КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ*

Кафедра математической статистики

А.В. Казанцев

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Учебное пособие

КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
2013

УДК 510.63; 51.001.8
ББК 22.12я7
К14

Печатается по решению
методической комиссии института вычислительной математики и информационных технологий
Протокол № 8 от 11 апреля 2013 г.

заседания кафедры математической статистики
Протокол № 9 от 3 апреля 2013 г.

Научный редактор –
доктор физ.-мат. наук, зав. каф. мат. стат. КФУ В.С. Желтухин

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. КФУ В.Ю. Михайлов;
канд. филос. наук, доц. КГМУ С.Ф. Нагуманова;
канд. технич. наук, доц. КНИТУ-КАИ Н.Н. Русяев

Казанцев А.В.
К14 **Элементы математической логики:** учеб. пособие / А.В. Казанцев. – Казань: Казанский университет, 2013. – 148 с.

ISBN 978-5-00019-115-6

Учебное пособие посвящено классическим разделам математической логики. Предназначено для студентов гуманитарных специальностей университетов. Обобщает опыт подготовки к экзамену и работы с учебной литературой. Может быть полезно начинающим преподавателям как вариант выбора стиля преподавания.

ISBN 978-5-00019-115-6

УДК 510.63; 51.001.8
ББК 22.12я7

Светлой памяти Ольги Поликарповны Сорокиной –
легендарного директора тридцать девятой школы

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие представляет собой обработку студенческого конспекта лекций по математической логике, прочитанных несколько лет назад профессором Н.К. Замовым на одном из гуманитарных факультетов КФУ. Интрига (или *отсутствующая структура* в смысле У. Эко) предлагаемого проекта состоит в том, что составитель пособия ***не*** является логиком по специальности – он преподает математический анализ. Когда-то противостояние между адептами «непрерывной» и «дискретной» математики доходило до уровня «битвы мировоззрений», но теперь, когда старые споры утихли, интересно представить, что будет, если человек с некоторым стажем «непрерывной» работы попытается войти в «дискретный мир».

Любые лекции всегда помнят своего автора, и образ Наиля Калимовича Замова – известного ученого и блестящего преподавателя – незримо присутствует в данном пособии. Образ этот многогранен, и переход его от ипостаси грозного проректора, находившегося в эпицентре университетских коллизий рубежа тысячелетий, к преподавательскому воплощению был для составителя пособия открытием не меньшим, чем предлагаемый лекционный курс.

Следует сказать, что составитель довольно редко «пересекался» с профессором Замовым, но тем более важно одно такое «пересечение», которое произошло еще до нашего знакомства. Дело в том, что «мы с Наиль Калимычем» учились в одной школе. Но не это главное – главное то, что «в его время» школу возглавляла одна из самых замечательных педагогов Татарстана – Ольга Поликарповна Сорокина, чье директорское служение в школах республики восходило к годам Великой Отечественной... Уже «в мое время» с ней дружили мои родители, точнее, я «врастал» в эту дружбу, которая началась, конечно, гораздо раньше... Подобные «пересечения», а теперь лучше сказать – совпадения, представляются знаковыми, даже мистическими, как-то по-особому высвечивая прошлое... И напоминая о том, что пришла пора еще раз почтить память выдающегося учителя и просто хорошего человека...

Настоящая книга продолжает серию работ автора, посвященных изучению культурных традиций Казанского университета, его институциональных особенностей, руководящих традиций, ритуалов и мистерий, а также клубящихся под его безмятежной гладью скрытых драм и глубинных потрясений. В условиях распада этического поля образования решающее значение приобретает логика, бесстрастно фиксирующая взлеты и падения сменяющих друг друга правил и установлений. Разумеется, рамки пособия не позволят ему замахнуться на слишком многое, тем более что даже если пособие и выйдет, всегда найдутся причины и возможности (наверное, и необходимости) не счесть его таковым. Тем не менее «не счесть алмазов в каменных пещерах», и увлекательное путешествие в мир математической логики, своеобразный The Magical Mystery Tour, несомненно, может стать небезынтересным для студентов, потому что предлагает его и пишет путеводитель по нему не кто иной, как студент, слегка постаревший, но никак не повзрослевший...

После знакомства с рукописью профессор Н.К. Замов квалифицировал ее как труд «философа» (!), решившего разобрать ряд вопросов элементарной математической логики. Значит, задача-минимум выполнена – составителю в чем-то удалось реконструировать «гуманитарные» представления о математике, в очередной раз продемонстрировавшие свою пластичность (посредническую мощь).

Со своей стороны считаю, что данное пособие вносит скромный вклад в дело междисциплинарного взаимодействия частей и подразделений ИВМиИТ КФУ и может служить подспорьем для студентов нематематических специальностей, изучающих математическую логику по книгам и лекциям признанных авторитетов.

С уважением, А. Казанцев,
15 февраля 2013 г.

ВВЕДЕНИЕ

I

Согласно «факультетскому фольклору», математическая логика служит прежде всего целям программирования. Данное представление, хотя и отдает известным прагматизмом, все-таки имеет под собой историческую и даже романтическую основу. Дело в том, что первым известным в мире программистом была легендарная Ада Августа Лавлейс (урожденная леди Байрон), а ее учителем – Огастес де Морган, один из отцов-основателей математической логики. Две отрасли знания возникли одновременно и шагают рука об руку вот уже почти два века!

Но и это еще не все. Можно вспомнить, что дочь другого отца-основателя математической логики, которого звали Джордж Буль (помните – булевы структуры?), была автором прогремевшего в свое время романа «Овод». Таким образом, великая английская литература на самом романтичном своем витке – от лорда Байрона до Этель Лилиан Войнич – стала «повивальной бабкой» математической логики и, как знать, может быть и программирования – *в самом широком смысле.* Откуда, согласно известной гипотезе Сепира-Уорфа, следует, что мы мыслим как англичане...

...Аллюзий много. Достаточно увидеть в «Оводе» возвращение долга Байрону, дочь которого никогда не знала своего отца, как и Артур Бертон. Войнич продлила жизнь Ривареса за грань байроновского «эсхатона», но какой ценой!.. Лучше поговорить о традициях свободомыслия, «поверенных алгеброй» не в самом переносном смысле, о возвращении былого достоинства народам, создавшим *античность* – «повивальную бабку» европейской цивилизации XIX века, о жалящей логике памфлетов Овода, в которой слышна полемика средневековых университетских и богословских баталий...

Но мы должны признаться в определенной прагматичности и даже циничности нашего замысла относительно введения. Прежде всего, здесь должно быть написано что-нибудь респектабельное – чтобы чтение книги не мешало ее *перелистыванию* – именно это только что сделано. Плавный переход от логики к литературе должен был замотивировать появление в самом начале пособия литературы уже по предмету – как это и принято на лекциях.

II

Разумеется, слово «литература» и ее список будут, как положено, приведены в конце книги, и с номерами, но таким образом мы решаем и задачу увеличения числа страниц, которая в нашем случае имеет, как в «Обитаемом острове», характер элементарного выживания.

Очевидно, *главным пособием* для нас будут

[Л] Лекции по математической логике / Замов Н.К. Математическая логика / *Студенческий конспект*. – Казань, КГУ, 2010.

Получился «страшно интересный» пример перехода от формализованного знания (логика) к неформализованному знанию (студента-гуманитария), а от него – вновь к формализованному знанию (но уже «мАтанщика» – так преподавателей математического анализа иногда называют студенты). Формализованное и неформализованное знание – это «краеугольные камни» инновационной эпистемологии И. Нонака – Х. Такеучи – *post*-идеологов «японского чуда». Их мы здесь касаться не будем. Естественно, данные **[Л]**екции не являются общедоступными, поэтому проведем маленький экскурс по библиотеке Казанского университета в соответствии с литературой, рекомендованной в **[Л]**.

В качестве первого пункта списка указанной литературы приведем книгу

[Но] Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: уч-к для вузов.– СПб.: Питер, 2004. – 2-е изд. – 364 с.: ил. – (Серия «Учебник для вузов»).

Хорошо оформленное современное введение в предмет. Книгу просто приятно держать в руках – кажется, что она «пахнет типографией». Но, что еще более важно, данная книга близка к **[Л]**, и ее нужно обязательно иметь под рукой.

Две следующие книги – это классика:

[Кл] Клини С.К. Математическая логика / пер. с англ. Ю.А. Гастева; под ред. Г.Е. Минца. – М.: Мир, 1973. – 480 с.

[Менд] Мендельсон Э. Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф.А. Кабакова; под ред. С.И. Адяна. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1976. – 2-е изд., испр. – 320 с.: с илл.

Классика – не столько потому, что на самом деле классика, сколько потому, что составитель изучал по ним логику, когда сам был студентом. Интересно же узнать, «что там на самом деле было»! У **[Кл]**ини словно есть что-то аристотелевское: юмор, свободное изложение, ссылки на мнение Стагирита... Одно вот это чего стоит: «И Аристотель, и мы, и человек с улицы обычно согласны между собой в том, что... » (**[Кл]**, с. 170). Возвышает, не правда ли? От всего этого неумолимо веет эковским «Именем Розы», а уж оттуда до живого «вождя перипатетиков» рукой подать... «Классно» было бы в своей работе не просто сослаться на *основоположника всех наук,* а сослаться по существу. Но... мы еще не доросли до этого... Как в фильме, помните, «На войне, как на войне»...

А вот **[Менд]**ельсон по-настоящему энергичен и деловит. Помню, лекции по логике читал нам Юрий Борисович Ермолаев, он был известен своей запредельной лекторской скоростью – писал на доске намного быстрее, чем мы в тетрадях. Но вот что интересно: когда удавалось приноровиться к его манере, она начинала казаться единственно правильной. Словно участвуешь в какой-то бешеной скачке, но с олимпийским спокойствием, даже с некоторой отстраненностью. Этакий Кот Бегемот в свите Воланда в самом конце романа... Ну, не на Буцефале, конечно... На **[Менд]**ельсоне...

Вот еще три книги из рекомендованного списка:

[Столл] Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / пер. с англ. Ю.А. Гастева и И.Х. Шмаина; под ред. Ю.А. Шихановича. – М.: Просвещение, 1968. – 231 с.: ил. (Математическое просвещение).

[КеСТон] Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику / пер. с англ. М.Г. Зайцевой; под ред. И.М. Яглома. – М.: Изд-во ин. лит-ры, 1963. – 488 с.: ил.

[Чёрч] Чёрч А. Введение в математическую логику: I / пер. с англ. В.С. Чернавского; под ред. В.А. Успенского. – М.: Изд-во ин. лит-ры, 1960. – 488 с.

В памяти возникает запах пыли, чего-то клеенчатого и долго лежалого. Задача этих трех книг – почетно украшать рабочий стол и быть перелистываемыми, когда другие источники умолкают. Просматривая такие книги, уже не стыдно *ничего не понимать.* Шестидесятые вообще хорошо вразумляют...

А вот книга настоящего корифея:

[Н] Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1973. – 2-е изд., испр. – 400 с.: ил.

Петр Сергеевич Новиков – по-видимому, один из последних *энциклопедистов* в математике: и «непрерывщик», и «дискретчик». Составитель вспоминает, с каким благоговением читал его работы по теории потенциала. Пусть светлый образ академика П.С. Новикова будет покровителем той миссии, которую несет в мир настоящее пособие...

...Составитель вдруг вспомнил, как работал над текстами **[Л]**екций – это было лето 2010-го – помните, какая стояла засуха? Это к тому, что он сейчас уже не помнит ничего про книги:

[Непей] Непейвода Н.Н. Прикладная логика: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 2-е изд., испр. и доп. – 521 с.

[УВП] Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 136 с.

[ФреБаХ] Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств / пер. с англ. Ю.А. Гастева; под ред. А.С. Есенина-Вольпина. – М.: Мир, 1966. – 556 с.

Помню только, что небесполезно было заглянуть в монографию

[ЕрПа] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика: учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1987. – 2-е изд., испр. и доп. – 336 с.

И еще: в библиотеке обнаружилась также рекомендованная в **[Л]**екциях книга

Шапорев С.Д. Математическая логика... – СПб. ..., 2007, но она оказалась (пока) недоступной...

На этом обзор литературы закончен.

Еще немного романтики. Разумеется, логика начинается отнюдь не с де Моргана и Буля – судя по **[Кл]**, она была и во времена Аристотеля (не забудем и Евклида!), и, осмелимся добавить, до него, просто, наверное, она была не настолько математической. Похоже древние греки не сильно увлекались *структурами*... Другое дело, что, возможно, прав был «старик Шпенглер», утверждая, что у каждой эпохи – своя математика. А какая она у нас?..

Следует также отметить, что «маску студента» составитель все-таки относит к «сильным сторонам» данного пособия – дело в непосредственности и изрядной доле доверия к первоисточникам, даже если их не понимаешь. Впрочем, не все так просто: доверие экономит время, но платить за него приходится поздним прозрением...

III

«Сдобрим» наше введение толикой официоза.

...Если бы нужно было «подстроить» к данному пособию «генеалогию», не зависящую от его конкретной тематики, то составитель позволил бы себе озвучить одно написанное им место в одной коллективной монографии[1]: «...наиболее актуальная сфера приложения усилий в области консалтинга фундаментальных дисциплин – это постановка технологии постоянного обновления учебных курсов, минимизирующей их запаздывание при реагировании на изменения реалий самой науки. Такая технология перепрограммирования предполагает», в частности,

«2) переконцептуализацию соответствующих информационных полей с учетом новых информационных доминант и перепрограммирование соответствующих консалтинговых потоков;

3) проработку «стыков» фундаментальных дисциплин, их взаимные «прорывы» и на этой основе прогнозирование дальнейшего развития соответствующих научных и прикладных направлений;

4) разработку механизмов распознавания одной наукой (дисциплиной, направлением) потенциальной проблематики в рамках другой на уровне как прикладного, так и фундаментального взаимодействия...

Мерами, способствующими запуску подобных технологий перепрограммирования, могут служить», в частности:

«В. Создание специализированных научных подразделений (лабораторий, отделов и т.д.), которые... будут «источниками питания» для уже действующих и вновь создаваемых университетских кафедр и в перспективе заменят их или заполнят организационно ограничиваемый ими методический вакуум...

D. Финансирование «венчурных» научных групп – временных научных коллективов по оценке и развитию новейших научных направлений... »

Вполне современная и актуальная проблематика!

В сущности, *именно так* – следуя данным императивам – *и готовилось данное пособие*, только вместо императивов были «вызовы» со стороны учебного процесса, придававшие подготовке вполне ощутимый драматизм «наперегонки со временем». Была реализована модель «венчурной

---

[1] Инновационные ресурсы вузов региона: потенциал и организационно-экономические механизмы его использования. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2005. С. 11 – 12.

научной группы», только не «по оценке и развитию», а по освоению и осмыслению начальных глав отдельной учебной дисциплины, минимизируя накопленные за семестр запаздывания. Ясно, что для гуманитариев, только что начавших свое восхождение к вершинам знаний, *математическая* логика – это несомненная информационная доминанта, заставляющая их переконцептуализировать окружающие их информационные поля, даже не зная о том, что они это делают. Возможно, данное пособие (консалтинговый поток) поможет им узнать это, возможно, нет, но ценность проделанной работы во многом определяется тем, что теперь она заложена в определенный этап истории развития индивидуальных знаний. И закреплена (уже ставшими романтическими и даже героическими) воспоминаниями о том, как она проходила – этаким Sturm und Drangом, быстрым реагированием на события, хотелось бы сказать – их упреждением, но это – задача следующих пособий. Воистину, успех – от слова «успеть». Но нужно помнить и заветное: «Хорошо, что все кончилось благополучно, а могло кончиться и неблагополучно... »[2] Главный урок проделанной работы: подобные тексты каждый студент должен «вываривать» сам для себя из лекций, практик, лабораторных занятий и, разумеется, литературы – рекомендованной и не очень...

«Из этого возникает еще одна проблема. Поскольку утверждается, что язык, вне зависимости от сферы своего применения, неизбежно *художественен,* т.е. всегда функционирует по законам риторики и метафоры, то из этого следует, что и само мышление человека как такового – в принципе художественно, и любое научное знание существует не в виде строго логического изложения-исследования своего предмета, а в виде полу- или целиком художественного произведения, художественность которого просто раньше не ощущалась и не осознавалась, но которая только одна и придает законченность знанию»[3].

Выше говорилось про Сепира и Уорфа. Оказывается, этого мало: согласно теории Лиотара-Джеймсона в изложении И.П. Ильина, «мир может быть познан только в форме «литературного» дискурса; даже представители естественных наук, например физики, «рассказывают истории» о ядерных частицах... Итак, мир открывается человеку лишь в виде историй, рассказов о нем». А логика?..

В свете всего вышеизложенного интерес представляет не столько распределение материала по книге, сколько распределение по ней *на-*

[2] *Толстой А.Н.* Золотой ключик, или приключения Буратино. М.: Изд-во «Детская литература», 1964. С. 131.
[3] *Ильин И.П.* Постструктурализм. Деконструктивизм. Постмодернизм. М.: Интрада, 1996. 256 с.

строений, ожиданий и (реже) *озарений.* Поэтому речь идет не просто о литературе, а о драматургии... С материалом проще: пособие естественно разделяется на две части, их рабочие названия – *«Заколдованный замок»* и *«Блеск и нищета предикатов»*. Ключевым становится термин «умонастроение». Действительно, содержание первой части – когда вырываешься за пределы таблиц истинности на «оперативный простор» теории доказательств – вызывает ощущение чуда: кажется, что мировой гармонией «поверено» все, а не только алгебра. Вторая же часть производит впечатление «изгнания из рая» – наверное, из-за подспудного вопроса «для любого или не для любого?», столь жгучего для отечественной истории, в которой все, как правило, только «существует». Тем не менее составителю удалось-таки и здесь «нарыть» некую локальную «сенсацию» (как ему показалось, тщательно скрываемую авторитетами), которую он и назначил на роль *катарсиса* ближе к концу пособия.

«Расцветка» книги «неформально выполненными» таблицами и «шпаргаловидными» доказательствами, по всей видимости, из нее исчезнет по каким-нибудь типографским или иным условиям и соображениям. Что ж, если дело этим и ограничится, уже счастье! «Жизнь учит!» – как, в свою очередь, учил нас тов. Хрущёв Н.С. «И она же продолжается» – хочется добавить, но из осторожности воздадим должное ритуалу – основе всякой логики...

IV

Должное свершилось 1 апреля с.г.: в этот день состоялось обсуждение настоящей книги с профессором Н.К. Замовым – событие, которое составитель считает для себя историческим. Все советы и пожелания **[Л]**ектора были учтены, часть из них выделена в работе в виде *Замечаний профессора Замова.* Кроме того, Наиль Калимович напомнил составителю о самом важном: главным учебником, которому следовали **[Л]**екции, был не **[Кл]**ини, а

[МетаКл]ини: Клини С.К. Введение в метаматематику / пер. с англ. А.С. Есенина-Вольпина; под ред. В.А. Успенского. – М.: ИЛ, 1957. – 527 с.

Ну, что ж, «подправим» *катарсис.* В первый раз, что ли?..

Вот теперь, пожалуй, все – и с литературой, и с введением. Шутливый тон – дань политкорректности – чтобы не нагружать **[Л]**ектора большей ответственностью, чем это предполагает студенческая запись **[Л]**екций…

Теперь можно высказываться...

Часть I. Исчисление высказываний

1. Высказывания

Вводные вопросы – самые трудные, не потому, что они на самом деле «самые трудные», а потому, что они *запоминаются* как таковые – с них все начиналось и *тогда* было совершенно непонятным. Поэтому начинать надо *с чего-нибудь* – главное, начать. Мы начнем с «чего-то такого типа» хрестоматии.

[Л], с. 17: Под высказыванием понимают любое предложение (языка), относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно.

[Столл], с. 76: Под *высказыванием* мы понимаем повествовательное предложение, которое имеет то свойство, что оно может быть классифицировано либо как истинное, либо как ложное, но не как то и другое вместе. «Истинность» или «ложность» предложения, которую мы приписываем высказыванию, и есть *истинностное значение* высказывания.

Краткое обозначение: t = «истинность», f = «ложность».

[Н], с. 36 (гл. 1. Алгебра высказываний):

Будем рассматривать различные высказывания, предполагая при этом, что они удовлетворяют закону исключенного третьего и закону противоречия, т.е. каждое высказывание или истинно, или ложно и не может быть одновременно истинно и ложно. (Нет никакой необходимости считать общеобязательными эти законы логики. Но мы ограничиваемся рассмотрением лишь таких вопросов, для которых эти законы имеют место.) Отвлечемся от содержания высказывания и даже от его структуры; в частности, не будем в нем выделять субъект и предикат. Будем ограничиваться только тем его свойством, что оно представляет собой или истину, или ложь. Тогда высказывание можно рассматривать как величину, которая может принимать два значения: «истина» и «ложь».

Примеры. «Собака – животное» = t, «Париж – столица Италии» = f, «3 < 5» = t, «в каждом треугольнике биссектриса делит противоположную сторону пополам» = f. <Последнее высказывание относится к «сфере влияния» логики предикатов>.

Впечатление. В приведенной цитате на «нас давит», так сказать, «апостериорное знание»: мы «боимся» парадоксов и актуальной бесконечности, которые, как сказал бы Гэндальф, «призраком проходят по краю самых древних наших преданий»[4]. На экзамене так говорить, ко-

[4] *Толкин Дж. Р.Р.* Братство Кольца. Первая часть «Властелина Колец». С. 67. Гэндальф говорил про Мордор... Аналогия вполне уместная.

нечно, не надо (мало ли, может быть, экзаменатор больше любит Поттера или Каспиана) – мы просто очерчиваем для себя некие границы. С другой стороны, мы тем самым производим некий «психологический трюк» – населяем наше пока еще разреженное информационное пространство «фантомными персонажами», за которых «держимся» первое время, и которые уступают место «настоящим» по мере их выучивания...

П.С. Новиков сразу «оговаривает» указанные опасения (напр. на с. 66), другие предпочитают отводить им специальные места, «не омрачая» основной текст.

Столь же очевидно, что начинающий должен прочитать надлежащие (и часто не только первые) страницы из **[Менд]**, **[Кл]** и других рекомендованных книг. Помним и о **[МетаКл]**...

2. Высказывания простые и составные; логические (пропозициональные) связки; формулы

Вот хороший образец «динамично развивающегося» текста, когда «все» вводится быстро и сразу (**[Но]**, с. 134-135):

4.1.1. Высказывания.

Элементами логических рассуждений являются утверждения, которые либо истинны, либо ложны, но не то и другое вместе. Такие утверждения называются *(простыми) высказываниями.* Простые высказывания обозначаются *пропозициональными переменными,* принимающими *истинностные значения* «t» и «f»[5]. Из простых высказываний с помощью *логических связок* могут быть построены составные высказывания. Обычно рассматривают следующие логические связки:

Название	Прочтение	Обозначение
Отрицание	не	$\neg$
Конъюнкция	и	&
Дизъюнкция	или	V
Импликация	если..., то	$\rightarrow$
Эквивалентность	тогда и только тогда, когда	$\leftrightarrow$

[5] В оригинале – «И» и «Л», но мы уж – как в лекциях...

Эквивалентность в лекциях почему-то непопулярна (мы иногда будем с ней работать «втихаря»...).

Теперь сделаем еще одну табличку, «не уточняя» (это для себя, тс-с!...):

	язык-объект	язык исследователя	«язык обывателя»
следование	$\to$ (в др. книгах $\supset$)	$\vDash$	$\Rightarrow$
эквивалентность	$\leftrightarrow$ (в др. книгах ~)	$\equiv$	$\Leftrightarrow$

Продолжим **[Но]**:

4.1.2. Формулы.

Правильно построенные составные высказывания называются *(пропозициональными) формулами* (**[Менд]** вместо «формула» говорит «форма»...). Формулы имеют следующий синтаксис[6]:

<формула> – это f *или* t *или* <пропозициональная переменная>
или <¬формула>) *или* (<формула>&<формула>)
или (<формула> V <формула>) *или*
(<формула> → <формула>).

Замечание. Для описания синтаксиса языка использован стандартный прием – контекстно-свободная порождающая грамматика в форме Бэкуса-Наура[7]. Здесь названия синтаксических конструкций заключаются в угловые скобки... (символы для «это» и «или» мы не использовали), все остальные символы означают сами себя. Исчерпывающее изложение теории формальных грамматик применительно к программированию можно найти в [АУ][8].

---

[6] Синтаксис [<гр. syntaxis составление] – *лингв* часть грамматики, изучающая сочетания слов в предложении // Краткий словарь иностранных слов, 1951.

[7] В таких случаях нужно просто сохранять выдержку и хладнокровие. Такие «перлы» предназначены не пугать, а будить воображение, поэтому и допускаются в небольших дозах даже «в самом начале».

[8] [АУ] – *Ахо А., Ульман Дж.* Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. М.: Мир, 1978. (На всякий случай, как Плюшкин, подберем и положим в коробочку – мало ли...)

Для упрощения записи вводится старшинство связок (¬, &, V, →) и лишние скобки опускаются.

Истинностное значение формулы определяется через истинностные значения ее составляющих в соответствии со следующей таблицей:

P	Q	¬P	P&Q	P VQ	P → Q
t	t	f	t	t	t
t	f		f	t	f
f	t	t	f	t	t
f	f		f	f	t

Это – уже Вопрос 3, но здесь он весьма органичен («по инерции» мы «добегаем досюда»; приводится таблица истинности из **[Л]**, а не из **[Но]**).

Всё то же самое, но по другим источникам

[Л], 17-20 с пропусками:

(Еще раз:) *Высказывание* – любое предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывания, с точки зрения их структуры, бывают *элементарными* и *составными*. (**[Кл]**, с. 13, в этом случае говорит об *атомах* и *молекулах*.)

Элементарные – те, которые не содержат в своем составе других высказываний (хочется добавить или заменить на: «те, состав которых игнорируется (в контексте рассматриваемой задачи)»).

Составные – содержащие в себе другие высказывания.

Составные высказывания образуются (из элементарных) с помощью *логических связок*: ¬, &, V, →. Логические связки ¬, &, V, → определяются с помощью *таблиц истинности*.

Таблицы истинности фиксируют только истинность или ложность составных высказываний, исходя из истинности или ложности составляющих. В этом отражается тот факт, что нас интересует только истинность или ложность высказывания. От смысла, содержания, структуры *элементарного* высказывания мы абстрагируемся, они нас не интересуют. Абстрагируемся мы и от смысла и содержания *составного* высказывания – структура его может интересовать нас только в плане его зависимости от элементарных – чтобы вычислять истинностные значения.

Можно остановиться и «пофилософствовать» о связях между понятиями «высказывание», «пропозициональная переменная», «истинностные значения», «(пропозициональная) формула». Суть таких «философствований» – «надевание мундира» той науки, которую мы изучаем, на привычные понятия. В результате мы приучаемся обозначать высказывания буквами и комбинировать их в еще более сложные высказывания с помощью связок. В конечном счете и буквы, и их комбинации мы будем называть формулами. Но прежде, чем к этому прийти, повторим немного в стиле **[Но]**, с. 134:

Простое (элементарное) высказывание *обозначается* пропозициональной переменной (P, Q, R,...).

Составное высказывание *представлено* (пропозициональной) формулой (P&(QVR),...).

«Представлено» – потому, что сказать «обозначается» здесь было бы неточно: обозначение происходит на уровне «комплектующих» составного высказывания, которые потом и составляются в представляющую его пропозициональную формулу.

Переход от *высказываний* к *переменным и формулам* знаменует переход (перевод) с обыденного языка на формальный, хотя в конце концов «высказывания» и «формулы» отождествятся, когда внимание перенесется на какие-то существенные вопросы. Что касается соотношения между понятиями «переменная» и «формула», то различие между ними отчетливо только тогда, когда мы видим перед собой запись формулы в виде комбинации переменных (которые сами могут быть формулами).

«Пропозициональная» – от *proposition* – указывает на природу переменных и формул.

Формула – это истинностнозначная функция истинностных переменных!

[Л], с. 20: *Определение (пропозициональной) формулы*:

1. Пропозициональная переменная является формулой;

2. Пусть A, B – произвольные формулы. Тогда (¬A), (A&B), (AVB) и (A → B) – также формулы;

3. Все формулы должны соответствовать либо 1-му, либо 2-му требованию.

Как произвольная формула будет соответствовать 2-му требованию? Перепишем похожее определение из **[Менд]**, с. 22: (с некоторой «адаптацией»):

1. Все пропозициональные переменные суть пропозициональные формулы.

2. Если A и B – (пропозициональные) формулы, то (¬A), (A&B), (AVB) и (A → B) – также (пропозициональные) формулы.

3. Только те выражения являются (пропозициональными) формулами, для которых это следует из 1 и 2.

Таким образом, любая (пропозициональная) формула должна получаться из конечного числа (пропозициональных) переменных за конечное число шагов; каждый шаг – применение одной логической связки (посмотрите сноску в **[Менд]**, с. 22). В качестве УПР. сопоставьте приведенное определение формулы с определением из **[Но]** выше. (Скобки, в которых стоят формулы в определениях – это так принято на первых порах).

3. Таблицы истинности (= ТИ) для формул

«Согласно традиции», на входах в ТИ считаются стоящими пропозициональные переменные: от них требуется принимать значения t или f и больше ничего. Этот нюанс начнет представляться содержательным при изучении общезначимости после теоремы о подстановке, чтобы потом скрыться в толще дальнейших вопросов...

Начало стандартно и уже было; комментируем сразу после:

P	Q	¬P	P&Q	PVQ	P → Q
t	t	f	t	t	t
t	f		f	t	f
f	t	t	f	t	t
f	f		f	f	t

К этим зависимостям принято относиться как к «данным свыше», если угодно, как к аксиомам. Но так же принято согласовывать их со здравым смыслом (см., напр., **[Менд]**, с. 20-21, – об импликации «→»).

ТИ для эквивалентности ~ часто так же задается «аксиоматически», но мы предпочтем определить ~ через → и &, точнее, P ~ Q определяется как (P→Q) & (Q→P):

P	Q	P → Q	Q → P	P ~ Q
t	t	t	t	t
t	f	f	t	f
f	t	t	f	f
f	f	t	t	t

или, короче

P	Q	P ~ Q
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	t

Заодно иллюстрируется заполнение промежуточных столбцов. Следует отметить, что, строго говоря, ТИ – это то, что изображено справа, т.е. табличное задание (истинностной) функции, в данном случае – функции ~. Однако в разнообразных доказательствах часто бывает нужна ТИ со всеми промежуточными вычислениями (как слева), откуда извлекаются (в качестве подтаблиц) ТИ для подформул. Строгая, краткая форма ТИ (как справа) потребуется ниже при обсуждении ⊨ и ≡.

Таким образом, строгая форма ТИ всегда имеет вид

пропозициональные переменные (атомы) P_1 P_2 ... P_n	формула $A = A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$
t t ... t	t, либо f
t t ... f	t, либо f
………………..	………

На входах – переменные $P_1, P_2, \ldots, P_n$, на выходе – формула A

каждая из 2^n таких строчек «входной части» = конкретных наборов значений для атомов называется *интерпретацией*

ТИ на «выходе» соответствующей строчки – «значение формулы при данной интерпретации»

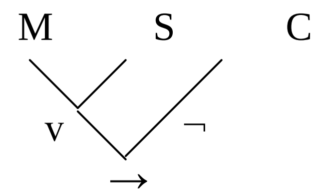
Итак, (еще раз:) ТИ – это просто табличный способ задания функции нескольких переменных, только функции не числовой, а истинностной. «Что характерно», для «строгой» формы ТИ столбец, состоящий только из t, может быть только последним – столбцом значений формулы.

Следующая ТИ, если ее рисовать отдельно, выглядит одиноко. Поэтому мы попытались «выровнять эстетику», достроив таблицу слева текстом справа. Скорее всего, издательство «завернет» такое «пространственное решение». А ну, как не «завернет»?

M	S	C	((MVS)	→	⌉C)
t	t	t	t	f	f
t	t	f	t	t	t
t	f	t	t	f	f
t	f	f	t	t	t
f	t	t	t	f	f
f	t	f	t	t	t
f	f	t	f	t	f
f	f	f	f	t	t

Слева приводится пример построения ТИ для 3-х пропозициональных переменных. Порядок *старшинства* выполнения действий: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация.

Структура формулы:



Как сравнивать ТИ для формул с разным числом атомов?

4. Общезначимые и выполнимые формулы

Вначале – про одну «хитрую вещь» под названием *интерпретация.* «Хитрую» – потому, что у термина «интерпретация» не одно значение, а пока доберешься до нужного, успеешь прочитать много лишнего, расстроишься и т.д. Нужное сейчас вновь перепишем из «скорого на руку» **[Но]**, с. 135-136.

4.1.3. Интерпретация.

Пусть A($x_1,\dots,x_n$) – пропозициональная формула, где $x_1,\dots,x_n$ – входящие в нее пропозициональные переменные. Конкретный набор истинностных значений, приписанных переменным $x_1,\dots,x_n$, называется *интерпретацией* формулы A. Формула может быть истинной (иметь значение t) при одной интерпретации и ложной (иметь значение f) при другой интерпретации. Значение формулы A в интерпретации I будем обозначать I(A). Формула, истинная при некоторой интерпретации, называется *выполнимой.* Формула, истинная при всех возможных интерпретациях, называется *общезначимой* (или *тавтологией*). Формула, ложная при всех возможных интерпретациях, называется *невыполнимой* (или *противоречием*).

Примеры. AV¬A – тавтология, A&¬A – противоречие, A→ ¬A – выполнимая формула, она истинна при I(A) = f.

Теорема. Пусть A – некоторая формула. Тогда:

1. Если A – тавтология, то ¬A – противоречие, и наоборот;
2. Если A – противоречие, то ¬A – тавтология, и наоборот;

3. Если A – тавтология, то неверно, что A – противоречие, но не наоборот[9];

4. Если A – противоречие, то неверно, что A – тавтология, но не наоборот;

5. Если $\neg$A выполнима, то неверно, что A – тавтология;

6. Если A выполнима, то неверно, что A – противоречие.

Доказательство очевидно из определений. УПР.

Теорема. Если формулы A и A → B – тавтологии, то формула B – тавтология.

(Это – к будущему *Modus Ponens.* В соответствии с будущим обозначением $\vDash$ теорема «звучит» так: если $\vDash$A и $\vDash$(A→B), то $\vDash$B).

Доказательство – от противного:

Предположим, найдется интерпретация I, такая что I(B) = f. Но тогда I(A) = t, так как A – тавтология. Значит, по таблице истинности для A→B было бы I(A→B) = f, что противоречит условию теоремы о том, что (A→B) – тавтология.

На этом мы расстаемся с **[Но]** и обращаемся к **[Л]**, с. 96 + *добавление к лекциям:*

Интерпретация – приписывание значений всем (пропозициональным) переменным, которые входят в формулу. (Добавим: иногда при одной интерпретации рассматриваются сразу несколько формул.)

Общезначимая формула – это формула, которая принимает значение t в любой интерпретации, т.е. при любых (истинностных) значениях (входящих в нее пропозициональных) переменных. Тот факт, что «формула A общезначима», шифруется обозначением «$\vDash$A».

Выполнимая формула – это формула, которая истинна хотя бы в одной интерпретации.

Невыполнимая формула – это формула, ложная в каждой интерпретации.

«Важное замечание». Как мы помним, выше было определено *старшинство связок*. «Старшинство терминов» определяется в соответствии со «старшинством источников», возглавляемых **[Л]**. Таким образом, лучше говорить «общезначимая формула», чем «тавтология» и т.д.

УПР. $\neg$A невыполнима тогда и только тогда (т. и т.т.), когда $\vDash$A.

$\vDash\neg$A т. и т.т., когда A невыполнима.

Немного переведем дух – а лучше объявим *обеденный перерыв...*

[9] «Но не наоборот» означает: если неверно, что A – противоречие, то это не значит, что A – тавтология.

§*. «Сборная солянка» (в основном – по [Кл])[10]

Первое определение логической эквивалентности.

Формулы A и B называются *логически эквивалентными*, запись: A ≡ B, если

– в любой интерпретации A и B принимают одинаковые значения (**[Л]**, с. 97), *или, что то же самое,*

– формула B дает t во всех тех, и *только* тех строках ТИ, где A дает t[11], *или, что то же самое,*

– формулы A и B имеют одну и ту же ТИ [12].

УПР. Проверьте, действительно ли «то же самое»?

Тема 1. Какова связь между ~ и ≡ ?

Согласно **[Кл]**, с. 31:

Предметный язык (язык-объект): (материальная) эквивалентность ~ есть операция над формулами с конкретной ТИ; *язык исследователя*: (логическая) эквивалентность ≡ есть отношение между формулами, предписывающее совпадение их ТИ.

Обе эквивалентности согласуются в том смысле, что

(*) сказать «A ≡ B» – это все равно, что сказать «⊨(A~B)».

«Все равно, что сказать» – синоним для «т. и т.т.» – «тогда и только тогда». Таким образом, нужна еще эквивалентность и для «нашего», «обывательского» языка, для которого объектами будут и исходный предметный язык, и язык исследователя. Выше (с. 4) для такой («обывательской») эквивалентности был предложен значок ⇔. Итак, мы работаем с «тремя слоями» языка, правда, «обывательский» заявляет о себе лишь стремлением покороче записывать формулировки (тогда лучше называть его «стенографией»). Беда только в том, что это формулировки вида «эквивалентность A ≡ B эквивалентна эквивалентности ⊨(A~B)». Отсюда и «страда-

---

[10] §* – методическое изобретение незабвенного А.П. Нордена; он имел обыкновение посвящать §* винтовой линии. Линия была одна, а методы – разные, отсюда и образ «сборной солянки».

[11] «Сленг» из **[Кл]**, с. 39.

[12] А если ТИ для A и ТИ для B при одинаковых столбцах значений имеют различные «промежуточные выкладки», считаются ли они «одной и той же» ТИ? Посмотрите еще раз вопрос 3 выше.

ния»: как совместить краткость, аккуратность и минимум обозначений. (По поводу «языка-объекта» и «языка исследователя» см. **[Кл]**, с. 11-12...)

«Переведем (*) на русский»:

<u>А и В имеют одинаковые ТИ т. и т.т., когда при всех интерпретациях (= распределениях истинностных значений) формула (A~B) имеет значение t</u>.

