соответствующему реализации изгибно-сдвиговой ФПУ при $n = 1$ и $\tilde{G}_{13} = G_*$. Заметим также, что по мере уменьшения \tilde{G}_{13} и увеличения n наблюдается значительное сближение определяемых значений σ_{cr} , при $\tilde{G}_{13} = G_*$ определяемые значения σ_{cr} можно считать практически совпадающими как при шарнирном опирании, так и при защемлении торцевых сечений стержня.

Необходимо отметить, что при $w_0 = 0$ в процессе нагружения стержня во всех уравнениях, соотношениях и формулах (5), (7), (12) входящие модули попе-

речного сдвига должны равняться модулю G_0 при $\gamma_{12} = 0$. Поэтому следует указать, что для реализации чисто поперечно-сдвиговой ФПУ, возможной только при малых значениях \tilde{G}_{13} , требуется введение гипотетического предположения $w_0 \neq 0$, когда наименьшей критической может оказаться нагрузка P_{cr} , определяемая по формуле (5) при значении $\tilde{G}_{13} = G_*$. В реальных экспериментах сложное докритическое напряженное состояние в образцах с компонентами $\sigma_{11}^0 \neq 0$, $\sigma_{13}^0 \neq 0$, $\sigma_{33}^0 \neq 0$ формируется только в зонах их закрепления в захватах и на достаточно коротких участках рабочей длины L . При этом задача о нагружении стержня осевой силой P , сформулированная на основе уравнений (1) при заданных граничных условиях, накладываемых на функции w и γ , становится существенно нелинейной в силу наблюдаемой в экспериментах существенной физически нелинейной зависимости $\tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{12}(\gamma_{12})$ лишь в окрестности захватов используемых для экспериментов приспособлений. В связи с этим, укажем, что при такой более содержательной постановке рассматриваемой задачи на каждом уровне нагружения при решении линеаризованной задачи на основе уравнений (3) требуется предварительное определение величины \tilde{G}_{13} в каждом сечении стержня по накопленному значению γ_{13} с использованием аппроксимационной формулы [1]. Такая постановка и численное решение геометрически и физически нелинейной задачи по выявлению поперечно-сдвиговой формы потери устойчивости в условиях трехточечного изгиба тест-образца из волокнистого композита даны в работе [1], в которой приведены также и результаты проведенных экспериментов.

2. Решения задач о макромасштабных ФПУ при сжатии тест-образца со структурой $[0^0]_s$ на основе уточненных уравнений, имеющих высокую степень точности

В данном разделе на основе построенных ранее уравнений, имеющих более высокую степень точности в сравнении с использованными выше, рассмотрим линеаризованную задачу о возможных чисто сдвиговых и изгибно-сдвиговых формах потери устойчивости волокнистого композитного стержня при сжатии.

Предположим, что в пластине в общем случае сформировано начальное напряженное состояние, характеризующееся усилиями

$$P = T_{11}^0 = -h\sigma_{11}^0, \quad T_{33}^0 = -h\sigma_{33}^0 \quad (13)$$

и имеющее место на участках крепления тест-образцов в приспособлениях для испытаний на сжатие. Для постановки задач устойчивости в условиях докритического напряженного состояния (13) обратимся к уточненным уравнениям, построенным в двух вариантах. В первом из них при рассматриваемом виде нагружения

стержня для поперечного касательного напряжения σ_{13} и перемещений U_3, U_1 имеют место представления

$$\sigma_{13} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \tau_1, \quad U_3 = w + z\varphi, \quad (14)$$

$$U_1 = u_1 - z \left[(1 + \varphi) w_{,1} - \hat{\tau}_1 \right] - \frac{z^2}{2} (1 + \varphi) \varphi_{,1} - \frac{4z^3}{3h^2} \hat{\tau}_1, \quad \hat{\tau}_1 = \frac{\tau_1}{\tilde{G}_{13}}.$$

Уравнения, линеаризованные в окрестности напряженного состояния (13), основанные на (14) и составленные с учетом знаков усилий (13), в рассматриваемом случае разделяются на две системы. Одна из них будет иметь вид

$$f_w = \left[M_{11,1} - T_{11}^0 w_{,1} - T_{33}^0 \left(w_{,1} - \tau_1 / \tilde{G}_{13} \right) \right]_{,1} = 0, \quad (15)$$

$$f_\tau = N_{11,1} - M_{11,1} + T_{13} + T_{33}^0 \left(w_{,1} - \tau_1 / \tilde{G}_{13} \right) = 0,$$

где

$$M_{11} = -D \left(w_{,11} - \frac{4}{5\tilde{G}_{13}} \tau_{1,1} \right), \quad N_{11} = -\frac{D}{5} \left(w_{,11} - \frac{16}{21\tilde{G}_{13}} \tau_{1,1} \right), \quad T_{13} = \frac{8t}{15} \tau_1.$$

Второй вариант построенных уравнений основан на представлениях перемещений U_3, U_1 функциями следующих видов

$$U_3 = w + z\varphi, \quad U_1 = u_1 - z\gamma_1 - \frac{z^2}{2} \Psi_1 - \frac{4z^3}{3h^2} \chi_1, \quad (16)$$

в которых неизвестными являются одномерные функции $w, \varphi, u_1, \gamma_1, \Psi_1, \chi_1$. Уравнения, соответствующие (16) и линеаризованные в окрестности напряженного состояния (13), имеют вид

$$f_w = \left(\tilde{B}_{13} - T_{11}^0 \right) w_{,11} - \tilde{B}_{13} \left(\gamma_{1,1} + \frac{1}{3} \chi_{1,1} \right) = 0,$$

$$f_\gamma = \gamma_{1,11} + \frac{1}{5} \chi_{1,11} + \frac{\tilde{B}_{13}}{D} \left(w_{,1} - \frac{1}{3} \chi_1 \right) + \frac{(T_{33}^0 - \tilde{B}_{13})}{D} \gamma_1 = 0, \quad (17)$$

$$f_\chi = \gamma_{1,11} + \frac{5}{21} \chi_{1,11} + \frac{\tilde{B}_{13}}{D} \left[\frac{5}{3} (w_{,1} - \gamma_1) - \chi_1 \right] = 0.$$

Из них у первого уравнения системы (17), содержащего при критическом значении $T_{11}^* = \tilde{B}_{13}$ вырождающееся первое слагаемое, имеется решение $\gamma_1 + \chi_1/3 = const$, соответствующее потере устойчивости по чисто поперечно-сдвиговой форме в условиях продольного сжатия напряжением $\sigma_{11}^0 = T_{11}^0/h$, когда

$\sigma_{33}^0 = 0$. А в предположении $\sigma_{11}^0 = 0$, $\sigma_{33}^0 \neq 0$ из уравнений (17) следует критическое значение $T_{33}^* = 4\tilde{B}_{13}/9 = 4h\tilde{G}_{13}/9$, соответствующее существованию решения $\gamma_1 = const$, $\chi_1 = -5\gamma_1/3 = const$ с нулевой изменяемостью функций γ_1, χ_1 вдоль оси x . Оно оказалось более, чем в два раза меньше значения $T_{33}^* = h\tilde{G}_{13}$, установленного ранее при использовании менее содержательных по точности уравнений по сдвиговой модели С.П. Тимошенко.

На основе составленных уравнений (15) и (17) для случая шарнирного опирания торцевых сечений найдены точные аналитические решения задачи, рассмотренной в разделе 1. При тех же исходных данных, что и принятые выше, были проведены расчеты по определению критического напряжения $\sigma_{cr} = P_{cr}^e/h$ при варьировании значениями \tilde{G}_{13} , числом полуволн потери устойчивости n и параметра \varkappa ($t_{33}^0 = \varkappa t_{11}^0$). Выявлено, что при больших значениях \tilde{G}_{13} формирование напряжения σ_{33}^0 наряду с напряжением σ_{11}^0 вносит существенный вклад в реализацию изгибно-сдвиговой ФПУ в сторону уменьшения критического значения σ_{cr} . Оказалось, что результаты, полученные на основе использованных уравнений (15) и (17), принципиально различаются лишь при $n \rightarrow \infty$ и малых значениях \tilde{G}_{13} . Из них уравнения (17) при $\tilde{G}_{13} \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ приводят к значениям $\sigma_{cr} \rightarrow 0$, в то время как уравнения (15) - к конечному значению $\sigma_{cr} \neq 0$. Установлено, что при $\varkappa = 0$ и $n = 1$ имеет место практически полное совпадение результатов, полученных на основе трех использованных вариантов теории. Однако оно имеет место только для тест-образцов средней и малой относительной толщины $h_0 = h/L$ и при коэффициенте поперечного сдвига $k_c = 5/6$ (в формуле $\tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} h$), входящего в соотношения упругости по теории типа С.П. Тимошенко.

3. Результаты испытаний тест-образцов из композитов ЭЛУР-П и HSE 180 REM со структурами $[0^\circ]_{30}$ на сжатие. Обратная задача определения касательного модуля поперечного сдвига

Для определения физико-механических характеристик волокнистых композитов на сжатие согласно методике [2] также были изготовлены образцы со структурой $[0^\circ]_{30}$ из углеленты ЭЛУР-П на полимерной основе. Они также имели среднюю толщину $h = 4,1$ мм, длину рабочей части $L = 25$ мм и ширину $b = 9,8$ мм. Результаты проведенных испытаний сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Номер образца	b (mm)	h (mm)	E_1^- (GPa)	bP^* (kN)	σ_1^{+*} (MPa)	\tilde{G}_{13} (MPa) при $k = \pi$	\tilde{G}_{13} (MPa) при $k = 2\pi$
1	9,7	3,8	107,4	18,84	516,3	836,7 (697,2)	662,5 (552,1)
2	9,8	4,1	93,3	22,46	555,7	906,1 (755,1)	714,0 (595,0)
3	9,8	4,1	99,7	20,76	513,2	801,5 (667,9)	653,7 (544,8)

Среднее значение σ_1^{+*} составило $\sigma_1^{+*} = 529,3$ МПа, что в 1,38 раза меньше найденного в [2] предела прочности на растяжение σ_1^{+*} . Среднее значение модуля упругости $E_1^+ = 104,7$ МПа, определённого при растяжении, оказалось в 1,09 раза больше модуля упругости $E_1^- = 96,3$ МПа, определённого при сжатии.

Некоторые результаты экспериментальных исследований, проведенных на тест-образцах, изготовленных из препрега HSE 180 REM, приведены в таблицах 2 ($h = 4,1$ мм; $L = 25$ мм) и 3 ($h = 8,8$ мм; $L = 20$ мм).

Таблица 2

Номер образца	b (mm)	h (mm)	E_1^- (GPa)	bP^* (kN)	σ_1^{+*} (MPa)	\tilde{G}_{13} (MPa) при $k = \pi$	\tilde{G}_{13} (MPa) при $k = 2\pi$
1	10,0	4,1	107,2	28,71	702,42	1197,9 (998,2)	910,3 (758,6)
2	10,2	4,2	121,5	35,31	835,84	1440,4 (1200,3)	1085,4 (904,5)
3	10,0	4,1	116,6	29,76	724,49	1204,5 (1003,8)	934,4 (778,7)
4	10,0	4,1	110,0	34,59	843,80	1542,4 (1285,3)	1107,7 (923,1)
5	10,0	4,2	108,5	38,64	929,16	1791,9 (1493,2)	1231,3 (1026,1)
6	10,0	4,2	114,6	31,71	762,31	1292,1 (1076,7)	986,8 (822,3)
Среднее	10,0	4,1	112,7	33,12	799,67		

Таблица 3

Номер образца	b (mm)	h (mm)	E_1^- (GPa)	bP^* (kN)	σ_1^{*-} (MPa)	\tilde{G}_{13} (MPa) при $k = \pi$	\tilde{G}_{13} (MPa) при $k = 2\pi$
1	9,0	9,6	122,75	41,29	477,8	585,4 (487,9)	576,3 (480,3)
2	9,0	9,5	113,84	36,63	428,8	525,4 (437,8)	517,2 (431,0)
3	8,5	9,3	156,27	37,07	471,1	575,1 (479,3)	567,8 (473,1)
Среднее	8,8	9,5	130,95	38,33	459,2	562,0 (468,3)	553,4 (461,5)

Заметим, что в (12) вторую формулу можно представить в виде

$$\tilde{G}_{13} = \frac{E_1 h_0 k^2 L^2 P_{cr}}{12k_c (Dk^2 - L^2 P_{cr})}, \quad (18)$$

где $k = \pi$ при шарнирном опирании и $k = 2\pi$ при защемлении торцевых сечений тест-образцов. Если в соответствии с данными таблиц 1–3 принять значения $P_{cr} = P^*$, $E_1 = E_1^-$, $D = E_1^- h^3 / 12$, то при приведенных в таблицах значениях h и b по формуле (18) можно определить значения \tilde{G}_{13} . Найденные их значения приведены в двух последних столбцах таблиц 1–3. В них значения \tilde{G}_{13} в круглых скобках соответствуют коэффициенту $k_c = 1$, а вне скобок – коэффициенту $k_c = 5/6$. Заметим, что наиболее близкое совпадение значений \tilde{G}_{13} и σ_1^{*-} имеет место в случае защемления торцевых сечений тест-образцов при $k_c = 1$. Данный вывод подтверждает используемое в статье предположение о том, что определяемое при испытаниях значение σ_1^{*-} с большой степенью точности может быть принято за значение касательного модуля поперечного сдвига \tilde{G}_{13} , при достижении которого в окрестности торцевого сечения тест-образца происходит его разрушение по причине реализации не чисто поперечно-сдвиговой, а близкой к ней изгибно-сдвиговой ФПУ как при большой ($h_0 \approx 0,5$, табл.3), так и средней ($h_0 \approx 0,16$, табл.2) относительной толщине. Заметим, что при длине образцов $L = 25$ мм и $h = 4,1$ мм для обоих рассмотренных типов композитов разница

между \tilde{G}_{13} и σ_1^{-*} становится более существенной (но не более 7-8%). Как и следовало ожидать и показывает проведенный анализ приведенных результатов, у образцов с параметром $h_0 = 0,16$ при шарнирном опирании торцевых сечений (не имеющем места в экспериментах) изгибно-сдвиговая ФПУ может реализоваться при значительно больших значениях \tilde{G}_{13} , чем при защемлении.

Заключение

Сформулированные выше выводы вполне объяснимы и допускают достаточно полное теоретическое обоснование. При сжатии тест-образцов из композитов рассматриваемого класса наиболее ей адекватной является расчетная схема, в которой торцевые сечения принимаются защемленными. При этом, как следует из анализа полученных результатов, уравнения, соответствующие использованию аппроксимаций (14), требуют постановки граничных условий $\tau_1(0) = \tau_1(L) = 0$, что соответствует переходу от модели (14) к классической модели Кирхгофа-Лява. Однако такой вид граничных условий не соответствует реальному процессу деформирования при переходе в возмущенное состояние. В то же время при использовании уравнений (17), основанных на аппроксимациях (16), в сечениях $x=0$, $x=L$ при их защемлении требуется формулировка условий $\gamma_1(0) = \gamma_1(L) = 0$, $\chi_1(0) = \chi_1(L) = 0$. В результате их использования в решении задачи о возмущенном равновесном состоянии в окрестности защемленных сечений имеет место переход к известной и используемой в работе кинематической модели С.П. Тимошенко с уравнениями равновесия (1). В них при вычислении жесткостей \tilde{B}_{13} и \hat{B}_{13} коэффициент поперечного сдвига k_c близок к 1, а не к $5/6$. Наиболее близкое к такому НДС с коэффициентом $k_c = 1$ оказалось НДС тест-образцов с параметром $h_0 \approx 0,5$. Для них экспериментальные значения σ_1^{-*} (пятый столбец табл.3) практически совпадают со значениями \tilde{G}_{13} , приведенными в скобках последнего столбца. Поэтому допустимо считать, что у таких образцов в возмущенном деформированном состоянии, являющемся изгибно-сдвиговым, главной частью деформаций являются поперечно-сдвиговые составляющие. В то же время у образцов с параметром $h_0 = 0,16$ приведенные в последнем столбце табл.2 значения \tilde{G}_{13} (заключенные в скобки) оказались заметно больше аналогичных значений табл.3. Приведенные в таблице экспериментальные значения σ_1^{-*} также оказались заметно больше, чем аналогичные значения табл.3. Отсюда следует, что в формуле (12) параметр $r = E_1 h_0^2 / (12 \tilde{G}_{13})$ в силу малости h_0 вносит гораздо меньший вклад в значение P_{cr}^b , а реализующаяся в экспериментах

ФПУ оказывается преимущественно изгибной, имеющей место при гораздо больших формирующихся в образцах значениях \tilde{G}_{13} , чем в образцах с параметром $h_0 \approx 0,5$.

Исследование выполнено за счет грантов Российского научного фонда (проекты № 19-19-00059, № 19-79-10018) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00073).

Литература

1. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A., Makarov M. V., Tarlakovskii D. V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests// *Z Angew Math Mech.* 2019;99:e201800063. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800063>

2. *Paimushin, V.N., Kholmogorov, S.A.* Physical-Mechanical Properties of a Fiber-Reinforced Composite Based on an ELUR-P Carbon Tape and XT-118 Binder // *Mechanics of Composite Materials.* – 2018. – V.54. – №1. – pp. 2-12. DOI: 10.1007/s11029-018-9712-1.

УТОЧНЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ПЛАСТИН ИЗ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Паймушин В.Н.^{1,2}, Макаров М.В.^{1,2}, Полякова Н.В.¹, Шишов М.А.¹

(¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань)

На основе известных подходов и в развитие полученных ранее результатов предложены два варианта уточненных математических моделей для описания процесса нелинейного деформирования по цилиндрической форме пластин из волокнистых композитов. Они главным образом предназначены для выявления и исследования классических (изгибных) и неклассических (сдвиговых и изгибно-сдвиговых) форм потери устойчивости (ФПУ) композитных пластин при тех или иных видах нагружения. Первый из них развивает модели типа Немировского-Редди и основан на аппроксимации по толщине пластины линейным законом для прогиба и кубическим законом для поперечных касательных напряжений при удовлетворении в точках граничных (лицевых) плоскостей граничным условиям по касательным усилиям. Во втором варианте, в отличие от первого, в принятом для тангенциальных перемещений полиноме третьей степени по поперечной координате соответствующие коэффициенты разложения считаются независимыми. Кинематические соотношения для определения компонент деформаций

построены на основе предложенных ранее непротиворечивых геометрически нелинейных соотношений теории упругости с сохранением слагаемых, позволяющих выявить исследуемые ФПУ пластины. Физически нелинейное поведение материала учитывается в соотношениях для поперечных касательных напряжений. Рассмотрены вопросы корректности построенных уравнений при формулировке тех или иных условий закрепления и нагружения торцевых сечений пластины. Показано, что в решениях, определяемых на основе уравнений первого варианта, при удовлетворении граничным условиям защемления поперечного сечения в его окрестности осуществляется переход к решению по классической модели Кирхгофа-Лява, чего не наблюдается в решениях на основе уравнений второго варианта теории. Данный вывод сформулирован исходя из анализа точных аналитических решений линейной задачи о поперечном изгибе по цилиндрической форме консольно закрепленной пластины.

Рассмотрим пластину толщиной t , отнесенную к ортогональной декартовой системе координат x_1, x_2, z , нормально связанную со срединной плоскостью $z=0$ и обозначим через U_1, U_2, U_3 компоненты вектора перемещений $U = U_i e_i + U_3 m$, где e_i, m ($i=1, 2$) – единичные орты выбранной системы координат. При конечных перемещениях и малых деформациях ограничимся рассмотрением задачи об изгибе пластины по цилиндрической форме, используя для вычисления компонент деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ и $2\varepsilon_{13}$ кинематические соотношения в непротиворечивом квадратичном приближении [1]

$$\varepsilon_1 = U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{3,1}^2, \quad \varepsilon_3 = U_{3,z} + \frac{1}{2} U_{1,z}^2, \quad (1)$$

$$2\varepsilon_{13} = U_{1,z} + U_{3,1} + U_{3,z} U_{3,1}.$$

Считаем, что к лицевым плоскостям пластины $z = \pm t/2$ приложены поверхностные усилия $p_1^\pm = p_1^+ e_1 + p_3^+ m$, к торцевым сечениям $x_1 = 0$, $x_2 = a$ – усилия $p_1^* = p_{11}^* e_1 + p_{13}^* m$. Для сведения двумерной задачи к одномерной для прогиба U_3 примем линейную аппроксимацию в направлении z

$$U_3 = w + z\varphi, \quad (2)$$

а для поперечного касательного напряжения, связанного с соответствующей сдвиговой деформацией $2\varepsilon_{13}$ физически нелинейной зависимостью [2]

$\sigma_{13} = 2\hat{G}_{13}\varepsilon_{13}$, – квадратичную аппроксимацию вида (\hat{G}_{13} – секущий модуль упругости)

$$\sigma_{13} = \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) \tau_1 + \left(\frac{z}{t} + \frac{2z^2}{t^2}\right) p_1^+ + \left(-\frac{z}{t} + \frac{2z^2}{t^2}\right) p_1^-, \quad (3)$$

из которой следует, что

$$\tau_1 = \sigma_{13}(z=0), \quad p_1^\pm = \sigma_{13}(z = \pm t/2). \quad (4)$$

При использовании (2), (3) и учете (4) из последнего соотношения (1) следует выражение

$$U_1 = u_1 - z \left[(1 + \varphi) w_{,1} - \hat{\tau}_1 \right] - \frac{z^2}{2} \left[(1 + \varphi) \varphi_{,1} - \frac{\hat{p}_1^- - \hat{p}_1^+}{t} \right] - \\ - \frac{4z^3}{3t^2} \left(\hat{\tau}_1 - \frac{\hat{p}_1^- + \hat{p}_1^+}{2} \right) = u_1 - z\gamma_1 - \frac{z^2}{2} \psi_1 - \frac{4z^3}{3t^2} \chi_1, \quad (5)$$

в котором введены обозначения

$$\hat{\tau}_1 = \frac{\tau}{\hat{G}_{13}^0(z=0)}, \quad \hat{p}_1^+ = \frac{p_1^+}{\hat{G}_{13}^+}, \quad \hat{p}_1^- = \frac{p_1^-}{\hat{G}_{13}^-}, \quad (6)$$

$$\hat{G}_{13}^0 = \hat{G}_{13}(z=0), \quad \hat{G}_{13}^\pm = \hat{G}_{13}(z = \pm t/2), \quad (7)$$

а входящие в него неизвестные функции w, φ, u_1, τ_1 первого варианта и $w, \varphi, u_1, \gamma_1, \psi_1, \chi_1$ второго варианта теории связаны зависимостями

$$\gamma_1 = (1 + \varphi) w_{,1} - \hat{\tau}_1, \quad \psi_1 = (1 + \varphi) \varphi_{,1} + \frac{\hat{p}_1^- - p_1^+}{t}, \quad \chi_1 = \hat{\tau}_1 - \frac{\hat{p}_1^- + p_1^+}{2}. \quad (8)$$

Исходя из (1)–(3), (5) для определения компонент деформаций можно получить соотношения, составленные в приближении

$$\varepsilon_3 = \varphi + \frac{1}{2} \gamma_1^2 = \varphi + \frac{1}{2} \left[(1 + \varphi) w_{,1} - \hat{\tau}_1 \right]^2; \quad (9)$$

$$\varepsilon_1 = u_{,1} + \frac{1}{2} w_{,1}^2 - z(\gamma_{1,1} - w_{,1} \varphi_{,1}) - \frac{z^2}{2} (\psi_{1,1} - \varphi_{,1}^2) - \\ - \frac{4z^3}{3t^2} \chi_{1,1} = u_{,1} + \frac{1}{2} w_{,1}^2 - z \left[(1 + \varphi) w_{,11} - \hat{\tau}_{1,1} \right] - \\ - \frac{z^2}{2} \left[(1 + \varphi) \varphi_{,11} + \frac{1}{t} (\hat{p}_1^- - \hat{p}_1^+)_{,1} \right] - \frac{4z^3}{3t^2} \left[\hat{\tau}_{1,1} - \frac{1}{2} (\hat{p}_1^- + \hat{p}_1^+)_{,1} \right], \quad (10)$$

$$2\varepsilon_{13} = \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right) \hat{\tau}_1 + \left(\frac{z}{t} + \frac{2z^2}{t^2} \right) \hat{p}_1^+ + \left(-\frac{z}{t} + \frac{2z^2}{t^2} \right) \hat{p}_1^- \quad (11)$$

для первого варианта теории и

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_{,1} + \frac{1}{2} w_{,1}^2 - z(\gamma_{,1} - w_{,1}\varphi_{,1}) - \frac{z^2}{2}(\psi_{,1} - \varphi_{,1}^2) - \frac{4z^3}{3t^2} \chi_{,1}, \\ 2\varepsilon_{13} &= w_{,1} - \gamma_1 + z(\varphi_{,1} - \psi_1) - \frac{4z^2}{t^2} \chi_1, \quad \varepsilon_{33} = \varphi + \frac{1}{2} \gamma_1^2 \end{aligned} \quad (12)$$

для второго варианта теории.

Путем введения в рассмотрение внутренних усилий и моментов

$$\begin{aligned} T_{13} &= \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{13} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) dz, \quad T_{33} = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{33} dz, \quad T_{11} = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{11} dz, \\ M_{11} &= \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{11} z dz, \quad R_{11} = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{11} z^2 dz, \quad N_{11} = \frac{4}{3t^2} \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{11} z^3 dz, \end{aligned} \quad (13)$$

приведенных к срединной плоскости пластины, при использовании соотношений (2), (5)–(7), (9)–(11) и вариационного уравнения принципа возможных перемещений Лагранжа выведена система четырех дифференциальных уравнений равновесия первого варианта теории, в котором неизвестными являются функции w, φ, u_1, τ_1 . Аналогичным образом, при введении в рассмотрение трех внутренних усилий и моментов

$$T_{13} = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{13} dz, \quad M_{13} = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{13} z dz, \quad R_{13} = \frac{4}{t^2} \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{13} z^2 dz,$$

вместо первого, содержащегося в (13), выведена система шести дифференциальных уравнений равновесия второго варианта теории, в котором неизвестными являются функции $w, \varphi, u_1, \gamma_1, \psi_1, \chi_1$.

Следует отметить, что вопросы формулировки граничных условий, соответствующих используемым моделям деформирования и тем или иным условиям закрепления и нагружения торцевых сечений, являются нетривиальными. Изучению этих вопросов для уточненных вариантов теории пластин посвящены, в частности, статьи А.П. Янковского. Различие в граничных условиях, формулируемых для предлагаемых вариантов теории, имеет место, в частности, для стержня, защемленного в сечении $x_1 = 0$ и нагруженного по длине равномерно распределенной поперечной нагрузкой (рис. 1а).

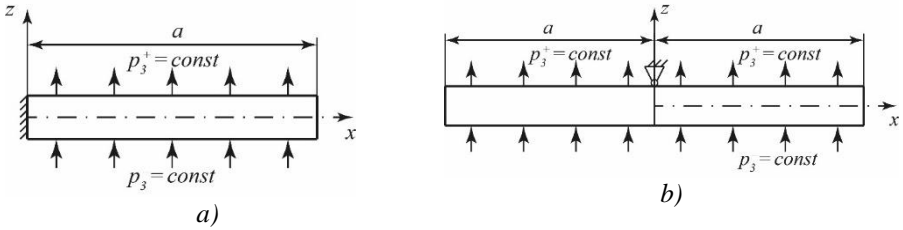


Рис.1. Расчетные схемы при изгибе

В сечении $x_1 = 0$, очевидно, допустимо сформулировать кинематические граничные условия $u = w = \varphi = 0$, $w_{,1} - \hat{\tau}_1 = 0$, $\varphi_{,1} = 0$, $\chi_1 = \hat{\tau}_1 = 0$ по первому варианту теории и условия $u = w = \varphi = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\psi_1 = 0$, $\chi_1 = 0$ по второму варианту теории. Заметим, что постановка условия $\hat{\tau}_1 = 0$ соответствует переходу в сечении $x_1 = 0$ к модели Кирхгофа-Лява со всеми вытекающими отсюда последствиями.

На основе выведенных уравнений рассмотрена линейная задача изгиба по цилиндрической форме консольно закрепленной пластины равномерно распределенной по длине поперечной нагрузкой (рис1а, здесь и далее $x_1 = x$). Для стержня с геометрическими характеристиками $t = 10$ мм, $a = 100$ мм, выполненного из волокнистого композита ЭЛУР-П с упругими характеристиками $E_1 = 100$ ГПа, $G_{13} = 1.5$ ГПа, результаты расчетов, полученные на основе найденных решений, приведены на рис. 2-5. Из них кривые под номером 1 (обозначенные круглым маркером) соответствуют решению по классической теории стержней; штрихпунктирные линии 2 – решению на основе уравнений первого варианта при граничном условии $N_{11}(x=0) = 0$; штриховые линии 3 – решению на основе уравнений первого варианта при граничном условии $\hat{\tau}_1(x=0) = 0$; сплошные линии 4 – решению на основе уравнений второго варианта теории.

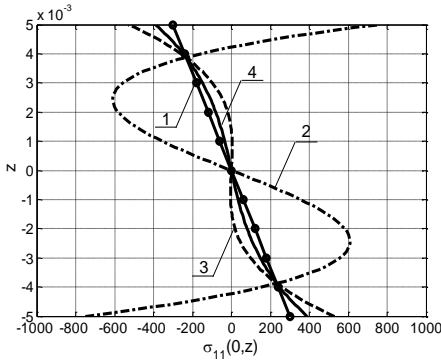


Рис. 2. Распределение напряжений σ_{11} по толщине в сечении $x = 0$

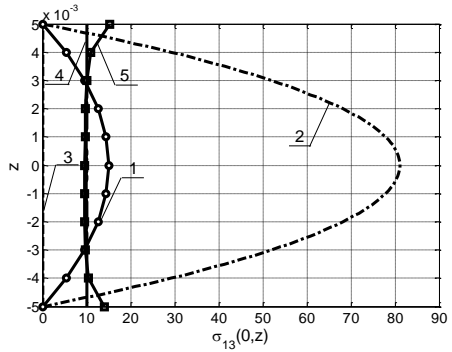


Рис. 3. Распределение напряжений σ_{13} по толщине в сечении $x = 0$

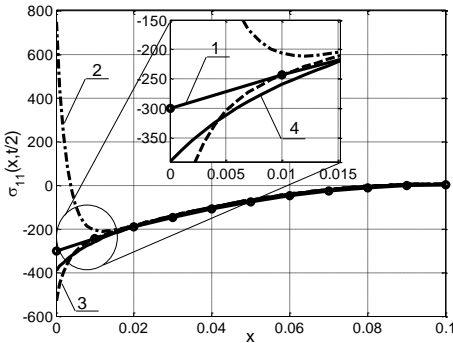


Рис. 4. Распределение напряжений σ_{11} по длине при $z = t / 2$

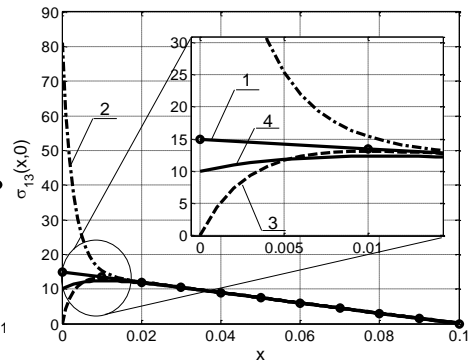


Рис. 5. Распределение напряжений σ_{13} по длине при $z = 0$

На рис. 2 и 3 представлены распределения нормальных ($\sigma_{11}(0, z)$) и касательных ($\sigma_{13}(0, z)$) напряжений по высоте поперечного сечения $x = 0$. Видно (рис. 3), что решение при граничном условии $N_{11}(x = 0) = 0$ (кривая 2) приводит к значительному завышению значений касательных напряжений в заделке в сравнении с другими решениями; решение на основе второго варианта теории (кривая 4) приводит к постоянному по z значению поперечного касательного напряжения, а при граничном условии $\hat{\tau}_1(x = 0) = 0$, что соответствует переходу от уточненной модели первого варианта к классической модели Кирхгофа-Лява в сечении $z = 0$, приходим к решению $\hat{\tau}_1 = 0$. В то же время, как легко можно убедиться,

равновесие пластины в целом в проекции на вертикальную ось z удовлетворяется выполнением равенства для перерезывающей силы по классической теории $Q_1(x=0) = p_3 a$. Другими словами при использовании уравнений, основанных на соотношениях (2), (3), (5) постановка для них граничного условия $\tau_1(x=0) = 0$ в сечении $x=0$ приводит к переходу от уточненной модели к классической со всеми отсюда вытекающими последствиями. В связи с этим следует отметить достоинство модели второго варианта, при использовании которой постановка граничного условия $\chi_1(x=0) = 0$ соответствует как сохранению плоскостности сечения $x=0$ в процессе деформирования, так и переходу в данном сечении от используемой модели к известной уточненной модели С. П. Тимошенко. На рис. 3 кривая под номером 5 (обозначенная квадратным маркером) соответствует решению, найденному на основе конечно-элементного комплекса ANSYS.

Рис. 4, 5 иллюстрируют распределения нормальных напряжений $\sigma_{11}(x, t/2)$ и поперечных касательных напряжений $\sigma_{13}(x, 0)$ по длине. Видно (рис. 2-5), что решение, соответствующее кривой 2, значительно отличается от остальных в окрестности защемления, а решение, соответствующее кривой 4, является наиболее близким к решению по классической теории стержней. В зоне заделки ($0 < x < 1.5t$) проявляются различные краевые эффекты, которые затухают на расстоянии характерного размера поперечного сечения стержня (примерно $1.5t$), что согласуется с известным принципом Сен-Венана. Однако эти краевые эффекты имеют разную природу возникновения: в решении, соответствующем кривой 2, они связаны с постановкой граничного условия $N_{11}(x=0) = 0$ для выведенных уравнений, не имеющего места в реальности, в решении, соответствующем кривой 3, - граничного условия $\tau_1(x=0) = 0$ вместо условия $N_{11}(x=0) = 0$ для уравнений первого варианта теории, так же не имеющего места в реальности.

Установлено, что наибольшего значения поперечные касательные напряжения достигают не в сечении $x=0$, а в его окрестности (в зоне краевого эффекта).

Предложенные уточненные варианты теории главным образом предназначены для исследования и выявления неклассических форм потери устойчивости и разрушения композитных элементов конструкций при формировании в них мембранных сжимающих усилий и изгибного напряженно-деформированного состояния (например, [3]).

Исследование выполнено за счет грантов Российского научного фонда (проекты № 19-19-00058, № 19-79-10018) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00073).