Если вспомнить про обозначение I, то можно «укоротить» формулировку:

<u>А и В имеют одинаковые ТИ т. и т.т., когда I(A~B) = t при любой интерпретации I</u>.

А вот еще короче – и лучше всего (вместо «т. и т.т., когда» пишем ⇔):

<u>А и В имеют одинаковые ТИ ⇔ в ТИ для (A~B) столбец значений содержит только t</u>.

Это – теорема 4 из **[Кл]**, с. 29. Доказательство пишем «другими словами» (но смотрим в оригинал!). Попутно проведем еще один «эксперимент по визуализации», бросая вызов неким стереотипам, за которыми угадываются следы неведомых логик, но их изучение, к сожалению, выходит за рамки настоящего пособия.

Доказательство. Для обозримости представим, как мы будем строить ТИ для формулы (A~B):

P_1	P_2	...	P_n	A	B	A~B
t	t	...	t	q_1	r_1	s_1
t	t	...	f	q_2	r_2	s_2
. . .	. . .			. . .	. . .	. .
f	f	...	f	q_n	r_n	s_n

$q_i, r_j, s_k \in \{t, f\}$

Значение s_i формулы A~B определяется по значениям q_i, r_i формул A, B, исходя из ТИ для связки ~ :

A	B	A~B
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	t

В этой ТИ для любой строки-интерпретации I будет I(A~B) = t т. и т.т., когда I(A) = I(B) $(*_1)$

Но эта ТИ для *связки* ~ «размазана» по трем последним столбцам исходной ТИ для *формулы,* поэтому связь ($*_1$) сохранится и для последней (которая слева):

во всех ее строках $s_i = t$ т. и т.т., когда во всех ее строках $q_i = r_i$

это означает, что столбец значений в ТИ для (A~B) целиком состоит из t

столбцы значений A и B одинаковы; подстраивая к каждому из них по отдельности левое поле исходной ТИ, получаем ТИ для A и ТИ для B, которые, таким образом, одинаковы

Согласно выношенному долгими годами личного опыта мнению составителя подобные «визуализации» математических (да и любых других) доказательств необычайно актуальны, поскольку примерно так и выглядят студенческие конспекты и, что еще более важно, студенческие же шпаргалки...

Тема 2. Связку-эквивалентность A~B можно определить как (A→B)&(B→A) (см. Вопрос 3) и истолковать как одновременное выполнение импликаций A→B и B→A. Можно ли аналогично определить A ≡ B ?

Можно.

Определение логического следования

(по **[Но]**, с. 136, и **[Кл]**, с. 53).

Говорят, что формула B *логически следует* из формулы A (формула B – логическое следствие формулы A), запись: A⊨B,

если формула B имеет значение t при всех интерпретациях, при которых формула A имеет значение t,

или, что то же самое,

если B принимает значение t во всех тех строках ТИ, где его принимает A.

Второе определение логической эквивалентности

(по **[Но]**, с. 136).

Говорят, что формулы A и B *логически эквивалентны,* если они являются логическими следствиями друг друга, т.е.

если A⊨B и B⊨A.

УПР. Докажите, что оба определения логической эквивалентности представляют одно и то же свойство. *Вопрос на повторение*: почему мы не говорим: «первое и второе определения эквивалентны»? (В «обывательских» обозначениях, скажем, в шпаргалке, можно было бы записать «опр. ЛЭ 1 $\Leftrightarrow$ опр. ЛЭ 2»).

Здесь мы прервем наш «параграф-звездочку» – время торопит... Обед заканчивается – надо работать...

5. Теорема о подстановке

В **[Л]**, с. 37, добавление, с. 3, она звучит так:

Теорема о подстановке. **Если формула F, содержащая переменные $P_1, P_2,...,P_n$, общезначима, то формула F*, полученная из F подстановкой произвольных формул $A_1, A_2, ..., A_n$ вместо $P_1, P_2, ..., P_n$, соответственно, также является общезначимой.**

Короче: если $P_1, P_2,...,P_n$ – (пропозициональные) переменные, формула $F = F(P_1, P_2,...,P_n)$ общезначима и $A_1, A_2,..., A_n$ – произвольные формулы, то формула $F^* = F(A_1, A_2,..., A_n)$ также общезначима.

Еще короче: Пусть $F(P_1, P_2,...,P_n)$ – формула с (пропозициональными) переменными $P_1, P_2,...,P_n$.

Тогда если $\vDash F(P_1, P_2,...,P_n)$ и $A_1, A_2,..., A_n$ – произвольные формулы, то $\vDash F(A_1, A_2,...,A_n)$.

Шпаргализованный вариант:

$$\left.\begin{array}{l} \vDash F(P_1, P_2,...,P_n) \\ \\ A_1, A_2,..., A_n \text{ – произвольные формулы} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \vDash F(A_1, A_2,...,A_n).$$

В книгах: **[Кл]**, с. 25 (доказательство надо восстановить из частного случая), **[Столл]**, с. 86 (для n = 1), **[Но]**, с. 138 (n = 1, «модернизация» **[Столл]**’а), **[Менд]**, с. 26 (Предложение 1.2; почти «та» формулировка + «рабоче-крестьянское» доказательство, остановимся на нем).

Доказательство. Какие бы значения ни принимали формулы A_1, $A_2,\ldots,A_n$ при произвольном распределении t и f в своих «атомах», подстановка этих значений в формулу F даст t в силу ее общезначимости. Всё!

Можно еще добавить «явный вид»:

$$F^* = F(A_1(Q_1, Q_2,\ldots, Q_m), A_2(Q_1, Q_2,\ldots, Q_m),\ldots, A_n(Q_1, Q_2,\ldots, Q_m)),$$

который, по крайней мере, показывает, что от чего зависит.

И почитайте **[Менд]**, Предложение 1.2 на с. 26.

В заключение нужно проиллюстрировать, как действует установленное теоремой правило.

Пример. Формула $((P \to Q \vee \neg R)\&Q) \vee \neg((P \to Q \vee \neg R)\&Q)$ общезначима, так как имеет структуру $T \vee \neg T$, а последняя формула общезначима (проверьте!). Мораль: не надо «ломиться без оглядки» и сразу писать ТИ для трех переменных – это всегда успеется. Сначала нужно посмотреть, не получается ли «наша» формула из более простой подстановкой туда чего-то более сложного. Если проверка на общезначимость вот этой самой «более простой» дает положительный результат (как в рассмотренном частном случае), то больше ничего делать не надо. Если отрицательный – тогда уж придется «пускаться во все тяжкие».

Далее см. **[Кл]**, конец с. 24 и первую половину с. 25 (**[Л]**, с. 48-49.

6. Основные эквивалентности логики высказываний

Напоминание: эквивалентность ≡ формул понимается как совпадение их значений при любых (истинностных) значениях входящих в них переменных.

Основные эквивалентности логики высказываний открывают новое видение предмета, то, что с полным правом можно назвать *магией логики.* В нижеследующей таблице-списке начинается закладка фундаментальных законов, лежащих в основе любого языка.

Пусть A, B, C – произвольные формулы. Тогда

$A \vee t \equiv t$ $\quad$ $A \& t \equiv A$

$A \vee f \equiv A$ $\quad$ $A \& f \equiv f$

$A \vee A \equiv A$ $\quad$ $A \& A \equiv A$

$A \vee \neg A \equiv t$ исключенного третьего $\quad$ $A \& \neg A \equiv f$ противоречия[13]

(оба получаются друг из друга де Морганом)

$A \vee B \equiv B \vee A$ коммутативность $A \& B \equiv B \& A$

$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ ассоциативность $A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$

$$\left.\begin{array}{l} A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C) \\ A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C) \end{array}\right\} \text{дистрибутивность}$$

$A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$ - - - - - - - -▸ УПР. $A \& (\neg A \vee B) \equiv A \& B$

$A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$ - - - - - - - -▸ УПР. $A \vee (\neg A \& B) \equiv A \vee B$

$$\left.\begin{array}{l} A \vee (A \& B) \equiv A \\ A \& (A \vee B) \equiv A \end{array}\right\} \text{поглощения}$$

$$\left.\begin{array}{l} \neg (A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B \\ \neg (A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B \end{array}\right\} \text{де Моргана}$$

$\neg \neg A \equiv A$ двойного отрицания

[Л], с. 25-26; **[Но]**, с. 136-137: теорема, доказательство: ТИ.

$A \to (B \to C) \equiv B \to (A \to C)$ перестановки посылок

$A \to (B \to C) \equiv A \& B \to C$ соединения посылок

$A \& B \to C \equiv A \to (B \to C)$ разъединения посылок

$A \to A \vee B \equiv A \to B \vee A \equiv t$ $\quad$ ← **[Л]**, с. 26-27

$A \& B \to A \equiv A \& B \to B \equiv t$

$A \to B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg (A \& \neg B)$

(первая эквивалентность – ТИ, вторая – де Морганом)

$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$ контрапозиции

[13] Точнее, эквивалентность $\neg(A \& \neg A) \equiv t$, а еще точнее, общезначимость $\vDash \neg(A \& \neg A)$ называется законом отрицания противоречия (**[Кл]**, с. 27).

Список эквивалентностей в [Л] завершают еще две, которые вместе с предпоследней строчкой выше означают возможность «выразить посредством ≡» любую связку из &, V, → через любую из оставшихся и ¬:

$A\&B \equiv \neg(A\rightarrow \neg B)$
$AVB \ \equiv \neg A\rightarrow B.$

Доказательство – непосредственная проверка с помощью ТИ (в ряде случаев заменяемая использованием «предварительно установленного с помощью ТИ де Моргана»). Формально при этом A, B, C должны считаться (пропозициональными) переменными (атомами). Но теорема о подстановке (которая и учит нас различать подобные нюансы) делает такое сведéние (формул к атомам) корректным. В общем, получили УПР.

Родительный падеж в названиях эквивалентностей означает пропущенное слово «закон» (в рамке) или «правило» (за рамкой).

7. Основные общезначимые формулы

Формулы из «предыдущего вопроса» и формулы, которые сейчас будут представлены, обычно даются «в едином ряду», см., напр., [Кл], с. 26-27 (теорема 2) или [Столл], с. 89-90 (теорема 2.4). «Разделение» этих «общезначимостей» по двум (и даже трем – см. Вопрос 14) вопросам «по умолчанию» понимается «во имя» экономии места, усилий, истолкований[14] и т.п. Задумываться обо всем этом некогда – надо учить, хотя вопрос «почему именно эти, а не другие?» еще какое-то время остается...

Замечание профессора Замова. Вот здесь и можно поговорить о семантике: 1) как понимается кратная импликация; 2) какие свойства →, &, V, ¬ здесь выражены (введение-удаление). На лекциях (послуживших основой [Л]) довольно подробно объяснялось, «почему именно эти, а не другие»...

Здесь мы зримо сталкиваемся с проблемой потерь (информации) при записи [Л]екций; при этом настоящее пособие приобретает смысл как своего рода инструмент «менеджмента» таких потерь...

Следующие формулы в 14-м вопросе будут выступать уже как схемы аксиом:

[14] «Интерпретаций» уже не напишешь – термин «занят»!

1) $\models A\to(B\to A)$,

2) $\models (A\to B)\to[(A\to(B\to C))\to(A\to C)]$,

3) $\models A\to(B\to A\&B)$,

4а) $\models A\&B\to A$,

4б) $\models A\&B\to B$,

5а) $\models A\to A\vee B$,

5б) $\models B\to A\vee B$,

6) $\models (A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$,

7) $\models (A\to B)\to((A\to \neg B) \to \neg A)$,

8) $\models \neg\neg A \to A$.

Здесь A, B, C – произвольные формулы. По теореме о подстановке в «составляющие их» пропозициональные переменные можно подставлять любые другие (или те же) формулы – общезначимость будет сохраняться. Поэтому достаточно считать сами A, B, C пропозициональными переменными (атомами) и проверять утверждения 1) – 8) с помощью ТИ, которые с этими переменными фактически и работают, игнорируя все свойства A, B, C, кроме права выбора между t и f. Таким образом, ***доказательство*** – УПР.

8. Правило *modus ponens*

Modus ponens – правило вывода = правило отделения. Озвучим его.

[Л], с. 37-38:

Пусть задана произвольная интерпретация. Тогда если в этой интерпретации P истинно, $(P\to Q)$ истинно, то и Q истинно.

По-другому:

Если формулы P и $(P\to Q)$ общезначимы, то и формула Q общезначима.

Короче:

Если P, Q – формулы, $\models P$ и $\models(P\to Q)$, то $\models Q$.

«Шпора»: $\models P,\ \models(P\to Q) \Rightarrow\ \models Q$.

Доказательство.

Если P и Q – (пропозициональные) переменные, то все усматривается из ТИ:

P	Q	P→Q
t →	t	← t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

достаточно 1-ой строки

Если P и Q – формулы, т.е. $P = P(P_1, P_2,...,P_n)$, $Q = Q(P_1, P_2,...,P_n)$, то теорема доказана выше (вопрос 4, выписки из **[Но]**). Воспроизведем это обоснование.

Предположим, что найдется интерпретация I, т.е. распределение истинностных значений для $P_1, P_2,...,P_n$, такая что I(Q) = f. Так как P общезначима, то I(P) = t. С использованием ТИ для связки → (она изображена выше) получим I(P→Q) = f – противоречие.

(Вместо I(Q) = f можно было бы писать Q(I) = f, так даже («визуальнее») точнее, и т.д.)

Таким образом, решающий шаг – применение ТИ.

См. также доказательство в **[Кл]**, с. 29, – почти то же в **[Столл]**, с. 88.

9. Теорема об эквивалентной замене

[Кл], с. 30 (**[Столл]**, с. 88 – то же, да еще как упражнение). Но там идет работа с ⊨(A~B) (⇔ A ≡ B, см. «Сборную солянку»). Мы попытаемся избегнуть ⊨(A~B) (в **[Л]** вообще избегается ~) и ограничиться только (логической) эквивалентностью ≡ на языке исследователя. Напоминаем: A ≡ B т. и т.т., когда A и B имеют одинаковые ТИ.

Пусть C_A – формула, в которой выделена некоторая подформула A, и пусть C_B – результат замены A на B в C_A. Тогда если A ≡ B, то $C_A \equiv C_B$.

Доказательство. Пусть А ≡ В. Это значит, А и В имеют одинаковые ТИ. (Цитируем **[Кл]**, с. 30:) Следовательно, если при вычислении заданной строки таблицы для C_A мы заменим вычисление выделенной части – формулы А вычислением формулы В, то результат останется неизменным. Поэтому C_B имеет такую же ТИ, как C_A. Значит, $C_A \equiv C_B$.

Посмотрим, как все это выглядит:

$P_1 \ldots P_n$	…	A	…	A	…	…	C_A
$i_1 \ldots i_n$		r		r			

$P_1 \ldots P_n$	…	B	…	B	…	…	C_B
$i_1 \ldots i_n$		r		r			

произвольная строка-интерпретация

одинаковые значения в силу А ≡ В

$i_1, \ldots, i_n \in \{t, f\}$

……………………………………………………………

10. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы

Начнем с цитат.

[Менд], с. 34-35: (у Мендельсона пропозициональная формула называется пропозициональной формой, а пропозициональная переменная – пропозициональной буквой)

Пропозициональная формула называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ),* если она является дизъюнкцией, состоящей из одного или более дизъюнктивных членов, каждый из которых является конъюнкцией одной или нескольких пропозициональных переменных или их отрицаний.

Примеры: (P&Q)V(¬P&R), P&Q, (P&Q&¬P)V(R&¬Q)V(P&¬R), P, PV(P&Q).

Пропозициональная формула называется *конъюнктивной нормальной формой (КНФ),* если она является конъюнкцией одного или более конъюнктивных членов, каждый из которых является дизъюнкцией одной или нескольких пропозициональных переменных или их отрицаний.

Примеры: приведите самостоятельно (можно, скажем, сделать замену &↔V в примерах для ДНФ).

Короче говоря, ДНФ – это дизъюнкция конъюнкций, а КНФ – это конъюнкция дизъюнкций.

Теперь посмотрим **[Л]**, с 27-34.

Дизъюнктивная нормальная форма

ДНФ характеризуется свойствами:

1) из связок она содержит только &, V, ¬ ;

2) ¬ относится только к переменным;

3) в области действия конъюнкции & нет дизъюнкции V.

Предложение. Для всякой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей дизъюнктивная нормальная форма.

Доказательства этого предложения в **[Л]** нет, есть только примеры утверждаемой им эквивалентности:

1. $A \rightarrow B \equiv \neg A V B$.

2. $\neg(A\&B) \equiv \neg A V \neg B$.

3. $\neg(AVB) \equiv \neg A\&\neg B$ – ДНФ, состоящая из одного дизъюнктивного члена, который является КНФ.

4. $A\&(BVC) \equiv (A\&B)V(A\&C)$.

5. $PVQ \rightarrow \neg (R\&S) \equiv \neg(PVQ)V\neg(R\&S) \equiv (\neg P\&\neg Q)V\neg RV\neg S$ – формула длины = 3.

Замечание профессора Замова. Приведенные пп. 1 – 4 – это и есть доказательство. П. 1 – выполнено свойство 1 ДНФ, п. 2 – выполнено свойство 2, п. 4 – выполнено свойство 3.

(Составитель, видимо, слишком тугодум...)

По поводу доказательства предложения у **[Менд]** есть подсказка на с. 35:

Доказательство предложения 1.4 <с.31-32> фактически является доказательством того, что всякая пропозициональная формула логически эквивалентна некоторой ДНФ. Применяя этот результат к ¬A, доказать, что A логически эквивалентно также и некоторой КНФ.

Констатация: ДНФ имеет вид $К_1$ V $К_2$ V … V $К_r$, где любая $К_i$ – конъюнкция переменных или конъюнкция отрицаний переменных, r – длина ДНФ. Другое название для $К_i$ – конъюнкт (**[Непей]**, с. 320). Таким образом, понятия «дизъюнктивный член» и «конъюнкт» – синонимы.

Совершенная ДНФ

Совершенная ДНФ характеризуется свойствами:

1) из связок она содержит только &, V, ¬ ;
2) ¬ относится только к переменным; «обычная» ДНФ
3) в области действия & нет дизъюнкции V;
4) каждое слагаемое содержит все переменные.
(Как насчет P&¬P в одном слагаемом?)

Любая формула ⇒ ДНФ ⇒ СДНФ; точная формулировка:
[Менд], с. 35: Доказать, что всякая непротиворечивая (нетавтологическая) пропозициональная формула A логически эквивалентна некоторой СДНФ (СКНФ) F и что если F содержит в точности n букв, то A является тавтологией (противоречием) тогда и только тогда, когда F состоит из 2^n дизъюнктивных (конъюнктивных) членов.

Если некоторое слагаемое К в ДНФ не содержит переменную P, то следует заменить К формулой К ≡ К&t ≡ К&(PV¬P) ≡ (К&P)V(К&¬P). ДНФ PVQ приводится к СДНФ так:
PVQ ≡ P&(QV¬Q)VQ&(PV¬P) ≡ P&QVP&¬QVQ&PVQ&¬P ≡ P&QVP&¬QV¬P&Q.

Совершенная нормальная форма – единственна (для эквивалентной ей заданной формулы – видимо, так это надо понимать).
Далее придется заняться подсчетом числа СДНФ.

Предложение. Число СДНФ равно числу ТИ.

Доказательство. Ясно, что одна таблица истинности обслуживает целое множество эквивалентных формул. Но сейчас нужно забыть о формулах и рассматривать ТИ для n переменных $P_1, P_2,..., P_n$ просто как таблицу с $N = 2^n$ строками и столбцом значений. Левое поле ТИ, заполненное строками-интерпретациями, всегда фиксированно, так что две ТИ отличаются друг от друга лишь итоговыми столбцами. Значит, число ТИ равно числу этих столбцов, которое будем подсчитывать, следя за накоплением t. Итак,

Число столбцов ТИ = число столбцов, где нет t, т.е. 1 (= C_N^0) +
число столбцов с одним t, т.е. N (= C_N^1) +
число столбцов с двумя t, т.е. C_N^2 (число сочетаний из N по 2) +
……………………………………......
число столбцов, целиком заполненных t, т.е. C_N^N (= 1) =
$= C_N^0 + C_N^1 + C_N^2 + ... + C_N^N = (1 + 1)^N = 2^N$.

Теперь подсчитаем число СДНФ. Каждое слагаемое в СДНФ имеет вид (здесь есть «подводный камень», см. *Пример* ниже)

$$\alpha P_1 \& \alpha P_2 \& ... \& \alpha P_n, \qquad (*)$$

где α – либо пробел, либо связка ¬ (можно ставить, соответственно, + и –). Ясно, что всевозможных формул вида (*) имеется ровно $N = 2^n$ штук (кстати, почему это ясно?). Другое дело, что в СДНФ из этих формул могут присутствовать не все. Визуализируем наш подсчет так. Предусмотрим $N = 2^n$ мест и за каждым из них закрепим свою формулу вида (*). Для произвольной фиксированной СДНФ какие-то места будут занятыми, а какие-то – пустыми. Занятые места снабжаем единичками, пустые – ноликами. Это позволяет записать СДНФ вот в таком виде:

$$\beta_1 K_1 \vee \beta_2 K_2 \vee ... \vee \beta_N K_N,$$

где если $\beta_i = 0$, то слагаемое не берем, если же $\beta_i = 1$, то берем. Считаем:

число СДНФ = число (*)-формул без единичек, т.е. 1 (= C_N^0) +
число (*)-формул с одной единичкой, т.е. N (= C_N^1) +
число (*)-формул с двумя единичками, т.е. C_N^2 +
……………………………………………………………..
число (*)-формул с n единичками, т.е. C_N^N =
$= C_N^0 + C_N^1 + C_N^2 + ... + C_N^N = (1 + 1)^N = 2^N$.

УПР. Как понимать СДНФ без единой единички? В **[Л]** не обнаружено. Выше **[Менд],** с. 35: *непротиворечивая* формула ≡ некоторой СДНФ. А противоречивая, т.е. «тождественно = f»?

Замечание. Биномиальные коэффициенты C_N^k и их свойства – комбинаторные, аналитические, вероятностные и т.д. – давно заняли прочное место в научном багаже гуманитариев, использующих в своей работе мАтематические и статистические методы.

Восстановление СДНФ по таблице истинности

Коль скоро получено содержательное утверждение о соответствии *перечислений* СДНФ и ТИ, то правомерен вопрос: можно ли построить такое соответствие между самими перечисленными объектами? При этом написать ТИ для заданной (не очень сложной) формулы, скажем, от трех переменных, наверное, не составит труда (по крайней мере, ясно, что делать). Поэтому задача состоит в том, чтобы восстановить формулу по заданной ТИ. Раз уж любая формула эквивалентна своей единственной СДНФ, то и искать эту формулу естественно в совершенной дизъюнктивной нормальной форме. Правило такого восстановления иллюстрирует следующий пример с уже апробированной визуализацией.

Пример. Формула F восстанавливается так:

F ≡ P&Q&¬R V ¬P&Q&R V ¬P&¬Q&R.

P	Q	R	F
t	t	t	f
t	t	f	t
t	f	t	f
t	f	f	f
f	t	t	t
f	t	f	f
f	f	t	t
f	f	f	f

Это демонстрирует общий принцип восстановления СДНФ по ТИ, удостоверяемый Предложением 1.4 из **[Менд]**, с. 31-32. Кстати, если столбец значений F состоит только из f, то предусмотренные выше места для (*)-формул остаются пустыми (единичек нет). Тем не менее **[Менд]** (с. 32) указывает формулу для такой ТИ: P&¬P, из которой еще нужно сделать СДНФ «умножением» на &(QV¬Q) и на &(RV¬R). Вот такие формы P&¬P (**неявно запрещенные в (*), но не в [Л]-определении СДНФ!**)[15], и будут давать пустые места в одной, разрешенной для этого «пустой» СДНФ.

[15] Наличие форм вида P&¬P в конъюнктах СДНФ запрещает **[Менд]**-определение СДНФ (с. 35), а также определение СДНФ из **[ЕрПа]** (с. 41); **[Н]**, с. 60. Получившийся детективный сюжет, по-видимому, возник из стремления сопоставить хоть какие-то формулы таблице истинности с итоговым столбцом из f.

Таким образом, взаимно-однозначное соответствие между ТИ и СДНФ «нарушается» только в одном исключительном случае, когда столбец значений ТИ целиком состоит из f. В этом случае таблице истинности соответствует целое множество «запрещенных» ДНФ, *совершенство* которых нарушается только присутствием в каждом слагаемом форм вида P&¬P. Это множество и дает единственную «вырожденную» форму с «пустыми местами», столь нужную для совпадения числа всех СДНФ с числом всех ТИ. По существу, ***Предложение*** из подраздела *СДНФ* доказано только сейчас.

(Ситуация похожа на раздутие из алгебраической геометрии, что вдохновляет.)

Следующая *задача о Лабиринте* доставляет

Пример*,* в котором открытая выше взаимосвязь СДНФ и ТИ наделяется дополнительными смыслами, т.е. речь идет уже не просто о восстановлении, а об *использовании* СДНФ.

Поскольку запись этого примера в **[Л]** (с. 30-31) сама требует некоторого восстановления, за его основу примем «адаптированный» вариант упражнения 5 из **[Менд]**, с. 35.

Пусть герой некоторого сюжета оказывается в месте – удобно назвать его Лабиринтом – откуда есть только два выхода – на свободу и к Минотавру. У каждого выхода сидит человек, который либо всегда говорит правду, либо всегда лжет и который отвечает на вопросы только посредством «да» и «нет». Нет никаких знаков, указывающих на то, воспользоваться ли данным выходом или бежать от него. Пусть герой подходит к одному из выходов. Какой вопрос, требующий ответа «да» или «нет», должен он задать сидящему у выхода человеку, чтобы понять, куда этот выход ведет?

Пусть P обозначает высказывание «этот выход ведет на свободу», а Q обозначает высказывание «человек у выхода всегда говорит правду», или, короче,

P = «этот выход – на свободу», Q = «ты говоришь правду».

С помощью подходящей ТИ нужно построить такую пропозициональную форму(лу) F, содержащую P и Q, чтобы <u>ответ «человека у выхода» на вопрос, истинна ли эта F, гласил «да» тогда и только тогда, когда P истинно</u>. Это сразу дает распределение «да» и «нет» по строкам ТИ, тогда значение F определяется по ответу и значению Q:

P	Q	желаемые ответы	F	
t	t	да	t	– утверждает истинность F, будучи правдивым,
t	f	да	f	– утверждая истинность F, лжет,
f	t	нет	f	– отрицает истинность F, будучи правдивым,
f	f	нет	t	– отрицая истинность F, лжет.

СДНФ восстанавливается как и выше: дизъюнкция объединяет (*)-формулы для строк, в которых F принимает значение t. Сами (*)-формулы суть конъюнкции вида (¬)P&(¬)Q, где ¬ применяется к и только к буквам со значением f. Итог: **F ≡ P&Q V ¬P&¬Q**; пишем ≡, а не =, так как представлений у F много, мы просто получили одно из них – согласно правилу восстановления СДНФ по ТИ. Другое представление для F можно получить, заметив, что приведенная выше таблица истинности есть ТИ для связки ~ (см. Вопрос 3). Следовательно, **F ≡ P ~ Q**.

Эквивалентность обоих полученных представлений может быть установлена также на базе основных эквивалентностей из Вопроса 6. Действительно, «перемножая конъюнкции и дизъюнкции» в первом представлении и отбрасывая получившиеся «истины» PV¬P и QV¬Q, имеем P&QV¬P&¬Q ≡ (¬PVQ)&(¬QVP) ≡ (P→Q)&(Q→P) ≡ P~Q – второе представление.

В итоге вопрос, который «герой» должен задать «сидящему у выхода», звучит так:

«Верно ли, что этот выход ведет на свободу тогда и только тогда, когда ты говоришь правду?»

А так ли это на самом деле? Во всяком случае, романтично, правда? И одновременно зловеще... Эстетика (свобода) неразрывно *связана* с этикой (правдой). Какая же она тогда свобода? Почему-то вспоминается наше Введение – «добрыми намерениями вымощен путь туда, где правит *Королева Ада…*» Миром правит программирование, нет?.. В чем же тогда правда?..

……………………………………………

Прежде, чем переходить к КНФ, – немного аналогий:

ДНФ = дизъюнкция конъюнктов $К_1$ V $К_2$ V ... V $К_r$ $P_1{\cdot}P_2 + P_2{\cdot}P_3 + P_1{\cdot}P_4$ – разложение в сумму произведений

КНФ = конъюнкция дизъюнктов D_1&D_2 &... & D_r $(P_1 + P_2){\cdot}(P_2 + P_3){\cdot}(P_1 + P_4)$ – разложение на множители

Конъюнктивная нормальная форма

КНФ характеризуется свойствами:

1') из связок она содержит только &, V, ¬ ;

2') ¬ относится только к переменным;

3') в области действия дизъюнкции V нет конъюнкции &.

Предложение. Для всякой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей конъюнктивная нормальная форма.

Примеры подобных эквивалентностей:

$A \to B \equiv \neg A V B$ (дизъюнкт),

$\neg(A \& B) \equiv \neg A V \neg B$ (дизъюнкт),

$\neg(A V B) \equiv \neg A \& \neg B$ (конъюнкция двух дизъюнктов),

$A V(B \& C) \equiv (A V B)\& (A V C)$ (конъюнкция двух дизъюнктов).

СКНФ характеризуется свойствами 1') – 4'), где свойства 1') – 3') приведены выше, а свойство 4') таково:

4') каждый сомножитель содержит все переменные (есть ли здесь «подводный камень», как в случае СДНФ? Вместо «детектива» здесь возникают контрарные пары, см. ниже).

Если некоторый сомножитель D в КНФ не содержит переменную P, то следует заменить D формулой $D \equiv DVf \equiv DV(P \& \neg P) \equiv (DVP)\&(DV\neg P)$.

Далее возникает новый сюжет –

О необходимых и достаточных условиях

Пусть $P \to Q$. Тогда условие P называется достаточным для Q, условие Q – необходимым для P. Синонимы: «если P, то Q», «P, только если Q».

Примеры. 1) «Я сдам экзамен (Q) *только* в том случае, если буду регулярно выполнять домашнее задание (P)». $Q \to P$.

2) «Число делится на 8 (Q), только если оно четное (P)». Действительно, 12 – четное, но на 8 не делится. $Q \to P$.

3) «Для того, чтобы матрица имела обратную (P), необходимо, чтобы ее определитель был отличен от нуля (Q)». $P \to Q$.

4) «Сегодня солнечно (P). Идет дождь (Q). Атмосферное давление высокое (R). Дует ветер (S)». Строится формула $(P \& Q) \to (\neg R V S)$ (реконструкция: солнце и дождь одновременно приводят к выводу о низком давлении и ветре). Далее приводим формулу к виду: $(P \& Q) \to (\neg R V S) \equiv \neg(P \& Q) V(\neg R V S) \equiv \neg P V Q V \neg R V S$ – СКНФ длины 1. ***Домашнее задание:*** привести эту формулу к СДНФ.

Возвращаясь к *проблеме «пустой» СДНФ,* имеет смысл процитировать немного из **[Н]**:

Для того чтобы формула была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы каждый множитель ее КНФ имел по крайней мере два слагаемых, из которых одно является какой-нибудь переменной, а другое – ее отрицанием. С. 54-55.

Для того чтобы формула была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы каждое слагаемое ее ДНФ содержало по крайней мере одну пару множителей, из которых один есть какая-нибудь переменная, а другой – ее отрицание. С. 55.

Безусловно, это «перекликается» с **[Менд]**, с. 35, но там это как-то «между делом», да и утверждается поменьше, а здесь – «во всей красе» и окончательности.

Интересная «информация к размышлению»: представление, выражающее формулу через ее СДНФ, имеет вид (**[Н],** с. 56)

$F(P_1,...,P_n) =$

$= F(t,...,t)\&P_1\&...\&P_n \ \vee \ F(t,...,t,f\ )\&P_1\&... \ ...\&P_{n-1}\&\neg P_n \ \vee \ ... \ \vee \ F(f,...,f\ )\&\neg P_1\&... \ \&\neg P_n.$

Здесь просматриваются обе схемы перечисления СДНФ, данные выше. На с. 60 в **[Н]** отмечается, что

«получаемые таким способом дизъюнктивные нормальные формы мы будем называть *совершенными дизъюнктивными нормальными формами*. Можно дать другое определение совершенной дизъюнктивной нормальной формы:

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы $A(X_1,..., X_n)$*, содержащей n различных переменных, называется дизъюнктивная нормальная форма, обладающая следующими свойствами:*

a) *в ней нет двух одинаковых слагаемых*;

b) *ни одно слагаемое не содержит двух одинаковых множителей*;

c) *никакое слагаемое не содержит переменной вместе с ее отрицанием*;

d) *в каждом слагаемом содержится в качестве множителя либо переменная* X_i*, либо ее отрицание, где* $i = 1, 2, ..., n$ ».

И наконец – апофеоз (**[Н],** с. 61)

«Тождественно ложная формула не имеет
совершенной нормальной дизъюнктивной формы»

П.С. Новиков

Слова корифея!

Чтобы «служба медом не казалась», отметим, что теперь 1) придется возвращаться к ***Предложению*** из подраздела *СДНФ*; 2) доказывать, что только что приведенное определение СДНФ эквивалентно данному выше (и любому другому, встретившемуся в списке рекомендованной литературы); 3) комментировать или даже доказывать приведенное выше представление формулы через ее СДНФ (составитель уже «в упор» не помнит, как это делать),...

А не пропустить ли этот раздел «при первом чтении»? Как и следующий –

11. Распознавание общезначимости для нормальных форм

[Л], с. 34-36.

Распознавание общезначимости можно осуществить а) с помощью ТИ или б) посредством приведения к нормальным формам (КНФ или ДНФ). В последнем случае особую роль играют так называемые контрарные пары.

Контрарной парой называется пара вида P, ¬P, где P – переменная или формула.

Особое значение (в КНФ) контрарные пары имеют благодаря тому, что, как известно из Вопроса 6, $P \vee \neg P \equiv t$ (закон исключенного третьего).

Предложение. КНФ общезначима тогда и только тогда, когда каждый ее сомножитель содержит контрарную пару.

Доказательство. КНФ имеет вид $F = D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_r$, где каждый сомножитель D_i = дизъюнкция переменных или отрицаний переменных.

Пусть каждый дизъюнкт D_i содержит контрарную пару. Тогда по построению D_i принимает значение t, которое наследуется и формулой F благодаря конечному числу конъюнкций. Таким образом, F общезначима.

Обратно, пусть F общезначима. Предположим, что некоторый сомножитель не содержит контрарную пару. Отсутствие контрарной пары обеспечивает существование интерпретации, которая делает ложными все переменные, присутствующие в данном сомножителе без отрицания, а истину придает переменным, стоящим в нем с отрицанием. В итоге сомножитель-дизъюнкт принимает значение f, которое «передается» и формуле F &-цией этого сомножителя с ее оставшейся частью. Тем самым установлено существование интерпретации, в которой F принимает значение f. А это противоречит общезначимости.

Предложение доказано.

Домашнее задание. Доказать:

1) $(P_1\&\neg P_2)\vee(P_2\&\neg P_3)\vee(P_3\vee\neg P_1) \equiv t$,

2) $(P_1\&\neg P_2)\vee(P_2\&\neg P_3)\vee(P_3\&\neg P_1) \equiv (P_1\vee P_2\vee P_3)\&(\neg P_1\vee\neg P_2\vee\neg P_3)$.

12. Отношение логического следования. Свойства

[Л], с. 38-40, **[Кл]**, с. 39 и окрестности (см. также с. 53), **[Столл]**, с. 94, §* выше.

Определение логического следования

Пусть $A_1, A_2,..., A_n$, B – формулы. Говорят, что B *логически следует* из формул $A_1, A_2,..., A_n$, если в каждой интерпретации, в которой все $A_1, A_2,..., A_n$ принимают значение t, B также принимает значение t.

Вариант: Пусть $A_1, A_2,..., A_n$, B – формулы, не содержащие переменных вне перечня $P_1, P_2,..., P_m$[16] .

Говорят, что B *логически следует* из формул $A_1, A_2,..., A_n$, если в таблицах истинности, на входах которых находится указанный перечень, формула B дает значение t во всех строках, в которых $A_1, A_2,..., A_n$ одновременно дают t.

Высказывания «*логически следует* из формул» и «является *логическим следствием* формул» – синонимы.

Обозначение: $\mathbf{A_1, A_2,..., A_n \vDash B}$. Символ «$\vDash$» можно читать «влечет» («влекут»).

Частный случай $n = 1$ был рассмотрен выше в §*:

[16] Обычно предполагается, что каждая переменная этого перечня входит в одну или более из указанных формул, однако, легко проверить, что это предположение необязательно, и, более того, к отмеченным переменным можно добавлять новые (см. **[Кл]**, с. 39).

Говорят, что формула B *логически следует* из формулы A (формула B – логическое следствие формулы A), запись: A⊨B, если формула B имеет значение t при всех интерпретациях, при которых формула A имеет значение t, *или, что то же самое,* если B принимает значение t во всех тех строках ТИ, где его принимает A.

Исключительный случай $n = 0$ также считается частным для определения логического следования, так как хорошо с ним согласуется – это будет отношение общезначимости ⊨B: формула B дает t во *всех* строках ТИ, или, что то же самое, во *всех* интерпретациях.

Пример (подобный обещан на экзамене): требуется убедиться в том, что $P \to (Q{\to}R)$, $Q \vDash P{\to}R$.

P	Q	R	P → (Q→R)		P→R
t	**t**	t	**t**	t	**t**
t	t	f	f	f	f
t	f	t	t	t	t
t	f	f	t	t	f
f	**t**	t	**t**	t	**t**
f	**t**	f	**t**	f	**t**
f	f	t	t	t	t
f	f	f	t	t	t

Убедились!

Свойства отношения логического следования ⊨.

1. $A_1, A_2,..., A_n \vDash A_i$ при всех i, $0 \le i \le n$. В частности, A⊨A.

2. Если $A_1, A_2,..., A_n \vDash B$, то $A_1, A_2,..., A_n, C \vDash B$.