Литература

1. *Paimushin V.N., Shalashilin, V.I.* The relations of deformation theory in the quadratic approximation and the problems of constructing improved versions of the geometrically non-linear theory of laminated structures// Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2005. – Vol. 69. – №5. – P. 773-791.
2. *Paimushin V.N., Kholmogorov, S.A.* Physical-Mechanical Properties of a Fiber-Reinforced Composite Based on an ELUR-P Carbon Tape and XT-118 Binder // Mechanics of Composite Materials. – 2018. – V.54. – №1. – pp. 2-12. DOI: 10.1007/s11029-018-9712-1.
3. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A., Makarov M. V., Tarlavovskii D. V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests// Z Angew Math Mech. 2019;99:e201800063. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800063>

ИССЛЕДОВАНИЕ СДВИГОВОЙ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНОГО ВНЕШНЕГО СЛОЯ ТРЕХСЛОЙНОГО ТЕСТ- ОБРАЗЦА ПРИ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ СУММ

Паймушин В.Н.^{1,2}, Макаров М.В.^{1,2}, Холмогоров С.А.¹

⁽¹⁾Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань, ⁽²⁾Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань)

Сформулирована геометрически и физически нелинейная задача о четырехточечном изгибе трехслойного тест-образца с трансверсально-мягким наполнителем и внешними слоями из волокнистых композитов, характеризующихся нелинейной зависимостью между поперечными касательными напряжениями и соответствующими сдвиговыми деформациями. Постановка задачи дана с учетом контактного взаимодействия внешних несущих слоев с опорными и нагружающим роликами, разработан численный метод ее решения на основе метода конечных сумм (метода интегрирующих матриц). Используются уравнения, основанные на уточненной кинематической модели С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия для внешних слоев и уравнений теории упругости для наполнителя, упрощенных в рамках модели трансверсально-мягкого слоя. Последние допускают интегрирование по поперечной координате при введении в качестве неизвестных поперечных касательных напряжений в наполнителе, постоянных по толщине. Проведено исследование докритического и закритического поведения тест-образца, основанное на методе продолжения решения по параметру, когда в качестве параметра выбирается деформация поперечного сдвига в нагружаемом слое. Показано, что при испытаниях на четырехточечный изгиб тест-образцов

рассматриваемого класса реализуется поперечно-сдвиговая форма потери устойчивости внешнего слоя в окрестности нагружающего ролика, когда в некоторой точке этой зоны максимальное значение сжимающего напряжения в осевом направлении становится равным значению касательного модуля поперечного сдвига материала внешнего слоя.

1. Введение

Наиболее рациональное использование композитных материалов (КМ) возможно в элементах конструкций трехслойной структуры. Их внешние (несущие) слои, изготавливаемых из КМ, имеют, как правило, малую поперечную сдвиговую жесткость. Если в них в процессе нагружения формируются напряжения сжатия, то одним из механизмов их разрушения является потеря устойчивости по поперечно-сдвиговой форме. В механике композитов теоретические исследования такой формы потери устойчивости (ФПУ), реализующейся в стандартных тест-образцах при сжатии, проводились в разных приближениях во многих работах [1,2 и др.]. В соответствии с результатами этих работ для выявления описанной ФПУ, реализация которой возможна и в трехслойных конструкциях с несущими слоями из волокнистых композитов, при построении соответствующей теории требуется учет деформаций поперечных сдвигов в несущих слоях. Такие уточненные геометрически и физически нелинейные уравнения теории трехслойных пластин и оболочек с внешними жесткими слоями из волокнистых композитов и средним трансверсально-мягким слоем, были построены в работе [3].

2. Постановка задачи

Испытания специальных тест-образцов на четырехточечный изгиб по схеме, показанной на рис.1, являются одним из видов экспериментальных исследований трехслойных элементов конструкций с внешними жесткими слоями из волокнистых композитов.

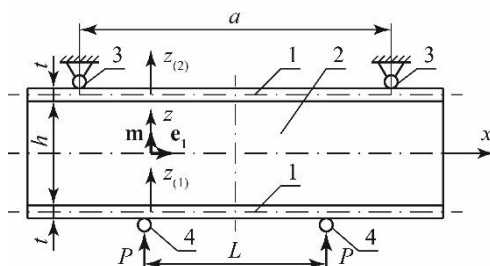


Рис. 1. Схема испытаний трехслойного тест-образца на четырехточечный изгиб

Указанные испытания проводятся, как правило, с целью определения значения предельного напряжения сжатия, формирующегося в верхнем несущем слое в пределах участка длиной L рабочей длины a тест-образца, при достижении которого происходит разрушение указанного слоя. Можно предположить, что одной из причин такого разрушения является потеря устойчивости сжатого несущего слоя по одной из возможных форм, классификация которых дана в работах [4,5]. Как будет показано ниже, использование уравнений, построенных в работе [3], позволяет выявить как изгибные и изгибно-сдвиговые, так и чисто сдвиговые ФПУ нижнего несущего слоя тест-образца, находящегося в условиях сжатия при его четырехточечном изгибе по схеме рис.1.

В соответствии с работой [3] для описания механики деформирования несущих слоев при слабом и среднем изгибах пластины принимается уточненная кинематическая модель С.П. Тимошенко $U^{z(k)} = u^{(k)}e_1 + w^{(k)}m + z_{(k)}(\gamma^{(k)}e_1 + \varphi^{(k)}m)$, а для заполнителя – модель трансверсально-мягкого слоя. После интегрирования по поперечной координате z упрощенных уравнений теории упругости, записываемых для заполнителя, и введения в рассмотрение неизвестной функции q , в работе [3] выведены соответствующие принятой модели уравнения равновесия и кинематическое условие сопряжения внешних несущих слоев с заполнителем. При четырехточечном изгибе пластины по цилиндрической форме они имеют вид ($\delta_{(1)} = -\delta_{(2)} = 1$)

$$\begin{aligned} T_{(k),x}^{11} + \delta_{(k)}q &= 0, \quad \left(T_{(k)}^{13} - T_{(k)}^{11}w_{,x}^{(k)} + hq/2 \right)_{,x} + \delta_{(k)}\sigma_{33}^0 + X_{(k)}^3 = 0, \\ M_{(k),x}^{11} - T_{(k)}^{13} + tq/2 &= 0, \\ \left(M_{(k)}^{13} + \delta_{(k)}htq/4 \right)_{,x} - T_{(k)}^{33} + \sigma_{33}^0 t/2 - \delta_{(k)}X_{(k)}^3 t/2 &= 0, \\ u^{(2)} - u^{(1)} - (\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)})t/2 + (w_{,x}^{(1)} + w_{,x}^{(2)})h/2 + (\varphi_{,x}^{(1)} - \varphi_{,x}^{(2)})ht/4 - \\ - hq/G_{13}^0 + q_{,xx}h^3/(12E_3^0) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где при линейно упругом поведении материала внешнего слоя в направлениях x , z и физически нелинейной зависимости между касательным напряжением $\sigma_{13}^{(k)}$ и соответствующей сдвиговой деформацией $2\varepsilon_{13}^{(k)}$ введенные в рассмотрение внутренние усилия и моменты и искомые функции $u^{(k)}$, $w^{(k)}$, $\gamma^{(k)}$, $\varphi^{(k)}$ связаны зависимостями

$$\begin{aligned}
T_{(k)}^{11} &= B_1 \left(u_{,x}^{(k)} + (w_{,x}^{(k)})^2 / 2 + v_{31} \varphi^{(k)} \right), \quad T_{(k)}^{33} = B_3 \left(v_{13} (u_{,x}^{(k)} + (w_{,x}^{(k)})^2 / 2) + \varphi^{(k)} \right), \\
T_{(k)}^{13} &= B_{13} (w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)}), \quad \sigma_{33}^0 = \left(w^{(2)} - w^{(1)} - t(\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}) / 2 \right) E_3^0 / h, \\
M_{(k)}^{11} &= D_1 \gamma_{,x}^{(k)}, \quad M_{(k)}^{13} = D_{13} \varphi_{,x}^{(k)}, \quad B_1 = E_1 t / (1 - \nu_{13} \nu_{31}), \quad B_3 = E_3 t / (1 - \nu_{13} \nu_{31}), \\
B_{13} &= G_{13} t, \quad D_1 = B_1 t^2 / 12, \quad D_{13} = B_{13} t^2 / 12.
\end{aligned}$$

Для уравнений (1) при $x = -l, l$ сформулированы граничные условия для свободных краев ($2l$ - длина пластины)

$$\begin{aligned}
T_{(k)}^{11}(x) = 0, \quad M_{(k)}^{11}(x) = 0, \quad \left(M_{(k)}^{13} + \delta_{(k)} qht / 4 \right)(x) = 0, \quad q(x) = 0, \\
\left(T_{(k)}^{13} - T_{(k)}^{11} w_{,x}^{(k)} + hq / 2 \right)(x) = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

при $x = 0$ - условия симметрии относительно центрального сечения, а при $x = a/2$ - условие в виде равенства нулю поперечного перемещения верхнего несущего слоя в центре опорного ролика:

$$\begin{aligned}
u^{(k)}(0) = 0, \quad \gamma^{(k)}(0) = 0, \quad \left(M_{(k)}^{13} + \delta_{(k)} htq / 4 \right)(0) = 0, \quad q(0) = 0, \\
\left(T_{(k)}^{13} - T_{(k)}^{11} w_{,x}^{(k)} + hq / 2 \right)(0) = 0, \quad w^{(2)}(a/2) + \varphi^{(2)}(a/2)t / 2 = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Для моделирования внешнего нагружения (рис.1) распределенная нагрузка $X_{(1)}^3$, приложенная к нижнему слою на участке контакта нагружающего ролика с внешним слоем, задается функцией косинуса с амплитудным значением p . Для моделирования контактного взаимодействия опоры и верхнего несущего слоя в опорном сечении $x = a/2$ задавалось условие в виде последнего уравнения системы (3), а неизвестная реакция от опорного ролика $X_{(2)}^3$, аппроксимировалась функцией косинуса с амплитудным значением p_z , которое подлежит определению из решения задачи.

3. Численный метод решения сформулированной задачи

Для приближенного решения сформулированной краевой задачи (1)–(3) использовался метод конечных сумм (метод интегрирующих матриц) [6, 7]. В соответствии с этим методом исходные дифференциальные уравнения сведem к интегральным уравнениям типа Вольтерра второго рода с дополнительными соотношениями для определения неизвестных констант интегрирования. Такое сведение проводится путем интегрирования уравнений (1) и удовлетворения условиям (2)–(3). Заметим, что исходная краевая задача имеет вид дифференциальной задачи второго порядка, в то время как интегральные уравнения будут содержать

лишь производные искомым функций. В работе [7] предложен метод коллокаций по гауссовским узлам и способ построения интегрирующих матриц, а в работах [8, 9] подробно описано конструктивное применение метода интегрирующих матриц в варианте [7] для задач теории пластин и оболочек. Поэтому ограничимся лишь окончательной дискретной формулировкой задачи в операторном виде, которая получается в результате замены входящих в задачу интегральных операторов на интегрирующие матрицы: $A(U) = A_1U + A_2(U) = F$, где

$$U = (w_{,x}^{(1)}, w_{,x}^{(2)}, u_{,x}^{(1)}, u_{,x}^{(2)}, q_{,x}, w_l^{(1)}, w_l^{(2)}, \varphi_l^{(1)}, \varphi_l^{(2)}, q_{a,1}, p_z) \in H_h^{x5} \times R^{x6},$$

A_1 - линейный, A_2 - нелинейный операторы; вектор-функция правых частей F зависит только от функции поперечной нагрузки $X_{(1)}^3(p)$, приложенной к нижнему несущему слою.

В работах [10, 11] были проведены натурные эксперименты с целью определения модуля сдвига волокнистых композитных материалов, используемых для несущих слоев трехслойной пластины. В результате проведенных исследований были получены осредненные экспериментальные зависимости $\sigma_{13} = G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)})2\varepsilon_{13}^{(k)}$ касательных напряжений от сдвиговых деформаций, на основе которых построены зависимости секущего модуля поперечного сдвига $G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)})$ от соответствующих деформаций сдвига (рис. 2). Последние зависимости в используемой математической модели деформирования входят как слагаемые, учитывающиеся в виде физически нелинейной зависимости $G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)}) = G_{13}(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)})$ при кусочно-линейной интерполяции экспериментальной зависимости $G_{13}(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)})$, полученной в работе [11].

Описанный численный метод решения сформулированной нелинейной задачи реализован на основе модифицированного итерационного процесса Ньютона

$$A'_{(n)}(U^{(n)})(U^{(n+1)} - U^{(n)}) + (A_1^{(n)} + A_2^{(n)})U^{(n)} = F, \quad (4)$$

Нелинейная зависимость модуля поперечного сдвига G_{13} от величины сдвиговой деформации $2\varepsilon_{13}^{(k)} = w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)}$, полученной экспериментальным методом в работе [11], входит в задачу как зависимость операторов $A'_{(n)}$, $A_1^{(n)}$, $A_2^{(n)}$ от $U^{(n)}$, где $A_1^{(0)}$ $U^{(0)}$ – заданное начальное приближение, т.е. на каждом n -ом итерационном шаге приходится заново вычислять матрицу жесткости в зависимости от n -го приближения решения $(U^{(n)}, (2\varepsilon_{13}^{(k)})^{(n)})$; $A'_{(n)}(U^{(n)})\Delta U$ является дифференциалом оператора $A^{(n)}$ в точке $U^{(n)}$.

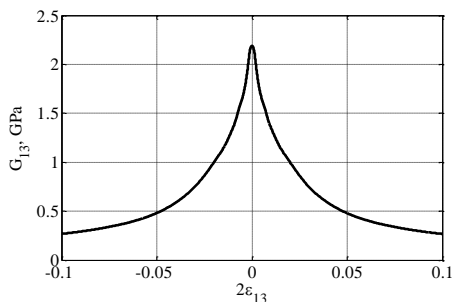


Рис. 2. Зависимости модуля сдвига от деформаций сдвига

Вычисления согласно итерационному процессу (4) проводились до тех пор, пока нормы невязки и разности между итерациями оставались больше заданной точности.

4. Результаты численных расчетов и их анализ

При проведении расчётов упругие характеристики внешних несущих слоев приняты равными $E_1 = 103$ ГПа, $E_3 = 5,9$ ГПа, $\nu_{13} = 0,3$, трансверсально-мягкого заполнителя - $E_3^0 = 80$ МПа, $G_{13}^0 = 30$ МПа, а геометрические параметры равными $t = 0,3$ см, $h = 1$ см, $L = 7$ см, $a = 25$ см, $2l = 27$ см. Для описания искомых функций, имеющих большие градиенты на весьма коротких участках (в частности, в зоне нагружающего ролика) была проведена декомпозиция области с применением кусочно-лагранжевой интерполяции для построения интегрирующих матриц. С этой целью разобьем область $[0, l]$ на три отрезка $e_1 = [0, L/2]$, $e_2 = [L/2, L/2 + R]$, $e_3 = [L/2 + R, l]$, введем глобальную сетку $\omega_h = \{x_i : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < l\}$ на отрезке $[0, l]$ следующим образом: на каждом отрезке e_1 , e_2 , e_3 введем независимые узлы Гаусса, связанные с корнями полинома Лежандра; количество узлов на указанных отрезках были приняты равными $N_1 = 40$, $N_2 = 81$, $N_3 = 130$, соответственно.

Путем табулирования по параметру амплитудного значения p поперечной нагрузки $X_3^{(1)}$ проводился анализ последовательности равновесных состояний (решений задачи) при различных уровнях нагружения, в том числе, отслеживались максимальные значения прогибов и сдвиговых деформаций нижнего нагружаемого несущего слоя. Стоит отметить, что зависимость «нагрузка-прогиб» но-

сит линейный характер, поэтому не представляет особого интереса. На рис. 3 приведена зависимость нагрузки от максимального по модулю значения сдвиговых деформаций, где $P = b \int_{-l}^l X_{(1)}^3$, $b = 2.5$ см, $\|\varepsilon_{13}^{(1)}\| = \max_{i=1, \dots, N} |\varepsilon_{13}^{(1)}(x_i)|$.

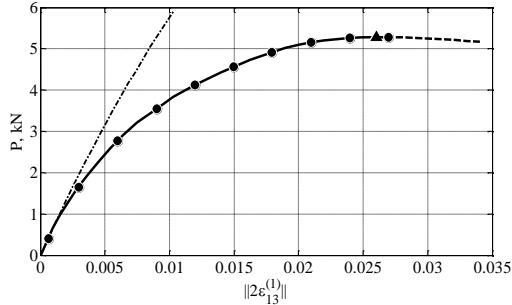


Рис. 3. Диаграмма «нагрузка - деформация поперечного сдвига»

Отметим, что на рис. 3 штрих-пунктирная линия - решение геометрически нелинейной задачи без учета физической нелинейности, сплошная линия - решение геометрически и физически нелинейной задачи. В окрестности некоторого значения нагрузки $P = P^*$, обозначенного на рис. 3 треугольником, итерационный процесс перестает сходиться. Для поиска же неустойчивых положений равновесия, обозначенных на рис. 3 штриховой линией, был реализован метод продолжения по параметру (см., например, работы [8, 9], в которых подробно описано конструктивная реализация метода продолжения по параметру [12]), который является одним из вариантов модифицированной глобально инкрементальной теории Лагранжа (задача относительно приращений, в отличие от классической инкрементальной теории Лагранжа, решается в нелинейной постановке). Параметром нагружения в используемом методе выбраны сдвиговые деформации в точке ξ , где ξ - точка, в которой сдвиговые деформации $\varepsilon_{13}^{(1)}$ достигают максимального по модулю значения. На рис. 4 а представлено распределение по длине тест-образца деформаций поперечного сдвига нижнего несущего слоя при различных значениях нагрузки P ; на рис. 4 б представлен участок рисунка 4а в увеличенном масштабе с указанием соответствующих значений приложенной силы P для каждой из изображенных решений в виде деформаций сдвига. Значения нагрузки P на рис. 4 б также отмечены черными маркерами на диаграмме «нагрузка - деформация поперечного сдвига» (рис. 3).

На рис. 5 изображено распределение модуля поперечного сдвига по длине нижнего несущего слоя, соответствующее сформированным в нижнем слое сдвиговым деформациям в точке, обозначенной на рис. 3 треугольником, при $P = P^*$

.Следует отметить, что максимальные по модулю значения деформаций поперечного сдвига и касательных напряжений, а также минимальные по абсолютной величине модули поперечного сдвига достигаются у края нагружающего ролика (рис. 4, 5, 6).

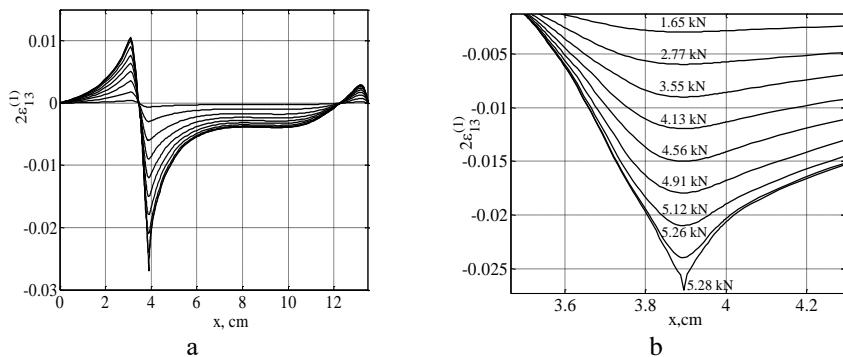


Рис. 4. Деформации поперечного сдвига при различных значениях нагрузки

Видно, что в его окрестности формируются локализованные зоны концентрации касательных напряжений и соответствующих им сдвиговых деформаций, а, следовательно, и резкое падение значений секущих модулей поперечного сдвига. На рис. 6 представлены приращения деформаций поперечного сдвига нижнего несущего слоя в закритической области, которые были получены как решение задачи относительно функций приращений с помощью метода продолжения по параметру. Проведенный анализ показал, что они характеризуют потерю устойчивости по поперечно-сдвиговой форме, которая реализуется при достижении поперечными касательными напряжениями в несущем слое некоторого предельного значения. Такая ФПУ аналогична поперечно-сдвиговой форме [11], реализующейся в тест-образцах из волокнистых композитов при трехточечном изгибе и являющейся причиной их разрушения при испытаниях.

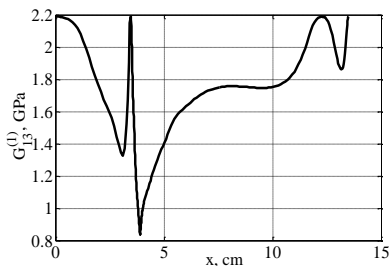


Рис. 5. Распределение модуля поперечного сдвига по длине

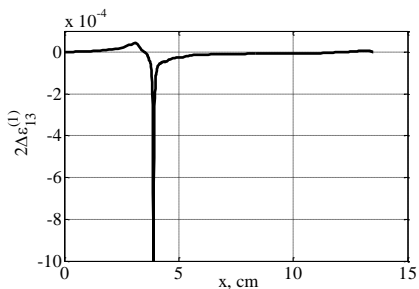


Рис. 6. Распределение приращений деформаций поперечного сдвига по длине

Исследование выполнено за счет грантов Российского научного фонда (проекты № 19-19-00058, 19-19-00059, 19-79-10018) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00073).

Литература

1. *Naik N.K., Kumar R.S.* Compressive Strength of Unidirectional Composites: Evaluation and Comparison of Prediction Models // *Composite Structures*. – 1999. – V.46. – P. 299–308.

2. *Budiansky B., Fleck N.A.* Compressive failure of fibre composites // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. - 1993. - V.41. – No.1. - P.183-211.

3. *Badriev I.B., Paimushin V.N., Shihov M.A.* Refined Equations of the Sandwich Shells Theory with Composite External Layers and a Transverse Soft Core at Average Bending // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. - 2019. – V.40. – No.11. - P. 1904–1914.

4. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных элементов конструкций. Анализ современного состояния и уточненная классификация форм потери устойчивости / В.Н. Паймушин // *Механика композитных материалов*. – 1999. – Т. 35. – № 6. – С. 707–716.

5. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (Этапы развития, современное состояние и направления дальнейших исследований) // *Изв. РАН. МГТ*. – 2001. – № 2. – С. 148–162.

6. *Вахитов М.Б.* Интегрирующие матрицы аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики // *Изв. вузов. Авиационная техника*. – 1966. – № 3. – С.50–61.

7. *Даутов Р.З., Паймушин В.Н.* О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвертого порядка // *Изв. вузов. Математика*. – 1996. – № 10. – С. 13–25.

8. *Badriev I. B., Makarov M. V., Paimushin V.N.* Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core // *Russian Mathematics*. – 2015. – V. 59. – № 10. – P. 57–60.

9. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Geometrically Nonlinear Problem of Longitudinal and Transverse Bending of a Sandwich Plate with Transversally Soft Core // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. -2018. – V.39. – No. 3. – P. 448–457.

10. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests // *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. –2018. –V.99. – No. 1 – P.1–25.

11. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A.* Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // *Mechanics of Composite Materials*. – 2018. – V. 54. – No.1. – P.2–12.

12. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М: Наука, 1988. – 231 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕМПФИРУЮЩИХ СВОЙСТВ ПЛАСТИНЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДЕМПФИРУЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ НА ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Паймушин В.Н.^{1,2}, Фирсов В.А.¹, Шишкин В.М.³

(¹Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ³Вятский государственный университет, Киров)

Традиционные конструкционные материалы (металлы и их сплавы), характеризующиеся большими значениями упругих и прочностных параметров, как правило, обладают малыми показателями демпфирующих свойств. В связи с этим для снижения виброактивности и динамической напряженности элементов тонкостенных конструкций используются различного рода покрытия из вязкоупругих материалов, впервые предложенные в работах [1–3]. При этом классическими являются однослойные покрытия со свободным и связанным демпфирующими слоями [4]. В первом случае демпфирование колебаний происходит в основном за счет деформаций растяжения-сжатия, во втором – за счет поперечного сдвига демпфирующего слоя, что не позволяет эффективно демпфировать колебания во всех областях конструкции при колебаниях на высоких собственных формах.

Исходя из этого, в работе [5] предлагается более эффективное интегральное демпфирующее покрытие (рис. 1), состоящее по толщине из двух демпфирующих слоев, между которыми располагается тонкий армирующий слой, обладающим высокой жесткостью на растяжение-сжатие и ничтожно малой жесткостью на изгиб (металлическая фольга, стекло, углеткань и пр.).

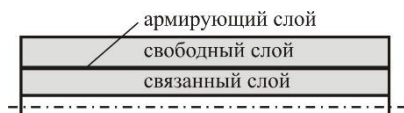


Рис.1 Интегральное демпфирующее покрытие

Нижний слой демпфирующего покрытия при изгибных колебаниях тонкостенной конструкции работает в основном на сдвиг и выполняет роль связанного демпфирующего слоя, а верхний слой испытывает деформации растяжения-сжатия и выполняет функции свободного демпфирующего слоя. Это позволяет интегрировать области активного демпфирования колебаний, практически избавляясь от областей балластного покрытия конструкции при любой форме изгибных колебаний в широком спектре эксплуатационных частот.

Стремление к эффективности демпфирования с использованием слоев из вязкоупругих материалов непосредственно связано со снижением массовых характеристик, что во многих случаях и, особенно, для аэрокосмической отрасли, является определяющим. Основной задачей при этом является определение характеристик демпфирования при частотах, близких к собственным частотам колебаний конструкции. Для решения данной задачи применяют методики, позволяющие определить динамические характеристики конструкции по заданным характеристикам демпфирования вязкоупругого материала, которые при этом, обычно, считаются постоянными (не зависящими от амплитуды деформации). В таком случае для определения характеристик демпфирования конструкции можно воспользоваться известным методом комплексных собственных чисел, как это сделано, например, в работах [6, 7]. При этом модули упругости материала конструкции, обычно, считаются постоянными, что существенно ограничивает использование данного метода для модального анализа конструкций в случае частотно-зависимых характеристик упругости материала. В связи с этим в работе [6] дается постановка проблемы комплексных собственных чисел для случая частотно-зависимой комплексной матрицы жесткости конструкции. Однако данная проблема в работе [6] так и осталась нерешенной, что по словам ее авторов обусловлено чрезвычайно высокими вычислительными затратами, связанными с многократным пересчетом и преобразованием отмеченной матрицы.

Известно, что при гармоническом законе деформирования вязкоупругого материала деформация ε отстает от напряжения σ на некоторый фазовый угол φ . При резонансных колебаниях, когда частота деформирования материала ω совпадает с одной из частот ω_j свободных колебаний конструкции, $\operatorname{tg}\varphi = \delta/\pi$, где δ – логарифмический декремент колебаний (ЛДК) материала, являющийся одной из мер внутреннего трения в материале. Фазовые соотношения удобно записывать в комплексной форме:

$$\sigma_0 e^{i\omega t} = E^* \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}. \quad (1)$$

Здесь σ_0 , ε_0 – соответственно амплитуда напряжения и амплитуда деформации, E^* – комплексный модуль упругости, t – время, i – мнимая единица. Из (1) следует

$$E^* = \sigma_0 e^{i\omega t} / \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = \sigma_0 \cos \varphi (1 + i \delta / \pi) / \varepsilon_0. \quad (2)$$

Величина $\sigma_0 \cos \varphi$ представляет собой составляющую комплексного напряжения $\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t}$, совпадающую по фазе с комплексной деформацией $\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$, а отношение $\sigma_0 \cos \varphi / \varepsilon_0$ есть модуль упругости E при циклическом деформировании материала. С учетом этого выражение (2) принимает вид $E^* = E(1 + i \delta / \pi)$. Таким образом, вместо (1) можно записать зависимость

$$\sigma^* = E(1 + i \delta / \pi) \varepsilon^*, \quad (3)$$

выражающую известную модель Е.С. Сорокина (гипотезу комплексного внутреннего трения) при гармоническом законе деформирования материала, находящегося в одноосном напряженном состоянии. Зависимость (3) можно обобщить на случай сложного напряженного состояния изотропного вязкоупругого материала: $\sigma^* = \mathbf{D}^* \varepsilon^*$. Векторы σ^* и ε^* содержат соответственно комплексные напряжения и комплексные деформации, $\mathbf{D}^* = \mathbf{D} + i\mathbf{D}_g$ – комплексная матрица жесткости, содержащая матрицу жесткости \mathbf{D} и матрицу демпфирования \mathbf{D}_g отмеченного материала. Для изотропного вязкоупругого материала, находящегося в плоском напряженном состоянии, матрицы \mathbf{D} и \mathbf{D}_g будут такими:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & E\nu/(1-\nu^2) & 0 \\ E\nu/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_g = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} E\delta_\varepsilon/(1-\nu^2) & E\delta_\varepsilon\nu/(1-\nu^2) & 0 \\ E\delta_\varepsilon\nu/(1-\nu^2) & E\delta_\varepsilon/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G\delta_\gamma \end{bmatrix}.$$

Здесь E , G , δ_ε , δ_γ – модули упругости и ЛДК материала соответственно при растяжении-сжатии и сдвиге; ν – коэффициент Пуассона. В случае зависимости характеристик упругости материала от частоты деформирования ω в качестве E и G необходимо брать соответствующие динамические модули упругости материала [8].

Для проведения динамического анализа удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием разработан уточненный четырехслойный конечный элемент (рис. 2), позволяющий учитывать деформации поперечного обжатия демпфирующих слоев при высокочастотных режимах деформирования: слой 1 (основной материал) работает в рамках гипотез Кирхгофа-Лява; демпфирующие слои 2 и 4 находятся в плоском напряженном состоянии; армирующий слой 3 работает на растяжение-сжатие (толщина данного слоя считается пренебрежимо малой). Узловыми параметрами элемента являются: перемещения u_i , w_i ($i=1, 2, \dots, 6$) и углы поворота φ_1 , φ_4 поперечных сечений слоя 1, представляемые вектором $\mathbf{r}^{(e)} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, u_3, w_3, u_4, w_4, \varphi_4, u_5, w_5, u_6, w_6\}$.

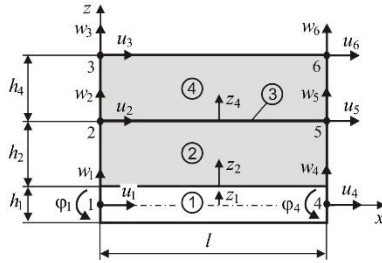


Рис. 2 Четырехслойный конечный элемент

Введенные выше понятия комплексного модуля упругости E^* и комплексной матрицы жесткости $D^* = D + iD_g$ при гармоническом законе деформирования вязкоупругого материала дают возможность построить комплексную матрицу жесткости $K^{(e)*} = K^{(e)} + iC^{(e)}$ конечного элемента пластины с интегральным демпфирующим покрытием, состоящую из матрицы жесткости $K^{(e)}$ и матрицы демпфирования $C^{(e)}$. Уравнения свободных колебаний демпфированного элемента формируются относительно его комплексных узловых перемещений $r^{(e)*}$:

$$M^{(e)}\ddot{r}^{(e)*} + K^{(e)*}r^{(e)*} = 0.$$

Здесь $M^{(e)}$ – матрица масс элемента. После объединения данных уравнений по направлениям общих для смежных элементов узловых перемещений приходим к уравнениям свободных колебаний конечно-элементной модели демпфированной пластины

$$M\ddot{r}^* + K^*r^* = 0,$$

где M , K^* , r^* – соответственно матрица масс, комплексная матрица жесткости и комплексный вектор узловых перемещений отмеченной модели. С помощью подстановки $r^* = F^*e^{i\omega^*t}$ приходим к системе уравнений

$$(K^* - \lambda^*M)F^* = 0, \tag{4}$$

составляющей содержание обобщенной проблемы собственных значений и собственных векторов совокупности матриц K^* и M . Собственные числа λ_j^* – это квадраты собственных комплексных собственных частот ω_j^* , собственные векторы – соответствующие им комплексные формы F_j^* . Демпфирующие свойства пластины при колебаниях по некоторой форме F_j^* определяются ЛДК $\delta_j = 2\pi\omega_j''/\omega_j'$ [6], где ω_j' , ω_j'' – соответственно вещественная и мнимая части комплексной частоты ω_j^* .

Для решения проблемы (4) можно воспользоваться встроенными функциями (решателями) популярных пакетов компьютерной математики MATLAB, Mathcad, Mathematica, дающими полный спектр комплексных форм и частот, но это требует значительных вычислительных затрат. Однако, необходимо заметить, что практический интерес имеют лишь несколько низших собственных пар (форм и частот). Поэтому предпочтительными будут методы, основанные на итерировании матриц [9, 10 и др.], из которых наиболее подходящим является метод итераций в подпространстве [9], позволяющий итерировать одновременно несколько низших форм и частот.

В случае зависимости динамических модулей упругости материала слоев пластины от частоты деформирования ω матрица \mathbf{K}^* при определении ω_j^* и \mathbf{F}_j^* должна формироваться в зависимости от получаемых на частоте ω_j' динамических модулей упругости материала. А поскольку данная частота на момент формирования матрицы \mathbf{K}^* неизвестна, то решение системы (4) необходимо итерировать. В качестве критерия завершения итераций при определении ω_j^* можно взять выполнение условия

$$\left| 1 - \omega_j'^{(k)} / \omega_j'^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon, \quad (5)$$

где k – номер итерации, ε – заданная точность. Однако, при использовании метода итераций в подпространстве все необходимые комплексные частоты ω_j^* ($j=1, 2, \dots, n$) находятся одновременно. Поэтому возникает вопрос – при какой частоте ω_j' и каких динамических модулях упругости материала следует формировать комплексную матрицу жесткости \mathbf{K}^* при решении задачи (4)? Для решения данного вопроса разработан следующий алгоритм.

Организуется цикл по $j=1, 2, \dots, n$.

При каждом значении счетчика j выполняется итерационная процедура:

1. Задается вещественная частота $\omega_j'^{(k-1)}$.
2. Формируется матрица \mathbf{K}^* при динамических модулях упругости на частоте $\omega_j'^{(k-1)}$ и решается задача (4).
3. Из полученного спектра комплексных частот ω_j^* ($j=1, 2, \dots, n$) выбирается вещественная часть ω_j' при текущем значении j , которая становится частотой $\omega_j'^{(k)}$ на следующей итерации.

4. Проверяется условие (5). Если данное условие выполняется, то в качестве искомой комплексной частоты ω_j^* берется значение $\omega_j^{*(k)}$. В противном случае $\omega_j^{*(k-1)}$ заменяется на $\omega_j^{*(k)}$ и пункты 1-4 повторяются.

Итерационный процесс при каждом j стартует со значения $k=1$ и назначенных начальных частотах $\omega_j^{(0)}$ (эти частоты для всех j можно брать одинаковыми и достаточно произвольными).

Определялись 15 низших комплексных форм F_j^* и комплексных циклических частот $f_j^* = \omega_j^*/(2\pi)$ свободных колебаний шарнирно опертой пластины с интегральным демпфирующим покрытием. Геометрические параметры пластины: длина $L=250$ мм; ширина $b=20$ мм; толщина $h_1=1$ мм. Толщины демпфирующих слоев: $h_2=h_4=1,8$ мм. Армирующий слой имеет толщину $h_3=0,12$ мм. Материал пластины – алюминиевый сплав Д16АТ (плотность $\rho=2700$ кг/м³, ЛДК $\delta=0,005$). В работе [11] теоретико-экспериментальным методом получена зависимость динамического модуля упругости E сплава Д16АТ от частоты деформирования f

$$E(f) = 1,615 \cdot 10^4 \exp(-6,170 \cdot 10^{-1} f) + 5,585 \cdot 10^4 \exp(-5,893 \cdot 10^{-5} f) \text{ МПа},$$

дающая значительное снижение E по сравнению с его статическим номиналом $E_0=7,2 \cdot 10^4$ МПа при возрастании частоты в диапазоне 0÷20 Гц и практическую стабилизацию на уровне $E=5,55 \cdot 10^4$ МПа при $f=20 \div 200$ Гц.