Доказательства двух первых свойств основаны на том, что добавление новых формул к списку-*условию* лишь уменьшает количество строк с «одновременным» t, в то время как количество строк с t для *заключения* остается неизменным.

3. Если $A_1, A_2,..., A_n \vDash B$, то $A_{i1}, A_{i2},..., A_{in} \vDash B$, т.е. логическое следование не зависит от перемены мест формул в условии.

4. Если в списке формул $A_1, A_2,..., A_n$, которые влекут B, есть повторяющиеся, то повторы можно исключить из списка, оставив только один экземпляр.

Действительно, рассматриваемые строки при этом останутся теми же, просто в «объединенной» ТИ уменьшится число столбцов.

5а. *Транзитивность.* Если $A \models B$, а $B \models C$, то $A \models C$.

Выберем такую «визуализацию»: если сравнивать столбцы значений при переходе от А к В, а потом – от В к С, то, согласно условию, при обоих переходах множество строк со значением t может разве лишь расшириться.

5б. *Правило сечения (обобщенная транзитивность).*

Если $A_1, A_2, ..., A_n \models B$, а $B, C_1, C_2, ..., C_m \models D$, то $A_1, A_2, ..., A_n, C_1, C_2, ..., C_m \models D$.

Запишем общую ТИ для формул $A_1, A_2, ..., A_n, B, C_1, C_2, ..., C_m, D$ – именно в такой последовательности – и будем рассматривать t-строки для различных наборов формул, т.е. строки ТИ, в которых все формулы того или иного набора принимают значение t. Начнем с t-строк набора $A_1, A_2, ..., A_n, C_1, C_2, ..., C_m$. Являясь t-строками набора $A_1, A_2, ..., A_n$, они, согласно первому «$\models$», дают значения t и на пересечениях со столбцом В. Но у $B, C_1, C_2, ..., C_m$ могут быть и другие t-строки. Поэтому исходное множество t-строк для $A_1, A_2, ..., A_n, C_1, C_2, ..., C_m$ включается в множество t-строк для $B, C_1, C_2, ..., C_m$, которое, в свою очередь, согласно второму «$\models$», включается в множество t-строк для D.

Работа со строками позволяет следующим образом «упаковать» доказательство за счет введения новых обозначений.

Пусть S – конечный набор формул, $t(S)$ – множество t-строк для S, т.е. строк «объединенной» ТИ для S, в которых все формулы из S принимают значение t.

Пусть $\mathbf{\Gamma} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $\mathbf{\Delta} = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$.

Требуется доказать: $t(\mathbf{\Gamma}) \subset t(B)$, $t(B, \mathbf{\Delta}) \subset t(D) \Rightarrow t(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta}) \subset t(D)$.

Доказательство: $t(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta}) = t(\mathbf{\Gamma}) \cap t(\mathbf{\Delta}) \subset t(B) \cap t(\mathbf{\Delta}) = t(B, \mathbf{\Delta}) \subset t(D)$.

Итак, у нас получились две разновидности одного и того же доказательства, причем первую можно рассматривать как озвучивание второй.

Введение обозначений для наборов формул позволяет переписать *правило сечения* в таком, ставшем традиционном виде:

Пусть В и D – формулы, $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Delta}$ – конечные списки формул.

Тогда если $\mathbf{\Gamma} \models B$, а $B, \mathbf{\Delta} \models D$, то $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta} \models D$.

Часто используется форма записи «столбиком»:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{\Gamma} \vDash B, \\ B, \mathbf{\Delta} \vDash D\end{array}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta} \vDash D}$$

(иногда – с зачеркиванием B).

13. Теорема дедукции для логики высказываний

Начнем с одного наводящего примера (**[Л]**, с. 41). Даны два высказывания:

1) Том не может быть хорошим студентом, если неверно, что он способный и отец помогает ему;

2) Том хороший студент, только если его отец помогает ему.

Требуется доказать, что 1) ⊨ 2). Социальный аспект, содержащийся в этих высказываниях, позволим себе проигнорировать, перейдем лучше к буквам:

A = «Том – хороший студент»,

B = «Том – способный человек»,

C = «Тому помогает его отец».

Считая, что «неверно» относится и к «способностям», и к «помощи», и вспоминая, что «только если» означает импликацию, противоположную «если», получим:

1) $\neg(B\&C) \to \neg A$,

2) $A \to C$.

Таким образом, *требуется доказать*, что $\neg(B\&C)\to\neg A \vDash A\to C$.

Сравнение ТИ для формул $\neg(B\&C) \to \neg A$ и $A \to C$ можно оставить в качестве УПР. Напомним лишь, что логическое следование $P \vDash Q$ означает, что для любой интерпретации I (распределения истинностных значений между «атомами» формул) из $I(P) = t$ следует, что $I(Q) = t$.

Без ТИ:

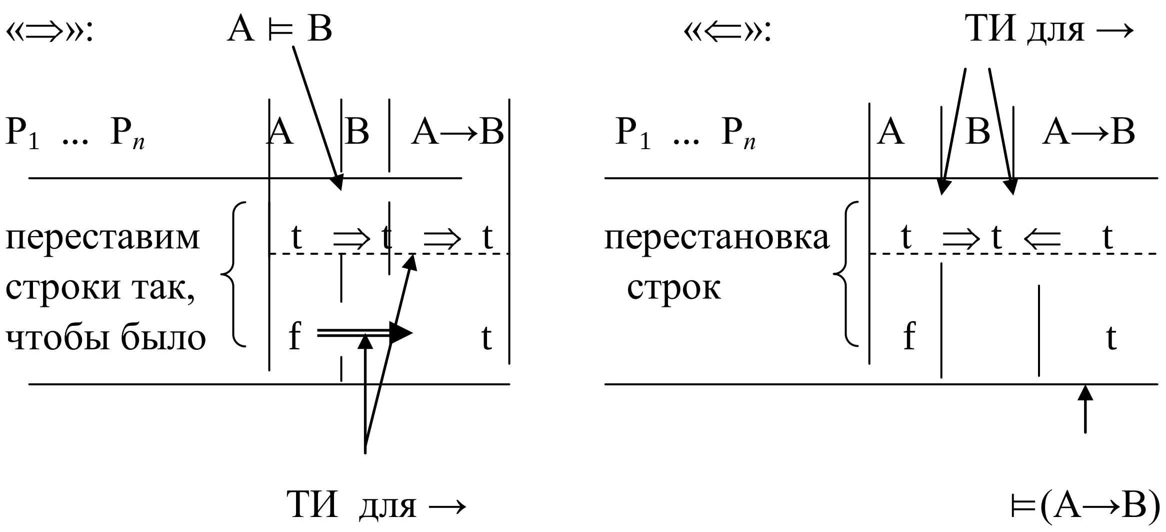
$\neg(B\&C) \to \neg A \equiv A \to (B\&C) \equiv \neg A \vee (B\&C) \equiv (\neg A \vee B)\&(\neg A \vee C) \equiv (A\to B)\&(A\to C)$;

$\vDash (A\to B)\&(A\to C) \to (A\to C)$ (см. список основных «общезначимостей», Вопрос 7).

Но мы получили несколько не то, что хотели; нам надо ¬(B&C)→¬A ⊨A→C. Вот чтобы это «надо» стало реальностью, нам и потребуется теорема дедукции, точнее, та ее часть, которая называется «обратно» (и в **[Л]** не доказывается). Но прежде докажем теорему 8 (а) из **[Кл]**, с. 39-40, которая «обслуживает» как раз «наш» пример:

***Теорема 8(а).* A ⊨ B тогда и только тогда, когда ⊨ (A→B).**

Доказательство. Чтобы не повторять **[Кл]** (которого обязательно надо посмотреть), попытаемся сосредоточить все обоснование в ТИ с надеждой на торжество наглядности.



Теорема дедукции. Пусть Г – (конечный) набор формул, A и B – формулы. Тогда Г, A ⊨ B, если и только если Г ⊨ (A→B).

Доказательство. [Туда] Пусть I – произвольная интерпретация I, такая что I(*любая* C∈Г) = t. Требуется показать I(A→B) = t. В случае I(A) = f это сразу следует из ТИ для →, для I(A) = t – из условия теоремы: I(*любая* C∈Г) = t, I(A) = t ⇒ I(B) = t, вновь с использованием ТИ.

[Обратно] Фиксируем произвольную I с I(*любая* C∈Г) = t и I(A) = t. Отсюда и из условия теоремы: I(*любая* C∈Г) = t ⇒ I(A→B) = t требуемое заключение I(B) = t получается с помощью ТИ.

Теорема доказана.

Нетрудно убедиться в том, что приведенное доказательство – это фактически «саундтрек» для приведенных выше картинок (в которые очевидным образом добавляется Г).

14. Теория доказательств. Аксиомы и правило вывода

Сейчас мы переходим к логике «несколько иной природы». В самом начале изучения, когда читаешь про различия между разными «тканями» логики, они кажутся очень важными, но по мере «втягивания» в предмет их место начинают занимать «конкретные работы с тканью», и вопросы классификации «методически однородных разделов» постепенно куда-то отдаляются. Но сказать что-то нужно, поэтому начнем с ассоциативных рядов:

	исчисление высказываний		исчисление предикатов	
[Л]	логика высказываний	исчисление высказываний	логика предикатов	исчисление предикатов
[Кл]	теория моделей	теория доказательств	теория моделей	теория доказательств

Чтобы не «зацикливаться» на этих вопросах, сделаем некоторые выписки из **[Кл]**, с. 47-48, вместо комментариев:

«Математики доказывают теоремы, т.е. выводят следствия из определенных допущений, типично евклидовским способом: высказывания размещаются в некий их список, называемый «доказательством», или «выводом».

Мы будем говорить о «***доказательстве***» и называть допущения «***аксиомами***», если они сохраняют свой статус (т.е. предполагаются истинными) во всей рассматриваемой теории; будем говорить о «***выводе***» (или «дедукции») <и использовать только термин «***допущения***»>, если мы не предполагаем, что все допущения сохраняют свой статус.

Каждый переход от одного высказывания в рассматриваемом списке к другому в этом же списке обоснован логически... Например, высказывание вытекает из других высказываний, если оно является их следствием... а это отношение между высказываниями <«$\vDash$»> уже определено с помощью <ТИ>...

Некоторое высказывание может быть помещено в список без ссылок на другие высказывания, предшествующие ему, только тогда, когда оно является допущением или же является общезначимым.

В своих определениях «следования» и общезначимости мы остаемся вне языка, в котором формулируются сами высказывания (предметный язык); для выяснения, каким образом высказывания (или формулы) составлены из атомов, у нас есть другой язык (язык исследователя). Именно в языке исследователя мы получаем различные результаты относительно общезначимости и отношения следования, которые зачастую удобнее в приложениях, нежели непосредственное использование <ТИ>.

Такое рассмотрение логики мы называем «***теорией моделей***»: заменяя атомы истинностными значениями t и f во всевозможных сочетаниях, мы получаем, так сказать, «модели», конкретные «реализации», воплощения того, что могут выражать высказывания.

Сейчас мы переходим к другому способу построения логики. Способ этот, называемый «***теорией доказательств***», изучает вопрос, нельзя ли описать логические доказательства и выводы так, как это делается в геометрии. Но поскольку на этот раз сама логика делается предметом аксиоматико-дедуктивной трактовки, выводы не должны больше основываться на «логических критериях»: они должны опираться лишь на точно сформулированные аксиомы и правила. В теории доказательств некоторые высказывания или формулы принимаются за «аксиомы», а для получения новых высказываний устанавливаются некоторые «правила вывода»...

Позднее мы увидим, что обе формулировки – теория моделей и теория доказательств – дают эквивалентные результаты.

Аксиомами нашей (теоретико-доказательственной) системы (классического) исчисления высказываний мы объявляем» формулы, имеющие один из следующих видов (ср. Вопрос 7):

1) $A \to (B \to A)$,
2) $(A \to B) \to [(A \to (B \to C)) \to (A \to C)]$,
3) $A \to (B \to A \& B)$,
4а) $A \& B \to A$,
4б) $A \& B \to B$,
5а) $A \to A \vee B$,
5б) $B \to A \vee B$,
6) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$,
7) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$,
8) $\neg\neg A \to A$.

Это – в точности схемы аксиом «Клини, 1952» из **[Но]**, с. 152.
Еще немного **[Кл]**, с. 48:

«Сами эти виды мы будем называть *схемами аксиом*, или *аксиомными схемами*. Каждая схема аксиом содержит бесконечное число аксиом: при каждом конкретном выборе формул, обозначенных через «A», «B», «C», получается одна из аксиом».

«В ситуацию заложено» вот что. Например, аксиомой будет не только 1) A→(B→A), но и, скажем, ¬P→(Q&P→¬P), или A→((D→A)→A), или A→(A→A) и т.д. Все эти формулы являются аксиомами, имеющими одну и ту же *схему* (или построенными по одной и той же *схеме*). Это «удесятеряет пробивную мощь» исчисления высказываний, хотя пишущему эти строки трудно оценить, насколько...

«В качестве единственного *правила вывода*, называемого →-*правилом*, или modus ponens (сокращенно MP), или *правилом отделения,*[17] мы принимаем процедуру перехода от двух формул вида A и A→B к одной формуле B, каковы бы ни были формулы A и B <см. Вопрос 8>. В *выводе* по этому правилу (в *применении* этого правила) A и A→B являются *посылками*, а B – *заключением*».

Далее **[Кл]** переходит к определению формального доказательства – а это следующий Вопрос 15 – поэтому процитируем немного **[Но]**, скомбинировав с. 141-142 и 152:

«4.3.1. Классическое определение исчисления высказываний.

Исчисление высказываний – это формальная теория L, в которой:

1. Алфавит: ¬, &, V, → – *связки*;
(,) – служебные символы;
a, b, ..., a_1, b_1, ... – *пропозициональные переменные*.

2. Формулы: 1) переменные суть формулы;
2) если A, B – формулы, то (¬A), (A&B), (AVB) и (A→B) – формулы.

3. Аксиомы: см. выше 1) – 8).

4. Правило: $\dfrac{A,\ A\to B}{B}$ Modus ponens.

Здесь A и B – любые формулы. Таким образом, множество аксиом теории L бесконечно, хотя задано десятью *схемами* аксиом. Множество правил вывода также бесконечно, хотя оно задано только одной *схемой*».

[17] Латинское словосочетание *Modus ponens* обычно переводят на русский как «*правило отделения*». **[Но]**, с. 142.

«Еще раз повторим»: написанные выше тексты – это реконструкция «незаписываемых» частей [Л]екций (исключая, разумеется, схемы аксиом 1) – 8) и правила вывода). Обычно, когда речь идет об «идеологии конструкции» предмета, лекторы *обрисовывают* ситуацию, а не предписывают окончательные формулировки, которые составляют существо предмета. Таким образом, пользуясь известными аналогиями, можно сказать, что реконструируется обычно язык исследователя, предметный же язык лекций достаточно насыщен.

15. Формальные доказательства. Свойства. Пример

[Л], с. 53:

Формальное доказательство – конечный список формул $F_1, F_2,..., F_k$ (k – длина доказательства), каждая из которых либо является аксиомой, либо получена из (некоторой пары) предыдущих формул по правилу Modus ponens.

Доказательство является доказательством своей последней формулы F_k.

Если формула F имеет доказательство, то мы говорим, что F *(формально) доказуема* или что F является *(формальной) теоремой*; запись: $\vdash$**F**.

(Мы заглядывали также в **[Кл]**, с. 48.)

Пример. (**[Л]**, с. 54-55, **[Кл]**, с. 48-49, но в **[Кл]** – A вместо D).

Какова бы ни была формула A, следующий список из пяти формул является доказательством формулы A→A, т.е. (формальной) теоремой будет

$\vdash$**A→A.**

(Формальное) доказательство:

1. (A→(D→A))→[(A→((D→A)→A))→(A→A)] схема аксиом 2) (с (D→A) вместо B и A вместо C),
2. A→(D→A) схема аксиом 1) (с D вместо B),
3. (A→((D→A)→A))→(A→A) Modus Ponens из 1,2,
4. A→((D→A)→A)) схема аксиом 1) (с (D→A) вместо B),
5. A→A Modus Ponens из 3,4.

Вместо «схема аксиом 2)» впредь будем писать «аксиома 2» или просто «а. 2», вместо «Modus ponens» – просто «MP», а «(D→A) вместо B» будем шифровать равенством «B = D→A», хотя это и не совсем корректно (у **[Но]**, с. 138, «для этого дела» вводится специальное обозначение | |: «(D→A) вместо B» записывается в виде «(D→A) | | B». Параллельно?). Термин «формальное» тоже со временем «подысчезнет»...

Теперь, что касается «заявленных» в названии **свойств**.

По **[Л]** (с. 53) можно реконструировать следующее (хотя это, конечно, скорее некоторые констатации, впрочем...):

1. Доказательство начинается с аксиом и заканчивается доказываемой формулой (которая тем самым оказывается доказуемой).

2. Аксиому можно поставить в любое место уже имеющегося доказательства. (Все-таки, *до* формул, получаемых из нее по MP.)

3. Если у доказательства «обрубить хвост», то оставшееся «начало» снова образует доказательство. Это будет доказательство формулы, имеющей наибольший номер из полученных по MP и содержащихся в этом «начале».

4. (В условиях и терминологии свойства 3) «Хвост» доказательства не всегда является доказательством. (А вот в «матане» сходимость определяется «хвостом»!)

5. Объединение двух доказательств является доказательством последней формулы (см. п. 1).

6. Доказательство является доказательством своей последней формулы.

В **[Кл]** никаких свойств формальных доказательств не распознано.

Замечание напоследок:

Если A – аксиома, то $\vdash$A. Доказательство: A.

16. Формальные выводы из допущений. Свойства. Примеры

[Л], с. 55-57.

Формальный вывод (формулы B) *из допущений* (A_1,..., A_m) – конечная последовательность формул F_1,..., F_k (= B)[18], где каждая формула является либо аксиомой, либо одним из допущений, либо получена по правилу MP из двух формул, расположенных в списке раньше нее.

Слово «формальный» обычно опускается.

[18] Проблема равенства формул нетривиальна (вмешиваются эквивалентности), поэтому записей вида F_k = B принято избегать. Интуитивно под равенством формул понимается тождественное совпадение их записи, вида, выражений, представлений через другие формулы, т.е. упор делается на *графическом* совпадении.

Если существует вывод формулы B из допущений $A_1,\ldots, A_m$, то говорят, что B *выводима из* $A_1,\ldots, A_m$, и пишут $\mathbf{A_1,\ldots, A_m \vdash B}$.

Знак «⊢» можно читать «выводится». При использовании такой терминологии для $m \geq 0$ «доказательство» и «доказуемость» (из предыдущего Вопроса 15) являются частным случаем «вывода» и «выводимости» при $m = 0$. (**[Кл]**, с. 50).

Отношение $A_1,\ldots, A_n \vdash B$ будем называть *выводимостью* или *соотношением выводимости* (в соответствии с **[Кл]**, с. 61), а иногда и «выводом» – как правило, если в непосредственной близости нет «настоящего» вывода $F_1,\ldots, F_k$.

Пример 1. Выводимость: A→(B→C), A, B ⊢ C.

Вывод:

1. A→(B→C)	допущение 1,		
2. A	допущение 2,	4. B	допущение 3,
3. B→C	MP из 1, 2,	5. C	MP из 3, 4.

Пример 2. Выводимость: A ⊢ A.

Вывод$_1$: A.

Таким образом, получен пример выводимости с выводом в одну формулу. Действительно, этот вывод удовлетворяет определению *формального вывода*: единственная содержащаяся в нем формула является допущением, она же, как последняя формула в списке, *выводима.*

Чтобы этот вывод не казался уж слишком «сингулярным», приведем другой.

Вывод$_2$:

1. A	допущение,
2. A→(A→A)	аксиома 1,
3. A→A	MP из 1, 2,
4. A	MP из 1, 3.

Здесь есть все – и допущение, и аксиома, и МР, но этот вывод имеет характер «петли». В выводах с большими списками такие «петли» убираются.

Важное наблюдение. В определении того, что означает «$F_1,\ldots, F_k$ является выводом», не сказано, что каждое из допущений $A_1,\ldots, A_n$ фактически входит в список $F_1,\ldots, F_k$ (**[Кл]**, с. 52).

Значит, не исключена ситуация, когда ни одно из $A_1,\ldots, A_n$ не входит в список $F_1, F_2,\ldots, F_k$. В этом случае допущения можно убрать, *вывод* становится *доказательством,* а выводимость – теоремой: $\vdash$B. Обратно, если $\vdash$B, то $A_1,\ldots, A_n \vdash$B для любого набора $A_1,\ldots, A_n$. В самом деле, сравнением определений получаем, что доказательство $F_1,\ldots, F_k$ = B теоремы $\vdash$B одновременно является и выводом формулы B из произвольного конечного набора допущений. (Характерно, что в последнем случае не принято добавлять «фантомные» допущения $A_1,\ldots, A_n$ к доказательству $F_1,\ldots, F_k$, чтобы получить вывод $A_1,\ldots, A_n, F_1,\ldots, F_k$ с формальным участием допущений $A_1,\ldots, A_n$ – ведь *фактически* из них ничего не выводится.)

Свойства $\vdash$ аналогичны свойствам $\vDash$ (см. Вопрос 12).

1. $A_1, A_2,\ldots, A_n \vdash A_i$ при всех i, $0 \le i \le n$. В частности, A$\vdash$A.

Доказательство процитируем из **[Кл]**, с. 52 (это *важное наблюдение* + пример 2):

В определении того, что означает «$F_1, F_2,\ldots, F_k$ является выводом», не сказано, что каждое из допущений $A_1, A_2,\ldots, A_n$ фактически входит в список $F_1, F_2,\ldots, F_k$. Поэтому при всяком i между 1 и n (включительно) само A_i представляет собой вывод формулы A_i из $A_1, A_2,\ldots, A_n$. Все!

Сокращенная формулировка свойства 1:

1'. Если Γ – конечный набор формул, то Γ, A$\vdash$A для любой формулы A.

Ниже нам может понадобиться такая расстановка акцентов в данном свойстве:

1''. Пусть A – формула, Γ – конечный набор формул. Тогда из A$\vdash$A следует Γ, A$\vdash$A.

Формулы набора Γ играют роль «молчаливых свидетелей», готовых в любой момент заговорить, но необходимости в этом обычно не возникает. Собственно, об этом и **[Кл]** выше.

Если «наложить» 1" на 1, то получается, что в 1 набор Γ – это часть исходных допущений, в то время как в 1" мы все-таки делаем акцент на *присоединении чего-то* к допущению A. Развитие подхода под таким «углом зрения» осуществляет следующее свойство

2a. Если $A_1, A_2,..., A_n \vdash B$, то $A_1, A_2,..., A_n, C \vdash B$.

Если $F_1,..., F_k$ – вывод для $A_1,..., A_n \vdash B$, то он же будет выводом и для $A_1,..., A_n, C \vdash B$. Точно так же доказывается и свойство

2b. Если $A_1, A_2,..., A_n \vdash B$, то $A_1, A_2,..., A_n, C_1, C_2..., C_l \vdash B$.

(Это – обобщение приведенного выше свойства «если $\vdash B$, то $C_1, C_2..., C_l \vdash B$» с очевидной заменой обозначений, а также свойства 1".)

3. Если $A_1, A_2,..., A_n \vdash B$, то $A_{i1}, A_{i2},..., A_{in} \vdash B$, т.е. выводимость не зависит от перемены мест формул в условии.

4. *Устранение повторения.* Если в списке формул $A_1, A_2,..., A_n$, из которых выводится B, есть повторяющиеся, то повторы можно исключить из списка, оставив только один экземпляр.

5a. *Транзитивность.* Если $A \vdash B$, а $B \vdash C$, то $A \vdash C$.

Докажем сразу более общее свойство

5б. *Правило сечения (обобщенная транзитивность).*

Если $A_1, A_2,..., A_n \vdash B$, а $B, C_1, C_2,..., C_m \vdash D$, то $A_1, A_2,..., A_n, C_1, C_2,..., C_m \vdash D$.

Доказательство. Пусть список $F_1,..., F_k = B$ представляет собой вывод формулы B из допущений $A_1, A_2,..., A_n$, а список $G_1,..., G_l = D$ – вывод формулы D из допущений $B, C_1, C_2,..., C_m$.

Если B содержится среди формул вывода $G_1,..., G_l$, то *заменим в нем формулу B ее выводом* $F_1,..., F_k$. Итоговый список $F_1,..., F_k, G_1,..., G_l$ с выброшенной из его G-части формулой B будет выводом формулы D из допущений $A_1,..., A_n, C_1,..., C_m$.

Если же формула B не содержится в списке $G_1,..., G_l$, т.е. не используется при выводе D из допущений $B, C_1, C_2,..., C_m$, то от условия $B, C_1, C_2,..., C_m \vdash D$ остается только $C_1, C_2,..., C_m \vdash D$ (в том же духе, что и после *важного наблюдения*), и заключение следует из свойства **2b** (с очевидной заменой обозначений). Все!

Сокращенная форма *правила сечения*:

Пусть B и D – формулы, **Γ** и **Δ** – конечные списки формул. Тогда если **Γ** $\vdash$ B, а B, **Δ** $\vdash$ D, то **Γ**, **Δ** $\vdash$ D.

Запись столбиком:

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash B, \quad B, \mathbf{\Delta} \vdash D}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta} \vdash D}$$

(иногда – с зачеркиванием B).

Выделенная выше курсивом фраза «*заменим в нем формулу B ее выводом*» заимствована из **[Кл]** (с. 52) и является, по-видимому, наиболее оптимальным способом убедить себя в том, что шифруемое таким образом подключение одного вывода к другому также является выводом, в котором B теряет статус допущения, становясь промежуточной выводимой из предыдущих формулой. Другой такой способ убеждения состоит в отождествлении вывода и дерева, в котором листьями являются аксиомы и допущения, а корнем – выводимая формула.

Вернемся к выделенной фразе и приведем утверждение, из доказательства которого она заимствована. Так как оно примыкает к серии утверждений под номером 5, обозначим ее

5c. При $m, p \geq 0$

Если $A_1,..., A_m \vdash B_1$,

...,

$A_1,..., A_m \vdash B_p$ и $B_1,..., B_p \vdash C$,

то $A_1,..., A_m \vdash C$.

Доказательство. В заданном выводе формулы C из $B_1,..., B_p$ можно заменить вхождение каждого из допущений $B_1,..., B_p$ на вывод его из $A_1,..., A_m$. Тем самым мы получаем вывод формулы C из $A_1,..., A_m$.

Это была теорема 9 (ii) из **[Кл]** (с. 52). Она может понадобиться при доказательстве теоремы о полноте (Вопрос 20).

Можно считать наиболее общей формой *правила сечения* такую:

5d. При $m, p, q \geq 0$

Если $A_1,..., A_m \vdash B_1$,

...,

$A_1,..., A_m \vdash B_p$ и $B_1,..., B_p, C_1, C_2,..., C_q \vdash D$,

то $A_1,..., A_m, C_1, C_2,..., C_q \vdash D$.

Вопрос: что будет при $m > 0$ и $p = 0$?

17. Теорема дедукции в исчислении высказываний

[Л], с. 58-60, **[Менд]**, с. 40. Ближе всего к **[Л]** – изложение в **[Но]**, с. 145-146.

Лемма. $\vdash$ **A→A.** (см. Вопрос 15)

Доказательство.

1. A→(D→A) аксиома 1 (с B = D),
2. (A→(D→A))→[(A→((D→A)→A))→(A→A)] аксиома 2 (с B = D→A и C = A),
3. (A→((D→A)→A))→(A→A) МР из 1,2,
4. (A→((D→A)→A)) аксиома 1 (с B = D→A),
5. A→A МР из 3,4.

(Как уже отмечалось, в **[Но]** пишется не B = D, а D | | B: действительно, равенство здесь понимается не как «совпадение», а как «подстановка вместо» или «присвоение символьного значения»...)

Теорема дедукции. Пусть Γ – (конечный) набор допущений, A и B – допущения. Тогда если Γ, A $\vdash$ B, то Γ $\vdash$ (A → B) и обратно. В частности, если A $\vdash$ B, то $\vdash$ (A → B) и обратно.

Доказательство.

[Туда] Пусть $B_1,\ldots,B_n = B$ – вывод B из Γ и A. Индукцией по i ($1 \le i \le n$) покажем, что выводимость $\Gamma \vdash (A \to B_i)$ выполняется для всех $i \in \{1,\ldots, n\}$. Тогда при $i = n$ получим требуемое.

Базис индукции: $i = 1$, т.е. $B_1 = B$. Возможны три случая:

I) B – аксиома	**II)** B ∈ Γ	**III)** B = A
Вывод:	Вывод:	Вывод:
1. B – аксиома,	1. B ∈ Γ,	См.
2. B→(A→B) а. 1,	2. B→(A→B) а. 1,	доказательство
3. A→B МР из 1,2.	3. A→B МР из 1,2	леммы

Во всех трех случаях $\Gamma \vdash (A \to B)$. Таким образом, базис индукции установлен.

Пусть теперь $\Gamma \vdash (A \to B_i)$ для всех $i < k$. Требуется доказать, что $\Gamma \vdash (A \to B_k)$. Для B_k имеются уже ***четыре*** возможности, первые три – точно такие же, как и выше:

I) B_k – аксиома **II)** $B_k \in \Gamma$ **III)** $B_k = A$

и вывод $\Gamma \vdash (A \to B_k)$ в каждом из них аналогичен своему «базисному» прототипу...

Случай **IV)**. Формула B_k получена по правилу Modus ponens из формул B_j и B_m, где $j, m < k$ и $B_m = B_j \to B_k$ (вспомним определение формального вывода). Этому случаю в **[Л]** соответствует «визуализация»

$$\underline{\quad B_j \qquad\qquad B_m = B_j \to B_k \qquad\qquad B_k \quad}$$

По предположению индукции имеется вывод $\Gamma \vdash (A \to B_j)$ и вывод $\Gamma \vdash (A \to (B_j \to B_k))$. Эти выводы объединим в один (записав, скажем, второй после первого) и достроим его:

j'. $A \to B_j$

....

m'. $A \to (B_j \to B_k)$

$m' + 1$. $(A \to B_j) \to [(A \to (B_j \to B_k)) \to (A \to B_k)]$ аксиома 2,

$m' + 2$. $(A \to (B_j \to B_k)) \to (A \to B_k)$ MP из j', $m' + 1$,

$m' + 3$. $A \to B_k$ MP из m', $m' + 2$.

Итак, $\Gamma \vdash (A \to B_k)$ для любого k, в частности, для $k = n$. Но $B_n = B$, т.е. $\Gamma \vdash (A \to B)$.

[Обратно] Имеем вывод $\Gamma \vdash (A \to B)$, состоящий из n формул. Достроим его так:

n. $A \to B$

$n + 1$. A допущение,

$n + 2$. B MP n, $n + 1$.

Следовательно, $\Gamma, A \vdash B$.

При $\Gamma = \varnothing$ получаем: если $A \vdash B$, то $\vdash (A \to B)$ и обратно. Теорема дедукции доказана.

Вернемся к примеру 1 из предыдущего Вопроса 16, пусть здесь это будет тоже

Пример 1. Выводимость: $A\to(B\to C), A, B \vdash C$.

Вывод:

1. $A\to(B\to C)$	допущение 1,
2. A	допущение 2,
3. $B\to C$	МР из 1, 2,
4. B	допущение 3,
5. C	МР из 3, 4.

Рассмотрим теперь

Пример 2. Выводимость: $A\to(B\to C), B \vdash A\to C$.

Вывод:		Альтернативное обоснование:
1. $A\to(B\to C)$	допущение 1,	выводимость $A\to(B\to C), B \vdash A\to C$
2. B	допущение 2,	получается из $A\to(B\to C), A, B \vdash C$
3. $B\to(A\to B)$	аксиома 1,	теоремой дедукции (прямая формулировка – «туда»), а в выводимости
4. $A\to B$	МР из 2, 3,	$A\to(B\to C), A, B \vdash C$ сразу просматривается ее вывод – дважды МР.
5. $(A\to B)\to[(A\to(B\to C))\to$ $\to (A\to C)]$	аксиома 2,	
6. $(A\to(B\to C))\to(A\to C)$	МР из 4, 5,	
7. $A\to C$	МР из 1, 6.	

В **[Л]** данный пример (слева) демонстрировал «петлю» (см. Вопрос 16, пример 2, вывод$_2$), а также ее благополучное устранение. (Характерно, что эта «петля» содержала вывод $A\vdash A$.) Точнее говоря, доказательство выводимости $A\to(B\to C), B \vdash A\to C$ содержало усложненный вывод $A\vdash A$ плюс только что приведенный вывод примера 2 слева. Данный отрезок текста **[Л]** можно реконструировать как «стенограмму» решения студентами упражнения на доске.

Замечание. Теорема дедукции утверждает, что обе приведенные выводимости эквивалентны в том смысле, что из любой из них выводится другая[19]. Но, «рассуждая практически», теоремой дедукции лучше сводить второй пример к первому (см. «альтернативное обоснование»). Действительно, вывод из первого примера почти тривиален – «не нужно знать» ни одной аксиомы, в то время как во втором используется «самая большая» – аксиома 2.

Обычно (т.е. и в **[Кл]**, с. 54, и в **[Л]**, – как для «$\vdash$», так и для «$\vDash$») теорема дедукции приводится в прямой формулировке: если Γ, A $\vdash$ B, то $\Gamma \vdash (A \to B)$, которая как раз и позволила свести второй пример к первому. Однако обратную формулировку (уже понадобившуюся выше – см. Вопрос 13, пример) также естественно включить в теорему – и доказательство короткое, и получающееся утверждение можно применять, не задумываясь о «туда и обратно».

Приведем еще одну пару примеров, связанных теоремой дедукции («туда»). В **[Л]** этого нет, будем считать это маленьким самостоятельным упражнением.

Пример 3. Выводимость: $A \vdash A$. (Вопрос 16, пример 2, вывод$_1$.)

Вывод$_1$: A.

Пример 4. Теорема: $\vdash A \to A$.

Доказательство: см. Вопрос 15, пример, настоящий Вопрос 17, лемма.

Альтернативное обоснование[20] (***не*** доказательство в смысле определения формального доказательства из Вопроса 15): теоремой дедукции (прямая формулировка) теорема $\vdash A \to A$ получается из выводимости $A \vdash A$, вывод которой состоит из одной формулы A.

---

[19] Эквивалентность в «$\vdash$»-языке исследователя. Напомним, что в «$\vDash$»-языке исследователя эквивалентность – это отношение $\equiv$. Как покажет ниже теорема о полноте, оба эти языка – «калька один с другого»: здесь мы используем образное сравнение, чтобы не писать «оба языка эквивалентны». В очередной раз все указывает на то, что истинные «тайны *Заколдованного замка*» – многослойность языка и многоликая эквивалентность.

[20] Это самое настоящее *доказательство*, но в *привычном* до изучения матлогики *смысле*. Термином «доказательство» теперь придется пользоваться очень аккуратно.

Таким образом, вместо вывода из 5 формул (с «громоздкой» аксиомой 2) теорема $\vdash A \to A$ доказывается в две строчки, не являющиеся ее *формальным доказательством* в смысле определения из Вопроса 15, но составляющие доказательство в привычном смысле (ср. сноску 20).

Пример 5. Выводимость (1) $\vdash A \to (B \to B \& A)$ (не путать с аксиомой 3!). Дважды применяя теорему дедукции, получим

(2) $A \vdash B \to B \& A$ и

(3) $A, B \vdash B \& A$.

На самом деле здесь достаточно прямой формулировки теоремы дедукции, согласно которой из (3) следует (2), а из (2) следует (1).

Вывод соотношения (3):

1. $B \to (A \to B \& A)$ аксиома 3,
2. B допущение,
3. $A \to B \& A$ MP из 1, 2,
4. A допущение,
5. $B \& A$ MP из 3, 4.

Теорема дедукции – первый шаг к собственно исчислению высказываний – именно как к *исчислению,* заменяющему списки формальных доказательств и выводов операциями над соотношениями выводимости.

18. Правила введения и удаления логических связок

[Л], с. 64-77. Ниже предпринята титаническая попытка «втиснуть» указанные правила в таблицу *вместе с* их доказательствами.