Материал демпфирующих слоев – техническая резина с характеристиками: плотность $\rho=1345$ кг/м³; коэффициент Пуассона $\nu=0,49$; ЛДК при растяжении-сжатии и сдвиге – $\delta_e=1,23$, $\delta_r=1,1$. В работе [8] приведены экспериментальные данные по динамическим модулям упругости E_r и G_r резины соответственно при растяжении-сжатии и сдвиге, показывающие значительный рост значений E_r и G_r по мере возрастания частоты f , но охватывающие весьма узкий диапазон частот (для E_r от 0 до 30 Гц, для G_r от 0 до 16 Гц), что не дает возможности использования их для анализа высоких комплексных форм и комплексных частот свободных колебаний пластины. Для реализации данной возможности построены экстраполирующие зависимости

$$E_r(f) = 20,1 [1 - 0,736 \exp(-0,096 f)], \quad G_r(f) = 2,6 [1 - 0,231 \exp(-0,121 f)],$$

достаточно быстро выходящие на уровни 20,1 МПа и 2,6 МПа, соответствующие максимальным экспериментальным значениям E_r и G_r . Материал армирующего слоя – углерента ЭЛУР-П (плотность $\rho=1200$ кг/м³, ЛДК при растяжении-сжатии $\delta=0,006$). Динамический модуль упругости углерента считается постоянным (не зависящим от частоты f): $E=10,5 \cdot 10^4$ МПа.

Пластина разбивалась на 100 конечных элементов одинаковой длины. В таблице приведены вещественные f_j' и мнимые части f_j'' циклических комплексных частот f_j^* свободных колебаний пластины, найденные из системы (4) методом итераций в подпространстве, и соответствующие им значения ЛДК

$$\delta_j = 2\pi f_j''/f_j'. \quad (6)$$

В последних двух столбцах таблицы для сравнения приведены частоты f_j , полученные из системы однородных уравнений

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{F} = 0 \quad (7)$$

при анализе свободных колебаний пластины без учета демпфирующих свойств материала, и ЛДК δ_j , найденные энергетическим методом:

$$\delta_j = \Delta W_j / (2W_{j,\max}). \quad (8)$$

Здесь ΔW_j , $W_{j,\max}$ – соответственно рассеянная и максимальная энергии в объеме пластины при резонансе по форме \mathbf{F}_j за один цикл колебаний. Резонансные колебания возбуждались погонной нагрузкой $q(t) = q_0 \cos(pt)$ с амплитудой $q_0 = 0,08$ кН/м и частотой $p = \omega_j$. Для получения значений δ_j при резонансных колебаниях по всем 15 формам \mathbf{F}_j (четным и нечетным) нагрузка $q(t)$ прикладывалась до середины пластины (при $q(t)$, приложенной по всей длине, резонансные колебания можно возбудить только по нечетным формам \mathbf{F}_j).

Таблица. Вещественные f_j' и мнимые f_j'' части комплексных частот f_j^* , ЛДК $\delta_j = 2\pi f_j''/f_j'$, частоты f_j без учета демпфирования и ЛДК $\delta_j = \Delta W_j / (2W_{j,\max})$

Анализ приведенных результатов показывает, что вещественные части f_j' комплексных частот f_j^* демпфированной пластины получаются достаточно близкими к частотам f_j , полученными без учета демпфирования. Значения ЛДК δ_j , найденные по формулам (6) и (8), получаются достаточно близкими между собою. Причем, в обоих случаях, начиная со второй формы до одиннадцатой, значения δ_j монотонно убывают, а далее наблюдается их заметный рост, который можно объяснить влиянием на δ_j рассеяния энергии, обусловленного нормальными напряжениями σ_z при поперечном обжатии демпфирующих слоев пластины на высоких частотах колебаний.

j	f'_j , Гц	f''_j , Гц	$\delta_j = 2\pi f''_j/f'_j$	f_j , Гц	$\delta_j = \Delta W_j/(2W_{j,\max})$
1	50,69	3,83	0,475	49,94	0,502
2	139,99	13,49	0,605	138,52	0,621
3	253,98	20,89	0,517	252,50	0,523
4	399,77	25,86	0,406	398,49	0,409
5	581,21	29,32	0,317	580,13	0,318
6	800,04	31,99	0,251	799,06	0,252
7	1056,65	34,41	0,205	1055,93	0,206
8	1352,04	37,03	0,172	1350,75	0,174
9	1684,91	40,33	0,150	1682,98	0,153
10	2054,69	44,92	0,137	2051,55	0,141
11	2459,94	51,58	0,132	2454,73	0,137
12	2898,54	61,34	0,133	2890,02	0,140
13	3367,57	75,56	0,141	3353,99	0,151
14	3863,12	95,94	0,156	3842,11	0,170
15	4380,11	124,57	0,179	4348,57	0,197

Что касается комплексных собственных форм F_j^* , то исследования показали, что их нормированные вещественные и мнимые части практически совпадают с соответствующими нормированными формами F_j , полученными из системы (7) для недемпфированной пластины (без учета демпфирующих свойств материала).

На рис. 3 приведены ЛДК δ , полученные по формуле (6) в зависимости от собственной частоты f с учетом влияния на δ всех компонент плоского напряженного состояния демпфирующих слоев пластины (крестики) и без учета влияния на δ поперечного обжатия обоих демпфирующих слоев (квадраты). В последнем случае наблюдается значительное падение δ на высоких частотах колебаний по сравнению с исходными результатами. Причем, как показали дальнейшие численные эксперименты, отмеченное падение δ в основном происходит за счет неучета рассеяния энергии при поперечном обжатии связанного демпфирующего слоя.

Выводы

1. Разработан уточненный четырехслойный конечный элемент удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием, позволяющий учитывать поперечное обжатие демпфирующих слоев на высоких частотах колебаний.

2. Определена нижняя часть спектра комплексных форм F_j^* и комплексных частот f_j^* свободных колебаний удлиненной шарнирно опертой пластины с интегральным демпфирующим покрытием и соответствующие им ЛДК δ_j с учетом частотной зависимости динамических модулей упругости материала.

3. Показано значительное возрастание значений δ_j на высоких частотах колебаний за счет поперечного обжатия демпфирующих слоев пластины.

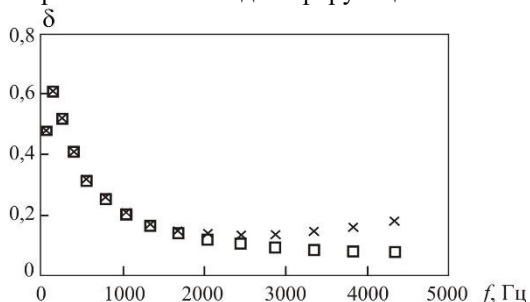


Рис.3 Логарифмический декремент затухания
(пояснения в тексте)

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00058).

Литература

1. Oberst H., Becker G.W., Frankenfeld K. Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch fest haftende Beläge // *Acustica*. – 1952. Beihefte 4. – N 2. – P. 181–194.
2. Kerwin E.M. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer // *Journal of Acoustical Society of America*. – 1959. V. 31. – N 7. – P. 952–962.
3. Ross D, Ungar E.E., Kerwin E.M. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate, section 3 of *Structural damping*, ASME, New York, 2, 1959. – P. 49–88.
4. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
5. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. Интегральный способ поверхностного демпфирования изгибных колебаний тонкостенных конструкций // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова: Материалы XXV Международного симпозиума*. – М., 2019. – Т.2. – С. 210 – 2017.
6. Рикардс Р.Б., Барканов Е.Н. Определение динамических характеристик вибропоглощающих покрытий методом конечных элементов // *Механика композит. материалов*. – 1991. – № 5. – С. 823–830.
7. Барканов Е.Н. Метод комплексных собственных чисел для исследования демпфирующих свойств конструкций типа сэндвич // *Механика композит. материалов*. – 1993. – Т. 29. – № 1. С. 116–121.
8. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Shishkin V.M. Identification of the Elastic and Damping Characteristics of Soft Materials Based on the Analysis of Damped

Flexural Vibrations of Test Specimens // Mech. Composite Materials. – 2016. – V. 52. – N 4. – P. 435–454.

9. Клаф Р., Пензиен. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.

10. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир, 1983. – 384 с.

11. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. Accounting for the Frequency-Dependent Dynamic Elastic Modulus of Duralumin in Deformation Problems // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2017. – V. 58. – N 3. – P. 517–528.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗРУШЕНИЯ ТРЁХСЛОЙНЫХ ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ С КОМПОЗИТНЫМИ НЕСУЩИМИ СЛОЯМИ ПРИ ЧЕТЫРЁХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Паймушин В.Н.^{1,2}, Фирсов В.А.¹, Макаров М.В.², Холмогоров С.А.¹

(¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань)

В сверхлёгких трёхслойных конструкциях несущие слои, как правило, изготавливаются из волокнистых композитов на основе углепластиков. Разрушение таких конструкций может быть обусловлено потерей устойчивости несущих слоёв по той или иной форме в условиях формирующихся сжимающих напряжений. В частности, при формировании таких напряжений возможна реализация поперечно-сдвиговой формы потери устойчивости (ФПУ) несущих слоёв. Как известно [1,2], при сжатии в направлении волокон тест-образцов из однонаправленных волокнистых композитов за предельные сжимающие напряжения могут быть приняты значения касательного модуля поперечного сдвига. В цикле работ [3,4] было показано, что теоретическое выявление описанной ФПУ внешних слоёв из композита при трёхточечном изгибе тест-образцов возможно при использовании уравнений, основанных на использовании простейшей кинематической модели С.П.Тимошенко для внешних слоёв. Данная работа посвящена экспериментальным исследованиям процессов деформирования и разрушения трёхслойных тест-образцов с композитными несущими слоями при четырёхточечном изгибе с целью выявления возможности реализации сдвиговой формы потери устойчивости несущих слоёв из однонаправленного композита.

1. Изгиб трёхслойных тест-образцов с сотовым наполнителем

Для испытаний на четырёхточечный изгиб были изготовлены трёхслойные тест-образцы с сотовым наполнителем на основе бумаги Nomex®, толщина которого составила $H = 5$ мм. Размер ячейки наполнителя в среднем равен $t = 4$ мм.

Внешние несущие слои тест-образцов изготовлены из углеродной ЭЛУР-П и эпоксидного связующего холодного отверждения ХТ-118. Общая длина тест-образца равна $L = 210$ мм, а ширина $b = 25$ мм. Направление укладки несущих слоёв составляет 0° к продольной оси образца Ox . Их средняя толщина h составляет 1 мм и состоят они из 8 монослоёв толщиной 0,12 мм. Эскиз образца с основными геометрическими характеристиками, направлением осей образца и направлением осей ортотропии несущих слоёв представлен на рис. 1.

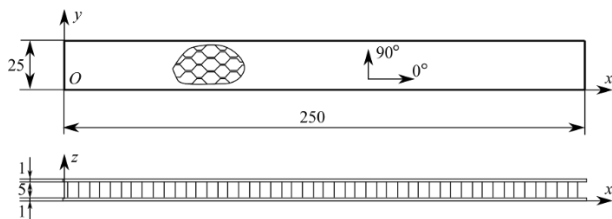


Рис. 1 Геометрические параметры тест-образца

Испытания на четырёхточечный изгиб проводились на серво-электрической испытательной машине Instron ElectroPuls E10000, на которой установлен датчик силы с диапазоном измерений ± 10 кН. Нагружение проводилось в режиме контроля скорости штока машины. Скорость перемещения штока во время испытаний была постоянной и составляла 5 мм/мин. На машину была установлена оснастка для испытаний на изгиб, которая позволяет менять расстояние между опорными роликами. Опорные и нагружающие ролики имели диаметр 10 мм. Расстояние между опорными роликами составляло 210 мм. Оснастка с нагружающими роликами, расстояние между которыми составляло 70 мм, устанавливалась на образец сверху.

Диаграмма нагружения пяти тест-образцов представлена на рис.2а. Прогиб w образцов при испытаниях фиксировался по штоку испытательной машины. В связи с этим прогиб на графиках отражает прогиб нагружающих роликов. Из рис.2а видно, что максимальный прогиб w^* для испытанных тест-образцов лежит в пределах 3-4 мм, а разрушающая нагрузка P^{max} составляет около 0.3 кН. Вычисленные по результатам эксперимента величины осреднённых максимальных нормальных напряжений в несущих слоях оказались равными $\sigma_{max}^{bend} = 71.557$ МПа, а максимальных касательных напряжений в заполнителе $\tau_{max} = 1.308$ МПа.

Нормальные напряжения σ_{max}^{bend} вычислялись по формуле

$$\sigma_{max}^{bend} = M_z^{max} / W_z, M_z^{max} = P_{max} \cdot (l/2), \quad (1)$$

в которой значение момента сопротивления W_z определяется выражением

$$W_z = [(b(H + 2h)^3 - bH^3) / 12] / [(H + 2h) / 2]. \quad (2)$$

Касательные напряжения вычислены по формуле Журавского. Видно, что среднее нормальное сжимающее напряжение $\sigma_{max}^{bend} = 71.557$ МПа значительно меньше разрушающего сжимающего напряжения $\sigma_1^- = 529.286$ МПа, найденного для композита на основе углеродной ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 в работе [5].

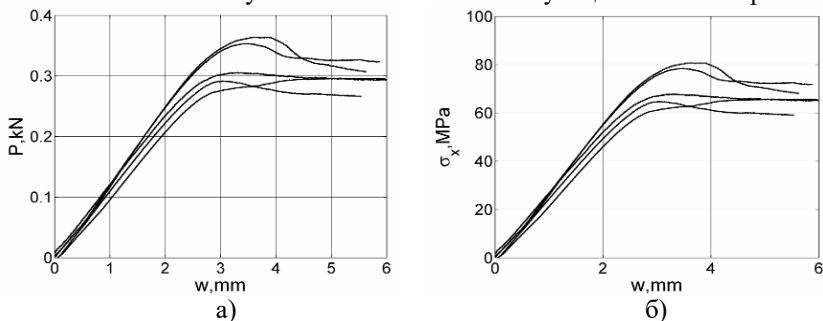


Рис. 2 Диаграммы нагружения тест-образцов с сотовым наполнителем (а - диаграмма «нагрузка-прогиб», б - диаграмма «напряжение-прогиб»)

Изучив картину деформирования образцов на этапах падения нагрузки на диаграмме, можно видеть, что несущие слои при достижении максимальной нагрузки не разрушаются. Установлено, что потеря несущей способности образца происходит по причине достижения касательного напряжения в наполнителе предельного значения $\tau_{xz}^* = 0.92$ МПа, установленного ранее в работе [6] на основе соответствующих экспериментов. Экспериментальные средние значения $\tau_{xz}^* = 1.308$ МПа превосходят разрушающие в 1.42 раза. Исходя из этого, можно сделать вывод, что для исследуемых тест-образцов с представленными выше геометрическими и физико-механическими характеристиками наполнителя и несущих слоёв разрушение возможно только по причине потери несущей способности наполнителя, в то время как несущие слои остаются сильно недогруженными.

2. Изгиб трёхслойных тест-образцов с жёстким наполнителем

Заметим, что для реализации в несущих слоях напряжений, соответствующих реализации макромасштабной поперечно-сдвиговой ФПУ, формирующиеся в них сжимающие напряжения должны достигать значения $\sigma_1^- = 529.286$ МПа. При этом наполнитель не должен разрушаться по причине достижения предельных касательных напряжений. Разрушающие касательные напряжения для различных сортов древесины лежат в пределах $\tau_{xz}^* = 8-11$ МПа. Такие предельные напряжения позволяют сформировать в несущих слоях критические сжимающие напряжения $\sigma_1^- = 529.286$ МПа без разрушения наполнителя. Исходя из анализа результатов описанных выше экспериментов на изгиб образцов с сотовым наполнителем, в качестве наполнителя была выбрана древесина (липа)

Для испытаний были изготовлены тест-образцы с жёстким наполнителем из древесины (липы) по всей длине образца. Общая длина тест-образца составила $L = 270$ мм, ширина $b = 25$ мм, толщина наполнителя $H = 5$ мм, номинальная толщина несущих слоёв $h = 1$ мм, расстояние между опорными роликами составило 250 мм, а между нагружающими – 70 мм.

Диаграммы нагружения трёх тест-образцов с жёстким наполнителем приведены на рис.3а, а на рис.3б изображены диаграммы «напряжение-прогиб».

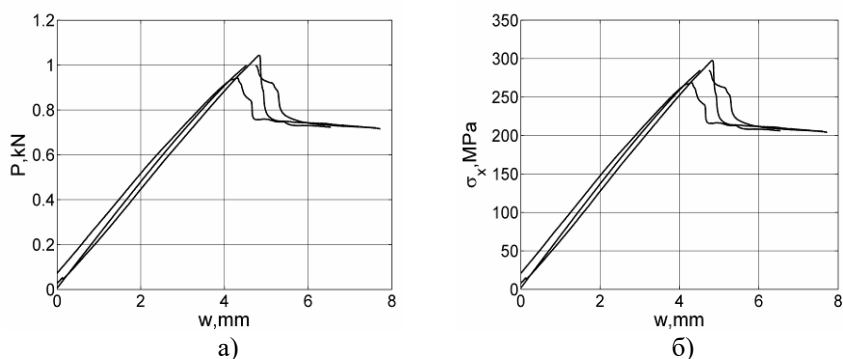


Рис.3 Диаграммы нагружения тест-образцов с жёстким наполнителем (а - диаграмма «нагрузка-прогиб», б - диаграмма «напряжение-прогиб»)

Осреднённые по результатам испытаний трёх тест-образцов значения осевых сжимающих напряжений оказались равными $\sigma_{max}^{bend} = 282.098$ МПа. Это значение оказалось меньше значения, полученного при сжатии ($\sigma_1^- = 529.286$ МПа).

Касательные напряжения в заполнителе при таких жесткостных и геометрических параметрах оказались равными $\tau_{max} = 4.034$ МПа. Значения τ_{max} , полученные при изгибе образцов с однородным жёстким заполнителем по всей длине, исключают разрушение заполнителя, что позволяет выявлять причины разрушения несущих слоёв.

Как известно, сотовые заполнители относятся к классу трансверсально-мягких, что позволяет не учитывать тангенциальные напряжения в заполнителе при редуцировании уравнений трёхмерной теории упругости к той или иной двумерной модели трёхслойных оболочек или пластин. Используемый заполнитель в виде древесины нельзя отнести к классу трансверсально-мягких, так как ориентирована древесина в образце волокнами вдоль оси Ox (рис.1). Модуль упругости древесины вдоль волокон лежит в диапазоне $E_1 = 10-12$ ГПа, тогда как модуль упругости используемого в экспериментах однонаправленного композита $E_1^+ = 104.73$ ГПа. В связи с этим заполнитель в виде волокнистой древесины может воспринимать часть изгибных напряжений, что невозможно для сотового заполнителя. Поэтому, чтобы проверить справедливость соотношений (1) и (2) при вычислении нормальных напряжений в тест-образцах исследуемого класса, проведён экспериментальный замер деформаций в несущих слоях при четырёхточечном изгибе. Для этого в центре несущих слоёв одного из тест-образцов с однородным заполнителем из древесины были приклеены тензорезисторы ВЕ 120-5АА (11-х). Для снятия показаний использовалась тензометрическая станция National Instruments.

Образец нагружался до разрушения со скоростью перемещения нагружающих роликов 5 мм/мин. Диаграмма деформирования в осях «нагрузка-осевая деформация» представлена на рис.4а.

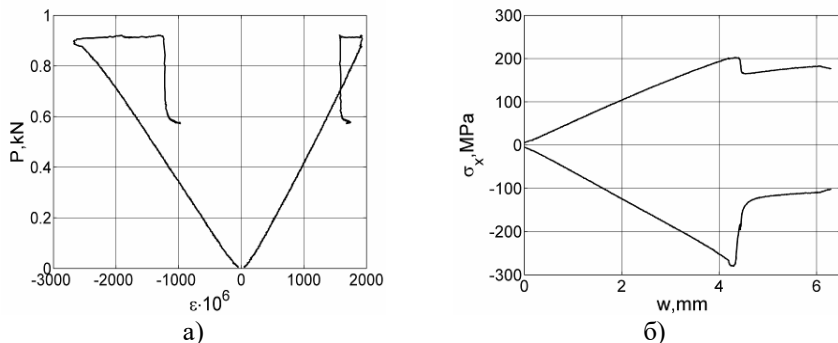


Рис.4 Диаграммы деформирования тест-образца по результатам тензометрирования

Можно видеть, что предельные деформации сжатого несущего слоя в рабочей зоне тест-образца достигают значения $\epsilon_x^- = -2643 \mu$, тогда как предельные деформации в растянутом несущем слое равны $\epsilon_x^+ = 1914 \mu$. Используя упругие характеристики волокнистого композита несущих слоёв $E^+ = 104.73$ ГПа $E^- = 96.32$ ГПа, найденные в работе [5] путем испытаний прямых тест-образцов на растяжение и сжатие, а также соотношения закона Гука, можно определить осевые нормальные напряжения, формирующиеся в несущих слоях (рис.46). В несущем сжатом слое они достигают значения $\sigma_x^- = 280.688$ МПа, в растянутом – $\sigma_x^+ = 202.371$. Можно заметить, что напряжения в сжатом несущем слое практически точно соответствуют напряжениям, найденным в соответствии с соотношениями (1), (2). Однако при этом, как легко можно убедиться, не выполняются уравнения равновесия. Следовательно, основной причиной невыполнения равенства $\sigma_x^- = \sigma_x^+$ может являться проявление разномодульности используемого композита в условиях четырехточечного изгиба тест-образца.

4. Заключение

Испытания на четырёхточечный изгиб позволяют исключить формирование поперечных касательных напряжений в рабочей зоне образца и реализовать в ней состояние чистого изгиба. Как показали результаты проведенных экспериментальных исследований, в трехслойных тест-образцах разрушение несущих слоёв из волокнистых композитов происходит не в рабочей части образца, а в окрестности нагружающих и опорных роликов при испытаниях образцов с маложестким наполнителем, и в окрестности нагружающего ролика при испытаниях образцов с жестким наполнителем. Известные в механике трехслойных конструкций математические модели деформирования, основанные на описании механики деформирования внешних слоев классической моделью Криггофа-Лява, не имеют достаточную степень точности и содержательности для теоретического исследования напряжённо-деформированное состояния в окрестности нагружающих и опорных роликов и выявления видов и причин разрушения. В связи с этим требуется построение таких уточненных вариантов теории трёхслойных пластин и оболочек, которые учитывали бы как неравномерность распределения поперечных касательных напряжений по толщине несущего слоя, так и физическую нелинейность поведения волокнистого композита в условиях формирования сдвиговых деформаций. Для верификации таких уточненных моделей деформирования могут быть использованы результаты описанных выше экспериментальных исследований.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-79-10018).

Литература

1. *Budiansky B., Fleck N. A.* Compressive failure of fibre composites // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1993. – V. 41. – No. 1. – P.183-211.
2. *Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // *Composite Structures.* –2010. – V. 92. – No.2. – P. 295–305.
3. *Paimushin V.N., Tarlakovskii D.V., Kholmogorov S.A.* On non-classical buckling mode and failure of composite laminated specimens under the three-point bending // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki.* – 2016. –V. 158. – No. 3. – P. 350–375.
4. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests // *Z Angew Math Mech.* –2018. –V.99. – No.1 – P.1–25. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201800063>
5. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A.* Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // *Mechanics of Composite Materials.* – 2018. – V. 54. – No.1. – P.2-12.
6. *Paimushin V.N., Zakirov I.M., Lukankin S.A., Zakirov I.I., Kholmogorov S.A.* Average elastic and strength characteristics of a honeycomb core and a theoretical-experimental method of their determination // *Mechanics of Composite Materials.* – 2012. – V.48. – No.5. – P.511-524.

РАСЧЕТНО- ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ БАЛОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СКОРОСТНОЙ ВИДЕО РЕГИСТРАЦИИ

Радин В.П.¹, Чирков В.П.¹, Щугорев В.Н.¹, Щугорев А.В.¹, Сапунова Л.С.¹, Горбачев П.А.¹

(¹Московский энергетический институт (национальный исследовательский университет))

Аннотация

Работа посвящена применению аудио и высокоскоростной видео регистрирующей аппаратуры и дальнейшей цифровой обработке для оценки частоты свободных колебаний балки из композитного материала

Ключевые слова – композитная балка, частота собственных колебаний, акустическая и видео фиксация колебаний балки

1. ВВЕДЕНИЕ

Композиционные материалы находят широкое применение в различных областях техники. Владение современными методами исследований физических свойств необходимо для глубокого понимания студентами механики композитов. На данный момент широко разработаны эффективные методы оценки поведения конструкций из композиционных материалов в условиях статического нагружения [1-3]. Однако до сих пор не существует сравнимых по эффективности методов расчета поведения конструкций из композита при ударе внешними объектами (рис.1) [4]. Значительный интерес при проведении таких исследований представляет собой *акустическая и видеофиксация* процесса нагружения и дальнейшего поведения исследуемых композитных балок.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Структура геометрической схематизации

Для исследования процесса колебаний композитной балки и визирования прогиба использовалась скоростная видеокамера [5] и звукозаписывающая аппаратура. Проведено сопоставление экспериментально полученных значений собственных частот колебаний композитной балки с использованием *аудио и видеозаписывающей* аппаратуры с теоретическим решением. В процессе эксплуатации изделий из композитов возможны взаимодействия деталей и внешних элементов конструкций со сторонними объектами - ударное нагружение, статическое нагружение выше предельного состояния трещиностойкости, а также царапины и надрезы внешнего слоя. Отслоение у внешнего слоя конструктивного элемента меняет свое начальное положение, что приводит к изменению функциональности детали.

Геометрическая схематизация элемента конструкции с отслоением представлена следующими объектами (рис. 1): стержень с отслоением (один из размеров объекта на порядок и более превышает два других размера, направление приложения внешних усилий – вдоль оси); балка с отслоением (конструктивная схема - стержень, работает на изгиб); пластина с отслоением (один из размеров мал по сравнению с двумя другими, срединная поверхность является плоскостью); оболочка с отслоением.

По характеру изменения параметров нагрузки во времени рассматривалось квазистатическое и циклическое нагружение, а также нагружение падающим грузом в предположении, что влияние скорости приложения усилий на свойства материала отсутствует (рис.1).



Рис. 1. Классификация рассматриваемых расчётных моделей конструктивных элементов с отслоениями

3. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

3.1. Типы нагружения

Вид нагружения классифицировался как нагружение приложенными усилиями (мягкое); нагружение перемещениями (жёсткое). Для каждого из случаев формулировались критерии потери несущей способности. Для стержневого элемента с отслоением внешнего слоя это подрастание стрелы прогиба до критического значения, которое может быть назначено из эксплуатационных требований. Для балочных и оболочечных элементов, работающих на изгиб, принимались следующие критерии: величина стрелы прогиба балки превышает критическое значение (для случая мягкого (силового) нагружения); неограниченный рост дефектов, при котором балка разделится на две части (для случая, когда технические условия не предусматривают эксплуатацию элемента с таким типом нарушения целостности); значение эквивалентных напряжений превышает критическое.

Данные задачи связаны с определением равновесных размеров отслоений. Основной способ вычисления равновесных размеров основан на подходе аналитической механики разрушения, предложенного В.В. Болотиным [1]. Аналитическая механика разрушения предполагает вычисление и сравнение обобщённых сил, стремящихся увеличить размеры дефекта, а также сил сопротивления их росту.

Для исследования характера реакции композитов на ударные воздействия падающим грузом и визирования прогиба использовалась Action камера GoPro

[5]. Сопоставлено точное теоретическое решение и результаты, полученные экспериментально.

3.2. Аналитическая постановка задачи

Рассмотрим колебания стержня после того, как его конец отклонили на величину Δ , а потом связь снимается (рис. 2).

Найдем функцию статического прогиба балки при отклонении ее конца на величину Δ .

Уравнение изгиба:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0, \quad (1)$$

где $v(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$

Граничные условия:

$$x = 0, \quad v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 0; \quad x = l, \quad v = -\Delta, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим:

$$C_1 = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{l^3}, \quad C_2 = -\frac{3}{2} \frac{\Delta}{l^2}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0.$$

Функция прогиба:

$$v(x) = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{x^3}{l^3} - 3 \frac{x^2}{l^2} \right)$$

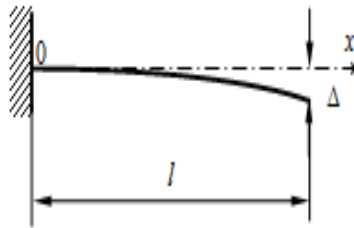


Рис. 2. Схема нагружения. На рисунке: l - длина стержневого элемента; Δ - отклонение

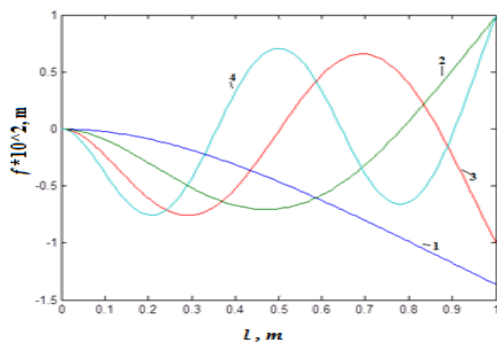


Рис. 3. Собственные формы колебаний консольно закрепленного стержня. 1 - первая форма колебаний; 2 - вторая форма колебаний; 3 - третья форма колебаний; 4 - четвертая форма колебаний.

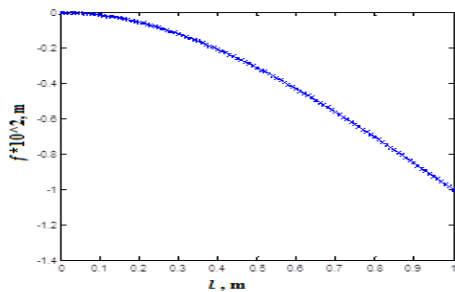


Рис. 4. Максимальное значение прогиба, полученное при помощи аналитического расчета

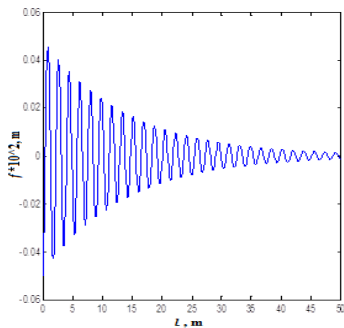


Рис. 5. Амплитудно-временная характеристика колебаний балки

3.3. Использование Action камер

Современные Action камеры позволяют фиксировать быстро протекающие процессы со скоростью до 240 кадров в секунду [6]. При этом разрешение кадра видеоматериала составит 720 строк (1080 строк для некоторых моделей, например - GoPro 6).

Таким образом, за временной интервал между кадрами, объект движущийся со скоростью $V=6$ (м/с) (типичная скорость при низкоскоростном ударе) может сместиться на расстояние $\Delta=0,025$ м. В нашем случае при нагружении падающим грузом (рис. 2).

Зависимость прогиба представлена на рис. 6.

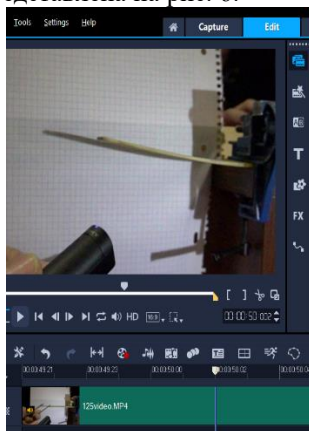


Рис. 6. Максимальное значение прогиба в ходе эксперимента

Для обработки видеоинформации как правило используются программные средства - видеоредакторы. Они позволяют замедлить или увеличить скорость видеосъемки и работать с отдельными кадрами. Разрешение в 720-1080 строк достаточно для выделения отдельных кадров из видеоматериала.

3.4. Методы аудиорегистрации

Современные микрофоны позволяют записывать звук в диапазоне от нескольких Гц до десятков кГц. Это позволяет фиксировать звук обусловленный колебаниями большинства балочных элементов конструкций [7]. Запись звуковых колебаний представлена на рис.7.

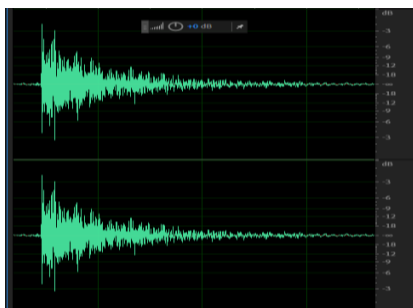


Рис. 7. Амплитудно-временная характеристика колебаний балки, полученная в ходе эксперимента, при помощи высокочувствительного микрофона

Анализ звуковых колебаний проводился с использованием программ - звуковых редакторов (рис. 7). Для обработки видеоинформации использовались программные средства – видеоредакторы (рис. 6). Эти средства позволяют изменять временной масштаб отображения происходящего процесса. Разрешение звукового видеоматериала вполне достаточно для оценки частоты собственных колебаний.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вышеприведенное исследование показывает, что применение звукозаписывающей и видеозаписывающей аппаратуры позволяет достоверно определить частоты собственных колебаний балки изготовленной из композитного материала. Сопоставление точного теоретического решения и результатов, полученных экспериментально с использованием звуко и видео регистрирующей аппаратуры, дает их хорошее соответствие. Использование Action камеры в качестве фиксатора видеоинформации возможно после сопоставления масштаба исследуемого объекта, скорости протекающего процесса и изменения конфигурации системы за межкадровый промежуток времени.

Принципы фиксации скоростных процессов, рассмотренные выше, используются в специальных курсах магистерской подготовки студентов, при выполнении выпускных бакалаврских работ и магистерских диссертаций студентов специальности «Динамика и прочность машин» НИУ «МЭИ», научных исследованиях и могут быть обобщены для решения задач неконсервативной устойчивости и колебаний [8].

Список обозначений

V — скорость движущегося объекта, м/с; U — энергия ударника, Дж;

H — высота, м; m — масса, кг; Δ — смещение, м;

l — длина композитной балки, м; ν — прогиб, м; Δ — отклонение, м.

Литература

1. Bolotin Vladimir V. Stability problems in fracture mechanics. - John Wiley & Sons, Inc. - 1996.-187 с.
2. Динамика удара: Пер. с англ./Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.Ф. и др. - М.: Мир, 1985.
3. Касьянов К. Г., Щугорев В.Н., Подмазов Д.А, Никишин В.И. Исследование напряженно деформированного состояния в слоистой плите при низкоскоростном ударном нагружении. // Материалы XXIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. — МАИ — 2018. — С.228-229.
4. Касаткин А.В., Никишин В.И., Сапунова Л.С. Поведение ортотропного полупространства при динамическом контактом нагружении. // Тез. докл. XXIV-ой МНТК студ. и асп. (14-15 марта 2019 г., Москва) — М.: ООО «Центр полиграфических услуг «Радуга», 2019.
5. GoPro 6 Black. Руководство пользователя. Nevk Advance. 2018г., 108 с.
6. Мурзаханов Г.Х., Щугорев В.Н., Щугорев А.В., Цой В.Э., Использование скоростных Action видеокамер для регистрации быстро протекающих механических процессов // ВЕСТНИК РАЕН. 2018Т.18.№2.
7. Щугорев В.Н. Применение звукорегистрирующей аппаратуры для оценки частот собственных колебаний композитной балки. Тр. 32-й сессии Российского акустического общества. — 2019.
8. Решение неконсервативных задач теории устойчивости // В.П.Радин, Ю.Н. Самогин, В.П.Чирков, А.В. Щугорев. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017.-240 с.

ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АРКИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Хуснутдинов Р.Д.¹, Каюмов Р.А.^{2,3}

(¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, ²Казанский государственный архитектурно-строительный университет, ³Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева)

1. Закритическое поведение стержневой системы

Рассмотрим сначала задачу о сжатии симметричной стержневой системы в виде фермы Мизеса, но с упругим соединением (рис.1.1). Система находится в упругой среде, которую будем моделировать Винклеровским основанием (т.е. с помощью системы пружин так, как это показано на рис.1.1).