	Введение	Удаление
→	**если Г, A ⊢ B, то Г ⊢ (A→B)** доказательство – теорема дедукции *правило вспомогательного вывода*	**A, A→ B ⊢ B** вывод: 1. A допущение, 2. A→B доп., 3. B MP из 1, 2. *прямое правило*
&	**A, B ⊢ A&B** вывод: 1.A→(B→A&B) а.3, 2. A доп., 3. B→A&B MP из 1, 2, 4. B доп., 5. A&B MP из 3, 4. *прямое правило*	**A&B ⊢A** вывод: 1. A&B→A а. 4а), 2. A&B доп., 3. A MP из 1, 2. - - - - - - - - - - - - - - - - - **A&B ⊢B** вывод: 1. A&B→B а. 4б), 2. A&B доп., 3. B MP из 1, 2. *прямое правило*
V	**A ⊢ AVB** вывод: 1. A→ AVB а. 5а), 2. A доп., 3. AVB MP из 1, 2. - - - - - - - - - - - - - - - - - **B ⊢ AVB** вывод: 1. B→ AVB а. 5б), 2. B доп., 3. AVB MP из 1, 2. *прямое правило*	**Г, A ⊢ C и Г, B ⊢ C влекут** **Г, AVB ⊢ C** ⇓ ⇓ ← по т-ме Г⊢(A→C) Г⊢(B→C) дедукции вывод: 1) ⋮ (Г-формулы) *Доказательство* *k*) A→C *разбором* *k* + 1) *случаев* ⋮ (Г-формулы) *k* + *l*) B→C *k*+*l*+1) (A→C)→((B→C)→ →(AVB →C)) а. 6, *k*+*l*+2) (B→C)→(AVB→C) MP из *k*), *k*+*l*+1), *k*+*l*+3) AVB→C MP из *k* + *l*), *k*+*l*+2), *k*+*l*+4) AVB допущение, *k*+*l*+5) C MP из *k*+*l*+3), *k*+*l*+4). *правило вспомогательного вывода*

	Введение	Удаление
¬	**Г, А ⊢ В и Г, А ⊢ ¬В влекут** **Г ⊢ ¬А** ⇓ ⇓ ← по т-ме дед. Г⊢(А→В) Г⊢(А→¬В) вывод: 1) ⋮ (Г-формулы) *Приведение* *k*) А→В *к нелепости* *k* + 1) А→¬В или ⋮ (Г-формулы) reductio *k* + *l*) А→¬В ad absurdum *k*+*l*+1) (А→В)→((А→¬В)→ →¬А) а. 7, *k*+*l*+2) (А→¬В)→¬А МР из *k*), *k*+*l*+1), *k*+*l*+3) ¬А МР из *k* + *l*), *k*+*l*+2). *правило* *вспомогательного вывода*	**¬ ¬ А ⊢ А** вывод: 1. ¬¬А → А а. 8, 2. ¬¬А доп., 3. А МР из 1, 2. *прямое правило* -------------------------------- **А, ¬А ⊢ В** (слабое ¬-удаление) 1. А, ¬А, ¬В ⊢ А, 2. А, ¬А ¬В ⊢¬А, 3. А,¬А ⊢¬¬ В ¬-вв-е из 1, 2, 4. ¬¬ В ⊢ В ¬-удаление. это – ***<u>не</u>*** ***вы-вод!*** *прямое правило*

Включая в таблицу слабое ¬-удаление, мы следовали [Кл], с. 60-61, – в [Л] оно вынесено в «примеры применения» – по-видимому, как раз из-за того, что его обоснование – не вывод, а применение двух предшествующих «табличных» правил. По «горячим следам» –

Слабое ¬-удаление: А, ¬А ⊢ В

На основе введений и удалений:	*Формальный вывод*:
1. А, ¬А, ¬В ⊢ А 1' из Вопроса 16,	1.¬А допущение,
2. А, ¬А, ¬В ⊢ ¬А 1' из Вопроса 16,	2. А допущение,
3. А, ¬А ⊢ ¬¬ В ¬-введение из 1, 2,	3. А→(¬В→А) аксиома 1,

4. $\neg\neg B \vdash B$ ¬-удаление.

4. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ аксиома 1,
5. $\neg B \to A$ MP из 2, 3,
6. $\neg B \to \neg A$ MP из 1, 4,
7. $(\neg B \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to$
$\to \neg\neg B)$ аксиома 7,
8. $(\neg B \to \neg A) \to$
$\to \neg\neg B$ MP из 5, 7,
9. $\neg\neg B$ MP из 6, 8,
10. $\neg\neg B \to B$ аксиома 8,
11. B MP из 9, 10.

[Л], [Кл]

Восстановлен по **[Но]**, с. 148.

Вернемся к **[Л]** и установим ряд выводимостей.

$A\&B \vdash B\&A$

На основе включений и удалений:

Вариант из **[Кл]**, с. 67-68:
1. $A\&B$ допущение,
2. A &-удаление, 1,
3. B &-удаление, 1,
4. $B\&A$ &-введение, 2, 3.

Вариант из **[Л]**, с. 71:
1. $A\&B \vdash B$ &-удаление,
2. $B, A \vdash B\&A$ &-введение,
3. $A, A\&B \vdash B\&A$ правило сечения[21] из 1, 2,
4. $A\&B \vdash A$ &-удаление,
5. $A\&B \vdash B\&A$ правило сечения и устранение повторения[22] из 3, 4.

Формальный вывод **[Л]**, с. 71:

1. $A\&B \to A$ аксиома 4а),
2. $A\&B$ допущение,
3. A MP из 1, 2,
4. $A\&B \to B$ аксиома 4б),
5. B MP из 2, 4,
6. $B \to (A \to B\&A)$ аксиома 3,
7. $A \to B\&A$ MP из 5, 6,
8. $B\&A$ MP из 3, 7.

В **[Л]** этот вывод перечеркнут карандашом и отмечено, что теперь в силу вступают правила введения и удаления.

[21] Вопрос 16, свойство 5б.
[22] Вопрос 16, свойство 4.

Еще раз «столбиком»:

$$\frac{A\&B \vdash B \text{ (\&-уд.)} \quad B, A \vdash B\&A \text{ (\&-введ.)}}{A\&B, A \vdash B\&A} \quad \text{правило сечения}$$

$$\frac{A\&B \vdash A \text{ (\&-уд.)}}{A\&B \text{ (},A\&B) \vdash B\&A} \quad \text{правило сечения (и устранение повторения)}$$

$A \vee B \vdash B \vee A$

В две строчки:

$$\frac{\begin{array}{c} A \vdash B \vee A \\ B \vdash B \vee A \end{array}}{A \vee B \vdash B \vee A}$$

Продолжение Вопроса 18: задачи

Задача 1. Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет закончена, кроме случая, когда она длится более месяца и президент фирмы уйдет в отставку. Допустим, что конгресс отказывается действовать и забастовка заканчивается. Вывести: забастовка длилась более месяца.

A = «конгресс отказывается принять новые законы»,

B = «забастовка заканчивается»,

C = «забастовка длится более месяца»,

D = «президент фирмы уходит в отставку».

Уже «на этапе моделирования» возникают два варианта, связанные с тем, как понимать слова «кроме случая, когда...»:

1 вариант) $A \to (B \to C\&D), A\&B \vdash C$ и

2 вариант) $A \to (\neg(C\&D) \to \neg B), A\&B \vdash C$.

Первый вариант понимает эти слова так: если A, то забастовка будет закончена *только* в случае C&D, т.е. если A, то B *только если* C&D (см. Вопрос 10, подраздел «О необходимых и достаточных условиях»). В итоге: $A \to (B \to C\&D)$.

Второй вариант: Если A, то если вот этот самый «случай» не состоится, то забастовка не будет закончена, т.е. $A \to (\neg(C\&D) \to \neg B)$.

«Интуитивно» ясно, что оба варианта представляют одно и то же: интуиция основана на том, что в «$\vDash$»-языке $B \to C\&D \equiv \neg(C\&D) \to \neg B$ (правило контрапозиции). Оказывается, в «$\vdash$»-языке эти формулы выводимы друг из друга («$\vdash$»-аналог эквивалентности). Чтобы не оставлять этот факт «в тылу», быстро (т.е. мелким шрифтом) продемонстрируем его в более экономных обозначениях:

$A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ $\qquad\qquad$ $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$

$\Uparrow$ $\quad \leftarrow$ теорема дедукции $\rightarrow \quad$ $\Uparrow$

$A \to B, \neg B \vdash \neg A$ $\qquad\qquad$ $\neg B \to \neg A, A \vdash B$

вывод:

1. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ а. 7,
2. $A \to B$ доп.,
3. $(A \to \neg B) \to \neg A$ MP из 1, 2,
4. $\neg B \to (A \to \neg B)$ а. 1,
5. $\neg B$ доп.,
6. $A \to \neg B$ MP из 4, 5,
7. $\neg A$ MP из 3, 6.

вывод:

1. $(\neg B \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B)$ а. 7,
2. $A \to (\neg B \to A)$ а. 1,
3. A доп.,
4. $\neg B \to A$ MP из 2, 3,
5. $(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$ MP из 1, 4,
6. $\neg B \to \neg A$ доп.,
7. $\neg\neg B$ MP из 5, 6,
8. $\neg\neg B \to B$ а. 8,
9. B MP из 7, 8.

...и вернемся к нашей задаче.

<u>Вариант 1)</u>.

Введения и удаления:

1. $A\&B \vdash A$ &-удаление,
2. $A, A \to (B \to C\&D) \vdash B \to C\&D$ →-удаление,
3. $A\&B \vdash B$ &-удаление,
4. $B, B \to C\&D \vdash C\&D$ →-удаление,
5. $C\&D \vdash C$ &-удаление.

Формальный вывод:

1. $A\&B$ доп.,
2. $A\&B \to A$ а. 4а),
3. A MP из 1, 2,
4. $A \to (B \to C\&D)$ доп.,
5. $B \to C\&D$ MP из 3, 4,
6. $A\&B \to B$ а. 4б),
7. B MP из 1, 6,
8. $C\&D$ MP из 5, 7,
9. $C\&D \to C$ а. 4а),
10. C MP из 8, 9.

Слева и справа получилось одно и то же, просто «разными словами» (так «прозрачно» бывает не всегда). Еще одно замечание – о работе с введениями и удалениями: как оформлять? Выше при обосновании выводимости A&B⊢B&A было продемонстрировано два способа его оформления: 1) выписывать только консеквенты (заключения), из которых можно выводить дальше, и 2) записывать введения и удаления «столбиком», используя свойства отношения ⊢, чаще всего правило сечения. При решении первого варианта **задачи 1** мы пользовались развернутым способом 1): записывали выводимости вместе с антецедентами (условиями) и присоединяли консеквенты к списку формул, «последовательно признаваемых за выводимые из» заданного множества A→(B→C&D), A&B. Процитирован «кусочек» **[Кл]**, с. 69, – там, где автор предостерегает против неосторожного использования *правил вспомогательного вывода*! Но мы использовали только *прямые правила,* так что тут «все чисто». Разумеется, «все чисто» и без упоминания о **[Кл]**, но, во-первых, «надо бдить», а во-вторых, небесполезно поизучать §13 из **[Кл]**, с. 67-76.

Вариант 2). Формальный вывод приводить не будем: к приведено-му в предыдущем варианте нужно добавить вывод для ¬(C&D)→¬B⊢B→C&D. Эту выводимость можно «вставить» и в список *прямых правил* варианта 1):

A&B⊢ A,

A&B⊢ B,

A, A→(¬(C&D)→¬B)⊢ ¬(C&D)→¬B,

¬(C&D)→¬B⊢B→C&D (вот она!),

B, B→C&D⊢ C&D,

C&D⊢ C,

...но мы попытаемся поэкспериментировать:

1. A&B⊢ A &-удаление,

2. A&B⊢ B &-удаление (A и B добавились к списку формул, из которых можно выводить),

3. A, B, A→(¬(C&D)→¬B)⊢ ¬(C&D)→¬B
→-удаление + свойство 2а из Вопроса 16,

4. A, B, A→(¬(C&D)→¬B), ¬(C&D) ⊢ ¬B
теорема дедукции («обратно») из 3,

5. A, B, A→(¬(C&D)→¬B), ¬(C&D)⊢ B
свойство 1' (или 1'') из Вопроса 16,

6. $A, B, A\to(\neg(C\&D)\to\neg B)\vdash \neg\neg(C\&D)$ ¬-введение из 4, 5,

7. $\neg\neg(C\&D)\vdash C\&D$ ¬-удаление,

8. $C\&D\vdash C$ &-удаление.

Использование *правил вспомогательного вывода,* к которым относим теорему дедукции и ¬-введение, вполне корректно, так как присоединяемая теоремой дедукции к «списку допущений» формула $\neg(C\&D)$ затем отвергается ¬-введением «в пользу» $\neg\neg(C\&D)$.

Задача 2. Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или я пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город. А если на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра, в выходной день, оставаться в городе.

Вывести: если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

A = «завтра будет хорошая погода»,

B = «я пойду кататься на коньках»,

C = «я пойду на лыжах»,

D = «я поеду за город».

Вывести: $\mathbf{A\to B\vee C,\ C\to D,\ B\to \neg D,\ \neg\neg D\vdash A\to C.}$

Сразу $\neg\neg D\vdash D$ (¬-удаление). С учетом этого и теоремы дедукции («туда») достаточно вывести: $\mathbf{A\to B\vee C,\ C\to D,\ B\to \neg D,\ D,\ A \vdash C.}$

С учетом $A, A\to B\vee C\vdash B\vee C$ (→-удаление) достаточно вывести:

$$\mathbf{B\vee C,\ C\to D,\ B\to \neg D,\ D \vdash C.}$$

Чтобы отвергнуть допущение B, используем ¬-введение:

$D, B\to \neg D, B\vdash\neg D$ →-удаление + свойство 2а из Вопроса 16,

$\underline{D, B\to \neg D, B\vdash\ D}$ свойство 1 (или 1', или 1'') из Вопроса 16,

$\mathbf{D, B\to \neg D \vdash\neg B}$ (¬-введение).

Вариант: коль скоро (как мы установили выше)

$B\to \neg D \vdash \neg\neg D\to\neg B$, то по теореме дедукции («обратно») получим $B\to \neg D, \neg\neg D \vdash \neg B$ ($\neg\neg D$ – одно из исходных допущений).

Итак, нам достаточно вывести: $\mathbf{B\vee C,\ \neg B,\ C\to D \vdash C.}$

Поскольку допущение $C\to D$ выглядит здесь излишним, выведем

$$\mathbf{B\vee C,\ \neg B \vdash C.}$$

Естественно обратиться к доказательству разбором случаев (V-удалению). Имеем

$B, \neg B \vdash C$ слабое ¬-удаление,

$\underline{C, \neg B \vdash C}$ свойство серии 1 из Вопроса 16, (**)

$\mathbf{B \vee C, \neg B \vdash C}$ (V-удаление).

Это «перекликается» с рецептом решения подобных задач в **[Л]** на с. 89 (там в прямом смысле разбор случаев), да и аналог выводимости в «⊨»-языке будет выполняться: из $B \vee C \equiv \neg B \to C$ следует $B \vee C \vDash \neg B \to C$, и по ⊨-теореме дедукции («обратно») – $B \vee C, \neg B \vDash C$.

Выше (сноска 16) уже отмечалось, что логическое следование ⊨ можно заменять на выводимость ⊢, и обратно, так что наш результат с выводимостью – правильный (хотя этот «факт» имеет «статус» пока запретного знания из будущего – запретного, потому что возможность такой замены еще не установлена). Что же смущает в (**)?

Дело в том, что (по крайней мере формально) «сбылись наихудшие опасения», а именно то, против чего выше предостерегал **[Кл]**: в паре $\{B, \neg B \vdash C\}, \{C, \neg B \vdash C\}$, которой мы воспользовались в рамках *правила вспомогательного вывода* (V-удаление), формулы B и C не могут быть «последовательно признаны за выводимые из... множества формул» $B \vee C, \neg B$. В этом правиле «список допущений... каждого из вспомогательных выводов $< B, \neg B$ и $C, \neg B >$ отличается от списка допущений результирующего вывода $< B \vee C, \neg B >$». Как же бороться с этим «**[Кл]**икушеством»? У нас созрел хороший вопрос – вот когда нужна

Консультация перед экзаменом

Но поскольку она уже состоялась давно и без нас, попробуем что-то придумать сами.

Прибегнем к помощи «старой доброй» теоремы дедукции («туда»). У нас есть выводимость $B, \neg B \vdash C$, есть даже формальный вывод для нее, состоящий из одиннадцати формул. На базе этого вывода теорема дедукции строит вывод для $\neg B \vdash B \to C$. Мы тоже можем его построить:

Вывод для $B, \neg B \vdash C$:

1. $\neg B$ *допущение*
2. B *опасное допущение !*
3. $B\to(\neg C\to B)$ *аксиома*
4. $\neg B\to(\neg C\to\neg B)$ *аксиома*
5. $\neg C\to B$ *MP*
6. $\neg C\to\neg B$ *MP*
7. $(\neg C\to B)\to((\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C)$ *аксиома*
8. $(\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C$ *MP*
9. $\neg\neg C$ *MP*
10. $\neg\neg C\to C$ *аксиома*
11. C *MP*

Вывод для $\neg B \vdash B\to C$:

1. $\neg B$, 1а. $\neg B\to(B\to\neg B)$,
1б. $B\to\neg B$,
2. $B\to(C\to B)$,
2а. $(B\to(C\to B))\to[(B\to((C\to B)\to B))\to(B\to B)]$,
2б. $(B\to((C\to B)\to B))\to(B\to B)$,
2в. $(B\to((C\to B)\to B))$, 2г. $B\to B$,
3. $B\to(\neg C\to B)$,
3а. $(B\to(\neg C\to B))\to(B\to(B\to(\neg C\to B)))$,
3б. $B\to(B\to(\neg C\to B))$,
4. $\neg B\to(\neg C\to\neg B)$,
4а. $(\neg B\to(\neg C\to\neg B))\to(B\to(\neg B\to(\neg C\to\neg B)))$,
4б. $B\to(\neg B\to(\neg C\to\neg B))$,
5. $(B\to(B\to(\neg C\to B)))\to((B\to B)\to$
$\to(B\to(\neg C\to B)))$,
5'. $(B\to B)\to(B\to(\neg C\to B))$ MP из 3б, 5,
5''. $B\to(\neg C\to B)$ MP из 2г, 5',
6. $(B\to(\neg B\to(\neg C\to\neg B)))\to((B\to\neg B)\to$
$\to(B\to(\neg C\to\neg B)))$,
6'. $(B\to\neg B)\to(B\to(\neg C\to\neg B))$ MP из 4б, 6,
6''. $B\to(\neg C\to\neg B)$ MP из 1б, 6',
7. $(\neg C\to B)\to((\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C)$,
7а. $((\neg C\to B)\to((\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C))\to$
$\to(B\to((\neg C\to B)\to((\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C)))$,
7б. $B\to((\neg C\to B)\to((\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C))$,
8. $(B\to((\neg C\to B)\to((\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C)))\to$
$\to((B\to(\neg C\to B))\to(B\to((\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C)))$
8'. $(B\to(\neg C\to B))\to(B\to((\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C))$
MP из 7б, 8,
8''. $B\to((\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C)$ MP из 5'', 8',
9. $(B\to((\neg C\to\neg B)\to\neg\neg C))\to((B\to(\neg C\to\neg B))\to$
$\to(B\to\neg\neg C))$,
9'. $(B\to(\neg C\to\neg B))\to(B\to\neg\neg C)$ MP из 8'', 9,
9''. $B\to\neg\neg C$ MP из 6'', 9',
10. $\neg\neg C\to C$, 10а. $(\neg\neg C\to C)\to(B\to(\neg\neg C\to C))$,
10б. $B\to(\neg\neg C\to C)$,
11. $(B\to(\neg\neg C\to C))\to((B\to\neg\neg C)\to(B\to C))$,
11'. $(B\to\neg\neg C)\to(B\to C)$ MP из 10б, 11,
11''. $B\to C$ MP из 9'', 11'.

Слева мы отмечаем только «статус» формулы: аксиома, допущение или результат МР. От этого зависит обработка формулы теоремой дедукции для вывода справа. Указанной обработке отвечают цифры с буквами, под цифрами со штрихами мы «дожимаем» обработанные формулы «до нужной кондиции» дополнительными МР. «Обрезаемые» антецеденты в МР обозначаем одинаковым цветом, но при печати это наверняка потеряется. Итог: 35 формул вместо 11.

Проделанная только что работа – по-видимому, одна из тех, про которые говорят: «такую работу следует делать только один раз в жизни». Чего мы добились, «притворившись» теоремой дедукции? Два момента.

Первый состоит в том, что мы получили в распоряжение корректный вывод соотношения $\neg B \vdash B \to C$. Коль скоро он предъявлен, можно забыть о $B, \neg B \vdash C$. Естественно «прокрутить тот же алгоритм», чтобы из второго соотношения $C, \neg B \vdash C$ нашей пары получить выводимость $\neg B \vdash C \to C$. Но мы уже выучили, что теорема дедукции здесь не нужна. Действительно, теорема $\vdash C \to C$ приводилась выше несколько раз, а то, что к ней можно «приставить» $\neg B$ в качестве «фантомного» допущения, чтобы получить $\neg B \vdash C \to C$, обсуждалось в Вопросе 16 (после *Важного наблюдения*), хотя в такой «приставке» мы не нуждаемся: формула $B \to C$ выводится из $\neg B$, а $C \to C$ – из аксиом (т.е. доказывается). В любом случае формулы $B \to C$ и $C \to C$ являются «последовательно признаваемыми за выводимые из» формул $B \vee C$, $\neg B$. Теперь остается только воспользоваться аксиомой 6 и три раза – правилом МР.

Итак, решение:

1. $\neg B \vdash B \to C$,
2. $(\neg B) \vdash C \to C$,
3. $B \vee C, (\neg B,)\ B \to C, C \to C \vdash C$:
   а) $(B \to C) \to ((C \to C) \to (B \vee C \to C))$ аксиома 6,
   б) $(C \to C) \to (B \vee C \to C)$ МР из а) и $B \to C$,
   в) $B \vee C \to C$ МР из б) и $C \to C$,
   г) C МР из в) и $B \vee C$.

Теперь второй момент. Коль скоро нас больше не смущает, что используемая для решения задачи выводимость $\neg B \vdash B \to C$ получена на основе выводимости $B, \neg B \vdash C$, в которой формула B не принадлежит исходному множеству $B \vee C$, $\neg B$ (и неизвестно еще, можно ли ее из него вывести), то нас не должно смущать и решение, проведенное в (**):

$$\frac{\begin{array}{c} B, \neg B \vdash C \\ C, \neg B \vdash C \end{array}}{\mathbf{B \vee C, \neg B \vdash C}}$$

Действительно, в (**) мы получаем выводимость $B \vee C, \neg B \vdash C$, вывод которой строится *с помощью* выводов для $B, \neg B \vdash C$ и $C, \neg B \vdash C$ (и, будучи установленным, в них больше не нуждается), а не *при условии* наличия антецедентов этих выводов среди множества исходных допущений. Таким образом, решение (**) «полностью реабилитировано».

Вот, собственно, и все.

Остающиеся вопросы.

1. Насколько типичен «данный конкретный случай»? Безусловно, вопрос продиктован отсутствием достаточного опыта, но тогда

2. Интересны примеры различных *казусов* при пользовании *правилами вспомогательного вывода.*

3. Существует ли «работоспособное» соответствие между множеством решений на основе введений и удалений и множеством формальных выводов? Например, теорема дедукции в прямой формулировке (→-введение) дает алгоритм построения вывода, наличие которого она утверждает. Можно ли по выводу в форме введений и удалений восстановить список формул, который дает формальный вывод в смысле определения?

P.S. Вдогонку – цитата из **[Кл]**, с. 59-60:

«Правило ∨-удаления отвечает содержательному приему разбора «частных случаев». Если установлено или допущено «$A \vee B$», то для доказательства C достаточно доказать, что C получается в обоих случаях, т.е. как в случае, когда имеет место A, так и в случае, когда имеет место B. Иными словами, чтобы вывести C из $A \vee B$, «удаляют» дизъюнкцию и строят два различных вывода, один – выводя C из A, другой – C из B.

Именно в этом смысле мы можем считать разбираемое правило правилом удаления»

Приведем также сноску на с. 60:

«Более естественно вписывается в схему «правил удаления» другая формулировка, предложенная Генценом:

$$\textit{Если}\ \Gamma\vdash A\vee B\ \ \textit{и}\ \ \Gamma, A\vdash C\ \ \textit{и}\ \ \Gamma, B\vdash C,\ \ \textit{то}\ \Gamma\vdash C.$$

Здесь V действительно удаляется из первой посылки.»

Три замечания. 1. Надо было привести эту цитату выше. 2. Она «удостоверяет» приведенный на с. 66 «рецепт решения подобных задач в **[Л]**, с. 89», подводя под него «учебниковое основание». 3. Несмотря на все это, развернутая на предыдущих страницах «отсебятина» представляется небесполезной.

Другие задачи

Задача 3. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи.

Вывести: Смит был убийцей.

A = «Джонс не встречал Смита этой ночью»,

B = «Смит был убийцей»,

C = «Джонс лжет»,

D = «убийство произошло после полуночи».

Вывести: $\mathbf{A\to B\vee C,\ \neg B\to A\&D,\ D\to B\vee C,\ \neg D\vdash B.}$

Внимательное изучение данных еще на «довычислительном» этапе дает подсказку: «Если Смит не был убийцей, то ... убийство произошло после полуночи». Применим «контрапозицию»: если убийство произошло до полуночи, то Смит – убийца. Тогда заключение экспертов делает этот вывод неопровержимым!

Приведенная «подсказка» важна тем, что она отбрасывает те условия, которыми мы не пользуемся, а именно, $\mathbf{A\to B\vee C}$ и $\mathbf{D\to B\vee C}$.

Решение. Сначала – сечение: $\mathbf{\neg B \to A\&D}$ (дано), $\mathbf{A\&D \to D}$ (&-удаление) $\vdash$ $\mathbf{\neg B \to D}$**,** затем – уже известная процедура:

$\mathbf{\neg D, \neg B \to D, \neg B \vdash \neg D}$ $\to$-удаление + свойство 2а из Вопроса 16,

$\underline{\mathbf{\neg D, \neg B \to D, \neg B \vdash \neg D}}$ свойство 1 (или 1', или 1") из Вопроса 16,

$\mathbf{\neg D, \neg B \to D \vdash \neg\neg B}$ ($\neg$-введение),

и наконец – $\mathbf{\neg\neg B \to B}$ – $\neg$-удаление. *Другой способ*: начать с $\mathbf{\neg B \to A\&D \vdash \neg A \vee \neg D \to B}$**...**

Задача 4. Если подозреваемый совершил эту кражу, то она была тщательно подготовлена или он имел соучастника. Если бы кража была тщательно подготовлена, то если бы он имел соучастника – был бы украден дорогой компьютер. Однако компьютер остался на месте.

Заключение: подозреваемый невиновен.

<Карандашная пометка в **[Л]**: «заключение неправильно».> Это будет УПР.

19. Лемма о соответствующих *n*-ках букв

Начнем с одной леммы из **[Кл]**, с. 61-62:

Лемма 1. Для каждого входа (строки) истинностной таблицы для любой из связок $\neg$, &, V и $\to$ исчисления высказываний справедливо соответствующее соотношение выводимости.

Пишем ТИ, рядом в соответствующих строках помещаем отвечающие им соотношения выводимости, затем приводим доказательства. В кАчестве вспомогательных используем свойства I) $A \vdash A$, II) $\Gamma \vdash B \Rightarrow \Gamma, C \vdash B$ (B и C – формулы, Г – конечный набор формул), а также правила введения и удаления, в частности, III) $A, \neg A \vdash B$ (слабое $\neg$-удаление).

ТИ ***соотношение выводимости*** ***доказательство***

A	B	A&B	соотношение выводимости		доказательство
t	t	t	$A,\ B \vdash A\&B$	(1)	&-введение; (2) – (4) доказываются почти одинаково, докажем (2):
t	f	f	$A, \neg B \vdash \neg(A\&B)$	(2)	$A, \neg B, \mathbf{A\&B} \vdash \mathbf{B}$ (&-уд., I, II);
f	t	f	$\neg A,\ B \vdash \neg(A\&B)$	(3)	$A, \mathbf{\neg B}, A\&B \vdash \mathbf{\neg B}$ (I, II) $\Rightarrow$ (2)
f	f	f	$\neg A, \neg B \vdash \neg(A\&B)$	(4)	(¬-введение)

A	B	AVB	соотношение выводимости		доказательство
t	t	t	$A,\ B \vdash A \vee B$	(5)	(5) – V-введение, (6) и (7) – V-введение, I; (8): $\neg A, A \vdash B$ (III),
t	f	t	$A, \neg B \vdash A \vee B$	(6)	$\neg A, \mathbf{B} \vdash \mathbf{B}$ (I, II) $\Rightarrow \neg A, A \vee B \vdash B$
f	t	t	$\neg A,\ B \vdash A \vee B$	(7)	(V-уд-е) $\Rightarrow \neg A, \neg B, A \vee B \vdash B$ (II),
f	f	f	$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$	(8)	вместе с $\neg A, \mathbf{\neg B}, A \vee B \vdash \mathbf{\neg B}$ (I, II) это дает (8) (¬-введение)

A	B	A→B	соотношение выводимости		доказательство
t	t	t	$A,\ B \vdash A \to B$	(9)	(9) – →-введ., (10) – ¬-введением из $\neg B, \mathbf{A, A \to B} \vdash \mathbf{B}$ (→-уд-е, II) и
t	f	f	$A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$	(10)	$\mathbf{\neg B}, A, A \to B \vdash \mathbf{\neg B}$ (I, II); (11) – теоремой дедукции из $\neg A, B, A \vdash B$
f	t	t	$\neg A,\ B \vdash A \to B$	(11)	(I / III, II); (12) – теоремой дедукции
f	f	t	$\neg A, \neg B \vdash A \to B$	(12)	из $\neg A, \neg B, A \vdash B$ (III, II)

A	¬A	соотношение выводимости		доказательство
t	f	$A \vdash \neg\neg A$	(13)	¬-введением из $A, \neg A \vdash B$ (III) и $A, \neg A \vdash \neg B$ (III)
f	t	$\neg A \vdash \neg A$	(14)	¬-введением из $\neg A, A \vdash B$ (III) и $\neg A, A \vdash \neg B$ (III)

Мы хотим «свернуть» полученные выше 14 *конкретных* соотношений в одно *символьное,* формализующее зависимость соотношения выводимости от входа в ТИ. Для этого произвольной формуле (или переменной) Q и произвольному истинностному (одному из двух) значению $\sigma \in \{t, f\}$ поставим в соответствие новую формулу Q^σ, задаваемую правилом

$$Q^\sigma = \begin{cases} Q, \text{ если } \sigma = t, \\ \neg Q, \text{ если } \sigma = f. \end{cases}$$

Справедлива

Лемма 1'. Пусть $\sigma, \tau \in \{t, f\}$, $F = P \otimes Q$, где $\otimes$ – одна из связок &, V или $\rightarrow$, и $G = \neg P$. Тогда $P^\sigma, Q^\tau \vdash F^{\sigma \otimes \tau}$, а $P^\sigma \vdash G^{\neg\sigma}$.

Доказательство дано выше. В этом надо просто убедиться перебором всех связок. Пусть, например, $\otimes$ = &. Теперь надо перебрать все интерпретации, т. е. (четыре) пары истинностных значений, последовательно приписываемых (σ, τ), и посмотреть, что будет. Если $(\sigma, \tau) = (t, t)$, то проверяется соотношение $P = P^t$, $Q = Q^t \vdash (P\&Q)^{t \,\&\, t\, =\, t} = P\&Q$, т.е. (1). Если $(\sigma, \tau) = (t, f)$, то проверять надо $P = P^t$, $\neg Q = Q^f \vdash (P\&Q)^{t \,\&\, f \,=\, f} = \neg(P\&Q)$, а это есть в точности (2), и т.д.

УПР.: завершите доказательство. (В **[Л]** надо все это искать на с. 82-84.)

Лемма о соответствующих n-ках букв. Пусть F – формула, а $P_1,\ldots, P_n$ – переменные, входящие в F, и пусть фиксировано произвольное распределение $\sigma_1,\ldots, \sigma_n$ истинностных значений для $P_1,\ldots, P_n$, при котором F принимает значение λ. Тогда $P_1^{\sigma_1},\ldots, P_n^{\sigma_n} \vdash F^\lambda$.

Доказательство ведется индукцией по числу m связок в формуле F. Если $m = 0$, то F представляет собой просто (пропозициональную) переменную, и утверждение леммы имеет вид $P_1^{\sigma_1},\ldots, P_i^{\sigma_i},\ldots, P_n^{\sigma_n} \vdash P_i^{\sigma_i}$ и сводится к $P_i \vdash P_i$ и $\neg P_i \vdash \neg P_i$ (ср. **[Менд]**, с. 44). (При $m = 1$ получается в точности лемма 1'.) Допустим, лемма верна при любом $m < k$.

Пусть F с числом связок $= k$ имеет вид $F_1 \otimes F_2$, где $\otimes$ = &, либо V, либо $\rightarrow$. (В **[Л]**, с. 82, говорится о графическом совпадении $F \stackrel{\circ}{=} F_1 \otimes F_2$, только «кругляшок» там был «внутри» равенства; возможно, это просто способ избавиться от обсуждения *однозначности* подобных представлений для формул, см. сноску 18). По предположению индукции лемма верна для формул F_1 и F_2. Это означает, что если при распределении $\sigma_1,\ldots, \sigma_n$ истинностных значений для $P_1,\ldots, P_n$ эти формулы принимают, соответственно, значения λ_1 и λ_2, то $P_1^{\sigma_1},\ldots, P_n^{\sigma_n} \vdash F_1^{\lambda_1}$ и $P_1^{\sigma_1},\ldots, P_n^{\sigma_n} \vdash F_2^{\lambda_2}$. По лемме 1' имеем $F_1^{\lambda_1}, F_2^{\lambda_2} \vdash F^{\lambda_1 \otimes \lambda_2}$, поэтому в итоге $P_1^{\sigma_1},..., P_n^{\sigma_n} \vdash F^{\lambda}$, так как $\lambda_1 \otimes \lambda_2 = \lambda$ по построению.

На стадии индукционного шага использована выводимость

$$\frac{\Gamma \vdash A, \quad \Gamma \vdash B \ (\Gamma - \text{конечный набор допущений}) \quad A, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

УПР. Докажите эту выводимость на основе определения (формального) вывода.

Продолжим доказательство леммы. Предположим теперь, что F с числом связок = k имеет вид ¬H и воспользуемся предположением индукции, очевидно выполняющимся для H:

$P_1^{\sigma_1},..., P_n^{\sigma_n} \vdash H^{\mu}$, где μ – значение формулы H при распределении $\sigma_1,..., \sigma_n$ истинностных значений для $P_1,..., P_n$. По лемме 1' имеем $H^{\mu} \vdash F^{\neg\mu}$. В итоге $P_1^{\sigma_1},..., P_n^{\sigma_n} \vdash F^{\lambda}$, так как $\neg\mu = \lambda$ по построению.

УПР. Какая выводимость использована в этом случае?

Лемма доказана.

Следует отметить, что *лемма о соответствующих n-ках букв* в приведенной формулировке и с приведенным доказательством не обнаружена нигде, кроме **[Л]**екций. Это говорит о том, что у **[Л]**ектора имеется какая-то своя «заначка» («шляпа фокусника»), которую приходится вот таким вот образом реконструировать.

Замечание профессора Замова. Посмотрите **[МетаКл]**, с. 121 и далее. Сами Вы, батенька, «шляпа»!

Близкое по форме (и почти то же по сути) имеется в **[Менд]**, с. 43-44, у **[Кл]** «что-то подобное» возникает после его процитированной выше леммы 1 (с. 62-63). Подобные утверждения нужно искать в окрестности теоремы, ожидающей нас в следующем вопросе.

20. Теорема о полноте исчисления высказываний

Начнем с одного вспомогательного, но важного результата, которым любит «подначивать» своих читателей **[Кл]** (с. 64).

Лемма. Какова бы ни была формула А, имеем $\vdash$**A V ¬A** (закон исключенного третьего).

Согласно **[Л]**, с. 78, вывод формулы AV¬A займет 60 строк, однако

Доказательство обходится всего 8-ю «каноническими выводимостями», которые, вслед за **[Л]**, мы будем «тянуть» от конца к началу. Итак,

8. $\vdash$ **A V ¬A**

получается из

7. $\vdash$**¬¬(A V ¬A)**

применением правила

$$\frac{\vdash \neg\neg C \qquad \neg\neg C \vdash C \text{ (слабое } \neg\text{-удаление)}}{\vdash C}$$

доказательство которого на основе определений остается как УПР.

Далее, соотношение **7** получается ¬-введением из выводимостей

6. ¬(A V ¬A) $\vdash$ **¬A**

и

5. ¬(A V ¬A) $\vdash$ **¬¬A,**

каждая из которых также является результатом ¬-введения: соотношение 6 следует из

4. ¬(A V ¬A), A $\vdash$ **A V ¬A** (V-введение)

и

3. ¬(A V ¬A), A $\vdash$**¬(A V ¬A)** (C $\vdash$ C),

а соотношение 5 – из

2. ¬(A V ¬A), ¬A $\vdash$ **A V ¬A** (V-введение)

и

1. ¬(A V ¬A), ¬A $\vdash$**¬(A V ¬A)** (C $\vdash$ C).

Лемма доказана.

Теорема о полноте исчисления высказываний. Если формула F общезначима, то она доказуема, или, короче, если $\vDash$F, то $\vdash$F.

Доказательство. Пусть $P_1,..., P_n$ – переменные, входящие в F. Так как F общезначима, то при любом распределении $\sigma_1,..., \sigma_n$ истинностных значений для $P_1,..., P_n$ она принимает значение t. Применение леммы о соответствующих n-ках букв дает $P_1^{\sigma_1},\ldots, P_n^{\sigma_n} \vdash F^t = F$ для всех таких распределений. Вот этим соотношением сейчас и воспользуемся. Для произвольной $(n-1)$-ки $\sigma_1,\ldots, \sigma_{n-1}$ имеем

$$P_1^{\sigma_1},\ldots, P_{n-1}^{\sigma_{n-1}}, P_n^t = P_n \vdash F \text{ и } P_1^{\sigma_1},\ldots, P_{n-1}^{\sigma_{n-1}}, P_n^f = \neg P_n \vdash F,$$

откуда V-удалением получим $P_1^{\sigma_1},\ldots, P_{n-1}^{\sigma_{n-1}}, P_n \vee \neg P_n \vdash F$ и, окончательно,

$$P_1^{\sigma_1},\ldots, P_{n-1}^{\sigma_{n-1}}, \vdash F$$

благодаря правилу

$$\vdash A$$

$$\frac{A, \Delta \vdash B}{(\text{УПР.})\Delta \vdash B}$$

и ***лемме*** из начала данного раздела: $\vdash P_n \vee \neg P_n$. Далее делаем то же самое для произвольной $(n-2)$-ки $\sigma_1,\ldots, \sigma_{n-2}$, в результате будет $P_1^{\sigma_1},\ldots, P_{n-2}^{\sigma_{n-2}} \vdash F$. Тем самым «запущен процесс»; на каждом его шаге происходит уменьшение на единицу числа формул, из которых выводится F. На n-том шаге таких формул не остается вовсе, что и требуется: $\vdash F$.

Теорема доказана.

Определение. Формальная аксиоматическая система называется *полной,* если в ней доказуемы все общезначимые формулы. (См. также следующий Вопрос 21.)

Для лучшей усвояемости проделаем все вышеизложенное для $n = 2$ (как в **[Л]**, с. 84-85).

Нам нужно доказать, что «если $\vDash F$, то $\vdash F$» в случае, когда в F входят только две переменные, P_1 и P_2.

Начнем с того, что так как F общезначима, то при любом распределении σ_1, σ_2 истинностных значений для P_1, P_2 она принимает значение t. Применение леммы о соответствующих *двойках* букв дает $P_1^{\sigma_1}, P_2^{\sigma_2} \vdash F^t = F$ для всех таких распределений. Вот этим соотношением сейчас и воспользуемся.

зуемся. «По логике» доказательства общего случая надо делать так. Фиксируем произвольное σ_1, тогда будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} P_1^{\sigma_1}, P_2^t = \ \ P_2 \vdash F, \\ \\ P_1^{\sigma_1}, P_2^f = \neg P_2 \vdash F, \end{array}\right\} \quad \vee\text{-удалением} \quad P_1^{\sigma_1}, P_2 \vee \neg P_2 \vdash F.$$

Далее применяем правило сечения:

$$\frac{\vdash P_2 \vee \neg P_2 \qquad P_2 \vee \neg P_2, P_1^{\sigma_1} \vdash F}{P_1^{\sigma_1} \vdash F}$$

В силу произвольности σ_1 мы получили на самом деле две выводимости $P_1^{\sigma_1} \vdash F$, отвечающие двум возможным значениям буквы σ_1 – t и f:

$$\left.\begin{array}{l} P_1^t = \ \ P_1 \vdash F, \\ \\ P_1^f = \neg P_1 \vdash F, \end{array}\right\} \quad \vee\text{-удаление: } P_1 \vee \neg P_1 \vdash F. \text{ Сечение: } \quad \frac{\vdash P_1 \vee \neg P_1 \qquad P_1 \vee \neg P_1 \vdash F}{\vdash F.}$$

Фактически на прошлых страницах у нас было начало доказательства теоремы, а здесь – его окончание. Чем отличается данное изложение от **[Л]**? Здесь мы действуем последовательно, фиксируя произвольное σ_1 и придавая σ_2 значения t и f, а после устранения P_2 – придавая эти значения оставшейся σ_1 и устраняя P_1. В **[Л]** выписываются сразу все четыре соотношения

$$P_1^{\sigma_1}, P_2^{\sigma_2} \vdash F^t = F,$$

отвечающие четырем распределениям значений в паре σ_1, σ_2:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P_1^t, P_2^t \vdash F \\ \\ P_1^t, P_2^f \vdash F \end{array}\right\} \vee\text{-удаление: } \ P_1, P_2 \vee \neg P_2 \vdash F \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vee\text{-удаление:} \\ \\ \left.\begin{array}{l} P_1^f, P_2^t \vdash F \\ \\ P_1^f, P_2^f \vdash F \end{array}\right\} \vee\text{-удаление: } \neg P_1, P_2 \vee \neg P_2 \vdash F \end{array}\right\} P_1 \vee \neg P_1, P_2 \vee \neg P_2 \vdash F.$$

И, наконец, сечение: $\vdash P_1 V\neg P_1$

$\vdash P_2 V\neg P_2$ в форме **5c** из Вопроса 16.

$$\frac{P_1V\neg P_1,\ P_2V\neg P_2 \vdash F}{\vdash F}$$

21. Теорема о непротиворечивости исчисления высказываний

Вначале пойдем по **[Кл]**, с. 58-59, потом будем разбираться.

Теорема, обратная к теореме о полноте. Если формула F доказуема, то она общезначима, т.е. если $\vdash F$, то $\vDash F$.

Доказательство. В силу пунктов 1)-8) Вопроса 7 все аксиомы исчисления высказываний общезначимы. В силу теоремы из Вопроса 8 если общезначимы две посылки A и $A \to B$ правила MP, то общезначима B. Следовательно, когда мы строим доказательство $F_1,\ldots, F_k$ формулы F, каждая из последовательно вводимых формул F_1, F_2, F_3,... общезначима, ибо она либо является аксиомой, либо же получена из общезначимых формул применением MP. Следовательно, последняя формула F_k, совпадающая с F, общезначима.

Следствие. Не существует формулы B, такой, что доказуемы формулы B и $\neg B$, т.е. ни для какой формулы B не выполняется одновременно $\vdash B$ и $\vdash \neg B$.

Доказательство. Пусть для некоторой формулы B имеет место $\vdash B$ и $\vdash \neg B$. Тогда в силу только что доказанной теоремы $\vDash B$ и $\vDash \neg B$, т.е. в столбцах значений ТИ для B и $\neg B$ стоят только t. Этого быть не может, так как ТИ для $\neg$ устроена так, что если B дает только t, то $\neg B$ должна давать только f.

Теорема, обратная к теореме о полноте, устанавливает «непротиворечивость исчисления высказываний относительно общезначимости», а ее *следствие* устанавливает так называемую простую непротиворечивость.

Здесь мы вплотную подходим к **[Л]**, с. 79-81.

Возникает только один маленький вопрос: непротиворечивость (и полнота) чего исследуется? В предыдущем Вопросе 20 в качестве этого «чего» предложено понятие формальной аксиоматической системы. Под этим понимаются аксиомы 1)-8) и все, что из них выводится по правилу

MP. В данном контексте понятия «формальная аксиоматическая система» и «исчисление высказываний» являются синонимами.

Формальная аксиоматическая система называется ***непротиворечивой,*** если в ней нельзя доказать никакую формулу одновременно с ее отрицанием, другими словами, если справедливо утверждение *следствия.*

Формальная аксиоматическая система называется ***полной,*** если в ней доказуемы все общезначимые формулы.

Предложение. В непротиворечивой системе существует хотя бы одна недоказуемая формула.

Доказательство. Если бы все формулы были доказуемы, то были бы доказуемы некоторая B и ее отрицание ¬B, что противоречит условию непротиворечивости.

Верно ли обратное: будет ли непротиворечивой система, в которой существует хотя бы одна недоказуемая формула? Предположим, такая система противоречива, т.е. найдутся доказуемые B и ¬B. Тогда ответ на вопрос может зависеть, например, от того, выполняется ли в этой системе слабое ¬-удаление. Если выполняется, то применяя его к паре B и ¬B, получим $B, \neg B \vdash C$ – любая формула, которая, таким образом, доказуема. Приходим к противоречию с существованием в системе хотя бы одной недоказуемой формулы.

Можно ли рассматривать это как доказательство непротиворечивости «нашей» формальной аксиоматической системы? В ней же выполняется слабое ¬-удаление!

Часть II. Исчисление предикатов

Вместо предисловия...

Осмысление предикатов чем-то напоминает сюжет «Имени Розы»: ускользающая нить поиска приводит к очередному упражнению в логике, будь то богословский диспут или разгадывание улик... Примерно то же самое ждет нас здесь. Начнем с **[Менд]**, с. 53:

«Чтобы сделать более прозрачной структуру сложных высказываний, удобно ввести специальные обозначения для некоторых часто встречающихся выражений. Если P(x) означает, что x обладает свойством P, то договоримся посредством $\forall x$ P(x) обозначать утверждение: “для всякого предмета x свойство P выполнено”, или, другими словами, “все x обладают свойством P”. Запись $\exists x$ P(x) будет означать, что “существует предмет x, обладающий свойством P”, т.е. “существует по крайней мере один предмет x, обладающий свойством P”».

Все вроде хорошо, но выдает **[Непей]**, с. 36:

«Утверждение “для всех x верно A(x) ” символически записывается $\forall x$ A(x).» И т.д.

«Обладает», «выполняется для», «верно для». Можно продолжить смещение нюансов: «справедливо для», «истинно для»... Стоп! «Свойство выполняется» как щадящий, «маскирующий» синоним для «свойство истинно»? Но ведь истинность (или ложность) мы еще только *будем* исследовать?! Вновь **[Непей]**, с. 36:

«Утверждение $\forall x$ A(x) истинно тогда и только тогда, когда A(c) истинно, какой бы конкретный предмет c из универса нашей теории мы ни подставили вместо x.»

То есть «истинно» можно говорить, только перейдя к интерпретации, но тогда и «выполняется», «справедливо», «обладает» можно говорить только *после* перехода к интерпретации, а не *до*… Вот если бы не это злополучное «$\forall x$», которое *обязывает* что-то сказать про «P(x)». Как хорошо в исчислении высказываний: «$\vDash$»-теория вообще работает только с интерпретациями, более загадочная «$\vdash$»-теория берет буквы, выкладывает их в аксиомы, а потом выводит из этих аксиом новые буквы с помощью MP. ***И ничего не надо говорить!***

Получается, чтобы *определить* «$\forall x$ P(x)», нужно что-то вроде *изначальной* интерпретации?! А ведь по аналогии с исчислением высказываний ожидалось что-то более ***формальное***, уж во всяком случае – абстрагированное от «физического смысла» Ну, например, в таком духе. Если высказывание зависит от x, т.е. может быть записано как «P(x)», то «$\forall x$» и «$\exists x$» означают две операции-приставки, результатом применения которых к P(x) должны стать два высказывания (буквы), не зависящие от x. И эти применения должны характеризоваться «так-то и так-то», а их результаты отличаться «тем-то и тем-то». *А уж потом* говорить про «для любого» и «существует», подавая их как *желанные или руководящие интерпретации,* смотря по тому, что нам больше нравится – «рояль в кустах» или «а мы тут, оказывается, плюшками баловались». Уж за полтораста-то лет можно было что-то придумать!

Последняя надежда – **[УВП]** (весь «пронизанный» предикатами), с. 23-24:

«Наряду с пропозициональными операциями в математической логике рассматриваются *кванторы*, позволяющие из данной высказывательной формы получать высказывательную форму с меньшим числом параметров, в частности, из одноместной высказывательной формы – высказывание.

Квантор (все)общности позволяет из данной высказывательной формы с единственным параметром x получить высказывание с помощью оборота «Для всех x ...» <ну вот, опять!>. Результат применения квантора общности к высказывательной форме A(x) будем обозначать $\forall x$ A(x). Высказывание $\forall x$ A(x) считается истинным тогда и только тогда, когда при подстановке в A(x) вместо свободных вхождений переменной x имени любого объекта из области ее возможных значений всегда получается истинное высказывание...».

«*Квантор существования* соответствует образованию из данной высказывательной формы с единственным параметром x высказывания с помощью оборота «Существует такой x, что ...». Результат применения квантора существования к высказывательной форме A(x) обозначается $\exists x$ A(x). Высказывание $\exists x$ A(x) истинно тогда и только тогда, когда в области возможных значений переменной x найдется такой объект, что при подстановке его имени вместо свободных вхождений x в A(x) получается истинное высказывание...»...

...Отвлечемся на время от «общих разговоров» и начнем более неформально и конкретно:

Подготовка к контрольной работе

[Л], с. 119-129:

Задача 1. Из первых двух высказываний надо вывести третье:

Перья есть только у птиц. *сразу формализуем* $\forall x\,(\text{ПЕ}(x)\to\text{ПТ}(x))$

Ни одно млекопитающее не является птицей. $\forall x\,(\text{М}(x)\to\neg\text{ПТ}(x))$

Значит, все млекопитающие не имеют перьев. $\forall x\,(\text{М}(x)\to\neg\text{ПЕ}(x))$

Здесь использованы обозначения:

ПЕ(x) – «у x есть перья»,
ПТ(x) – «x является птицей»,
М(x) – «x – млекопитающее».

Сначала без кванторов (и уберем пока x – ради краткости): требуется обосновать

$$\text{ПЕ}\to\text{ПТ},\ \text{М}\to\neg\text{ПТ}\ \vdash\ \text{М}\to\neg\text{ПЕ}$$

$\Uparrow \leftarrow$ теорема дедукции

$$\text{ПЕ}\to\text{ПТ},\ \text{М}\to\neg\text{ПТ},\ \text{М}\ \vdash\ \neg\text{ПЕ}$$

Используем ¬-введение (*reductio ad absurdum*): $\Uparrow$

$\Uparrow$

$$\underline{\text{ПЕ}\to\text{ПТ}},\ \text{М}\to\neg\text{ПТ},\ \text{М},\ \underline{\text{ПЕ}}\vdash\ \underline{\text{ПТ}}\quad(\to\text{-удаление})$$

$$\text{ПЕ}\to\text{ПТ},\ \underline{\text{М}\to\neg\text{ПТ},\ \text{М}},\ \text{ПЕ}\vdash\underline{\neg\text{ПТ}}\quad(\to\text{-удаление})$$

$$\frac{\qquad}{\text{ПЕ}\to\text{ПТ},\ \text{М}\to\neg\text{ПТ},\ \text{М}\ \vdash\neg\text{ПЕ}}\quad(\neg\text{-введение})$$

Возвращаемся к кванторам:

$\forall x\,(\text{ПЕ}(x)\to\text{ПТ}(x))\vdash\text{ПЕ}(x)\to\text{ПТ}(x)$ ∀-удаление

$\forall x\,(\text{М}(x)\to\neg\text{ПТ}(x))\vdash\text{М}(x)\to\neg\text{ПТ}(x)$ ∀-удаление

$\text{ПЕ}(x)\to\text{ПТ}(x),\ \text{М}(x)\to\neg\text{ПТ}(x)\vdash\text{М}(x)\to\neg\text{ПЕ}(x)$ доказано выше

$$\frac{\qquad}{\underbrace{\forall x\,(\text{ПЕ}(x)\to\text{ПТ}(x)),\ \forall x\,(\text{М}(x)\to\neg\text{ПТ}(x))}_{\textit{сюда } x \textit{ \underline{не} входит свободно}}\vdash\text{М}(x)\to\neg\text{ПЕ}(x)}$$ правило сечения

$$\forall x\,(\text{ПЕ}(x)\to\text{ПТ}(x)),\ \forall x\,(\text{М}(x)\to\neg\text{ПТ}(x))\vdash\forall x\,(\text{М}(x)\to\neg\text{ПЕ}(x))$$

∀-введение

Вывели!

Новое для нас здесь – это введение и удаление кванторов (насчет свободного вхождения немного попозже.) Поэтому приведем табличку.

Правила введения и удаления кванторов

	Введение	Удаление
$\forall$	Если Г $\vdash$ А(x), то Г $\vdash$ $\forall x$ А(x), где x не входит свободно в Г	$\forall x$ А(x) $\vdash$ А(y), где y свободна для x в А(x), y не обязательно отлична от x
$\exists$	А(y) $\vdash$ $\exists x$ А(x), где y свободна для x в А(x), y не обязательно отлична от x	Если Г, А(x) $\vdash$ С, то Г, $\exists x$ А(x) $\vdash$ С, где x не входит свободно в С и Г

Основные проблемы, которые пока могут здесь прятаться, – это дополнительные условия. Утверждения, стоящие на главной диагонали таблицы ($\forall$-введение и $\exists$-удаление), распознаны в **[УВП]** как *правила Бернайса* (с. 72-73). Условия выше полностью соответствуют **[Кл]**, с. 145, в **[Л]** (с. 115-118) есть отличия, которые надо еще «переварить».

Еще раз «прокрутим» задачу. Средствами исчисления высказываний мы получили

$$\text{ПЕ}(x)\to\text{ПТ}(x),\ \text{М}(x)\to\neg\text{ПТ}(x) \vdash \text{М}(x)\to\neg\text{ПЕ}(x).$$

Вопрос: откуда начинать навешивать кванторы? «$\forall$» хорошо подстраивается к условию, что и реализовано выше:

$$\underbrace{\forall x\,(\text{ПЕ}(x)\to\text{ПТ}(x)),\ \forall x\,(\text{М}(x)\to\neg\text{ПТ}(x))}_{\textit{сюда } x\ \underline{\textbf{\textit{не}}}\textit{ входит свободно}} \vdash \text{М}(x)\to\neg\text{ПЕ}(x)$$

Вот эта приписка как раз и призвана «подключить» сюда первый «табличный» результат: набор Г в данном случае – это две формулы $\forall x$ (ПЕ(x)$\to$ПТ(x)) и $\forall x$ (М(x)$\to\neg$ПТ(x)) – и x в них действительно ***<u>не</u>*** входит свободно – потому, что связана кванторами; можно даже несколько запальчиво (но по существу верно) сказать, что это две обычные формулы исчисления высказываний. «По существу верно» – так как теперь (после применения $\forall$) их структура игнорируется.

Здесь уместно привести такое замечание, «ясное из контекста»:

О безболезненном «навешивании» кванторов

из **[Л]**, с. 122:

$\forall$	*безболезненное*		*болезненное*
	условия выводимости	$\vdash$	заключение выводимости
$\exists$	*болезненное*		*безболезненное*

Аналогия из «Матана».

Еще об одной интересной аналогии «из другой оперы». Пусть две функции $a(x)$ и $c(x)$ принимают вещественные значения на большом, но конечном множестве (конечность области определения функции обеспечивает существование у нее максимального и минимального значений). Пусть, далее, $a(x) \geq c(x)$ для всех x. Как доказать, что $max_x\, a(x) \geq max_x\, c(x)$, и такое же неравенство для min? Вот неравенство $max_x\, a(x) \geq min_x\, c(x)$ доказать просто: $max_x\, a(x) \geq a(x) \geq c(x) \geq min_x\, c(x)$ (при любом x в «серединке»). А требуемое неравенство доказывается «по тому же принципу», что и «задача о перьях» выше.

$$\frac{\begin{array}{r} max_x\, a(x) \geq a(x) \\ a(x) \geq c(x) \end{array}}{max_x\, a(x) \geq c(x).}$$

Теперь поскольку при любом x значение $c(x)$ не превосходит $max_x\, a(x)$, то и максимальное значение $c(x)$, т.е. $max_x\, c(x)$, не превосходит $max_x\, a(x)$:

$$max_x\, a(x) \geq max_x\, c(x).$$

Вот этот последний переход, по сравнению с предшествующими – почти очевидными, потребовал хоть какого-то усилия или хотя бы комментария – так же, как выше «навешивание» квантора $\forall$ на заключение выводимости потребовало обращения к таблице. Налицо – полная аналогия с решением **задачи 1**, причем роль $\forall$ играет *max*.

Задача 2. Каждый любит сам себя,

значит, кого-то кто-нибудь любит.

Пусть $L(z, x)$ означает «z любит x». Тогда $L(x, x)$ означает «x любит себя», и требуется вывести

$$\forall x\, L(x, x) \vdash \exists z\, \exists y\, L(z, y).$$

В отличие от предыдущей задачи здесь не возникает необходимости в предварительной работе «средствами исчисления высказываний» (ей просто неоткуда взяться). Поэтому выводимость, от которой будем дальше «плясать», ищем в таблице (и основная сложность видится в наличии двух переменных). Берем

$$\forall x\, L(x, x) \vdash L(x, x) \quad \forall\text{-удаление.} \qquad (1)$$

Здесь $L(x, x)$ может рассматриваться как одноместный предикат, обозначим его через $A(x)$ и посмотрим по таблице $\forall$-удаление.

Читаем: $\forall x\ A(x) \vdash A(y)$, где y свободна для x в $A(x)$. Нам надо убедиться в том, что x свободна для x в $A(x)$, – терминология **[Кл]**, с. 117, посмотрим подробнее. Прежде всего, $A(y)$ – это не результат подстановки y вместо x. $A(y)$ – это результат[23] подстановки y вместо ***свободных*** (т.е. не связанных кванторами) вхождений x в $A(x)$. Если те вхождения y в $A(y)$, которые возникают в результате последней подстановки, сами свободны, то говорят, что y свободна для x в $A(x)$.

По естественным обстоятельствам «нашего» случая мы можем считать, что x имеет в $A(x)$ только свободные вхождения, и что $A(x)$ не содержит других переменных, кроме x. Но тогда подстановка y замещает *все* вхождения x в $A(x)$, и все получившиеся вхождения y в $A(y)$ свободны. Если в качестве y взять x, то получится еще проще: все вхождения x на места свободных вхождений x в $A(x)$ так и останутся свободными. Таким образом, применение $\forall$-удаления является обоснованным.

Кстати, определение ***свободы*** в **[Столл]**, с. 128, является более конструктивным: формула $A(x)$ ***свободна*** для y, если в A отсутствуют свободные вхождения x, входящие в область действия кванторов $\forall y$ или $\exists y$. Удобно также определение свободной и связанной переменной (с. 120). Вхождение переменной в формулу называется ***связанным***, если оно находится в области действия квантора, использующего эту переменную, или же оно является вхождением в этот квантор. Вхождение переменной в формулу называется ***свободным***, если оно не является связанным.

[23] Выбор обозначения для этого результата нельзя назвать удачным.

Но вернемся к задаче. Мы вспоминаем, что «наш» предикат – двуместный, и хотим дважды применить $\exists$-введение:

$$\mathrm{L}(x, x) \vdash \exists y\, \mathrm{L}(x, y), \qquad (2)$$

$$\exists y\, \mathrm{L}(x, y) \vdash \exists z\, (\exists y\, \mathrm{L}(z, y)). \qquad (3)$$

«По построению» L(x, y) содержит только свободные вхождения y; если подставить x вместо этих вхождений в L(x, y), то x займет *все* вхождения y в L(x, y). Тогда запись «L(x, x)» будет корректной в обоих смыслах: 1) L(x, x) – это L(x, y), куда вместо *всех* вхождений y подставлен x, – это требуется для идентификации L(x, x) как предиката из (1), 2) L(x, x) – это L(x, y), куда x подставлен вместо всех *свободных* вхождений y, – этим доказано (2).

Для выполнения (3) таблица предписывает переменной x быть свободной для z в $\exists y$ L(z, y). «По построению» все вхождения z в L(z, y) свободны, значит, такова же и формула $\exists y$ L(z, y). Если подставить x вместо этих вхождений в $\exists y$ L(z, y), то x займет *все* вхождения z в $\exists y$ L(z, y), и все эти вхождения будут *свободны.* Последнее означает, что x свободна для z в $\exists y$ L(z, y), что и доказывает (3).

Задача 3. Некоторым нравится Элвис.	$\exists x\, N(x, \text{Э})$
<u>Некоторые не любят никого, кому нравится Элвис.</u>	$\underline{\exists x\, \forall y\, (N(y, \text{Э}) \to \neg \mathrm{L}(x, y))}$
Значит, некоторые любят не всех	$\exists x\, \neg \forall y\, \mathrm{L}(x,y)$

Использованы обозначения: $N(x, y)$ для «x нравится y»,
L(x, y) для «x любит y».

Пример выглядит сложным, но посмотрим, что можно сделать. В соответствии со складывающейся стратегией, уберем все кванторы и, заметив, что остается «почти» МР, сделаем так, чтобы никаких «почти» не осталось:

$$\begin{array}{l} N(z, \text{Э}) \\ \underline{N(z, \text{Э}) \to \neg \mathrm{L}(x, z)} \\ \qquad\qquad \neg \mathrm{L}(x, z). \end{array}$$

Это – МР «в чистом виде». Что это нам дает? Прежде, чем «навешивать» $\exists$ во всех трех строчках, нужно «навесить» $\forall$ во второй, а это можно сделать только $\forall$-удалением:

$$N(z, Э)$$

$$\forall y\,(N(y, Э)\to\neg L(x, y)) \vdash \underline{N(z, Э)\to\neg L(x, z)}$$

$$\neg L(x, z).$$

Удачно получилось – то, что нужно. При условии, что z свободна для y в $N(y, Э)\to\neg L(x, y)$, а это так, но мы не будем приводить длинные обоснования, как в предыдущем примере. Скажем просто, что все вхождения всех переменных во все «наши» (бескванторные!) формулы свободны, а подстановка z вместо y в $N(y, Э)\to\neg L(x, y)$ есть фактически переобозначение, и все вхождения z в выписанную формулу с z вместо y свободны.

Далее, было бы совсем здорово, если бы удалось доказать выводимость $\neg L(x, z)\vdash\neg\forall y\, L(x, y)$. Удается! – с помощью $\neg$-введения:

$\neg L(x, z), \underline{\forall y\, L(x, y)} \vdash \underline{L(x, z)}$

($\forall$-удаление, z свободна для y в $L(x, y)$ – вновь переобозначение)

$\underline{\neg L(x, z)}, \forall y\, L(x, y) \vdash \underline{\neg L(x, z)}$

(вспомним исчисление высказываний!)

$\neg L(x, z)\vdash\neg\forall y\, L(x, y)$ ($\neg$-введение)

Чуть продолжим: $\neg\forall y\, L(x, y) \vdash \exists x\,\neg\forall y\, L(x, y)$

($\exists$-введение, x свободна для x…)

$\neg L(x, z) \vdash \exists x\,\neg\forall y\, L(x, y)$ (правило сечения).

Имеем как предварительный итог:

$$N(z, Э),\ \forall y\,(N(y, Э)\to\neg L(x, y)) \vdash \exists x\,\neg\forall y\, L(x, y).$$

Теперь «навесим» $\exists x$ 1) на $\forall y\,(N(y, Э)\to\neg L(x, y))$, потом – 2) на $N(z, Э)$.

1) Воспользуемся $\exists$-удалением: если

$\Gamma = \{N(z, Э)\}$, $A(x) \triangleq \forall y\,(N(y, Э)\to\neg L(x, y)) \vdash C \triangleq \exists x\,\neg\forall y\, L(x, y)$, то

$$N(z, Э),\ \exists x\,\forall y\,(N(y, Э)\to\neg L(x, y)) \vdash \exists x\,\neg\forall y\, L(x, y),$$

где x не входит свободно в C и Γ, а это, очевидно, так.

2) Еще раз – $\exists$-удаление:

Если $A(z) \triangleq N(z, Э)$,

$\Gamma = \{\exists x\,\forall y\,(N(y, Э)\to\neg L(x, y))\} \vdash C \triangleq \exists x\,\neg\forall y\, L(x, y)$, то

$$\exists z\, N(z, Э),\ \exists x\,\forall y\,(N(y, Э)\to\neg L(x, y)) \vdash \exists x\,\neg\forall y\, L(x, y), \qquad (A)$$

где z не входит свободно в С и Г, а это, очевидно, так.

Остается только заметить, что $\exists z\ N(z, Э)$ можно заменить формулой $\exists x\ N(x, Э)$, подстраивая ее к только что установленному (А) посредством выводимости $\exists x\ N(x, Э) \vdash \exists z\ N(z, Э)$. Последняя получается в два этапа: сначала $\exists$-введением $N(x, Э) \vdash \exists z\ N(z, Э)$, откуда $\exists$-удалением $\exists x\ N(x, Э) \vdash \exists z\ N(z, Э)$.

Задача 4. Никто не читал этого письма, кроме Джона.
<u>Никто из тех, кто не читал этого письма, не знает его содержания</u>.
Никто, кроме Джона, не знает содержания письма.

Прежде, чем продолжать, прервемся на очередное «лирическое отступление» –

Ограниченные кванторы

Суть вопроса коротко и ясно изложена в **[Непей]**, с. 39:

«Все А есть В» переводится $\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x))$,
«Некоторые А есть В» переводится $\exists x\ (A(x) \& B(x))$.

Первым положением мы уже пользовались выше без особых колебаний. Единственный вопрос, который здесь сразу напрашивается – почему нет единообразия? Обоснованию этого как правило и посвящены соответствующие разделы тех учебников, которые эту тему затрагивают. **[Непей]**, с. 38-39, работает с интерпретациями, подбирая яркие примеры (не приводим из экономии места, но прочитать рекомендуем). Остается непонятным только – почему «ограниченные»?.. Попробуем реконструировать то, что делалось в **[Л]**, с.119-120, как обоснование второго из отмеченных выше «переводов» (с обычного языка на «кванторный»), исходя из первого.

Итак, высказывание

«Для всякого x, обладающего свойством $P(x)$, имеет место $Q(x)$» переводится как

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)).$$

Тогда высказывание

«Неверно, что для всякого x, обладающего свойством $P(x)$, имеет место $Q(x)$»

запишется как

$$\neg\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x)) \equiv \exists x\,\neg(\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x)) \equiv \exists x\,(\mathrm{P}(x)\&\neg\mathrm{Q}(x))$$

(≡ – из «теории общезначимости»...), а это переводится на «обычный язык» высказыванием

«Существуют такие x, которые обладают свойством P и не обладают свойством Q»

– можно даже изменить окончание на

«...и обладают свойством ¬Q».

«Нас подвели к тому», что запись

$$\exists x\,(\mathrm{P}(x)\&\mathrm{Q}(x))$$

означает не что иное, как

«Для некоторого x, обладающего свойством P(x), имеет место Q(x)».

Что же касается перевода $\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x))$ для высказывания с краткой формой «Все P есть Q», то он не обосновывается скорее всего потому, что в нем легче себя убедить.

Обозначения:

$\underset{\mathrm{P}(x)}{\forall x}\,\mathrm{Q}(x)$ – для $\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x))$ и $\underset{\mathrm{P}(x)}{\exists x}\,\mathrm{Q}(x)$ – для $\exists x\,(\mathrm{P}(x)\&\mathrm{Q}(x))$.

По поводу того, «почему ограниченные?», смотрим **Математическую энциклопедию**, т. 3, ст. 1162:

«*Ограниченный квантор* – квантор, используемый для характеризации предикатов не на всей области изменения данной предметной переменной, а на ее части, выделяемой некоторым предикатом R(x). При использовании в качестве О. к. *всеобщности квантор* ($\forall x$) и *существования квантор* ($\exists x$) обычно обозначаются $(\forall x)_{\mathrm{R}(x)}$ и $(\exists x)_{\mathrm{R}(x)}$. Если P($x$) – некоторый предикат, то $(\forall x)_{\mathrm{R}(x)}\,\mathrm{P}(x)$ означает

$$\forall x\,(\mathrm{R}(x)\to\mathrm{P}(x)),$$

т.е. что предикат P(x) истинен при всех значениях переменной x, удовлетворяющих предикату R(x). Высказывание $(\exists x)_{\mathrm{R}(x)}\,\mathrm{P}(x)$ означает

$$\exists x\,(\mathrm{R}(x)\&\mathrm{P}(x)),$$

т.е. что пересечение областей истинности предикатов R(x) и P(x) непусто».

Автор статьи «Ограниченный квантор» в **Математической энциклопедии** – В.Е. Плиско – один из авторов **[УВП]**.

Вернемся к **Задаче 4**, которая будет решена «со второй попытки», что очень похоже на «методическую хитрость» **[Л]**. Пусть

Ч(x) – «x читал письмо»,

З(x) – «x знает содержание письма».

Тогда перевод задачи на язык предикатов имеет вид:

$\forall x\ \neg$Ч(x)&Ч(Д) – уже в первой строчке противоречие при x = Д, но если не хотим подставлять:

$$\frac{\forall x\,(\neg Ч(x)\to\neg З(x))}{\forall x\,(З(x)\to З(Д))}$$

$\neg$Ч(x)&Ч(Д) $\vdash$ $\neg$Ч(x) (&-удаление)

$\neg$Ч(x)&Ч(Д) $\vdash$ Ч(Д) (&-удаление)

$\neg$Ч(x), $\neg$Ч(x)$\to\neg$З(x) $\vdash$ $\neg$З(x) ($\to$-удаление)

$\neg$З(x) $\vdash$ З(x)$\to$З(Д) (версия слабого $\neg$-удаления, которая выведена выше, на «консультации перед экзаменом»).

Приведенное «решение» можно считать дополнительной иллюстрацией к теме «ограниченные кванторы». Мы видим, что условие «Никто не читал этого письма, кроме Джона» было «переведено» как «$\forall x\neg$Ч(x)&Ч(Д)», а это противоречит *принципам*, заложенным в наши представления темой «Ограниченные кванторы». Эти принципы запрещают объединять в одном высказывании $\forall$ и &. В **[Л]** это «решение» было оборвано уже после первой строки как ***неправильное.***

Можно было бы исправить первую строку, заменив ее на «$\forall x$ (Ч(x)$\to$Ч(Д))». Снимем кванторы и сделаем прикидку: $\neg$Ч(x)$\to\neg$З(x) $\equiv$ З(x)$\to$Ч(x), вместе с Ч(x)$\to$Ч(Д) это приводит к логическому следствию ($\vDash$, а значит, и к выводимости $\vdash$) З(x)$\to$Ч(Д). Чтобы вывести отсюда требуемое заключение З(x)$\to$З(Д), нужно еще откуда-то знать, что Ч(Д)$\to$З(Д), т.е. что «если Джон читал письмо, то он знает его содержание». Можно, конечно, считать это очевидным и использовать. Но тогда получается, что двух исходных высказываний не хватает для вывода, или что, формализовав задачу, мы не можем абстрагироваться от содержания, пока не «подгоним» под ответ.

Таким образом, построенная модель была «недоопределенной».

Чтобы построить «правильную модель», следует произвести Джона из переменной в предикат: Д(x) – «x является Джоном», правильно записать первое условие и подправить заключение. Получим

$\forall x\, (\neg Д(x)\to\neg Ч(x))$ Без кванторов – почти очевидно.
$\underline{\forall x\, (\neg Ч(x)\to\neg З(x))}$ «Навешивание» кванторов –
$\forall x\, (\neg Д(x)\to \neg З(x))$. как в **Задаче 1** «о перьях».

Задача 5. Ни один ребенок не терпелив. $\forall x\, (Р(x)\to Н(x))$
<u>Нетерпеливые не могут сидеть спокойно</u>. $\underline{\forall x\, (Н(x)\to\neg С(x))}$
Ни один ребенок не может сидеть спокойно. $\forall x\, (Р(x)\to \neg С(x))$.

В качестве предикатов используются

Р – свойство «быть ребенком»,
Н – свойство «быть нетерпеливым»,
С – свойство «сидеть спокойно».

В точности та же схема, что и в **Задаче 4.**

Задача 6. Некоторые из тех, кто достоин славы,
получает награду $\exists x\, (С(x)\&Н(x))$
<u>Лишь тот, кто храбр, достоин славы</u> $\underline{\forall x\, (С(x)\to Х(x))}$
Некоторые храбрецы получают награду $\exists x\, (Х(x)\&Н(x))$.

Здесь С(x): «быть достойным славы»,
Н(x): «получать награду»,
Х(x): «быть храбрым».

Без кванторов:

$$С(x)\&Н(x) \vdash С(x) \quad (\&\text{-удаление})$$

$$\frac{С(x),\ С(x)\to Х(x) \vdash Х(x)}{С(x)\&Н(x),\ С(x)\to Х(x) \vdash Х(x)} \quad \begin{matrix}(\to\text{-удаление})\\ (\text{правило сечения})\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} С(x)\&Н(x),\ С(x)\to Х(x) \vdash Х(x) \\ \\ С(x)\&Н(x)\vdash Н(x)\ (\&\text{-удаление}) \end{matrix}\right\}\ Х(x),\ Н(x) \vdash Х(x)\&Н(x)\ (\&\text{-введение})$$

«Навешивание»: $\forall x\,(С(x)\to Х(x))$

$\top$ $\leftarrow$ $\forall$-удаление

Доказано выше: $С(x)\&Н(x),\ С(x)\to Х(x) \vdash Х(x)\&Н(x)$

$\top$ $\leftarrow$ $\exists$-введение

$$\frac{\dfrac{\exists x\,(Х(x)\&Н(x))}{С(x)\&Н(x),\ \forall x\,(С(x)\to Х(x)) \vdash \exists x\,(Х(x)\&Н(x))}}{\exists x\,С(x)\&Н(x),\ \forall x\,(С(x)\to Х(x)) \vdash \exists x\,(Х(x)\&Н(x))}\quad \exists\text{-удаление}$$

Задача 7. Ни один философ не тщеславен.

Некоторые тщеславные люди – азартные игроки.

Некоторые азартные игроки – не философы.

(В записи **[Л]**, по-видимому, вкралась опечатка, там «некоторые азартные игроки – философы». Вопрос, интересный сам по себе...)

$Ф(x)$ – «x – философ»,

$Т(x)$ – «x тщеславен»,

$И(x)$ – «x – азартный игрок».

Получим:
$$\frac{\begin{array}{l}\forall x\,(Ф(x)\to\neg Т(x))\\ \exists x\,(Т(x)\&И(x))\end{array}}{\exists x\,(И(x)\&\neg Ф(x))}$$

Без кванторов: требуется доказать, что

$$Т(x)\&И(x),\ Ф(x)\to\neg Т(x) \vdash И(x)\&\neg Ф(x).$$

&-удалением получаем: $Т(x)\&И(x) \vdash \boldsymbol{И(x)}$,

$Т(x)\&И(x) \vdash Т(x)$.

Если бы вместо формулы $Ф(x)\to\neg Т(x)$ мы располагали ее контрапозицией $Т(x)\to\neg Ф(x)$, то требуемое заключение получалось бы мгновенно $\to$-удалением и &-введением. Как показывает некоторый опыт, когда «не хватает только контрапозиции», то на помощь успешно приходит $\neg$-введение:

$$\frac{\begin{array}{c}Ф(x),\ Ф(x)\to\neg Т(x),\ \underline{Т(x)} \vdash \underline{Т(x)}\\ \underline{Ф(x),\ Ф(x)\to\neg Т(x)},\ Т(x) \vdash \underline{\neg Т(x)}\end{array}}{Ф(x)\to\neg Т(x),\ Т(x) \vdash \boldsymbol{\neg Ф(x)}}$$

Остается только применить &-введение:

$$И(x),\neg Ф(x)\vdash И(x)\&\neg Ф(x).$$

В расстановке кванторов ничего нового нет.

Задача 8. Ни один мост не сделан из сахара.

Некоторые мосты живописны

Некоторые живописные объекты не сделаны из сахара.

В очевидных обозначениях:

$\forall x\ (М(x) \to \neg С(x))$ В шпаргализованной форме,

$\underline{\exists x\ (М(x) \& Ж(x))}$ без кванторов: $М\&Ж \vdash М$, $\boxed{Ж}$

$\exists x\ (Ж(x) \& \neg С(x))$ $М, М \to \neg С \vdash$ $\boxed{\neg С}$

Расстановка кванторов стандартна.

Задача 9. Все моряки любят море.

Все моряки носят тельняшки.

Некоторые из тех, кто любит море, носят тельняшки.

$\forall x\ (M(x) \to S(x))$ $M(x)$ – «x – моряк»,

$\underline{\forall x\ (M(x) \to T(x))}$ $S(x)$ – «x любит море»,

$\exists x\ (S(x) \& T(x))$. $T(x)$ – «x носит тельняшку».

Уберем кванторы и зависимость от x. Тогда ничто не помешает нам увидеть, что без посылки M из условий $M \to S$ и $M \to T$ формула $S\&T$ не выводится. Поскольку, как мы уже знаем, «$\vdash$» и «$\vDash$» представляют «изоморфные» отношения, в невыводимости $S\&T$ из $M \to S$ и $M \to T$ можно убедиться посредством ТИ.