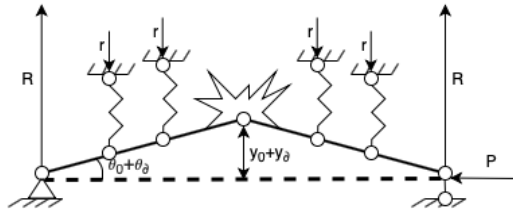


Рис. 1.1

Также будем считать, что стержни изначально имеют некоторый угол наклона, равный θ_0 . Исходя из условия симметрии, будем рассматривать только правую часть системы:

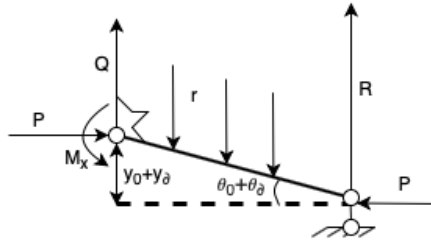


Рис. 1.2

Положим, что реакция системы r пропорциональна только y , то есть:

$$r = ky_\delta = ks(\sin(\theta_\delta + \theta_0) - \sin \theta_0) \quad (1.1)$$

Из условия равновесия получим реакцию опоры R:

$$R = \int_0^L r ds = \frac{L^2 k (\sin(\theta_\delta + \theta_0) - \sin \theta_0)}{2} \quad (1.2)$$

где L – длина звена фермы, а s – длина, отсчитываемая от точки опоры.

Будем считать, что звенья соединены упругой пружиной так, что момент M_x пропорционален углу θ_δ :

$$M_x = G\theta_\delta \quad (1.3)$$

Условие равенства нулю моментов сил относительно точки O дает следующее выражение для силы P :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{y_\delta + y_0} \left(2G\theta_\delta + RL \cos(\theta_\delta + \theta_0) - \frac{RL \cos(\theta_\delta + \theta_0)}{3} \right) = \\ &= \frac{2G\theta_\delta}{L \sin(\theta_\delta + \theta_0)} + \frac{L^2 k \cot(\theta_\delta + \theta_0) (\sin(\theta_\delta + \theta_0) - \sin \theta_0)}{3} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Далее рассмотрим зависимость величины силы P от изменения угла θ_δ (формула 1.1.4) при различных углах θ_0 (см. рис. 1.3). При построении зависимости

было принято $G = 5000 \text{ Н/см}^2$, $L=27 \text{ см}$, $k = 1 \text{ Н/см}^2$. Из графика видно, что при достижении критической нагрузки происходит потеря устойчивости «хлопком».

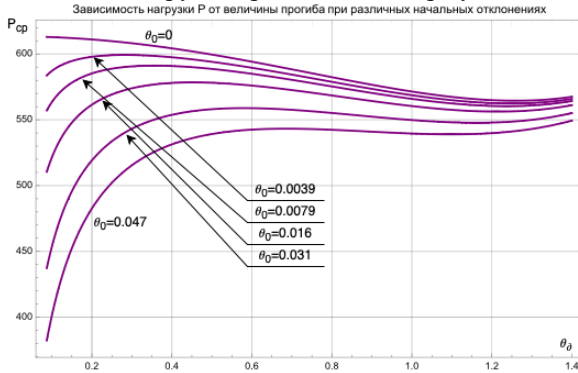


Рис. 1.3

Далее попробуем получить выражение для критической нагрузки P_{crit} . Для этого возьмем первую производную от выражения (1.4) по θ_0 , приравняем получившуюся производную нулю и решим уравнение относительно θ_0 .

$$\frac{2kL^2 \cos \theta_0 \cot(\theta_0 + \theta_0)}{3} + \frac{2G}{L \sin(\theta_0 + \theta_0)} - \frac{2G\theta_0 \cot(\theta_0 + \theta_0)}{L \sin(\theta_0 + \theta_0)} - \frac{kL^2 \cos \theta_0 \cot(\theta_0 + \theta_0)(\sin(\theta_0 + \theta_0) - \sin \theta_0)}{3 \sin^2(\theta_0 + \theta_0)} = 0 \quad (1.5)$$

В представленном виде (1.5) уравнение не решается. Упрощение, путем перехода к малым величинам также не дает результата. Найдем решение, разложив синусы и косинусы в ряд Маклорена.

$$\begin{aligned} \theta_{crit} = & -144G\theta_0 - 24kL^3\theta_0^3 + 24G\theta_0^3 + 28kL^3\theta_0^3 - 10kL^3 + kL^3\theta_0^7 + \\ & (72kL^3\theta_0^2 - 50kL^3\theta_0^4 + 7kL^3\theta_0^6)N - \\ & (72G\theta_0 - 72kL^3\theta_0 + 100kL^3\theta_0^3 - 21kL^3\theta_0^5)N^2 - \\ & (48G - 24kL^3 + 100kL^3\theta_0^2 - 35kL^3\theta_0^4 - 35kL^3\theta_0^4)N^3 + \\ & (35kL^3\theta_0^3 - 50kL^3\theta_0)N^4 + (21kL^3\theta_0^2 - 10kL^3)N^5 + 7kL^3\theta_0N^6 + kL^3N^7, \\ & N \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для выбора из (1.6) подходящего корня найдем вторую производную от P по θ_0 и подставим значения θ_{0crit} . Нагрузка, при которой теряется устойчивость системы, достигается при том θ_{0crit} , при котором вторая производная принимает отрицательно значение.

2. Задача о сжатии арки

Рассмотрим теперь арку, нагруженную сжимающей силой P и находящуюся в упругой среде (это может быть также изогнутое волокно в матрице).

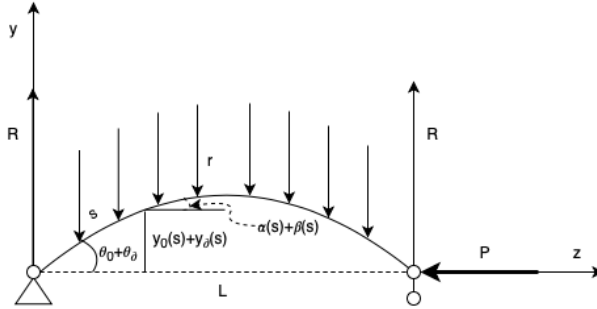


Рис. 2.1

Через s обозначим длину дуги, отсчитываемой от опоры, полную длину балки обозначим через L , начальный угол наклона касательной к оси балки у опоры через θ_0 , а приращение этого угла в результате деформации - через θ_δ (см. рис. 2.1). Имеем следующие соотношения:

$$\frac{dz}{ds} = \cos(\alpha(s) + \beta(s)), \quad \frac{dy}{ds} = \sin(\alpha(s) + \beta(s)) \quad (2.1)$$

Из соотношений (2.1) получим

$$z_i = \int_0^{s_i} \cos(\alpha(s) + \beta(s)) ds, \quad y_i = \int_0^{s_i} \sin(\alpha(s) + \beta(s)) ds \quad (2.2)$$

Будем считать, что реакция опоры r определяется только вертикальным перемещением отрезка ds , то есть:

$$r(s) = ky_\delta(s) \quad (2.3)$$

где

$$y_\delta = y - y_0 = \int_0^s (\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha) ds \quad (2.4)$$

Введем следующую аппроксимацию:

$$\alpha(s) = \theta_0 - \frac{2s\theta_0}{L}, \quad \beta(s) = \theta_\delta - \frac{2s\theta_\delta}{L} \quad (2.5)$$

Рассмотрим левую часть балки, отсеченную на расстоянии z_i от опоры (рис. 2.2).

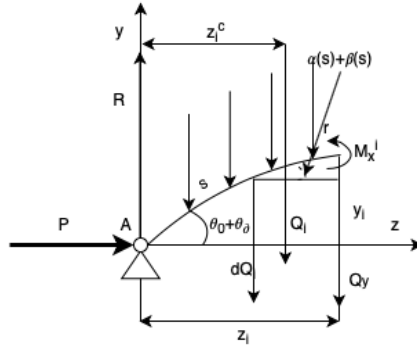


Рис. 2.2

Вычислим изгибающий момент M_x^i :

$$M_x^i = Rz_i - Q_i(z_i - z_i^c) - Py_i \quad (2.6)$$

Теперь найдем Q_i :

$$Q_i = \int_0^{s_i} dQ_i = \int_0^{s_i} r(s) ds = k \int_0^{s_i} y_\partial(s) ds \quad (2.7)$$

Из условия равновесия найдем реакцию R :

$$R = \frac{1}{2} \int_0^L r ds = \frac{k}{2} \int_0^L y_\partial(s) ds \quad (2.8)$$

Момент реактивных сил относительно точки А определим следующим образом:

$$M_A^i = \int_0^{s_i} z(s) r(s) ds = k \int_0^{s_i} z(s) y_\partial(s) ds \quad (2.9)$$

С другой стороны, выразим его через Q_i :

$$M_A^i = Q_i z_i^c \quad (2.10)$$

Перепишем теперь выражение для M_x^i :

$$M_x^i = Rz_i - Py_i - Q_i z_i + M_A^i \quad (2.11)$$

Уравнение изгиба элемента балки запишем в следующем виде:

$$EJ \frac{d\beta}{ds} = M_x \quad (2.12)$$

Таким образом, после подстановки в (2.12) выражений (2.7), (2.10) и (2.11), получим уравнение, из которого получим выражение для силы P :

$$P = \frac{(R - Q_i)z_i + M_A^i - EJ \frac{d\beta}{ds}}{y_i} = \frac{k \left(\frac{1}{2} \int_0^L y_i(s) ds - k \int_0^{s_i} y_i(s) ds \right) z_i + k \int_0^{s_i} z_i(s) y_\delta(s) ds - EJ \frac{d\beta}{ds}}{y_i(s)} \tag{2.13}$$

Для нахождения нагрузки P воспользуемся методом коллокаций. Для этого условно поделим арку на n частей, количество которых будем подбирать из условия, что разница средней величины нагрузки при n и n+1 не более 5%.

Построим график средних значений P_{ср} в зависимости от n. Примем, что

$$E = 13 \times 10^7 \text{ Н/м}^2, L = 0.13 \text{ м}, k = 6 \times 10^5 \text{ Н/м}^2,$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64}, d = 0.0005 \text{ м}, \theta_0 = 0.031 \text{ рад}, \theta_\delta = 0.2 \text{ рад}$$

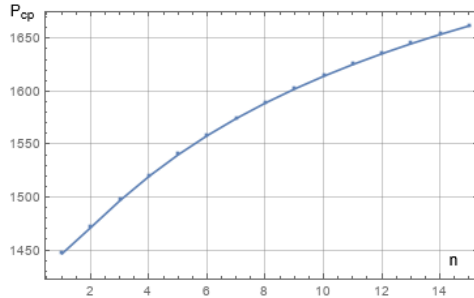


Рис. 2.3

На графике (рис. 2.3) видно, что для достижения необходимой точности достаточно взять n=9.

Зависимости нагрузки P от θ_δ при разных начальных углах θ₀, полученные с помощью (2.13), приведены на рис. 2.4.

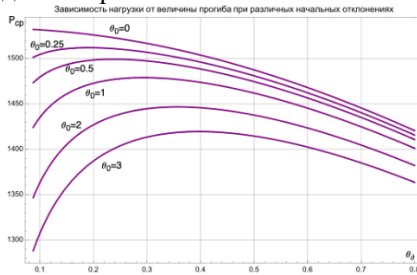


Рис. 2.4

Видно, что также, как и в случае двухзвенного механизма, имеет место потеря устойчивости «хлопком».

Работа выполнена в рамках РНФ (проект № 19-19-00059) и РФФИ (проект № 19-08-00349)

Литература

1. *Каютов Р.А.* Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium// *Mechanics of Solids*, – 2017. – V. 52. No 5, – pp. 575-580. DOI: 10.3103/S0025654417050120

2. *Каюмов Р.А., Тазюков Б.Ф.* Устойчивость изогнутой тонкой упругой пластины, нагруженной поперечной силой // *Изв. ВУЗов. Авиационная техника*, – 2001. – №4. – С. 12-15.

3. *Астапов Н.С., Корнев В.М.* Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании. // *Прикладная механика и техническая физика* 1994 – №2, – С. 130-142 с.

4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712с.

5. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем – М.: Физматгиз, 1963. – 880с.

6. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. – М; Л: ОГИЗ, 1946. – 532с.

Именной указатель

- Агамиров Л.В., 4
Алмуратов Ш., 5
Амирзадеган С., 6
Антуфьев Б.А., 7
Арутюнян А.М., 8
Астапов А.Н., 9
Аунг Чжо Тху, 11
Ахмедов М.Ш., 11, 13
Ахметова Е.Р., 49
Бабайцев А.В., 15
Балтин М.Э., 104, 127, 128
Балтина Т.В., 127, 128
Белов Г.В., 16, 17, 19, 130, 133, 138
Блинкова О.В., 20
Богданов А.Н., 21
Болтаев З.И., 22
Большаков П.В., 24, 40
Бресская А.Д., 25
Бугаев Н.М., 26
Булычев Н.А., 69
Бучанов В.В., 69
Васильев А.Н., 28
Вахтерова Я.А., 30
Велданов В.А., 114, 165
Вестяк В.А., 4, 32
Волкова Л.В., 34
Габсаттаров Р.М., 24, 122
Гавриленков С.И., 36, 37
Гаврюшин С.С., 36, 37, 104, 112
Газизуллин Р.К., 172
Гарибян Б.А., 117
Гафуров У.С., 38
Гачкевич А.Р., 32
Герасимов О.В., 40, 123, 127
Гетманов А.Г., 15
Горбачев П.А., 220
Гориков А.А., 43, 45
Горюнов А.В., 26
Грицков А.В., 41
Гусев А.Н., 47
Гяяева А.Г., 48
Давыдов С.А., 34
Данилевский А.А., 49
Джафарзаде А., 51
Дмитриев В.Г., 53
Евдокимова Е.В., 52
Егорова О.В., 53
Елистратова О.В., 54
Ершова А.Ю., 55
Жаворонок С.И., 58, 61, 86
Завойчинская Э.Б., 143
Зарецкий М.В., 63
Зверев Н.А., 65
Земсков А.В., 34, 38, 65, 155, 161
Ивасько Р.А., 32
Казakov Ю.С., 68
Каптаков М.О., 69
Кашапов Р.Н., 24
Каюмов А.Р., 104
Каюмов Р.А., 70, 72, 74, 227
Киреевков А.А., 61
Коваленко А.Н., 122
Кожеров В.В., 37
Козунова О.В., 75
Колесник С.А., 69, 77, 117
Кондратов Д.В., 20, 48, 54
Коноплев Ю.Г., 122
Коробо Я.А., 79
Коровайцев А.А., 80
Коровайцева Е.А., 80
Кречетова М.М., 82
Крутов И.С., 114, 165
Кузнецов Е.Б., 28, 84
Кузнецова Е.Л., 119
Кузнецова Е.Л., 8
Курбатов А.С., 58, 86
Кушин Р.М., 32
Ларин Н.В., 87
Левицкий Д.Ю., 88
Леонов С.С., 28, 84
Локтева Н.А., 89
Ломовской В.А., 43, 45, 82, 91
Луканкин С.А., 93
Макаревский И.Д., 47
Макаров М.В., 179, 189, 196, 214
Марков В.А., 16, 17, 19, 95, 130, 133, 138
Мартиросов М.И., 55
Михайлова Е.Ю., 97
Могилевич Л.И., 48, 52, 99
Муравьев Э.Н., 69
Муций Р.С., 32
Мусурмонова М.О., 112
Мухамедова И.З., 70, 72, 74
Надарейшвили Г.Г., 104

- Недосукова М.С., 9
Оконечников А.С., 100, 101
Павлова А.В., 102
Паймушин В.Н., 172, 179, 189, 196, 205, 214
Пашков Я.В., 101
Пещерикова О.Н., 41, 88
Платонова О.Д., 91
Погодин В.А., 9
Полякова Н.В., 179, 189
Попов В.С., 52, 99, 104
Попов Ю.В., 17, 19, 95, 130, 133, 138
Попова А.А., 48
Попова Е.В., 52, 54, 99
Прокофьев А.И., 26
Пусев В.И., 165
Пусев В.И., 16, 17, 19, 95, 114, 130, 133, 138
Пусенков А.Г., 75
Рабинский Л.Н., 11, 15, 53
Рагинов И.С., 24
Радин В.П., 220
Райимов Д., 5
Рахмонов Б.С., 11, 13
Ребрина А.Ю., 54
Ревенко В.И., 69
Рожков Г.А., 47
Рубцов С.Е., 102
Русских С.В., 126
Сапунова Л.С., 220
Сафаров И.И., 5, 11, 13, 22
Саченков О.А., 24, 40, 104, 122, 123, 127, 128
Селиванов В.В., 16, 17, 19, 95, 130, 133, 138
Селиванова О.С., 77
Семенова Е.В., 104, 123, 127, 128
Сердюк А.О., 106, 107
Сердюк Д.О., 89, 106, 107
Сидоренко А.С., 63
Симонов-Емельянов И.Д., 25
Скобельцын С.А., 109
Скопичев П.Д., 89
Смирнов М.В., 112
Солиев А.А., 112
Сотский М.Ю., 114, 165
Старовойтов Э.И., 30, 41, 88, 97
Стаценко Е.О., 40
Тазюков Б.Ф., 123
Тарлаковский Д.В., 32, 68, 112, 116, 155
Тархов Д.А., 28
Телятников И.С., 102
Тешаев М.Х., 5, 11, 13, 22
Тлеулинов М.К., 115
Толоконников Л.А., 109
Файкин Г.М., 161
Фам Дык Тхонг, 116
Федотенков Г.В., 8, 30, 41, 61, 88, 97, 100, 101, 106, 107
Фирсов В.А., 205, 214
Формалев В.Ф., 117, 119
Фролов В.В., 16, 17, 19, 130, 133, 138
Хабибуллин А.А., 122
Харин Н.В., 40, 123
Холмогоров С.А., 196, 214
Хомидов Ф., 22
Хуснутдинов Р.Д., 227
Чебаков Д.В., 112
Черненко А.В., 99
Чирков В.П., 220
Шакирзянов Ф.Р., 74, 124
Шакирова А.М., 70, 72, 74
Шатохина С.А., 82
Шнишкин В.М., 205
Шнишов М.А., 179, 189
Шклярчук Ф.Н., 126
Шоришина А.С., 91
Шукуров А.М., 112
Щугорев В.Н., 220
Щугорев А.В., 220
Юдин С.И., 104
Яикова В.В., 104, 127, 128