Достаточно посмотреть последнюю строку общей ТИ для указанных формул: если M, S и T одновременно принимают значение f, то $M \to S$ и $M \to T$ обе принимают значение t, а $S\&T$ – значение f. Еще одна строка с тем же распределением значений $M \to S$, $M \to T$ и $S\&T$ получается, когда M, S и T, соответственно, принимают значения f, t и f. Ясно, что если добавить к условиям M, то обе указанные строки будут просто исключаться, так как при проверке $M, M \to S, M \to T \vDash S\&T$ мы обязаны придавать формуле M только значение t.

....

Заключительное замечание.

Рассмотренные задачи следовали такой общей схеме:

обыденный» язык		формализация
условия	→	условия
↓		↓?
заключение	→	заключение

Задача формулируется на «обыденном» языке, причем желательно так, чтобы заключение выводилось из условий, не выходя из «обыденности», – чтобы в разрешимости задачи не было сомнений. Затем условия и заключение задачи формализуются, и задача решается средствами математической логики.

Решение предполагает два этапа: 1) получение базовой выводимости без кванторов средствами исчисления высказываний и 2) расстановка кванторов с помощью их введений и удалений. При этом важно, чтобы анализ свободных вхождений переменных в формулы стал привычным и не вызвал дискомфорт.

22. Логика предикатов. Кванторы

[Л], с. 89-96.

Попытаемся пойти вдоль **[Л]**екций, то и дело заглядывая в книжки. В известном смысле, мы будем заниматься герменевтикой – распознаванием источников **[Л]**екционного текста. Как показывает знакомство с этими источниками, с одной стороны, **[Л]**ектор щадит слушателя, с другой – возникает опасение разрыва между стремлением (слушателей) упростить формулировки (например, определения интерпретации) и существенной нехваткой лекционного материала для понимания ставящихся Вопросов.

[Кл], с. 93:

«В исчислении высказываний мы изучали логические отношения, зависящие от способа, каким высказывания составлены из определенных блоков посредством операций, выражаемых символами ~, →, &, V, ¬. Сами эти блоки дальше не анализировались. В *исчислении предикатов* мы продвинемся в своем анализе на ступеньку глубже с тем, чтобы рассмотреть то, что в грамматике называют «субъектно-предикатной структурой». Для этого мы введем две новые операции $\forall$ («для любого») и $\exists$ («для некоторых» или «существует»), зависящие от этой грамматической структуры. (Исчисление же высказываний входит в исчисление предикатов как составная часть)».

Далее **[Кл]** переходит к высказыванию «Сократ есть человек», а **[Л]** начинают исследование предикатов со знаменитого силлогизма (**[Кл]**, с. 164):

Все <u>люди</u> <u>смертны</u>.	Ч(x): «x есть человек»	$\forall x\ (Ч(x) \to С(x))$
<u>Сократ</u> <u>есть человек</u>.	С(x): «x смертен»	$Ч(c)$
Следовательно, <u>Сократ</u> <u>смертен</u>.	c: «Сократ»	$С(c)$

Поскольку мы уже немного искушены в таких задачах, то переписали из **[Кл]** (с. 165) и перевод этих высказываний на язык математической логики. «Ничтоже сумняшеся», решение:

$$\forall x\ (Ч(x) \to С(x)) \vdash (Ч(c) \to С(c)) \quad (\forall\text{-удаление}),$$

$$Ч(c),\ Ч(c) \to С(c) \vdash С(c) \qquad (\to\text{-удаление}).$$

Но акцент здесь не на решении, нам пока важно выделить ту самую «субъектно-предикатную структуру». Выделяются

субъект	*о чем* говорят	$\boldsymbol{x}$
предикат	*что* говорят (о субъекте)	**Ч**(x).

«Ритуальные танцы», посвященные разнице в понимании субъекта и предиката в математической логике, с одной стороны, и в лингвистике и традиционной логике – с другой, устраивать не будем. Отметим только, что выше в «размышлениях о Сократе» субъекты и предикаты подчеркиваются, как когда-то в школе подлежащие и сказуемые.

Предикат – это высказывание о субъекте или субъектах. Поэтому математизация данного понятия так или иначе мыслится связанной с понятием функции, или соответствия между областью определения X и множеством значений Y. Напомним, что функция – это правило (иногда алгоритм), которое каждому элементу множества X ставит в соответствие один и только один элемент множества Y. Другое дело, что в математической логике исследуются не числовые функции, как, скажем, в анализе, а соответствия, сопоставляющие некоторым переменным высказывания, которые принимают значения t и f в зависимости от приписывания этим переменным конкретных значений из X.

Попробуем реконструировать один

Пример из **[Л]**, с. 90-91.

Пусть $y = f(x)$ означает «y – самый большой спутник планеты x». Тогда, например, f (Земля) = Луна, а f (Сатурн) = Титан. Если мы хотели пояснить на этом примере понятие функции, то пример исчерпан. Но если мы хотим по изложенным «данным» построить предикат, то ясно, что $f(x)$ для предиката не хватает: как вычислять его истинность или ложность? И потом: переменной x должно соответствовать высказывание, но $f(x)$ – это не высказывание, а «другой субъект». Предикатом здесь будет не свойство «быть самым большим спутником планеты x», а отношение P(x, y): «y – самый большой спутник планеты x». Действительно, тогда функция P ставит в соответствие переменным x и y высказывание P(x, y), истинность которого можно совершенно спокойно проверять: P(Земля, Луна) = t, P(Сатурн, Япет) = f. Построен пример двуместного предиката.

Итак, **предикат – это функция, значением которой является высказывание**.

$$\mathrm{P}\ \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

предикатная переменная   предметные переменные

Для задания *интерпретации* предиката следует задать

1) область интерпретации переменных и

2) правила, в соответствии с которыми по заданным значениям переменных определяется истинностное значение предиката – t или f.

Иллюстрации:

P(x, y)	P(x, y, z)	
$x > y$	$x \le y \le z$	
x кратно y	Казань < Арзамас < Москва	*интерпретации*
x любит y	Ленин < Сталин < Хрущев	

Далее **[Л]** (с. 92) искусно подводят нас к формулам логики предикатов. Поскольку основными (потому, что первыми приходящими на ум) интерпретациями двуместных и трехместных предикатов являются неравенства, уместно остановиться на них подробнее.

Как известно, неравенство $x \geq y$ означает $x > y \lor x = y$, а неравенства $x \leq y \leq z$ расшифровываются как $(x < y \lor x = y)\&(y < z \lor y = z)$. Таким образом, из одних предикатов, скажем, $P(x)$ и $Q(x, y)$, конструируются другие, например, $P(x)\&Q(x, y)$.

Формулы логики предикатов

1. Предикатная переменная (вместе с предметными переменными) является формулой.

2. Если A, B – формулы, то (A&B), (AVB), (A→B), ¬A – также формулы.

3. Если A – формула, x – переменная, то $\forall x$ A и $\exists x$ A суть формулы.

Данное определение в целом соответствует **[УВП]** (с. 29), но понятия «терм» и «функциональный символ» в **[Л]** не вводятся (слава Богу?), так что в этом смысле **[Л]** следуют «в фарватере» **[Кл]**.

Определения кванторов были в самом начале – перепишем их сюда вместе с некоторыми полезными кусками из **[УВП]** (часть из них уже приводилась выше), слегка адаптируя к стилю **[Л]** и убирая лишнее.

Переменная – это языковое выражение, служащее для обозначения произвольного объекта из некоторого фиксированного множества, называемого областью возможных значений этой переменной (с. 18).

Если предикат зависит только от одной этой переменной, то область возможных значений переменной – это область определения предиката, необходимая для вычисления его истинностных значений, а значит, и для определения интерпретации. Если переменных много, то удобно считать, что все они имеют одну и ту же область возможных значений. Чтобы не отвлекаться на разные «спотыкалочки», будем считать, что такая область всегда непуста. Другими словами, высказываний вида

«Не существует такого рационального числа q, что $q^2 = 2$» (с. 18)

мы будем стараться избегать.

Наряду с пропозициональными операциями в математической логике рассматриваются *кванторы*, позволяющие из данного предиката получать предикат с меньшим числом переменных, в частности, из одноместного предиката – высказывание.

Одноместный предикат – «высказывательнозначная» функция одной переменной, нульместный предикат – «высказывательнозначная» функция, тождественно равная «фиксированному» высказыванию. (Такая аналогия, разумеется, полезна тем, кто имел дело с функциями.)

Квантор общности позволяет из данного предиката с единственной переменной x получить высказывание с помощью оборота «Для всех x ...». Результат применения квантора общности к предикату А(x) будем обозначать $\forall x$ А(x). Высказывание $\forall x$ А(x) считается истинным тогда и только тогда, когда при подстановке в А(x) вместо переменной x имени любого объекта из области ее возможных значений всегда получается истинное высказывание...

Квантор существования соответствует образованию из данного предиката с единственной переменной x высказывания с помощью оборота «Существует такой x, что ...». Результат применения квантора существования к предикату А(x) обозначается $\exists x$ А(x). Высказывание $\exists x$ А(x) истинно тогда и только тогда, когда в области возможных значений переменной x найдется такой объект, что при подстановке его имени вместо x в А(x) получается истинное высказывание (с. 23-24).

Следуя **[Кл]**, с. 107, скажем, что по определению высказывание $\forall x$ А истинно, если предикат А на своей области определения принимает только значение t. Высказывание $\exists x$ А дает t, если среди значений А имеется t, а в противном случае f.

В формулах вида $\forall x$ А и $\exists x$ А выражение $\forall x$ или $\exists x$ называется *кванторной приставкой,* а формула А – *областью действия* соответствующего квантора (точнее – кванторной приставки).

Вхождение переменной x в формулу А называется ***связанным***, если оно находится в области действия квантора $\forall$ или $\exists$ или входит в кванторную приставку. Вхождение переменной, не являющееся связанным, называется ***свободным*** (**[УВП]**, с. 30).

Введение кванторов демонстрируется на примере, который повторяется в **[Л]** неоднократно:

Все кошки знают французский язык.
Некоторые цыплята – кошки

Некоторые цыплята знают французский язык.

Данный пример, по-видимому, призван демонстрировать единообразие логических законов независимо от содержания высказываний, к которым эти законы применяются. Тем не менее приведенному силлогизму можно придать дополнительный смысл, заключающийся в том, что мерой взросления человека является степень его подготовленности по французскому языку. Когда-то, говорят, так и было...

В качестве последней темы Вопроса 22 приводится

Пример вычисления истинностных значений «кванторизованных» одноместных предикатов.

Пусть областью интерпретации переменных для предикатов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ является множество $\{\square, \circ, \Delta\}$, и распределение их истинностных значений в этой интерпретации таково:

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$
$\square$	t	t
$\circ$	t	f
Δ	t	t

Ясно, что $\exists x\ P_1(x) = t$ и $\exists x\ P_2(x) = t$. На втором предикате удобнее проверить $\exists x\ P_2(x) = t$ т. и т. т., когда $P_2(\square) \vee P_2(\circ) \vee P_2(\Delta) = t$. Столь же ясно, что $\forall x\ P_1(x) = t$ и $\forall x\ P_2(x) = f$. Точно так же проверяется: $\forall x\ P_2(x) = f$ т. и т. т., когда $P_2(\square) \& P_2(\circ) \& P_2(\Delta) = f$.

Таким образом, получены «бескванторные эквиваленты» кванторных условий. (Кроме того, возникают какие-то подспудные ассоциации с ДНФ и КНФ.)

Построению ТИ для предикатов посвящен отдельный Вопрос 24.

23. Основные эквивалентности логики предикатов

[Л], с. 98-102.

Важная находка. В **[УВП]** на с. 41 обнаружено определение *графического равенства* – две горизонтальные палочки друг над другом, между которыми заключен кругляшок. Выше мы использовали другой значок, в котором кругляшок пишется над палочками: ≗. Однако и кругляшок «между» тоже нашелся: ⊜. Процитируем **[УВП]**:

«В дальнейшем мы будем употреблять знак «графического равенства» ⊜ для выражения одинаковости слов: А⊜В, где А и В – обозначения слов, означает, что слова А и В одинаковы, т.е. построены из одинаковых букв, расположенных в одинаковом порядке».

Вернемся к Вопросу **23**.

Напоминание из Вопроса 6: эквивалентность ≡ формул понимается как совпадение их значений при любых (истинностных) значениях входящих в них переменных.

Займемся обоснованием основных эквивалентностей (идем вдоль **[Л]**).

1. $\forall x\,\forall y\,\mathbf{P}(x, y) \equiv \forall y\,\forall x\,\mathbf{P}(x, y)$.

Пусть $(\forall x\,\forall y\,\mathrm{P}(x, y)) = \mathrm{t}$ (так писать не принято, но ради краткости...).

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{lclll}
(\forall y\,\mathrm{P}(a_1, y)) = \mathrm{t} & \Leftrightarrow & \mathrm{P}(a_1, a_1) = \mathrm{t}, & \mathrm{P}(a_1, a_2) = \mathrm{t}, & \mathrm{P}(a_1, a_3) = \mathrm{t}, \dots \\
(\forall y\,\mathrm{P}(a_2, y)) = \mathrm{t} & \Leftrightarrow & \mathrm{P}(a_2, a_1) = \mathrm{t}, & \mathrm{P}(a_2, a_2) = \mathrm{t}, & \mathrm{P}(a_2, a_3) = \mathrm{t}, \dots \\
(\forall y\,\mathrm{P}(a_3, y)) = \mathrm{t} & \Leftrightarrow & \mathrm{P}(a_3, a_1) = \mathrm{t}, & \mathrm{P}(a_3, a_2) = \mathrm{t}, & \mathrm{P}(a_3, a_3) = \mathrm{t}, \dots \\
\dots\dots\dots & \Leftrightarrow & & & \\
& & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
& & (\forall x\,\mathrm{P}(x, a_1)) = \mathrm{t}, & (\forall x\,\mathrm{P}(x, a_2)) = \mathrm{t}, & (\forall x\,\mathrm{P}(x, a_3)) = \mathrm{t}, \dots \\
& & & & \dots \Leftrightarrow (\forall y\,\forall x\,\mathrm{P}(x, y)) = \mathrm{t}.
\end{array}$$

где $\{ a_1, a_2, a_3, \dots \}$ – область интерпретации переменных предиката $\mathrm{P}(x, y)$

Это – «шпаргализованный» вариант, который отличается от имеющегося в **[Л]**екциях только тем, что *здесь* ⇔, а *там* ⇒, а потом ⇐, причем обратный переход – самостоятельно. В подобных случаях (там, где это возможно) удобно делать так: сначала доказывается ⇒, а потом замечается, что ⇒ можно дорисовать до ⇔.

2. $\exists x\,\exists y\,\mathbf{P}(x, y) \equiv \exists y\,\exists x\,\mathbf{P}(x, y)$**.**

$(\exists x\,\exists y\,\mathrm{P}(x, y)) = \mathrm{t}$ ⇔ найдется a_i такое, что $(\exists y\,\mathrm{P}(a_i, y)) = \mathrm{t}$ ⇔
⇔ найдется a_i и найдется a_k, такие что $\mathrm{P}(a_i, a_k) = \mathrm{t}$ ⇔
⇔ найдется a_k, такое что $(\exists x\,\mathrm{P}(x, a_k)) = \mathrm{t}$ ⇔ $(\exists y\,\exists x\,\mathrm{P}(x, y)) = \mathrm{t}$.

3. $\mathbf{P}(x, y) \not\equiv \mathbf{P}(y, x)$**.**
Достаточно рассмотреть интерпретацию $x < y$ предиката $\mathrm{P}(x, y)$.

4. $\exists y\,\forall x\,\mathbf{P}(x, y) \not\equiv \forall x\,\exists y\,\mathbf{P}(x, y)$, но $\exists y\,\forall x\,\mathbf{P}(x, y) \vDash \forall x\,\exists y\,\mathbf{P}(x, y)$**.**

Напомним, что логическое следование $\models$ означает, что если формула слева (до значка $\models$) принимает значение t, то и формула справа (после $\models$) принимает значение t. Поскольку $\equiv$ означает одновременное выполнение логического следования $\models$ и логического следования, обратного к нему (у нас нет значка), то нам надо доказать 1) $\exists y\ \forall x\ \mathrm{P}(x, y) \models \forall x\ \exists y\ \mathrm{P}(x, y)$ и 2) $\forall x\ \exists y\ \mathrm{P}(x, y) \not\models \exists y\ \forall x\ \mathrm{P}(x, y)$.

П. 2) вновь доказывается с помощью интерпретации $x < y$ предиката $\mathrm{P}(x, y)$. Докажем 1).

Пусть $(\exists y\ \forall x\ \mathrm{P}(x, y)) = \mathrm{t}$. Тогда найдется b_i, такое что $(\forall x\ \mathrm{P}(x, b_i)) = \mathrm{t}$. Это означает, что найдется b_i, такое что $\mathrm{P}(a_k, b_i) = \mathrm{t}$ при всех a_k (из области интерпретации). Начинаем «сворачивать»: при всех a_k имеем $(\exists y\ \mathrm{P}(a_k, y)) = \mathrm{t}$, откуда, в свою очередь, $(\forall x\ \exists y\ \mathrm{P}(x, y)) = \mathrm{t}$, что и требовалось.

(Напоминание: считаем, что обе переменные имеют одну и ту же область интерпретации.)

5. $\forall x\ \mathrm{P}(x) \equiv \forall y\ \mathrm{P}(y)$.

6. $\exists x\ \mathrm{P}(x) \equiv \exists y\ \mathrm{P}(y)$.

Формулы **5** и **6** «через интерпретацию» записываются одинаково.

7. $\neg\forall x\ \mathrm{P}(x) \equiv \exists x\ \neg\mathrm{P}(x)$.

$(\neg\forall x\ \mathrm{P}(x)) = \mathrm{t} \Leftrightarrow (\forall x\ \mathrm{P}(x)) = \mathrm{f} \Leftrightarrow$ найдется a_i (из области интерпретации), такая что $\mathrm{P}(a_i) = \mathrm{f}$
$\Leftrightarrow$ найдется a_i, такая что $\neg\ \mathrm{P}(a_i) = \mathrm{t} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\exists x\ \neg\mathrm{P}(x)) = \mathrm{t}$.

8. $\neg\exists x\ \mathrm{P}(x) \equiv \forall x\ \neg\mathrm{P}(x)$.

Аналогично **7**. Провести самостоятельно.

9. $\forall x\ (\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x)) \not\equiv (\forall x\ \mathrm{P}(x)) \vee (\forall x\ \mathrm{Q}(x))$.

Пусть область интерпретации – множество R вещественных чисел, $P(x)$ – «$x < 2$», $Q(x)$ – «$x \geq 2$».

Тогда $(\forall x\ (P(x) \vee Q(x))) = (\forall x\ (x < 2$, либо $x \geq 2)) = t$, но

$(\forall x\ (x < 2)) = f$, так как в R имеется число $a = 2 \geq 2$, и

$(\forall x\ (x \geq 2)) = f$, так как в R имеется число $a = 1 < 2$.

10. $\forall x\ (P(x) \vee Q) \equiv (\forall x\ P(x)) \vee Q$**.**

«Туда». Пусть $(\forall x\ (P(x) \vee Q)) = t$. Тогда, используя те же обозначения, что и в обосновании эквивалентности **1**, для элементов области интерпретации, будем иметь

$(P(a_1) \vee Q) = t$,

$(P(a_2) \vee Q) = t$,

$(P(a_3) \vee Q) = t$, если при некотором k $P(a_k) = f$, то $Q = t$, но тогда и $((\forall x\ P(x)) \vee Q) = t$,

. . . . если же при всех n $P(a_n) = t$, то $(\forall x\ P(x)) = t$, откуда вновь $((\forall x\ P(x)) \vee Q) = t$.

$(P(a_n) \vee Q) = t$,

. . . .

«Обратно». Пусть $((\forall x\ P(x)) \vee Q) = t$. Для Q имеются две возможности:

$Q = t$	$Q = f$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$(P(a_1) \vee Q) = t$,	$(\forall x\ P(x)) = t$
$(P(a_2) \vee Q) = t$,	$\Downarrow$
$(P(a_3) \vee Q) = t$,	$P(a_1) = t, \Rightarrow (P(a_1) \vee Q) = t$,
. . . .	$P(a_2) = t, \Rightarrow (P(a_2) \vee Q) = t$,
	. . . . $\Rightarrow$ . . . .

В обоих случаях – $(\forall x\ (P(x) \vee Q)) = t$.

11. $\exists x\ (P(x) \& Q) \equiv (\exists x\ P(x)) \& Q$**.**

$(\exists x\ (P(x) \& Q)) = t \Leftrightarrow$ найдется a_i, такая что $P(a_i) \& Q = t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ найдется a_i, такая что $P(a_i) = t$ и $Q = t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists x\ (P(x)) = t$ и $Q = t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((\exists x\ P(x)) \& Q) = t$

Настоящий Вопрос 22 естественно связан с Вопросом 30, посвященным логическому следованию $\vDash$. Там же приведем и дополняющий список эквивалентностей и логических следований.

24. Теория моделей. Таблицы истинности для предикатных формул

[Л], с. 93/94-96.

ТИ в логике предикатов призваны упорядочить наши представления о том, как вычислять истинностные значения для предикатных формул. Как мы помним из Вопроса 22, предикат – это функция, значением которой является высказывание. Именно поэтому, если P(x) – предикат, то некорректно записывать P(x) = t. Принято «перебирать варианты», т.е. те самые правила, в соответствии с которыми по заданным значениям переменных из области интерпретации определяется истинностное значение предиката – t или f.

Например, если область интерпретации – множество D = {1, 2}, то таких «вариантов» для предиката P(x) будет четыре:

x	$l_1(x)$	$l_2(x)$	$l_3(x)$	$l_4(x)$
1	t	t	f	f
2	t	f	t	f

Функции $l_k(x)$ называются *логическими функциями* предиката P(x). По существу, эти функции и определяют «строки-интерпретации», только теперь это столбики (достаточно сравнить с ТИ в логике высказываний). Ясно, что если множество D бесконечно (хватит и четырех-пяти элементов), то ТИ нарисовать практически невозможно – разве что схематично представить (это будет выглядеть чудовищно), но, как бы то ни было, все вычисления в ТИ положено проводить «построчно», т.е. для функции «эль от икс» с соответствующим номером. Сейчас нужно написать: «Поясним сказанное на примере...», но еще немного о «сущностях».

[Кл], с. 107, начинает с иона P(–), или (что то же самое) с его называющей формы P(x), с которой уже связываются логические функции l(x), действующие из D в {t, f}. **[Столл]**, с. 123, связывает эти функции с предикатным символом P(x). Переход от предиката (предикатного символа) к его логической функции **[Столл]** называет оценочной процедурой, задающей приписывание (в данном случае) предикату P(x) истинностных значений. (В формальное определение истинности **[УВП]** лучше пока не заглядывать.) Это мы пока осваиваемся в терминологии.

С помощью обозначений из **[Но]**, которыми мы пользовались в Части I, можно было бы записать $l(x) = I(P(x))$, где I – как раз обозначение из **[Но]** для интерпретации. Сколько I, столько и l. Разумеется, эта запись, «$l(x) = I(P(x))$», имеет целью «психологическую разгрузку для начинающих» – надо же как-то связать P(x) и l(x) «в единой формуле». Другой образ: l(x) – это след P(x) на конкретной интерпретации. То есть D остается одним и тем же, а I, значит, и l, меняются. Или: разные l отличаются друг от друга тем, какие (истинностные) значения можно приписывать P на различных элементах D – ведь P задается абстрактно, поэтому и приходится «перебирать варианты». Ну вот, вернулись к «вариантам».

Теперь можно пояснить сказанное на примере. Как изображается таблица истинности для формулы $P(y) \rightarrow \exists x\, P(x)$? Принято начинать с конечных множеств, и **[Кл]**, с. 114-115, рассматривает трехэлементное множество D. Мы упростим себе задачу и рассмотрим D = {1, 2}. Вспомогательная таблица построена выше. ТИ будет иметь вид

P(x)	y	P(y)	$\exists x\, P(x) \approx P(1) \vee P(2)$ (Вопр. 22)	$P(y) \rightarrow \exists x\, (x)$
$l_1(x)$	1	$l_1(1) = t$	$l_1(1) \vee l_1(2) = t \vee t = t$	t
$l_1(x)$	2	$l_1(2) = t$	$l_1(1) \vee l_1(2) = t \vee t = t$	t
$l_2(x)$	1	$l_2(1) = t$	$l_2(1) \vee l_2(2) = t \vee f = t$	t
$l_2(x)$	2	$l_2(2) = f$	$l_2(1) \vee l_2(2) = t \vee f = t$	t
$l_3(x)$	1	$l_3(1) = f$	$l_3(1) \vee l_3(2) = f \vee t = t$	t
$l_3(x)$	2	$l_3(2) = t$	$l_3(1) \vee l_3(2) = f \vee t = t$	t
$l_4(x)$	1	$l_4(1) = f$	$l_4(1) \vee l_4(2) = f \vee f = f$	t
$l_4(x)$	2	$l_4(2) = f$	$l_4(1) \vee l_4(2) = f \vee f = f$	t

....

25. Основные результаты об общезначимости для формул логики предикатов

[Л], с. 96-98, 106-108 ($\forall$- и $\exists$-схемы и правила).

Продолжим пример с ТИ из предыдущего Вопроса 24. Предварительно напомним определение общезначимости (для логики предикатов оно такое же, как и для логики высказываний; на определениях выполнимости и невыполнимости не останавливаемся).

Общезначимой называется формула, которая в любой интерпретации принимает значение t.

Тот факт, что формула B общезначима, обозначается $\vDash$B.

Полученный выше (частный) результат является указанием на то, что $\vDash \mathrm{P}(y)\rightarrow\exists x\ \mathrm{P}(x)$. Как доказать истинность формулы $\mathrm{P}(y)\rightarrow\exists x\ \mathrm{P}(x)$ в общем случае? Построение ТИ в **[Кл]**, с. 115, послужило источником наблюдений, лежащих в основе «общих рассуждений». Это происходило следующим образом. В первых шести строках соответствующая функция $\mathrm{l}(x)$ хотя бы раз принимает значение t. Отсюда следует, что по правилу вычисления $\exists x$ подформула $\exists x\ \mathrm{P}(x)$ принимает значение t, откуда по определению (ТИ для) $\rightarrow$ вся формула имеет значение t. В двух оставшихся строках $\mathrm{l}_4(x)$ принимает только значение f, а значит, $\mathrm{l}_4(y)$ и $\mathrm{P}(y)$ тоже дают f, каково бы ни было y. По определению $\rightarrow$ вся формула вновь имеет значение t.

Переход к общему случаю оформим отдельным утверждением и сравним источники.

Теорема 1 ($\exists$-схема для предикатов). $\vDash \mathbf{P}(y)\rightarrow\exists x\ \mathbf{P}(x)$.

Доказательство.

[Кл], с. 115, продолжение предшествующего изложения:

...Теперь уже ясно, что при произвольной, даже бесконечной, области D таблица истинности для $\vDash \mathrm{P}(y)\rightarrow\exists x\ \mathrm{P}(x)$ не даст ничего, кроме t. Доказывается это классификацией распределений для $\mathrm{P}(x)$ и y, т.е. «строк». Допустим сначала, что функция $\mathrm{l}(x)$, приписываемая предикату $\mathrm{P}(x)$, не всюду принимает значение f. Тогда $\exists x\ \mathrm{P}(x)$ дает t, а значит, вся формула принимает значение t. Пусть теперь мы имеем дело со строкой, где $\mathrm{l}(x)$ принимает только значение f. Тогда $\mathrm{P}(y)$ дает f при любом y, так что вся формула опять дает t.

[Столл], с. 127:

Необходимым условием того, чтобы значение формулы P(y)→∃x P(x) было f, является истинностное значение f формулы ∃x P(x) при некотором распределении приписываемых значений в некотором поле (= области интерпретации переменной) D. Это будет иметь место, если <и только если> P(x) получает значение f при изменении x в пределах поля D. Но тогда P(y) должно получить значение f. <По определению → вся формула дает t.>

Теорема 2 (∀-схема для предикатов). **⊨∀*x* P(*x*)→P(y).**

Доказательство. **[Столл]**, с. 126:

Необходимым условием того, чтобы значение этой формулы было f, является истинностное значение f формулы P(y) при некотором распределении значений в некотором поле. Но в этом случае ∀x P(x) получает значение f. Следовательно, ∀x P(x)→P(y) всегда получает значение t <по определению →>.

[Л], с. 107:

а) если ∀x P(x) принимает значение f, то (по определению →) вся формула дает t;

б) пусть ∀x P(x) принимает значение t. Тогда все высказывания P(a_1), P(a_2), ..., P(a_n), ..., где $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ – область интерпретации предметной переменной, будут истинными, в том числе и то, P(a_k), которое в этой интерпретации отвечает приписыванию $y = a_k$. В этом случае сама формула также принимает значение t.

При переходе от предикатов P к произвольным формулам A в теоремах 1 и 2 возникает дополнительное условие, связанное со свободными вхождениями переменных. Это условие призвано перенести на случай A те рассуждения, которыми были установлены результаты этих теорем.

[Столл], с. 128: Формула A(x) ***свободна для y***, если в A отсутствуют свободные вхождения x, входящие в область действия кванторов ∀y или ∃y.

[Кл], с. 117: Пусть формула A(y) получается из A(x) подстановкой y вместо всех свободных вхождений x в A(x). Переменная ***y свободна для x*** в A(x), если все вхождения y в A(y), которые возникают в результате указанной подстановки, свободны.

УПР. Доказать, что A(x) свободна для y т. и т.т., когда y свободна для x в A(x).

Теорема 1′ (∃-схема для формул исчисления предикатов. В двух формулировках:)

[Столл] (с. 129, теорема 2.10, I). Если A(x) – формула, свободная для y, то $\models$ **A(y)→∃x A(x).**

[Кл] (с. 118, теорема 15 (a)). Пусть x – произвольная переменная, A(x) – произвольная формула, y – произвольная переменная, не обязательно отличная от x, и A(y) – результат подстановки y вместо свободных вхождений x в A(x). Тогда если y свободна для x в A(x), то

$$\models \mathbf{A}(y)\rightarrow\exists x\ \mathbf{A}(x).$$

Доказательство должно быть тем же, что и для случая предикатов, нужно только указать место, где используется условие.

[Столл] заметил, что для доказательства достаточно разобрать случай, когда при некотором распределении приписываемых значений в некотором D формула ∃x A(x) принимает значение f. Это означает, что формула A(x) должна получать значение f при изменении x в пределах поля D. Но тогда и A(y) должно получить значение f. *Вот то самое место!*

Здесь уместно привлечь **[Кл]**. Почему «тогда и A(y) должно получить значение f»?

Согласно условию *свободы,* A(y) и A(x) различаются только одним: там, где в A(x) имеется свободное вхождение x, в A(y) находится свободное вхождение y (и наоборот). Получается, что (при произвольной фиксации D и l(x)) нам все равно, какой из двух букв – x или y (но только из этих двух!) – обозначить переменную в A( ), вместо свободных вхождений которой мы подставляем объект $a_k \in$ D, на котором A( ) принимает значение f (точнее уж тогда l(a_k) = f).

А вот как комментирует *это место* сам **[Кл]**, с. 117:

«Действительно, в этом случае, какова бы ни была область D и каково бы ни было распределение (т.е. строка таблицы) для D, соответствующее значение формулы A(y) фигурирует среди значений во вспомогательной таблице для A(x), используемой для нахождения значения ∃x A(x), ибо значение A(y) – это и есть значение A(x), получаемое, когда переменной x приписывается тот же самый объект, что и y. А только это и было существенно в наших рассуждениях...<в теореме 1>».

Пример (**[Кл]**, с. 118, 119). Пусть A(x) – это ∀z (Q($\underline{x}$)V∀x P(x, y)V P(z, $\underline{x}$)), где подчеркнуты свободные вхождения x в A(x). Тогда A(y) – это ∀z (Q($\underline{y}$)V∀x P(x, y)VP(z, $\underline{y}$)), где подчеркнуты вхождения y на места свободных вхождений x в A(x). Оба новых вхождения y сами свободны. Значит, y свободна для x в A(x). (Ясно, что A(x) свободна для y.)

Теперь в качестве y возьмем z. Тогда формула A(z) – это $\forall z\ (Q(\underline{z}) \vee \forall x\ P(x, y) \vee P(z, \underline{z}))$, где подчеркнуты вхождения z на места свободных вхождений x в $A(x)$. Оба новых вхождения z не являются свободными. (Ясно, что $A(x)$ не свободна для z: свободные вхождения x в $A(x)$ входят в область действия квантора $\forall$z.)

Таким образом, в первом случае теорема 1' применима, во втором – нет. **[Кл]** идет дальше и для случая D = {1, 2} иллюстрирует, где и как выполняется и нарушается ход рассуждений, приводивших к доказательству теоремы 1'. Этот анализ мы здесь не приводим.

Точно так же производится «обработка» аналога теоремы 2:

Теорема 2' ($\forall$-схема для формул исчисления предикатов. В двух формулировках:)

[Столл] (с. 129, теорема 2.10, II). Если $A(x)$ – формула, свободная для y, то $\mathbf{\vDash \forall x\ A(x) \rightarrow A(y)}$.

[Кл] (с. 118, теорема 15 (b)). Пусть x – произвольная переменная, $A(x)$ – произвольная формула, y – произвольная переменная, не обязательно отличная от x, и $A(y)$ – результат подстановки y вместо свободных вхождений x в $A(x)$. Тогда если y свободна для x в $A(x)$, то

$$\mathbf{\vDash \forall x\ A(x) \rightarrow A(y).}$$

Теорема 3 (**[Кл]**, с. 119, теорема 16; **[Столл]**, с. 129, теорема 2.11).

Пусть x – произвольная переменная, $A(x)$ – произвольная формула, C – произвольная формула, в которой нет свободных вхождений x. Тогда

($\forall$-правило) Если $\vDash C \rightarrow A(x)$, то $\vDash C \rightarrow \forall x\ A(x)$;

($\exists$-правило) Если $\vDash A(x) \rightarrow C$, то $\vDash \exists x\ A(x) \rightarrow C$.

Доказательство. В обоих учебниках доказывается только ($\forall$).

Пусть $\vDash C \rightarrow A(x)$. Выберем произвольную область D. Для нее фиксируем произвольное приписывание (обозначим его) α для формулы $C \rightarrow \forall x\ A(x)$, основанное на D, т.е. произвольное распределение логических функций и элементов из D по всем предикатным и свободным предметным переменным, входящим в $C \rightarrow \forall x\ A(x)$, т.е. вход произвольной строки ТИ этой формулы, причем на входе расположены только ее предикатные и ее свободные переменные.

Приписывание α можно назвать «заданным распределением». Так как x не входит свободно ни в C, ни в $\forall x$ A(x), то α не включает в себя значения, приписываемого x в области D.

Случай 1. При заданном распределении C принимает значение f. Тогда, согласно ТИ для $\rightarrow$, формула C$\rightarrow\forall x$ A(x) дает t.

Случай 2. При заданном распределении C дает t.

Продолжим α добавлением к нему *произвольного* значения для переменной x. При этом формула C не изменит своего значения t, так как не зависит от изменения x. Значит, раз формула C$\rightarrow$A(x) (как общезначимая по условию) дает t, то A(x) дает t по определению $\rightarrow$. Так как это получается при продолжении α посредством приписывания *произвольного* значения переменной x (при неизменном «заданном распределении», т.е. изначальном α), то $\forall x$ A(x) дает t при этом самом заданном распределении согласно правилу вычисления значения $\forall$. Значит, в силу ТИ для $\rightarrow$ формула C$\rightarrow\forall x$ A(x) дает t при заданном распределении. Поэтому $\vDash$C$\rightarrow\forall x$ A(x).

(В духе) **[Л]**, с. 107:

Возьмем произвольную интерпретацию (приписывание для x разрешается сразу).

Предположение о противном влечет значение f для $\forall x$ A(x) и t для C. Согласно правилу вычисления $\forall$ в области интерпретации переменной x найдется значение a_k, в котором A(x) примет значение f. Но при этом значении формула C$\rightarrow$A(x) – ложная, чего быть не может ввиду ее общезначимости.

Следствие (**[Столл]**, с. 129). Если $\vDash$A(x), то $\vDash\forall x$ A(x).

Доказательство использует тот факт, что формула вида A$\rightarrow$(B$\rightarrow$A) всегда общезначима.

Пусть $\vDash$A(x) и P – 0-местный предикатный символ, т.е. высказывание. Тогда имеет место $\vDash$A(x)$\rightarrow$((P$\vee\neg$P)$\rightarrow$A(x)). Из двух только что выписанных общезначимостей по теореме об ***MP*** (Вопрос 8) следует $\vDash$(P$\vee\neg$P)$\rightarrow$A(x). Применение теоремы 3 (а) дает $\vDash$(P$\vee\neg$P)$\rightarrow\forall x$ A(x), откуда вновь по теореме об ***MP*** на основании $\vDash$(P$\vee\neg$P) получается $\vDash\forall x$ A(x).

……..

…

26. Отношение логического следования

[Л], с. 97.

Определение логического следования.

Пусть A_1, A_2,..., A_n, B – формулы. Говорят, что B *логически следует* из формул A_1, A_2,..., A_n, если в каждой интерпретации, в которой все A_1, A_2,..., A_n принимают значение t, B также принимает значение t.

(Перенесено дословно из Вопроса 12.)

Обозначение: $\mathbf{A_1, A_2,..., A_n \vDash B}$.

Исключительный случай $n = 0$ также считается частным для определения логического следования, так как хорошо с ним согласуется – это будет отношение общезначимости $\vDash$B: формула B в любой интерпретации дает значение t.

Напомним, что формулы A и B называются эквивалентными (запись $A \equiv B$), если они в любой интерпретации принимают одинаковые (истинностные) значения.

$A \equiv B$ тогда и только тогда, когда $A \vDash B$ и $B \vDash A$.

Поскольку, как отмечалось выше (Вопрос 22), исчисление высказываний входит в исчисление предикатов как составная часть, ряд основных определений (на «языке исследователя») обоих исчислений должны быть согласованы, в чем мы и убедились на примере логического следования. Однако предикаты сильнее, чем высказывания, «торопятся» добраться до теории доказательств, что так же отражено в **[Л]**. С другой стороны, свойства логического следования, отмеченные в Вопросе 12, дословно переносятся на рассматриваемый случай (на всякий случай надо, конечно, проверить).

Приведем обещанный в Вопросе 23 список логических следований и эквивалентностей из **[Но]**, с. 157:

1. $\neg\forall x\ A(x) \equiv \exists x\ \neg A(x)$, $\qquad \neg\exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$,
2. $\forall x\ (A(x)\&B(x)) \equiv (\forall x\ A(x))\&(\forall x\ B(x))$,
   $\exists x\ (A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x\ A(x)) \vee (\exists x\ B(x))$,
3. $\exists x\ (A(x)\&B(x)) \vDash (\exists x\ A(x))\&(\exists x\ B(x))$,
   $\forall x\ (A(x) \vee B(x)) \vDash (\forall x\ A(x)) \vee (\forall x\ B(x))$,
4. $\forall x\ \forall y\ A(x, y) \equiv \forall y\ \forall x\ A(x, y)$, $\qquad \exists x\ \exists y\ A(x, y) \equiv \exists y\ \exists x\ A(x, y)$,

5. $\forall x\,(A(x)\&C) \equiv (\forall x\,A(x))\&C$, $\forall x\,(A(x) \vee C) \equiv (\forall x\,A(x)) \vee C$,
6. $\exists x\,(A(x)\&C) \equiv (\exists x\,A(x))\&C$, $\exists x\,(A(x) \vee C) \equiv (\exists x\,A(x)) \vee C$,
7. $C\to \forall x\,A(x) \equiv \forall x\,(C\to A(x))$, $C\to \exists x\,A(x) \equiv \exists x\,(C\to A(x))$,
8. $\forall x\,A(x)\to C \vDash \exists x\,(A(x)\to C)$, $\exists x\,A(x)\to C \vDash \forall x\,(A(x)\to C)$,

где формула C не содержит никаких вхождений переменной x.

Эти эквивалентности, разумеется, не для экзаменационного ответа (за исключением тех их них, которые вошли в доказываемый в Вопросе 23 список **1-11**). Из них могут выбираться упражнения.

27. Теория доказательств. Аксиомы, правила вывода в исчислении предикатов

[Л], с. 108-111.

Здесь возникает интересный вопрос. Мы знаем (из Вопроса 25), что при отсутствии в формуле C (свободных вхождений) переменной x имеют место

(будущее $\forall$-правило): если $\vDash C\to A(x)$, то $\vDash C\to\forall x\,A(x)$ и

(будущее $\exists$-правило): если $\vDash A(x)\to C$, то $\vDash\exists x\,A(x)\to C$.

Вопрос. В правила вывода ниже эти утверждения хотелось бы включить с заменой $\vDash$ на $\vdash$. Однако $\vdash$ нельзя использовать, пока не определено формальное доказательство, а формальное доказательство использует указанные утверждения как правила вывода. Значит, в формулировку последних значок $\vdash$ включать нельзя. А вот после определения формального доказательства можно?..

Выйдем из положения так же, как в исчислении высказываний (Вопрос 14), – с помощью «большой дробной черты». И точно так же, как и в исчислении высказываний, значок $\vdash$ займет подобающее ему место в $\forall$- и $\exists$-правилах благодаря теореме о введении и удалении (только уже не связок, а кванторов).

Аксиомы исчисления предикатов:

Схемы аксиом исчисления высказываний

1) $A\to(B\to A)$,
2) $(A\to B)\to[(A\to(B\to C))\to(A\to C)]$,

3) $A \to (B \to A \& B)$,

4а) $A \& B \to A$,

4б) $A \& B \to B$,

5а) $A \to A \vee B$,

5б) $B \to A \vee B$,

6) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$,

7) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$,

8) $\neg \neg A \to A$,

плюс схемы аксиом

9) $\forall x\, A(x) \to A(y)$ ($\forall$-схема),

10) $A(y) \to \exists x\, A(x)$ ($\exists$-схема),

в которых y свободна для x в $A(x)$.

Правила вывода:

Modus ponens: $A,\ A \to B \vdash B$,

$\forall$-правило: $\dfrac{C \to A(x)}{C \to \forall x\, A(x)}$, если x не входит свободно в C,

$\exists$-правило: $\dfrac{A(x) \to C}{\exists x\, A(x) \to C}$, если x не входит свободно в C.

Определения формального доказательства и формального вывода будем сверять с данными в Вопросах 15 и 16, соответственно, но придерживаться **[Л]**, с. 109 и 111.

Формальное доказательство – конечный список формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получена из предшествующих формул по правилу Modus ponens, либо $\forall$-правилу, либо $\exists$-правилу.

Доказательство является доказательством своей последней формулы.

Если формула F имеет доказательство, то мы говорим, что F *(формально) доказуема* или что F является *(формальной) теоремой*; запись: $\vdash$**F**.

(Мы заглядывали также в **[Кл]**, с. 133.)

Формальный вывод (формулы B) *из допущений* $(A_1,\ldots, A_m)$ – конечная последовательность формул $F_1,\ldots, F_k$ (= B), где каждая формула является либо аксиомой, либо одним из допущений, либо получена из формул, расположенных в списке раньше нее, по правилу MP, либо по $\forall$-правилу, либо по $\exists$-правилу.

Слово «формальный» обычно опускается.

Если существует вывод формулы B из допущений $A_1,\ldots, A_m$, то говорят, что B *выводима из* $A_1,\ldots, A_m$, и пишут $\mathbf{A_1,\ldots, A_m \vdash B}$.

Знак «$\vdash$» можно читать «выводится». При использовании такой терминологии для $m \geq 0$ «доказательство» и «доказуемость» являются частным случаем «вывода» и «выводимости» при $m = 0$.

Отношение $A_1,\ldots, A_n \vdash B$ будем называть *выводимостью* или *соотношением выводимости* (в соответствии с **[Кл]**, с. 61), а иногда и «выводом» – как правило, если в непосредственной близости нет «настоящего» вывода $F_1,\ldots, F_k$.

Как «пример применения» приводится такая

Интригующая коллизия

Взаимозаменяемость отношений $\vDash$ и $\vdash$ переносится из исчисления высказываний в исчисление предикатов. Другими словами, «теория моделей и теория доказательств для предикатов равносильны», причем если «из $\vdash$E следует $\vDash$E» получается легко, то утверждение в обратную сторону «$\vdash$E из $\vDash$E» содержится в теореме Гёделя о полноте (**[Кл]**, с. 143). В «теорему Гёделя» мы «лезть» не хотим, поэтому и ограничиваемся приведенной констатацией, принимая ее «на веру». Разумеется, отмеченная равносильность $\vdash$ и $\vDash$ справедлива не только для формальных доказательств, но и для выводимостей.

Данное «предисловие» понадобилось как «контекст» для решения вопроса о том, имеет ли место выводимость $A(x)\vdash\forall x\ A(x)$. **[Кл]**, с. 146, обращает внимание на то, что ***не имеет***, так как иначе имело бы место также $A(x)\vDash\forall x\ A(x)$, а это, вообще говоря, неверно (например, если $A(x)$ есть $P(x)$ или $\neg P(x)$; можно посмотреть пример 7 из §20).

Но в то же время в **[Л]**, с. 110, находим

Вывод для $A(x) \vdash \forall x\, A(x)$:

1. $A(x)$ – допущение,
2. $A(x) \to (C \to A(x))$ – аксиома 1, где C имеет вид $C = D \to (B \to D)$,
3. $C \to A(x)$ МР из 1, 2, **?!**
4. $C \to \forall x\, A(x)$ $\forall$-правило из 3,
5. C – аксиома по построению (см. 2),
6. $\forall x\, A(x)$ МР из 4, 5.

Версия: этот вывод – пример того, как «низзя». Но тогда где ошибка?

[Кл], с. 135 и 133, увидел бы ошибку в том, что строчка 1 предшествует строчке 4. Приведенный вывод не является так называемым «выводом, в котором все (свободные) переменные (формул $A_1,\ldots, A_m$) остаются фиксированными», а только такие выводы считаются в **[Кл]** правомерными (см. начало с. 134) и характеризуются тем, что «$\forall$- и $\exists$-правила не применяются ни к какой переменной (в качестве x этого правила), входящей свободно в $A_1,\ldots, A_m$, кроме случаев, когда заключение $\forall$- или $\exists$-правила находится раньше первого вхождения формул $A_1,\ldots, A_m$ (в качестве допущений) в наш вывод» (с. 133). Действительно, единственное допущение $A(x)$ приведенного вывода входит в него уже в первой строчке, а $\forall$-правило применяется к переменной x только в четвертой, и раньше первой его не применишь. (Весьма показателен в данном контексте пример 9 на с. 135 **[Кл]**.)

Остается сожалеть о том, что **[Кл]** несколько дезориентирует читателя, говоря вначале о том, что определение «отношения ... *является выводом*...также аналогично ранее данному определению» (с. 133), а потом (с. 134) «уточняет»:

«Если имеется вывод B из $A_1,\ldots, A_m$, все переменные которого остаются фиксированными, то мы говорим, что B *выводима из* $A_1,\ldots, A_m$ (*с фиксированными переменными*), и пишем $A_1,\ldots, A_m \vdash B$. Как правило, в этой книге мы будем опускать условие «с фиксированными переменными».

Вот только благодаря этому «будем опускать условие» и удалось «зацепиться» за то, чтó на самом деле понимает под выводом **[Кл]**.

Еще сильнее приходится сожалеть вот о чем.

По факту, **[Кл]** вводит понятие вывода как *вывода с фиксированными переменными* для того, чтобы сохранить равносильность $\vdash$ и $\vDash$ (см. уже упоминавшийся пример 9). **Но не акцентирует внимание на этом!** (По крайней мере, в разделах, «окружающих» определение.) Возникает ощущение некоторой «подгонки под ответ», которым должна стать указанная равносильность. А ведь такая находка – вывод с фиксированными переменными – позволяющая «кодифицировать» упомянутую равносильность, и от которой (см. «предисловие» выше), может быть, даже зависит сама теорема Гёделя о полноте, – уж наверное должна была оставить хоть какой-то след в истории предмета, к каковой **[Кл]** не равнодушен (скажем, в сносках, например, на той же с. 133). Возможно, где-то в «недрах» книги все это разъясняется, но почему **[Кл]**, всегда столь вдохновенный, становится таким «конспективным» (даже бурчащим) именно «в этом месте»? Не соответствует «это место» общему эмоциональному настрою книги...

Как сказал бы Карабас Барабас, «здесь какая-то тайна». А что? ***«Альковные тайны* [Кл]*ини»*** – звучит весьма публицистично, даже современно. Удалось нащупать ***интригу***, которая едва ли не интереснее, чем, например, вопрос о конгруэнтных формулах!

Но почему же молчат **[Л]**екции? Ни об «*y*, свободном для *x* в A(*x*)», ни о «выводе с фиксированными переменными»... А вывод есть, бросающий вызов учебникам...

А что говорят учебники? **[Но]** «уклоняется», **[УВП]** используют другие правила вывода, а в определении вывода ничего нет про условие «фиксированности переменных», **[Столл]** ограничивается общезначимостью, **[Непей]** вообще определяет вывод как граф (дерево), **[Менд]**, хоть и кажется более внятным, имеет «совсем другую природу» – оставим его «на потом», **[Н]**, чувствуется, «выше всего этого»...

Замечание профессора Замова. В **[Л]** говорится о выводах с варьированной переменной и доказано, что $A(x) \vdash^{x} \forall x\, A(x)$, где $\vdash^{x}$ означает, что *x* варьируется.

Обведенный же в рамку со значком «**?!**» вывод для $A(x) \vdash \forall x\, A(x)$ есть в точности вывод для $\forall$-введения из **[МетаКл]**, с. 92. Формулировка $\forall$-введения имеет вид $A(x) \vdash^{x} \forall x\, A(x)$, при этом разъясняется, что переменная «*x*», приписанная к символу «$\vdash$» в качестве верхнего индекса (так, чтобы получилось $\vdash^{x}$), отмечает применение $\forall$-правила (см. выше аксиомы исчисления предикатов).

Действительно, вывод с варьированной переменной возникает в **[Л]** на с. 111 – сразу после вывода для $A(x) \vdash \forall x\ A(x)$ – но это (теперь уже на основе приведенного замечания) только укрепляет фундамент сделанного «методического открытия»: либо мы сохраняем равносильность $\vdash$ и $\vDash$, либо мы меняем определение формального вывода для получения выводимостей, недостижимых без такого изменения, но требующихся для кА-ких-то других целей, не менее важных, чем указанная равносильность.

Получился интересный феномен: ***разрядка напряженности, возникшей в ходе осмысления «потерь» при записи*** **[Л]*****екций, высветила «скрытую переменную» теории предикатов – зависимость «пробивной силы» выводимости от определения формального вывода – тем более важную, что она искушает нас отказом от равносильности $\vdash$ и $\vDash$, пусть пока и гипотетическим. Не означает ли это отказ от (таблиц) истинности в пользу упомянутой «силы»?..***

Судя по состоявшемуся выше импровизированному обзору литературы, более поздние авторы предпочли ответу другие схемы.

Мы же достигаем здесь обещанного во введении *катарсиса* – очищения души от аффектов. В нашем случае это (в частности, аристотелевское!) понятие означает просто, что настоящее пособие обрело смысл, ради которого и писалось. Тем самым мы начинаем чувствовать предмет математической логики как литературный дискурс (см. введение, III). Отсутствие литературных указаний – вопреки ожиданиям – на отмеченный выше феномен, возможно, как раз и обусловлен тем, что логики – апологеты *структуры* – противятся деструктуралистским тенденциям постмодерна и не рекламируют свои подходы (скажем, к определению формального вывода) в сравнении с другими, а просто следуют им.

Последуем и мы этому завету. На своем пути к финалу изложение будет напоминать разбегающиеся круги по воде, утихающие по мере удаления от только что достигнутого понимания.

…………………………..

Рассмотрим «в новом свете» одну «картинку» из **[Л]**, с. 110:

$$\left.\begin{array}{l} A(x)\to A(x) \\ \underline{A(x)\to\forall x\, A(x)\quad} \\ \exists x\, A(x)\to\forall x\, A(x) \end{array}\right\}\quad \text{неправильно!}$$

(После этого – как раз «тот самый» вывод для $A(x)\vdash\forall x\, A(x)$.) Перед этой картинкой сформулировано $\forall$-правило:

$$\frac{C\to A(x)}{C\to\forall x\, A(x)}$$

, с припиской «C не содержит переменной x, только в этом случае правило работает».

Ясно, что если вместо C взять $A(x)$, то правило работать не будет, потому и «неправильно»! Но тогда последовавший за этим вывод для $A(x)\vdash\forall x\, A(x)$ – это демонстрация того, *как* можно модифицировать вывод, чтобы $\forall$-правило можно было применить в правильной формулировке? Или все-таки того, что выводимость $A(x)\vdash\forall x\, A(x)$ сама неправильна? Мы выяснили, что верно первое: *как* модифицировать.

Немного забегая вперед (в правила введения и удаления кванторов), две первые строчки приведенной «картинки»:

$A(x)\to A(x)$

$A(x)\to\forall x\, A(x)$

можно истолковать как предупреждение: выводимость $A(x)\vdash\forall x\, A(x)$ нельзя получать из выводимости $A(x)\vdash A(x)$ $\forall$-введением (это же отмечается и в **[Кл]**, с. 146). Но вот почему там же, в **[Л]**, судя по «картинке», квалифицируется как неправильное получение из $A(x)\vdash\forall x\, A(x)$ выводимости $\exists x\, A(x)\vdash\forall x\, A(x)$ $\exists$-удалением? Применение последнего на первый взгляд нареканий не вызывает, а вот $\exists x\, A(x)\vdash\forall x\, A(x)$ – третья и последняя восстанавливаемая по «картинке» выводимость – выглядит вызовом здравому смыслу. Что же получается: раз не верна третья, то не верна и вторая?..

Возвращаясь из «забега вперед»: вторая выводимость верна, но, подобно тому, как *ее* нельзя получить $\forall$-правилом из правильной выводимости $A(x)\vdash A(x)$, точно так же *__из__ нее* нельзя получить $\exists$-правилом выводимость $\exists x\, A(x)\vdash\forall x\, A(x)$? Почему? Ведь роль C играет независимая от x формула $\forall x\, A(x)$?

С выводимостью $A(x)\vdash\forall x\ A(x)$ «мы еще встретимся», а пока, чтобы не завершать Вопрос 27 одними вопросами, два маленьких замечания.

1. «Вырвем из контекста» **[Менд]**, с. 68-69:

...Например, $A\vdash\forall x\ A$ для любой формулы A, однако отнюдь не всегда $\vdash A\to\forall x\ A$...

Час от часу не легче: а как же теорема дедукции? Да и выводимость $\exists x\ A(x)\vdash\forall x\ A(x)$ тогда все-таки выполняется?

2. В Вопросе 25 «у нас» было

Следствие (**[Столл]**, с. 129). Если $\models A(x)$, то $\models\forall x\ A(x)$.

Согласно «$\models$-$\vdash$-дуализму», сим удостоверяется

Свойство. Если $\vdash A(x)$, то $\vdash\forall x\ A(x)$,

которое, по-видимому, и положено рядом авторов в основу правила вывода под названием (Gen) – правила обобщения. Приводим его здесь в качестве своеобразного «компромисса».

28. Теорема о дедукции в исчислении предикатов

[Л], с. 111-115.

Вначале – «отступим на твердую почву» исчисления высказываний и выпишем две эквивалентности из Вопроса 6:

$A\to(B\to C)\equiv A\&B\to C$ правило соединения (объединения) посылок,
$A\&B\to C\equiv A\to(B\to C)$ правило разъединения посылок.

Каждое из этих двух правил, представляющих в рамках «теории моделей» одну и ту же эквивалентность, в «теории доказательств» начинает самостоятельную жизнь соответственно названию:

$A\to(B\to C)\vdash A\&B\to C$	$A\&B\to C\vdash A\to(B\to C)$
$\Uparrow$ ← теорема дедукции (для исчисления высказываний) →	$\Uparrow$
$A\to(B\to C),\ A\&B\vdash C$	$A\&B\to C,\ A,\ B\vdash C$
Вывод	*Вывод*
(**[Кл]**, с. 50-51, **[Л]**, с. 114):	(указание: **[Л]**, с. 115, **[Кл]**, с. 58):

1. $A\&B$	допущение,	1. $A\to(B\to C)$	аксиома 3,	
2. $A\&B\to A$	аксиома 4а),	2. A	допущение,	*вывод*
3. A	MP из 1, 2,	3. $B\to A\&B$	MP из 1, 2,	*для*
4. $A\to(B\to C)$	допущение,	4. B	допущение,	&-*введения*
5. $B\to C$	MP из 3, 4,	5. $A\&B$	MP из 3, 4,	
6. $A\&B\to B$	аксиома 4а),	6. $A\&B\to C$	допущение,	
7. B	MP из 1, 6,	7. C	MP из 5, 6.	
8. C	MP из 5, 7.			

Оба эти правила понадобятся при доказательстве теоремы дедукции для исчисления предикатов, так же, как и следующее правило перестановки посылок:

$$A\to(B\to C) \vdash B\to(A\to C)$$

(в обратную сторону проверять не надо, так как это – та же самая выводимость, только с заменой букв). Докажем эту выводимость.

$$A\to(B\to C) \vdash B\to(A\to C)$$

$\Uparrow \leftarrow$ теорема дедукции (для исчисления высказываний)

$$A\to(B\to C),\ B,\ A \vdash C$$

Вывод:

1. $A\to(B\to C)$	допущение,
2. A	допущение,
3. $B\to C$	MP из 1, 2,
4. B	допущение,
5. C	MP из 3, 4.

[Л]-версия теоремы дедукции для исчисления предикатов «методологически примыкает» к **[Менд]** (с. 69-70). С него и начнем, слегка «адаптируя».

Пусть A – какая-нибудь формула, принадлежащая заданному множеству Γ формул и пусть $B_1, ..., B_n$ – какой-нибудь вывод из Γ, снабженный обоснованием каждого в нем шага. Мы будем говорить, что B_i ***зависит от*** A в этом выводе, если

(i) B_i есть A и обоснованием B_i служит принадлежность B_i к Γ, или

(ii) B_i обосновано как непосредственное следствие по MP или ∀- или ∃-правилу некоторых предшествующих в этом выводе формул, из которых по крайней мере одна зависит от A.

Предложение 2.3. Если B не зависит от A в выводе Γ, A ⊢ B, то Γ ⊢ B.

Доказательство. Пусть $B_1, \ldots, B_n = B$ – вывод B из Γ и A, в котором B не зависит от A. В качестве индуктивного предположения допустим, что доказываемое предложение справедливо для всех выводов, длина которых меньше n. Если B принадлежит Γ или есть аксиома, то Γ⊢B. Если B является непосредственным следствием каких-то (одной или двух) предшествующих формул, то, поскольку B не зависит от A, не зависит от A и ни одна из этих формул <от противного>. Следовательно, по индуктивному предположению, из Γ выводимы эти (одна или две) формулы, а вместе с ними и B.

Предложение 2.4. (Теорема дедукции.) Пусть Γ, A⊢B, и при этом пусть существует такой вывод B из {Γ, A}, в котором ни при каком применении ∀- или ∃-правила к формулам, зависящим в этом выводе от A, не связывается квантором никакая свободная переменная формулы A. Тогда Γ ⊢ A→B.

Свободная варьируемость

В **[Л]** вводится свойство ***свободной варьируемости*** переменной для формулы A, так, чтобы отрицание этого свойства по всем переменным давало в точности условие приведенного предложения. Ясно, что это условие является вариантом **[Кл]**-определения «вывода с фиксированными переменными» из Вопроса 31. Тем самым демонстрируется, что **[Менд]** не накладывает на вывод никаких (изначальных) дополнительных ограничений.

[Л], с. 111:

Говорят, что ***переменная x варьируется для формулы*** **A** (в некотором выводе), если

1) x входит в A свободно и

2) в данном выводе ∀-правило или ∃-правило (хотя бы раз) применяется к формуле, зависящей от A.

Чуть подробнее (чтобы освоиться):

Пусть имеется некоторый вывод, т.е. список формул, каждая из которых является либо аксиомой, либо допущением, либо получена из предшествующих с помощью одного из трех правил: MP, ∀- или

∃-правила. (Таким образом, никаких дополнительных предположений типа «с фиксированными переменными» на вывод не накладывается.)

Пусть формула A является допущением в этом выводе.

Скажем, что переменная x ***варьируется для*** A (как допущения в указанном выводе), если

1) x входит в A свободно и

2) в данном выводе имеется хотя бы один результат применения ∀- или ∃-правила, связывающего x, к формуле, зависящей от A.

Другими словами («подъязычиваясь» к **[Менд]**), переменная x ***варьируется для*** A, если

1) x входит в A свободно и

2) хотя бы одно применение ∀- или ∃-правила к формулам, зависящим в этом выводе от A, связывает квантором переменную x.

В **[МетаКл]** см. с. 89 и 95 и далее.

Это означает, что высказывание «никакая переменная не варьируется в этом выводе для A» переводится так. Часть переменных не входит в A свободно, а для остальных верно, что «ни при каком применении ∀- или ∃-правила к формулам, зависящим в этом выводе от A, не связывается квантором никакая свободная переменная формулы A».

Вопрос: верно ли, что высказывание «никакая переменная не варьируется в этом выводе ни для одного из допущений» есть иносказание для понятия «вывод с фиксированными переменными» из **[Кл]**: «∀- и ∃-правила не применяются ни к какой переменной (в качестве x этого правила), входящей свободно в $A_1,..., A_m$, кроме случаев, когда заключение ∀- или ∃-правила находится раньше первого вхождения формул $A_1,..., A_m$ (в качестве допущений) в наш вывод»?

На первый взгляд похоже на правду, а вот расковыривать «подводные камни» уже некогда.

Теорема дедукции. Если Γ, A⊢B, и никакая переменная не варьируется в этом выводе для A, то Γ ⊢ A→B.

Доказательство проясняется сравнением **[Менд]** и **[Л]** с учетом **[Но]**. По существу, обоснование теоремы дедукции для исчисления высказываний «надстраивается» новыми «случаями». Ради краткости только они и будут разобраны, при этом базис индукции (в понятном смысле) «съедается» в **[Менд]** индукционным шагом. **[Л]** идут в этом направлении еще дальше и разбирают указанные «случаи» сразу для B. Но вот можно ли полностью отказаться от индукции, заменив ее ссылкой на теорему дедукции для исчисления высказываний – это вопрос...

Итак, пусть $B_1, \ldots, B_n = B$ – удовлетворяющий условию теоремы вывод B из Γ, A. Докажем по индукции, что $\Gamma \vdash A \to B_i$ для любого i, $i \le n$. Варианты B_i – аксиома, $B_i \in \Gamma$, $B_i = A$, B_i получается по МР из B_j и B_k с j, $k < i$, «обрабатываются» точно так же, как в counterpart настоящей теоремы для исчисления высказываний. Рассмотрим оставшиеся.

I. Пусть B_i получена по ∀-правилу. Это значит, что соответствующая часть вывода $\Gamma, A \vdash B$ имеет вид:

1)
⋮
k) $C \to D(x)$
⋮
l) $[C \to \forall x\, D(x)] = B_i$.

рассмотрим этот подвывод. Говорить, что для него справедлива теорема дедукции для исчисления высказываний не будем – иначе придется убеждаться в том, что он не содержит ∀- и ∃-применений (по другим переменным): так как $C \to D(x) = B_k$ с $k < i$, то нужное нам заключение $\Gamma \vdash A \to (C \to D(x))$ получается по предположению индукции.

l) $[C \to \forall x\, D(x)] = B_i$.

По правилу объединения посылок из $\Gamma \vdash A \to (C \to D(x))$ следует $\Gamma \vdash A \& C \to D(x)$.

I.1. A *не содержит x* (как свободную переменную). Тогда $\Gamma \vdash A \& C \to D(x)$ достраивается до

$\Gamma \vdash (A \& C \to \forall x\, D(x))$ по ∀-правилу. Но тогда

$\Gamma \vdash (A \to \underbrace{(C \to \forall x\, D(x))}_{B_i})$ по правилу разъединения посылок.

I.2. A *содержит x* (свободно).

I.2.1. B_i *не* зависит от A. По предложению 2.3 условие «вырождается» в $\Gamma \vdash B_i$, и «достройка» этой выводимости до $\Gamma \vdash A \to B_i$ стандартна:

1)

⋮ Γ

k) B,

k+1) B→(A→B) аксиома 1,

k+2) A→B МР из k), k+1).

I.2.2. B_i зависит от A.

Сначала смотрим в определение ***варьируемости*** (выше):

x ***не*** варьируется для A ⇒

⇒ ***не*** выполняется 1) либо 2)

1) выполняется (*x* свободна в A) ⇒ 2) выполняется

B_i зависит от A (выше),

B_i получена по ∀-правилу ⇒ B_i получена по ∀-правилу из формулы, зависящей от A ⇒ 2) не выполняется

противоречие

II. B_i получена по ∃-правилу.

1)

⋮

k) D(x)→C

⋮

l) [∃x D(x)→C] = B_i

вновь по предположению индукции Γ ⊢ (A→(D(x)→C)).

Отсюда Γ ⊢ (D(x)→(A→C)) (перестановка посылок).

Тогда если **II.1**: x *не свободна в* A, то по ∃-правилу:

Γ ⊢ ((∃x D(x))→(A→C)), и требуемое вновь получается перестановкой посылок:

Γ ⊢ (A→(∃x D(x)→C)).

l) [∃x D(x)→C] = B_i

Пусть теперь **II.2**: *x свободна в* A.

Случай **II.2.1**: B_i *не* зависит от A – дословное повторение случая **I.2.1**.

Случай **II.2.2**: B_i зависит от A – получается из **I.2.2** заменой обоснования «по ∀-правилу» обоснованием «по ∃-правилу».

Вот теперь, кажется, все...

29. Правила введения и удаления кванторов

[Л], с. 115-118.
Перерисуем сюда табличку из *«Подготовки к контрольной работе»*:

Правила введения и удаления кванторов

	Введение	Удаление
$\forall$	Если $\Gamma \vdash A(x)$, то $\Gamma \vdash \forall x\, A(x)$, где x не входит свободно в Γ	$\forall x\, A(x) \vdash A(y)$, где y свободна для x в $A(x)$, y не обязательно отлична от x
$\exists$	$A(y) \vdash \exists x\, A(x)$, где y свободна для x в $A(x)$, y не обязательно отлична от x	Если $\Gamma, A(x) \vdash C$, то $\Gamma, \exists x\, A(x) \vdash C$, где x не входит свободно в C и Γ

Это – [Кл], с. 145. Посмотрим, как в [Кл] доказано

$\forall$-введение:

Пусть C – какая-нибудь аксиома, в которую x не входит свободно.

1. $\Gamma \vdash A(x)$ – посылка правила.
2. $\Gamma, C \vdash A(x)$ – из 1 на основе свойства выводимости 2а, Вопрос 16, с. 28 ([Кл] ссылается на упр. 13.2, с. 75, – там существенно, что C – аксиома).
3. $\Gamma \vdash C \rightarrow A(x)$ – из 2 по теореме дедукции (у [Кл] – для вывода с фиксированными переменными, следует проверить, что данный выше вариант ее доказательства годится и здесь).
4. $\Gamma \vdash C \rightarrow \forall x\, A(x)$ – из 3 применением $\forall$-правила. Подробнее: пусть $B_1, \ldots, B_l$ – заданный вывод $C \rightarrow A(x)$ из Γ при фиксации всех переменных; можно добавить к нему в качестве строки B_{l+1}

формулу $C \rightarrow \forall x\ A(x)$, считая B_l посылкой в применении $\forall$-правила, ибо x не входит в C свободно; в получаемом выводе из Г все переменные остаются фиксированными, ибо новое применение $\forall$-правила производится над x, которая в силу условия не входит свободно в Г.

5. $\Gamma, C \vdash \forall x\ A(x)$ – из 4 по теореме дедукции («обратно»), доказательство элементарно.

6. $\Gamma \vdash \forall x\ A(x)$ – из 5, убирая аксиому C упр'ом 13.2 – придется доказывать как УПР: «пафос» в том, что аксиомы можно убирать из и добавлять к списку допущений – чем мы и занимались «почти всю» первую часть данного курса.

Теперь рассмотрим

$\exists$-удаление:

1. $\Gamma, A(x) \vdash C$ – посылка правила.
2. $\Gamma \vdash A(x) \rightarrow C$ – из 1 по теореме дедукции.
3. $\Gamma \vdash \exists x\ A(x) \rightarrow C$ – из 2 с использованием $\exists$-правила с учетом того, что x не входит свободно в C, Г.
4. $\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash C$ – из 3 по теореме дедукции («обратно»).

$\forall$-удаление и **$\exists$-введение** «доказаны» в **[Кл]**, упр. 21.5 на с. 138.

Естественно получить их по МР из соответствующих посылок и схем аксиом:

$\forall x\ A(x) \vdash A(y)$: $\forall x\ A(x)$, $\forall x\ A(x) \rightarrow A(y)$ «$\Rightarrow$» $A(y)$.

$A(y) \vdash \exists x\ A(x)$: $A(y)$, $A(y) \rightarrow \exists x\ A(x)$ «$\Rightarrow$» $\exists x\ A(x)$.

В **[Л]**, с. 115-117, версия таблицы такая:

Правила введения и удаления кванторов

	Введение	Удаление
$\forall$	Если $\Gamma \vdash A(x)$, то $\Gamma \vdash^{x} \forall x\ A(x)$,	$\forall x\ A(x) \vdash A(y)$
$\exists$	$A(y) \vdash \exists x\ A(x)$	Если $\Gamma, A(x) \vdash C$, то $\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash^{x} C$ при условии, что никакая переменная не варьируется для $A(x)$, а C не содержит x (свободно).

Запись $\vdash^{x}$ означает, что в данном выводе переменная x варьируется.

Сразу отметим, что **$\forall$-удаление** и **$\exists$-введение** доказываются, как и выше.

$\forall$-введение основано на выводимости $A(x) \vdash^{x} \forall x\ A(x)$. Действительно, из $\Gamma \vdash A(x)$ и $A(x) \vdash^{x} \forall x\ A(x)$ правилом сечения получается $\Gamma \vdash^{x} \forall x\ A(x)$. При этом ясно, что переменная x варьируется (в двух последних выводах) *для* $A(x)$, и что, коль скоро все доказательство $\forall$-введения по существу «загоняется» в $A(x) \vdash^{x} \forall x\ A(x)$, про «$x$ не входит свободно в Г» ничего говорить и не надо. Еще раз посмотрим на

Вывод для $A(x) \vdash^{(x)} \forall x\ A(x)$:

1. $A(x)$ – допущение,
2. $A(x)\to(C\to A(x))$ – аксиома 1, где C имеет вид $C = D\to(B\to D)$,
3. $C\to A(x)$ MP из 1, 2,
4. $C\to\forall x\ A(x)$ $\forall$-правило из 3,
5. C – аксиома по построению (см. 2),
6. $\forall x\ A(x)$ MP из 4, 5.

Строчка 4 показывает, что в данном выводе имеется один результат применения $\forall$-правила, связывающего x, к формуле, зависящей от $A(x)$. При этом x входит в $A(x)$ свободно (иначе что бы связывалось в строчке 4 кванторной приставкой $\forall x$?). Таким образом, переменная x действительно варьируется в приведенном выводе для допущения $A(x)$.

Итак, переживания и сомнения по поводу $A(x)\vdash^{(x)} \forall x\, A(x)$ развеиваются, и мы окончательно понимаем, что курс логики «раздваивается» между **[Кл]**ини и **[МетаКл]**ини, что час пробил и пришло время заканчивать...

Но перед этим посмотрим, как в **[Л]** доказывается **$\exists$-удаление.**

Поскольку никакая переменная не варьируется в выводе для $\Gamma, A(x) \vdash C$ для $A(x)$ (а значит, не варьируется и x – иначе к «кому» применять потом $\exists$-правило?), то по теореме дедукции (для исчисления предикатов), к которой взывает вот это самое условие «никому не варьируемости», будем иметь $\Gamma\vdash A(x)\rightarrow C$. Далее, по $\exists$-правилу получим $A(x)\rightarrow C\vdash\exists x\, A(x)\rightarrow C$ (вот здесь нужно условие на формулу C, исключающее свободное вхождение в нее x), а затем правилом сечения – требуемую выводимость $\Gamma, \exists x\, A(x) \vdash^{x} C$, в выводе которой переменная x уже варьируется, что и отражает обозначение. Как и в случае $\forall$-введения, про «x не входит свободно в Г» вопрос сам по себе и не возникает.

....

Вместо послесловия...

Мы вдруг ощутили себя в гостях и поняли, что пора начинать прощаться. Именно начинать, так как уйти по-английски не получится. Конечно, «эмоциональный накал» уже начал потихоньку спадать (что незримо отражено и в записях **[Л]**), да и вообще, «засиделись мы тут». А что? Хорошо провели время – нарастили энтропию, нашли в материале «что-то **[Кл]**иническое», подраматизировали на эту тему, потом сами себя и уговорили, что все «рассосалось». А заодно и поизучали новый для себя предмет. Типичный сюжет производственного романа в кино эпохи соцреализма...

«Мы» – это «мы с читателем». Это такой «лирический герой».

Разумеется, в **[Л]**екциях вопросов было больше (список будет дан в приложении) – но представляется, что очень удачно «улучён момент», когда завершение сюжета будет выглядеть «вовремя». Уже хочется больше углубиться, чем расширяться. Да и притерпелись мы тут, даже приросли душой. К чему-то надо вернуться, что-то, может быть, исправить, что-то вычеркнуть, что-то переписать...

В приложении будут отражены и «потоки сознания», не вошедшие в основной текст.

Представляется также, что задуманный проект состоялся – была обнаружена «скрытая переменная» в элементарном курсе математической логики, связанная с дискуссией о выводимости для предикатов. Проще говоря, удалось «нащупать» проблему, которая не просто форсирует интерес к изучаемой дисциплине, но и переносит этот интерес на другой уровень – мы как бы перепрыгиваем с одной орбиты на другую... В общем, нашли себе «работенку» для следующего пособия.

В заключение составитель выражает глубокую благодарность профессору Наилю Калимовичу Замову за возможность приобщиться к его науке вот таким вот нетипичным способом. Доброе напутствие, которым **[Л]**ектор ответил на предпринятые в данной работе усилия, внушают определенную надежду на то, что логика в жизни все-таки есть!..

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Программа курса «Математическая логика» по Н.К. Замову

1. Предмет математической логики. История возникновения и развития.
2. Высказывания. Составные высказывания. Логические связки. Формулы.
3. Таблицы истинности для формул.
4. Общезначимые и выполнимые формулы.
5. Теорема о подстановке.
6. Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности.
7. Основные общезначимые формулы.
8. Правило Modus ponens.
9. Теорема об эквивалентной замене.
10. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы.
11. Распознавание общезначимости для нормальных форм.
12. Отношение логического следования. Свойства.
13. Теорема о дедукции для логики высказываний.
14. Теория доказательств. Аксиомы и правило вывода.
15. Формальные доказательства. Свойства. Примеры.

16. Формальные выводы из допущений. Свойства. Примеры.
17. Теорема о дедукции в исчислении высказываний.
18. Правила введения и удаления логических связок.
19. Лемма о соответствующих n-ках букв.
20. Теорема о полноте исчисления высказываний.
21. Теорема о непротиворечивости исчисления высказываний.
22. Логика предикатов. Кванторы.
23. Основные эквивалентности логики предикатов – 1.
24. Теория моделей. Таблицы истинности для предикатных формул.
25. Основные результаты об общезначимости для формул логики предикатов.
26. Теорема о подстановке для логики предикатов.
27. Основные эквивалентности логики предикатов – 2.
28. Конгруэнтные формулы.
29. Предварённые нормальные формы.
30. Отношение логического следования.
31. Теория доказательств. Аксиомы, правила вывода в исчислении предикатов.
32. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.
33. Правила введения и удаления кванторов.
34. Теорема об эквивалентной замене.
35. Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов.
36. Исчисление с равенством.
37. Модальные логики.
38. Семантика Крипке.
39. Интуиционистская логика.
40. Формальная арифметика. Понятие о теореме Гёделя о неполноте.
41. Логическое программирование и искусственный интеллект.