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ	4
<i>Агамиров Л.В., Вестяк В.А.</i> Применение теории подобия усталостного разрушения к расчету деталей машин в связи с вариацией долговечности.....	4
<i>Алмуратов Ш., Райимов Д., Сафаров И.И., Тешаев М.Х.</i> О собственных крутильных колебаниях цилиндрической оболочки в вязкоупругой среде.....	5
<i>Амирзадеган С.</i> Нелинейный панельный флаттер изогнутой пластины.....	6
<i>Антуфьев Б.А.</i> Гидроупругое деформирование цилиндрической оболочки с жидкостью под действием подвижной нагрузки.....	7
<i>Арутюнян А.М., Кузнецова Ел.Л., Федотенков Г.В.</i> Начально-краевая задача для упругого полупространства с полостью.....	8
<i>Астапов А.Н., Недосукова М.С., Погодин В.А.</i> Исследование деградации уукм с пироуглеродной матрицей при низкотемпературном окислении.....	9
<i>Аунг Чжо Тху, Рабинский Л.Н.</i> Моделирование контакта овальной цилиндрической оболочки с жесткими преградами в условиях внутреннего избыточного давления.....	11
<i>Ахмедов М.Ш., Рахмонов Б.С., Сафаров И.И., Тешаев М.Х.</i> Натурно-полевые исследования процесса распространения энергии сейсмозрывного импульса от источника взрыва.....	11
<i>Ахмедов М.Ш., Рахмонов Б.С., Сафаров И.И., Тешаев М.Х.</i> Натурное исследование поведения подземного цилиндрического сооружения при действиях сейсмозрывных волн.....	13
<i>Бабайцев А.В., Гетманов А.Г., Рабинский Л.Н.</i> Оценка прочности покрытия в условиях испытаний на отрыв консольно-закрепленного образца.....	15
<i>Белов Г.В., Марков В.А., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.</i> О расчётной модели внутреннего оборудования носового отсека летательного аппарата при деформировании и уплотнении.....	16
<i>Белов Г.В., Марков В.А., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.</i> Численное моделирование деформирования и уплотнения блока внутреннего оборудования носового отсека летательного аппарата.....	16
<i>Белов Г.В., Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.</i> О нагружении конечной массы при высокоскоростном ударе высокопористого цилиндра.....	17

<i>Белов Г.В., Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.</i> О нагружении жесткой стенки при высокоскоростном ударе высокопористого цилиндра.....	19
<i>Блинкова О.В., Кондратов Д.В.</i> Математическая модель виброопоры с вязкой сжимаемой жидкостью и упругой пластиной.....	20
<i>Богданов А.Н.</i> Локальные и нелокальные эффекты в динамике нелинейного возмущения, прогрессирующего через неоднородную среду.....	21
<i>Болтаев З.И., Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Хомидов Ф.</i> О собственных волнах в пространственном вязкоупругом цилиндре с радиальной трещиной.....	22
<i>Большаков П.В., Габсаттаров Р.М., Кашипов Р.Н., Рагинов И.С., Саченков О.А.</i> Структурная оптимизация конструкции для аддитивного производства.....	24
<i>Бресская А.Д., Симонов-Емельянов И.Д.</i> Физико-химические свойства эпоксидных олигомеров с лапроксидами для создания низковязких связующих.....	25
<i>Бугаев Н.М., Горюнов А.В., Прокофьев А.И.</i> Термонапряженное состояние подкрепленной усеченной конической оболочки при импульсном нагреве.....	26
<i>Васильев А.Н., Кузнецов Е.Б., Леонов С.С., Тархов Д.А.</i> Метод идентификации характеристик ползучести на основе полуэмпирических рекуррентных нейронных сетей.....	28
<i>Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В., Старовойтов Э.И.</i> Реконструкция пространственного распределения нестационарной нагрузки для упругого стержня конечной длины.....	30
<i>Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Ивасько Р.А., Кушнир Р.М., Мусий Р.С., Тарлаковский Д.В.</i> Термонапряженное состояние электропроводного слоя при импульсном электромагнитном воздействии с учетом процесса термоупругого рассеивания энергии.....	32
<i>Волкова Л.В., Давыдов С.А., Земсков А.В.</i> Метод эквивалентных граничных условий для неидеальных твердых термоупругодиффузионных растворов.....	34
<i>Гавриленков С. И., Гаврюшин С.С.</i> Интеграция технологических критериев в процесс управления жизненным циклом тензорезисторного силоизмерительного датчика.....	36
<i>Гавриленков С.И., Гаврюшин С.С., Кожеров В.В.</i> Разработка конструкции и определение основных параметров автоматизированного стенда для отработки алгоритмов обработки данных автоматических автомобильных весов.....	37

<i>Гафуров У.С., Земсков А.В.</i> Исследование изгибных упругодиффузионных колебаний балки тимошенко с учётом релаксации диффузионных потоков	38
<i>Герасимов О.В., Большаков П.В., Харин Н.В., Стаценко Е.О., Саченков О.А.</i> Конечно-элементное моделирование с учетом данных компьютерной томографии.....	40
<i>Грицков А.В., Пещерикова О.Н., Федотенков Г.В., Старовойтов Э.И.</i> Исследование влияния параметров деформируемого основания на процесс нестационарного контактного взаимодействия балки тимошенко и абсолютно твердого ударника.....	41
<i>Горшков А.А., Ломовской В.А.</i> Дефект модуля сдвига и возможность его описания дробно-экспоненциальной функцией	43
<i>Горшков А.А., Ломовской В.А.</i> Использование ядра кольрауша в теоретическом анализе спектров внутреннего трения	45
<i>Гусев А.Н., Макаревский И.Д., Рожков Г.А.</i> Исследование НДС и динамического отклика блока выброса помеховых пиропатронов.....	47
<i>Гязева А.Г., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И., Попова А.А.</i> Математическая модель гидродинамической виброопоры с упругим геометрически нелинейным ребристым статором.....	48
<i>Данилевский А.А., Ахметова Е.Р.</i> Применение VR- и AR-технологий в промышленности	49
<i>Джафарзаде А.</i> О реакциях в узлах навески рулей при многошарнирном соединении составных несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов.....	51
<i>Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова Е.В.</i> Моделирование нелинейных волн деформации в стенках кольцевого канала, заполненного вязкой жидкостью и окруженного упругой средой.....	52
<i>Дмитриев В.Г., Егорова О.В., Рабинский Л.Н.</i> Верификация вариационно-разностных моделей тонкостенных гибких систем.....	53
<i>Елистратова О.В., Кондратов Д.В., Попова Е.В., Ребрина А.Ю.</i> Численное исследование ачх прогибов трех соосных оболочек, взаимодействующих с двумя вязкими несжимаемыми жидкостями между ними.....	54
<i>Ериова А. Ю., Мартиросов М. И.</i> Численное исследование деформирования и разрушения элемента авиаконструкции из полимерного композиционного материала	55
<i>Жаворонок С.И., Курбатов А.С.</i> О различных формах квазиканонических уравнений гамильтона расширенной теории оболочек n-го порядка	58

<i>Жаворонок С. И.</i> Об уравнениях совместности в теории оболочек высшего порядка	61
<i>Жаворонок С. И., Киреевков А.А., Федотенков Г.В.</i> Движение сферической оболочки по горизонтальной плоскости с учетом трения.....	61
<i>Зарецкий М.В., Сидоренко А.С.</i> Долговечность тонкостенной конструкции со сварными соединениями при случайном возбуждении	63
<i>Зверев Н.А., Земсков А.В.</i> Нестационарная механо диффузия цилиндрических тел.....	65
<i>Казаков Ю.С., Тарлаковский Д.В.</i> Нестационарная контактная задача о внедрении гладкого цилиндрического ударника в упругую полуплоскость с учетом трения и подвижности границ	68
<i>Каптаков М.О., Булычев Н.А., Колесник С.А., Бучанов В.В., Муравьев Э.Н., Ревенко В.И.</i> Разделение натриево-силикатного стекла методом лазерного управляемого термораскалывания при малом поглощении энергии луча.....	69
<i>Каюмов Р.А., Мухамедова И.З., Шакирова А.М.</i> Моделирование деструкции стеклопластика при совместном действии силовых факторов и щелочной среды	70
<i>Каюмов Р.А., Мухамедова И.З., Шакирова А.М.</i> Моделирование потери устойчивости арки при больших деформациях.....	72
<i>Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Мухамедова И.З., Шакирова А.М.</i> Большие прогибы и потеря устойчивости вязкоупругих панелей при наличии поперечного сдвига.....	74
<i>Козунова О.В., Пусенков А.Г.</i> Нелинейный расчет балочной плиты на клиновидном основании.....	75
<i>Колесник С.А., Селиванова О.С.</i> Исследование теплопереноса в анизотропном полупространстве под действием точечного источника тепла	77
<i>Коребо Я.А.</i> Постановка задачи о колебаниях трехслойной круговой пластины ступенчато-переменной толщины.....	79
<i>Коровайцев А.А., Коровайцева Е.А.</i> Влияние параметров вычислительного алгоритма на результаты решения задач теории мягких оболочек.....	80
<i>Кречетова М. М., Ломовской В. А., Шатохина С. А.</i> Выделение функции релаксации в сложных диссипативных процессах (β_k - процесс в пэ).....	82
<i>Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.</i> Метод продолжения решения по параметру в задаче о неустановившейся ползучести нагретой толстостенной цилиндрической трубы с учетом больших перемещений.....	84

<i>Курбатов А.С., Жаворонок С.И.</i> Исследование задачи динамической потери устойчивости цилиндрических оболочек под действием интенсивных температурных воздействий.....	86
<i>Ларин Н.В.</i> Рассеяние звуковых волн термоупругими телами с покрытиями	87
<i>Левицкий Д.Ю., Пещерикина О.Н., Федотенков Г.В., Старовойтов Э.И.</i> Реконструкция нестационарной нагрузки, воздействующей на пластину тимошенко.....	88
<i>Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д.</i> Нестационарная динамика тонких анизотропных упругих цилиндрических оболочек	89
<i>Ломовской В.А., Платонова О.Д., Шоришина А.С.</i> Описание температурной зависимости области локальной неупругости канифоли.....	91
<i>Луканкин С.А.</i> Построение оптимального алгоритма определения достоверных численных значений параметра критической нагрузки и функций формы потери устойчивости многослойных тонкостенных конструкций со слоями переменной толщины	93
<i>Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В.</i> О натуральных испытаниях железобетонных преград при высокоскоростном ударе самолетов	95
<i>Михайлова Е.Ю., Старовойтов Э.И., Федотенков Г.В.</i> Контактные напряжения в нестационарной задаче для полупространства с покрытием.....	97
<i>Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова Е.В., Черненко А.В.</i> Вынужденные колебания круглой трехслойной пластины, образующей нижнюю стенку канала, заполненного пульсирующей жидкостью.....	99
<i>Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С.</i> Нестационарная контактная задача для штампа и упругой полуплоскости с учетом адгезии	100
<i>Оконечников А.С., Паишков Я.В., Федотенков Г.В.</i> Нестационарное взаимодействие мембраны и штампа под действием адгезионных сил	101
<i>Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния слоисто-структурированных гетерогенных сред при вибровоздействиях.....	102
<i>Попов В.С., Гаврюшин С.С., Юдин С.И., Надарейивили Г.Г.</i> Расчетный анализ вынужденных колебаний системы выпуска двс с учетом параметров элементов подвеса	104
<i>Семенова Е.В., Яикова В.В., Балтин М.Э., Каюмов А.Р., Саченков О.А.</i> Оценка механических и морфологических свойств биологических объектов	104

<i>Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В.</i> Функция Грина для неограниченной тонкой анизотропной пластины.....	106
<i>Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В.</i> Функция влияния для пластины с произвольной анизотропией свойств материала.....	107
<i>Скобельцын С.А., Толоконников Л.А.</i> Определение параметров неоднородности покрытия упругого эллипсоида по рассеянному звуку	109
<i>Смирнов М.В., Гаврюшин С.С., Чебаков Д.В.</i> Испытательный стенд для измерения параметров модели транспортного средства.....	112
<i>Солшев А.А., Тарлаковский Д.В., Мусурмонова М.О., Шжукуров А.М.</i> Распространение нестационарных волн сдвига в упругой среде, ограниченной двумя концентричными сферическими поверхностями	112
<i>Сотский М.Ю., Велданов В.А., Крутов И.С., Пусев В.И.</i> Ведущее устройство для инерциальных измерительных зондов	114
<i>Глеулинов М.К.</i> О некоторых нелинейных явлениях и эффектах в динамике несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов	115
<i>Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д.В.</i> Нестационарный поперечный изгиб бесконечной электромагнитоупругой балки Бернулли-Эйлера.....	116
<i>Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А.</i> Исследование сопряженного теплообмена между газодинамическим пристенным слоем и анизотропным телом на основе аналитического решения.....	117
<i>Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л.</i> Исследование теплопереноса в композиционных материалах на основе универсального закона разложения связующих	119
<i>Хабибуллин А.А., Коваленко А.Н., Габсаттаров Р.М., Коноплев Ю.Г., Саченков О.А.</i> Персоналифицированная оценка ндс эндопротезированного тазобедренного сустава.....	122
<i>Харин Н.В., Герасимов О.В., Саченков О.А., Тазюков Б.Ф., Семенова Е.В.</i> Определение распределения ортотропных свойств объекта по данным компьютерной томографии.....	123
<i>Шакирзянов Ф.Р.</i> Определяющие соотношения теории ползучести для полимерного композитного материала.....	124
<i>Шклярчук Ф.Н., Русских С.В.</i> Метод решения задачи устранения колебаний нелинейных систем с переменными параметрами в момент остановки после конечного передвижения.....	126
<i>Яикова В.В., Семенова Е.В., Герасимов О.В., Балтин М.Э., Балтина Т.В., Саченков О.А.</i> О влиянии внешнего силового воздействия на структуру костной ткани.....	127

<i>Яикова В.В., Семенова Е.В., Балтин М.Э., Балтина Т.В., Саченков О.А.</i> Модель Коэна для описания формирования костной ткани	128
ИЗБРАННЫЕ ДОКЛАДЫ	130
<i>Белов Г.В., Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.</i> К расчётной модели внутреннего оборудования носового отсека летательного аппарата при деформировании и уплотнении	130
<i>Белов Г.В., Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.</i> О деформировании и уплотнении блока внутреннего оборудования носового отсека летательного аппарата	133
<i>Белов Г.В., Марков В.А., Попов Ю.В., Пусев В.И., Селиванов В.В., Фролов В.В.</i> Особенности нагружения жесткой стенки при ударе высокопористого цилиндра.....	138
<i>Завойчинская Э.Б.</i> Прогнозирование ресурса лопатки газотурбинного двигателя при асимметричном цикле эксплуатационного нагружения	143
<i>Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.</i> Изотропная многокомпонентная пластина кирхгофа под действием нестационарных упругодиффузионных возмущений	155
<i>Земсков А.В., Файкин Г.М.</i> Изгиб консольной балки бернулли - эйлера с учетом диффузии	161
<i>Сотский М.Ю., Велданов В.А., Крутов И.С., Пусев В.И.</i> Модернизация технологии ведения измерительных зондов на этапе ускорения.....	165
<i>Паймушин В.Н., Газизуллин Р.К.</i> Исследование прохождения звуковой волны сквозь композитную пластину, находящуюся между преградами, на основе трехмерных уравнений теории упругости.....	172
<i>Паймушин В.Н., Макаров М.В., Полякова Н.В., Шишов М.А.</i> Исследование форм потери устойчивости стержня из волокнистого композита при осевом сжатии по трем уточненным вариантам теории.....	179
<i>Паймушин В.Н., Макаров М.В., Полякова Н.В., Шишов М.А.</i> Уточненные нелинейные модели деформирования по цилиндрической форме пластин из волокнистых композитов.....	189
<i>Паймушин В.Н., Макаров М.В., Холмогоров С.А.</i> Исследование сдвиговой формы потери устойчивости композитного внешнего слоя трехслойного тест-образца при четырехточечном изгибе методом конечных сумм.....	196
<i>Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М.</i> Определение демпфирующих свойств пластины с интегральным демпфирующим	

покрытием на основе исследования комплексных частот свободных колебаний.....	205
<i>Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Макаров М.В., Холмогоров С.А.</i> Экспериментальные исследования разрушения трёхслойных тест-образцов с композитными несущими слоями при четырёхточечном изгибе	214
<i>Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев В.Н., Щугорев А.В., Сапунова Л.С., Горбачев П.А.</i> Расчетно- экспериментальное исследование колебаний композитных балок с использованием скоростной видео регистрации	220
<i>Хуснутдинов Р.Д., Каюмов Р.А.</i> Закритическое поведение арки в упругой среде	227
<i>Именной указатель.....</i>	234

**МАТЕРИАЛЫ XXVI МЕЖДУНАРОДНОГО СИМПОЗИУМА
«ДИНАМИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ И СПЛОШНЫХ СРЕД»**

им. А.Г. Горшкова

Вяичи, 16 – 20 марта 2020 г.

Подписано в печать 20.04.2020 г.

Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная. Гарнитура Times New Roman.

Усл. печ. л. 12,75. Зак. № 6511. Тираж 150 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО "ТРП"

127137, Москва, ул. Правды, д. 24, стр. 3.