По данной программе можно судить, как мало мы продвинулись вдоль исконного курса. Но, как учил товарищ Ленин, «лучше меньше, да лучше»...

2. Типовые контрольные задания ([Л])

(Звездочкой, *, отмечены реконструкции)

Контрольная работа № 1

1. Доказать эквивалентность: $\neg((P\&Q)\to(\neg P\vee R)) \equiv P\&\neg(Q\to R)$.

2*. Привести к конъюнктивной нормальной форме и дизъюнктивной нормальной форме: $((Q\vee(P\&R)\&(S\vee R))\vee P)\&\neg Q$.

3. Доказать выводимость $P \to Q, PVR, R \to \neg U \vdash U \to Q$.

4. Построение пропозициональной формы с заданной таблицей истинности.

Решения в некоторой фирме принимаются ее председателем (A) и тремя членами правления (B, C и D). Чтобы отклонить решение, достаточно одного «вето» председателя или не менее двух «вето» членов правления, иначе решение принимается.

Восстановите таблицу истинности, соответствующую указанному правилу принятия решения, и постройте по ней пропозициональную форму.

Контрольная работа № 2

1. Вывести, используя введение и удаление кванторов:

Ни один благоразумный человек не суеверен

<u>Некоторые хорошо образованные люди суеверны</u>

Некоторые хорошо образованные люди неблагоразумны

2. Доказать выводимость для предикатов:

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x).$$

3. Формализовать задачу и проверить правильность вывода:

Некоторые таможенники проверяют всех пассажиров

<u>Ни один таможенник не проверяет детей</u>

Ни один пассажир не является ребенком

Контрольная работа № 3

1*. Как связаны между собой следующие утверждения:

$$П\&Р \to З, \neg З;\ \ П\&Р \vdash З;\ \ \vdash \neg З;\ \ \neg(П\&Р \to З)\ \text{ и }\ \neg П \vee \neg Р.$$

2. Если число оканчивается на 0, то оно кратно 5.

Если сумма цифр числа кратна 3, то оно само кратно трем.

Если число оканчивается на 0 и кратно трем, то оно кратно пятнадцати.

Вывести: если число оканчивается на 0 и сумма его цифр кратна 3, то оно кратно 15.

3. Доказать, используя введение и удаление, и составить высказывание по схеме:

$$\neg(A\&\neg B) \vdash (A \to B)$$

4. Проверить: $\forall x\, P(x) \to \neg \exists x \neg P(x)$

5. Доказать выводимость $\neg C \to A, B \to C \vdash (A \to B) \to C$

3. Калейдоскоп: «эмоциональная гистограмма» курса

(*на правах глоссария*)

Рабочие названия подраздела: «Магия формул» или «Доминантные массивы курса»... Самым лучшим названием было бы «Что должно остаться, когда все выученное забудется» (парафраз на тему знаменитого изречения[24]), но содержание подраздела носит субъективный характер, отражая представления составителя. Каждый изучающий должен составлять свой такой калейдоскоп. По-существу, получаются комментарии к уже изложенному материалу с некоторой рефлексией. Номера комментариев не совпадают с номерами Вопросов выше.

1. *Логические связки. Язык-объект, язык исследователя и «язык обывателя»:*

	язык-объект	язык исследователя	«язык обывателя»
следование	$\rightarrow$ (в др. книгах $\supset$)	$\vDash$ $\vdash$	$\Rightarrow$
эквивалентность	$\leftrightarrow$ (в др. книгах $\sim$)	$\equiv$?	$\Leftrightarrow$

Возникает эффект «расстановки по полочкам». В самом начале курса – это немало!

2. *Таблицы истинности*.

При первом «столкновении» выглядят как откровение. С течением времени это ощущение размывается, уступая место новым «чудесам». В конце концов, таблицами начинаешь тяготиться, но тут, очень вовремя, их «гнет» снимается выводимостью, которая к остальным своим прелестям добавляет еще одну – освобождение.

3. *Логическая эквивалентность. Сказать «$A \equiv B$» – все равно, что сказать «$\vDash(A \sim B)$». Эквивалентность $A \equiv B$ эквивалентна эквивалентности $\vDash(A \sim B)$.*

Это первое определение логической эквивалентности. Пытаемся говорить на нескольких языках логики и обсуждаем ляпсусы.

4. *A и B имеют одинаковые ТИ $\Leftrightarrow$ в ТИ для (A~B) столбец значений содержит только t.*

5. *Формулы A и B логически эквивалентны, если $A \vDash B$ и $B \vDash A$.*

[24] Оно приписывается столь многим, что можно и не ссылаться...

Это второе определение логической эквивалентности. Дальше разворачиваем языковой ландшафт.

6. *Формула* $((P\to Q\vee\neg R)\&Q)\vee\neg((P\to Q\vee\neg R)\&Q)$ *общезначима, так как имеет структуру* $T\vee\neg T$*, а последняя формула общезначима.*

Кто-то будет смеяться, но в этом есть что-то магическое: каким бы «трехэтажным» ни было выражение для Т, если формула имеет структуру Т ∨ ¬Т, то, «хоть тресни», но вся эта «трехэтажность» будет общезначимой.

Тем не менее отмеченная магия пробуждает самые чудовищные подозрения: неужели вся наша жизнь – какой бы «многоэтажной» мы ее не представляли – всего лишь одна вот такая формула. Ладно, если она общезначима, а ну, как невыполнима?!

7. *Основные эквивалентности логики высказываний, прежде всего, правила перестановки, соединения и разъединения посылок*.

Три последних правила не выглядят такими «теоретико-множественными», как им предшествующие. Чувство новизны.

8. *Основные общезначимые формулы* – и сразу: соответствующие схемы аксиом.

9. *Теорема об эквивалентной замене* – уметь доказывать по приведенной картинке.

10. *Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.*

Почему не оставляет ощущение «отрицательной харизмы»? Задача о Лабиринте представляется естественно возникающей – словно где-то в гипертексте, порождаемом темой, таится свой собственный Минотавр, что и улавливает задача.

11. $A\vDash B$ *тогда и только тогда, когда* $\vDash(A\to B)$.

12. Наведение порядка в умах:

	исчисление высказываний		исчисление предикатов	
[Л]	логика высказываний	исчисление высказываний	логика предикатов	исчисление предикатов
[Кл]	теория моделей	теория доказательств	теория моделей	теория доказательств

13. *Схемы аксиом*.

Если «переложить» их на обыденный язык, то окажется, что это основные конструкции, которыми мы говорим или думаем? Это за 2 тысячи лет всего 8-10 штук отложилось в «логической памяти человечества»?

Каким был генезис именно этих «аксиомных схем»?

14. *Формальное доказательство, формальная доказуемость, формальная теорема.*

Теорема: $\vdash A \to A$.

Магия доказательства.

15. *Выводимость.*

Выводимость: $A \vdash A$.

Вывод$_1$: A.

Этот вывод удовлетворяет определению *формального вывода*: единственная содержащаяся в нем формула является допущением, она же, как последняя формула в списке, *выводима.* Пример перетекания смысла в рамках одного объекта. Предлагается назвать такое явление *инсталляциией,* в самом «салонном» смысле этого слова; в то же время «компьютерный» смысл этого слова тоже активизируется – мы *устанавливаем...*

16. *Теорема дедукции.*

Наблюдение: вывод для выводимости $\Gamma, A \vdash B$ короче, чем для $\Gamma \vdash (A \to B)$. Можно ли строго доказать это наблюдение (при каких-то условиях)? Нужно ли это делать?

17. *Введение и удаление связок.*

Слабое $\neg$-удаление $A, \neg A \vdash B$ на основе введений и удалений и формальным выводом. Возникает два способа – короткий и длинный – получения той или иной выводимости. И все время возникает дразнящее желание переписать короткое обоснование (на основе введений и удалеений) в длинное (формальный вывод). Дерзновенный вызов – написать те самые 60 строк формального вывода закона исключенного третьего $\vdash A \vee \neg A$ – пока оставлен без ответа. Мы ограничились сравнением выводимости (2 строки) и вывода для утверждения $\neg B \vdash B \to C$ (35 строк).

Другой аспект – *исчисление.* Составитель, будучи «матанщиком», сразу вспоминает про интегралы. Там ведь тоже длинные выводы «упаковываются» в короткие формулы. Наверное, даже, скорее всего, эта и подобные аналогии формализуются, но это уже не так интересно, потому, что не столь многообещающе, как *предощущение возможностей...*

18. *Конкретные выводимости, примеры и задачи.*

$A \to (B \to C), A, B \vdash C$; $A \to (B \to C), A, B \vdash C$ и $\vdash A \to (B \to B \& A)$

$A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ и $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$

«Техника фантомных переменных»:

$$\frac{D,\ \underline{B \to \neg D,\ B \vdash \neg D} \qquad \underline{D},\ B \to \neg D,\ B \vdash \underline{\ D}}{D,\ B \to \neg D \quad \vdash \neg B}$$

(из задач 2 и 3 после Вопроса 18).

19. *«Проблематика», связанная с доказательством разбором случаев:*

$$\frac{B, \neg B \vdash C \quad \text{слабое } \neg\text{-удаление,} \qquad C, \neg B \vdash C \quad \text{свойство серии 1 из Вопроса 16,} \qquad (**)}{\mathbf{B \vee C, \neg B \ \vdash C} \quad (\vee\text{-удаление}).}$$

На своей с. 69 **[Кл]**ини «нагоняет волну», которая использована выше для драматизации сюжета. Рассмотрим «данное место» подробнее.

На с. 67 **[Кл]**ини называет те правила, которые собраны в таблице в самом начале Вопроса 18 (Правила введения и удаления логических связок), «и другие похожие результаты *выводимыми правилами...* При использовании такого рода правил и вообще при доказательстве существования выводов нам часто будет удобно выписывать списки формул, относительно которых мы последовательно выясняем, что они выводимы из данных допущений... »

В середине с. 69 **[Кл]** отмечено, что в правилах вспомогательного вывода указанной выше таблицы «список допущений вспомогательного вывода (или каждого из вспомогательных выводов) отличается от списка допущений результирующего вывода. Поэтому нельзя пользоваться этими правилами, просто составляя список формул, последовательно признаваемых за выводимые из некоего единого множества формул... »

Действительно, как написано в основном тексте (Вопрос 18 выше), в паре

$$B, \neg B \vdash C; \quad C, \neg B \vdash C,$$

которой мы воспользовались в рамках *правила вспомогательного вывода* ($\vee$-удаление), формулы B и C не могут быть «последовательно признаны за выводимые из... множества формул» $B \vee C, \neg B$. В этом правиле «список допущений... каждого из вспомогательных выводов < B, ¬B и C, ¬B > отличается от списка допущений результирующего вывода < $B \vee C, \neg B$ >».

Таким образом, составление списка последовательных формул «универсальным» правилом не является. Что же делать? Огромный текстовый массив на с. 69-74, который **[Кл]**ини подает как ответ на этот вопрос, хочется «пропустить при первом чтении», хотя лезть туда и придется (читатель обязательно должен пройти через это). Посмотрим на предложенное выше решение (подраздел *«Консультация перед экзаменом»*):

1. $\neg B \vdash B \to C$ (дан полный вывод из 35 строк),

2. $(\neg B) \vdash C \to C$,

3. $B \vee C, (\neg B,)\ B \to C, C \to C \vdash C$:
а) $(B \to C) \to ((C \to C) \to (B \vee C \to C))$ аксиома 6,
б) $(C \to C) \to (B \vee C \to C)$ MP из а) и $B \to C$,
в) $B \vee C \to C$ MP из б) и $C \to C$,
г) C MP из в) и $B \vee C$.

Но разве это не требуемый «список»? Повторим, что для выводимости $B \vee C, \neg B \vdash C$ не нужно иметь все антецеденты выводимостей $B, \neg B \vdash C$ и $C, \neg B \vdash C$ среди множества исходных допущений. Получается, что мэтр Клини нас просто напугал... Детектив, однако... Осталось только переписать сюда *«Остающиеся вопросы»*, завершающие *«Консультацию... »*.

20. *Лемма о соответствующих n-ках букв и теорема о полноте.*

Соответствие между ТИ и наборами выводимостей выглядит как очередное откровение. В рассматриваемом контексте возникает задача построения оптимальной художественной интерпретации подобных соответствий в смысле Лиотара-Джеймсона. Рабочим инструментом вновь становится понятие *инсталляции* – и вновь в обоих смыслах...

Примеры, оперирующие с функциями вида Q^{σ}. Тема «способы задания функций» в математическом анализе.

Данные разделы являются естественным завершением первой части, посвященной исчислению высказываний, поэтому «порядок вещей» предполагает некоторый набор «ретроспективных взглядов». Распределение усилий над ландшафтом части I сосредоточено, прежде всего, в области изучения «теории доказательств», т.е. выводимостей. Направленность указанных усилий следует «сверхзадаче» построения исчисления – набора правил, позволяющих конструировать одни выводимости на основе других. Ощущения, позволяющие говорить о «пиршестве духа», связаны прежде всего с тем, что Ж.-П. Шанже и А. Конн называют «генеративностью математики»: кажется, что это не ты выводишь формулы, а они выводятся сами, «автоматически», твое дело лишь успевать записывать и (с определенным опозданием) понимать. Кроме того, при наборе определенного опыта в «вычислениях» начинается «кристаллизация» любимых примеров, формул и выводов – как правило, тех, над которыми сконцентрированы наибольшие усилия по их получению и пониманию. Тем самым в «затейливую вязь» *Книги Природы* вплетается индивидуальная история исследователя – дополнительный «упор» для преодоления трудностей вхождения в предмет. Наконец, неувядаемым источником глубокой удовлетворенности продолжает оставаться «чудо моделирования» – на многочисленных примерах мы убеждаемся, что «строим» язык для указанной *Книги,* и «наши» формулы позволяют устанавливать содержательные выводы относительно *реальных* вещей и событий.

21. *«Страсти» по предикатам.*

Чтобы не заниматься «схоластикой» в отсутствии «инструментальной базы», сразу переходим к примерам. Возникает поучительная симметрия: если правилами введения и удаления (связок) первая часть *завершилась,* то правилами введения и удаления (предикатов) вторая часть только *начинается.* Правда, она ими и закончится, как и положено.

Замечание о безболезненном «навешивании» кванторов при всей своей естественности является очень важным: это, в частности, может означать, что преподаватель понимает, что некоторые «навешивания» и так болезненны, а тут еще контрольная, и, возможно, учтет данное обстоятельство при проверке этой контрольной работы. Подобные «студенческие иллюзии» не следует сбрасывать со счетов – они помогают студентам не пропускать контрольные...

22. *Ограниченные кванторы.*

Суть вопроса коротко и ясно изложена в **[Непей]**, с. 39:

«Все А есть В» переводится $\forall x\ (A(x)\to B(x))$,

«Некоторые А есть В» переводится $\exists x\ (A(x)\& B(x))$.

Единственный вопрос, который здесь сразу напрашивается – почему нет единообразия? Вопрос, разумеется, ко второму утверждению. Связка & «уравнивает в правах» А и В, в то время как «перевод» первого утверждения все-таки сохраняет «различие в качестве» между А и В. Таким образом, **[Непей]** и другие источники, интересующиеся данным вопросом, посвящены разработке «алгоритмов привыкания» изучающих его к тому, что «перевод» с обыденного языка на язык математической логики должен быть именно таким.

«Но есть сильней очарованье». На с. 153 в **[Кл]** обнаруживаются два силлогизма классической аристотелевской логики. Один из них –

$$\forall x\ (P(x) \to M(x)),\ \exists x\ (S(x)\ \&\ \neg M(x)) \vdash \exists x\ (S(x)\ \&\ \neg P(x))$$

– называется «**Baroco**»: Все P суть M. Некоторые же S не суть M. Значит, некоторые S не суть P. Другой, похожий, –

$$\forall x\ (\mathrm{P}(x) \to \neg\mathrm{M}(x)),\ \exists x\ (\mathrm{S}(x)\ \&\ \mathrm{M}(x)) \vdash \exists x\ (\mathrm{S}(x)\ \&\ \neg\mathrm{P}(x))$$

– называется «**Festino**»: Все P суть не M. Некоторые же S суть M. Значит, некоторые S не суть P.

В сноске на той же странице говорится, что «можно установить еще 13 других аристотелевских силлогизмов; четыре же из классических силлогизмов оказываются неверными, если переводить их согласно тем же принципам». Тот ли это «перевод», что и выше, или нет (похоже, что тот), мы обсуждать не будем, лучше приведем еще один силлогизм (**[Кл]**, с. 174) –

$$\forall x\ (\mathrm{M}(x) \to \mathrm{P}(x)),\ \forall x\ (\mathrm{S}(x) \to \mathrm{M}(x)) \vdash \forall x\ (\mathrm{S}(x) \to \mathrm{P}(x))$$

– называемый «**Barbara**»: Все M суть P. Все S суть M. Значит, все S суть P.

Это уже *магия истории*. Приведенные названия вместе с кодируемыми ими силлогизмами выглядят как магические заклинания, пришедшие к нам из прошлого. «Ими работал» сам Аристотель, и они доносят до нас живую память о нем...

23. *К задаче 7 о философах.*

УПР. Попробуйте решить эту задачу методом теоретико-множественных диаграмм, обозначая через Ф, Т и И, соответственно, множество всех философов, множество всех тщеславных людей и множество всех азартных игроков.

23. *Предикат – это функция, значением которой является высказывание.*

24. *Основные эквивалентности логики предикатов. Таблицы истинности.*

Еще один пример темы с «отрицательной харизмой». Ведь распрощались уже с таблицами истинности, а опять... Да еще так громоздко!

25. *Основные результаты об общезначимости для формул логики предикатов.*

Здесь возникают вещи, привыкание к которым идет дольше, чем к каким-то другим. Речь идет, прежде всего, о формулах, свободных для переменных, и переменных, свободных для других переменных в формулах. Разумеется, возникает вопрос: неужели нельзя ввести запрет на использование каких-то букв, чтобы постоянно не обсуждать наличие или отсутствие свободного характера их вхождения? Ясно, что за отсутствием такого запрета что-то стоит, но это пока остается «за кадром».

Теорема 1 (∃-схема для предикатов). $\vDash$**P(*y*)→∃*x* P(*x*).**

Теорема 2 (∀-схема для предикатов). $\vDash$**∀*x* P(*x*)→P(y).**

При переходе от предикатов P к произвольным формулам A в теоремах 1 и 2 возникает дополнительное условие, связанное со свободными вхождениями переменных. Это условие призвано перенести на случай A те рассуждения, которыми были установлены результаты этих теорем.

[Столл], с. 128: Формула A(*x*) *свободна для y*, если в A отсутствуют свободные вхождения *x*, входящие в область действия кванторов ∀*y* или ∃*y*.

[Кл], с. 117: Пусть формула A(*y*) получается из A(*x*) подстановкой *y* вместо всех свободных вхождений *x* в A(*x*). Переменная *y свободна для x* в A(*x*), если все вхождения *y* в A(*y*), которые возникают в результате указанной подстановки, свободны.

УПР. Доказать, что A(*x*) свободна для *y* т. и т.т., когда *y* свободна для *x* в A(*x*).

Теорема 1′ (∃-схема для формул... в двух формулировках:)

[Столл] (с. 129, теорема 2.10, I). Если A(*x*) – формула, свободная для *y*, то $\vDash$ **A(*y*)→∃*x* A(*x*).**

[Кл] (с. 118, теорема 15 (a)). Пусть *x* – произвольная переменная, A(*x*) – произвольная формула, *y* – произвольная переменная, не обязательно отличная от *x*, и A(*y*) – результат подстановки *y* вместо свободных вхождений *x* в A(*x*). Тогда если *y* свободна для *x* в A(*x*), то

$\vDash$ **A(*y*)→∃*x* A(*x*).**

Теорема 2′ (∀-схема для формул... в двух формулировках:)

[Столл] (с. 129, теорема 2.10, II). Если A(*x*) – формула, свободная для *y*, то $\vDash$**∀*x* A(*x*)→ A(*y*).**

[Кл] (с. 118, теорема 15 (b)). Пусть *x* – произвольная переменная, A(*x*) – произвольная формула, *y* – произвольная переменная, не обязательно отличная от *x*, и A(*y*) – результат подстановки *y* вместо свободных вхождений *x* в A(*x*). Тогда если *y* свободна для *x* в A(*x*), то

$\vDash$**∀*x* A(*x*)→ A(*y*).**

Теорема 3 (**[Кл]**, с. 119, теорема 16; **[Столл]**, с. 129, теорема 2.11).

Пусть *x* – произвольная переменная, A(*x*) – произвольная формула, C – произвольная формула, в которой нет свободных вхождений *x*. Тогда

(∀-правило) Если $\vDash C \to A(x)$, то $\vDash C \to \forall x\, A(x)$;

(∃-правило) Если $\vDash A(x) \to C$, то $\vDash \exists x\, A(x) \to C$.

Следствие (**[Столл]**, с. 129). Если $\vDash A(x)$, то $\vDash \forall x\, A(x)$.

В «измученной душе непрерывщика» данное следствие рождает все-таки некоторое вполне определенное неприятие. Во-первых, что такое $\vDash A(x)$? Уговариваешь себя, что такое возможно, а потом посмотришь направо, а там $\vDash \forall x\, A(x)$! И опять начинаешь уговаривать... Во-вторых, получается, например, что если $x^2 \geq 0$, то $\forall x(\in R)\, x^2 \geq 0$. И как это понимать? Консеквент-то понятен, а вот что «хочет сказать» антецедент?

26. ***Интригующая коллизия***.

К ее обсуждению хорошо подводит только что сделанное замечание в прозвучавшему следствию, хотя сама она связана с вопросом о выводимости $A(x) \vdash \forall x\, A(x)$.

В качестве «артподготовки» используем **[Кл]**, с. 39: «Подчеркнем, что «$A \vDash B$» *является более сильным утверждением, нежели* «Если $\vDash A$, то $\vDash B$»: из первого всегда следует второе; между тем второе может оказаться верным, и когда первое неверно.» И еще **[Кл]**, с. 52-53: «Прежде чем переходить к дальнейшему, уместно сравнить смысл четырех фраз: «$\vDash A \to B$»..., «$A \vDash B$»..., «$\vdash A \to B$»..., «$A \vdash B$»... В конце § 12 мы узнаем, что эти четыре формулы равносильны: если верна одна из них, то верны и три другие...

Мы увидим также, что равносильны выражения: «Если $\vDash A$, то $\vDash B$» и «Если $\vdash A$, то $\vdash B$»; они слабее, нежели четыре вышеупомянутых (по поводу первого из них мы уже отмечали это в § 7» – на с. 39 **[Кл]** – с этой цитаты мы начали).

Еще раз отметим, что **[Кл]**ини отвергает $A(x) \vdash \forall x\, A(x)$. Посмотрим, как он это делает.

[Кл], с. 146: «Если бы мы отбросили..., то... получили бы «$A(x) \vdash \forall x\, A(x)$», что не имеет места, ибо, согласно теоремам ..., тогда имело бы место также «$A(x) \vDash \forall x\, A(x)$», а это, вообще говоря, неверно (например, если $A(x)$ есть $P(x)$ или $\neg P(x)$; ср. пример 7 § 20)».

Ничего добавлять к уже имеющейся выше (в Вопросе 27 и в конце Вопроса 29) дискуссии на эту тему не будем.

27. *Теорема дедукции в исчислении предикатов.*

Важнейшим элементом является определение варьируемости переменной для формулы, в которую она входит.

Вопрос: верно ли, что высказывание «никакая переменная не варьируется в этом выводе ни для одного из допущений» есть иносказание для понятия «вывод с фиксированными переменными» из **[Кл]**? Расшифровка этого понятия такова **[Кл]**, с. 133:

«∀- и ∃-правила не применяются ни к какой переменной (в качестве *x* этого правила), входящей свободно в $A_1, \ldots, A_m$, кроме случаев, когда заключение ∀- или ∃-правила находится раньше первого вхождения формул $A_1, \ldots, A_m$ (в качестве допущений) в наш вывод. (Мы можем не обращать внимания на те вхождения $A_1, \ldots, A_m$, которые обосновываются не как допущения.)» И продолжение в сноске:

«Наше определение относится к выводу $B_1, \ldots, B_l$, рассматриваемому совместно с его анализом, т.е. с основаниями, оправдывающими каждую из формул вывода. Ср. примечание на с. 55». Примечание (также сноска) на с. 55 гласит:

«Следовательно, этот общий метод применяется к данному выводу $B_1, \ldots, B_l$, снабженному – при каждом i – высказыванием, оправдывающим включение B_i в в эту последовательность. Мы назвали эти оправдания *анализом* вывода...»

Интересно, что в **[Кл]** понятие анализа вывода словно прячется на периферии основного текста и виновато определяется как «оправдания», в то время, как в **[МетаКл]** оно еще не покинуло «пантеон», оно еще – «разъяснение»...

Наверное, прав был Вильгельм Баскервильский, когда говорил, что «исходный порядок – это как сеть, или как лестница, которую используют, чтоб куда-нибудь подняться. Однако после этого лестницу необходимо отбрасывать, потому что обнаруживается, что хотя она и пригодилась, в ней самой не было никакого смысла. Следует отбросить священную лестницу, взойдя на нее»...

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Настоящая рукопись, как водится в таких случаях, была обнаружена в бутылке синего стекла, тщательно запечатанной сургучом (подпись неразборчива). Бутылку, как и положено, прибило к берегу самого романтического из морей. Дул мистраль... Или сирокко... Под куполом глубокого альбигойского неба разворачивалась невиданная доселе мистерия включения и удаления неведомых символов, восходящих ко временам Аристотеля и Александрийской библиотеки...

Коль скоро «история есть современность, опрокинутая в прошлое», то Александрийская библиотека не сгорела. Ее стырили. За рамки этого категорического императива современная мысль пробиваться не желает. Оно и понятно: он, этот императив, привычен и комфортен, обретая его в качестве твердой почвы, человечество может мыслить себя активным, т.е. вполне достойным стыренного. И плывут по морям бутылки синего стекла, перенося от континента к континенту тайные знания древних. Словно доставшиеся нам с последнего банкета давно утонувшего парохода. «Но корабль плывет», товарищи! Бутылки разбрасываются. «Конвейер знанья тверд»! Стеклодув Серго Эбралидзе выполнит заказ братьев-каллистян! Великий Жорес Алферов не допустит в Сколково некомпетентность! Даешь советскую Атлантиду!..

Древнее знание дрейфует по волнам Истории. Но мы не видим его, потому что смотрим сбоку. Посмотреть на него сзади мы не хотим – ибо тогда придется признать, что мы отстали от прошлого. Посмотреть на него спереди мы боимся – ибо оно разрушит наши иллюзии о самих себе. Сверху – не получается. Все, что мы можем – это восстанавливать его путь, надеясь где-то в будущем обнаружить неведомую точку, в которой оно откроется... да не нам, а нашим логическим построениям, которым мы доверяем больше, чем себе. Потому, что, держась за них, мы можем передавать что-то в будущее, что-то продолжать в него. Их и продолжать... Ну, разве не разгадка древних апорий?.. Логика идет вслед за жизнью, только и всего. И когда-то да встретится с ней... А пока мы просто строим цепочки из этих кубиков Аристотеля, и каждое новое звено воспринимаем как чудо... Как говаривал в таких случаях старик Дюма, надо «ждать и надеяться»... Аминь!

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рекомендованная, на которой базировался разбор лекций*

1. **[ЕрПа]** *Ершов Ю.Л.* Математическая логика: учеб. пособие для вузов / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1987. – 2-е изд., испр. и доп. – 336 с.

2. **[КеСТон]** *Кемени Дж.* Введение в конечную математику / пер. с англ. М.Г. Зайцевой; под ред. И.М. Яглома. – М.: Изд-во ин. лит-ры, 1963. – 488 с. с илл.

3. **[МетаКл]** *Клини С.К.* Введение в метаматематику / пер. с англ. А.С. Есенина-Вольпина; под ред. В.А. Успенского. – М.: ИЛ, 1957. – 527 с.

4. **[Кл]** *Клини С.К.* Математическая логика / пер. с англ. Ю.А. Гастева; под ред. Г.Е. Минца. – М.: Мир, 1973. – 480 с.

5. **[Л]** Лекции по математической логике / Замов Н.К. Математическая логика: *Студенческий конспект*. – Казань, Казан. ун-т, 2010. – 174 с.

6. **[Менд]** *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф.А. Кабакова; под ред. С.И. Адяна. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1976. – 2-е изд., испр. – 320 с. с илл.

7. **[Непей]** *Непейвода Н.Н.* Прикладная логика: учеб. пособие / Н.Н. Непейвода. – Новосибирск, Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 2-е изд., испр. и доп. – 521 с.

8. **[Н]** *Новиков П.С.* Элементы математической логики / П.С. Новиков. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1973. – 2-е изд., испр. – 400 с. с илл.

9. **[Но]** *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов: уч-к для вузов / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2004. – 2-е изд. – 364 с.: ил. – (Серия «Учебник для вузов»).

10. **[Столл]** *Столл Р.Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории / пер. с англ. Ю.А. Гастева и И.Х. Шмаина; под ред. Ю.А. Шихановича. – М.: Просвещение, 1968. – 231 с. с илл. (Математическое просвещение).

11. **[УВП]** *Успенский В.А.* Вводный курс математической логики / В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 136 с.

12. **[ФреБаХ]** *Френкель А.А.* Основания теории множеств / А.А. Френкель, И. Бар-Хиллел; пер. с англ. Ю.А. Гастева; под ред. А.С. Есенина-Вольпина. – М.: Мир, 1966. – 556 с.

13. **[Чёрч]** *Чёрч А*. Введение в математическую логику. I / пер. с англ. В.С. Чернавского; под ред. В.А. Успенского. – М.: Изд-во ин. лит-ры, 1960. – 488 с.

14. *Шапорев С.Д.* Математическая логика. Курс лекций и практических занятий / С.Д. Шапорев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 416 с.: ил.

2. *Вспомогательная*

15. *Ахо А*. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. В 2 т. / А. Ахо, Дж. Ульман. – М.: Мир, 1977. – Т.1. Синтаксический анализ. – 612 с., Т.2. Компиляция. – 488 с.

16. *Блинов А.Л.* Элементы логики действий / А.Л.Блинов, В.В.Петров. – М.: Наука, 1991. – 232 с.

17. *Гжегорчик А.* Популярная логика. Общедоступный очерк логики предложений / А. Гжегорчик. – М.: Наука, 1979. – 3-е изд. – 112 с. с илл.

18. *Гетманова А.Д.* Учебник по логике / А.Д. Гетманова. – М.: «ВЛАДОС», 1994. – 2-е изд. – 303 с.

19. *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики / Р. Голдблатт; пер. с англ. В.Н. Гришина и В.В. Шокурова; под ред. Д.А. Бочвара. – М.: Мир, 1983. – 488 с.

20. *Жоль К.К.* Логика в лицах и символах / К.К. Жоль. – М.: Педагогика-Пресс, 1993. – 256 с.: ил.

21. *Жоль К.К.* Логика: Учеб. пособие для вузов / К.К. Жоль. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 399 с. – (Междунар. серия "Bibliotheca studiorum").

22. *Ивлев Ю.В.* Логика: учебник / Ю.В. Ивлев. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. – 270 с.

23. *Ивлев Ю.В.* Логика. Сборник упражнений: Учеб. пособие для вузов / Ю.В. Ивлев. – М.: Книжный дом «Университет», 1998. – 248 с.

24. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга / Т. Йех; пер. с англ. В.И. Фуксона; под ред. В.Н. Гришина. – М.: Мир, 1973. – 152 с.

25. *Кайберг Г.* Вероятность и индуктивная логика / Г. Кайберг; пер. с англ. Б.Л. Лихтенфельда; под ред. А.И. Ракитова. – М.: «Прогресс», 1978. – 376 с.

26. *Калужнин Л.А.* Что такое математическая логика? / Л.А. Калужнин. – М.: Наука, 1964. – 152 с. с илл.

27. *Карпенко А.С.* Фатализм и случайность будущего: Логический анализ. – М.: Наука, 1990. – 214 с.

28. *Кондаков Н.И.* Логический словарь / Н.И. Кондаков; Ин-т философии АН СССР; отв. ред. Д.П. Горский – М.: Наука, 1971. – 638 с.

29. *Коэн П.Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза / П. Дж. Коэн; пер. с англ. А.С. Есенина-Вольпина. – М.: Мир, 1969. – 348 с.

30. Логический словарь: ДЕФОРТ (Дедуктивная формализация теорий) / под ред. Ивина А.А., Переверзева В.Н., Петрова В.В. – М.: Мысль, 1994. – 272 с.: 26 схем.

31. *Нагуманова С.Ф.* Материализм и сознание: анализ дискуссии о природе сознания в современной аналитической философии / С.Ф. Нагуманова. – Казань: Казан. ун-т, 2011. – 222 с.

32. *Светлов В.А.* Практическая логика / В.А. Светлов. – СПб: Изд-во РХГИ, 1995. – 472 с.: ил.

33. *Свинцов В.И.* Логика: Учеб. для вузов / В.И. Свинцов. – М.: Высш. шк., 1987. – 287 с.

34. *Целищев В.В.* Философские проблемы семантики возможных миров / В.В. Целищев. – Новосибирск, Наука, СО АН СССР, 1977. – 192 с.

35. *Шанже Ж.-П.* Материя и мышление / Ж.-П. Шанже, А. Конн; пер. с англ. Т.Б. Ворожцовой, А.Р. Логунова. – М.–Ижевск: Ин-т компьют. иссл-й; НИЦ «Регулярная и хаотич. динамика», 2004. – 216 с.

36. *Эко У.* Отсутствующая структура. Введение в семиологию / У. Эко. – ТОО ТК «Петрополис», 1998. – 432 с.

3. *Группа «художественной поддержки».*

37. *Бейджент М.* Святая Кровь и Святой Грааль / М. Бейджент, Р. Ли, Г. Линкольн; пер. с англ. О. Фадиной, А. Костровой. – М.: Эксмо, 2009. – 496 с.: ил.

38. *Войнич Э.-Л.* Овод: Роман / Э.-Л. Войнич; пер. с англ. Н.А. Волжиной; авт. послесл. и коммент. Е.А. Таратута. – М.: Просвещение, 1985. – 255 с. – (Шк. б-ка).

39. *Жолков С.Ю.* Математика и информатика для гуманитариев: учебник / С.Ю. Жолков. – М.: Гардарики, 2002. – 531 с.

40. *Ильин И.П.* Постструктурализм. Деконструктивизм. Постмодернизм / И.П. Ильин. – М.: Интрада, 1996. – 256 с.

41. Краткий словарь иностранных слов / под ред. И.В. Лёхина и проф. Ф.Н. Петрова. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Гос. изд-во иностр. и нац. словарей, 1951. – 488 с.

42. Лекции по дифференциальной геометрии / А.П. Норден. Дифференциальная геометрия: *Студенческий конспект.* – Казань, КГУ, 1981. – 192 с.

43. *Льюис К.С.* Принц Каспиан / К.С. Льюис. – М.: Эксмо, 2010. – 256 с.

44. *Мартынов Г.С.* Каллисто: науч.-фант. роман / Г.С. Мартынов. – Л.: Лениздат, 1989. – 479 с. – (Отвага, умение, честь).

45. Математическая энциклопедия. Т.3 Коо – Од / гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: «Советская энциклопедия», 1982. – 1183 стб. ил.

46. *Нонака И.* Компания – создатель знания. Зарождение и развитие инноваций в японских фирмах / И. Нонака, Х. Такеучи; пер. с англ. А. Трактинского; под ред. Т. Гутниковой. – М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2003. – 384 с.: ил.

47. *Пенроуз Р.* Тени разума: в поисках науки о сознании. Часть I: Понимание разума и новая физика / Р. Пенроуз. – М.–Ижевск: Ин-т компьют. иссл-й, 2003. – 368 с.

48. *Роулинг Дж. К.* Гарри Поттер и Тайная комната / Дж. К. Роулинг. – М.: Росмэн-Пресс, 2007. – 480 с.

49. *Семенов Г.В.* Инновационные ресурсы вузов региона: потенциал и организационно-экономические механизмы его использования / Г.В. Семенов, М.Р. Сафиуллин, Р.Х. Миннегалиев, П.П, Викторов, А.В. Казанцев. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2005. – 156 с.

50. *Стругацкий А.Н.* Обитаемый остров: Повести / А.Н. Стругацкий, Б.Н. Стругацкий. – Смоленск: «Ибис», ЦДИ, 1992. – 560 с.

51. *Толкин Дж. Р.Р.* Властелин колец. Первая часть. Братство Кольца / Дж. Р.Р. Толкин; пер. с англ. Н. Григорьевой, В. Грушецкого. – СПб: «Северо-Запад», 1992. – 480 с.

52. *Толстой А.Н.* Золотой ключик, или приключения Буратино / А.Н. Толстой. – М.: Изд-во «Детская литература», 1964. – 144 с.

53. *Хрущев Н.С.* О культе личности и его последствиях. Доклад XX съезду КПСС 25 февраля 1956 г. / Н.С. Хрущев // Известия ЦК КПСС. – 1989. - № 3. – С. 145.

54. *Шпенглер О.* Закат Европы. Т. 1. Образ и действительность / О. Шпенглер; авт. вступит. статьи А.П. Дубнов, авт. комментариев Ю.П. Бубенков и А.П. Дубнов. – Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1993. – 592 с.

55. *Эко У.* Имя Розы: Детектив. Вып. 2 / У. Эко; пер. с ит. Е.А. Костюкович. – М.: Кн. Палата, 1989. – 496 с. – (Попул. б-ка).

СОДЕРЖАНИЕ

Казанцев А.В.

Элементы математической логики

Учебное пособие

Редактор *А.А. Аксенова*

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригинал-макетом

Подписано в печать 20.09.2013
Форм. 60×84 1/16. Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая.
Печ. л. 9, 25. Тираж 50. Заказ 227.

Лаборатория оперативной полиграфии Издательства КФУ
420045, Казань, Кр. Позиция, 2а
Тел. 233-72-12