Постановка задачи

Одна из специальных функций математической физики — функция ошибок, определяется следующим образом

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Цель задания – изучить и сравнить эффективность различных квадратурных формул для приближенного вычисления интеграла.

Для этого на сетке узлов $\{x_i\}$, где $x_i = a + ih$, $i = 0,\dots n$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, построить таблицу приближенных значений $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, используя составную квадратурную формулу:

- правых прямоугольников;
- центральных прямоугольников;
- трапеций;
- Симпсона;
- Гаусса с двумя узлами.

При использовании формулы правых прямоугольников интеграл будем вычислять с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ или при достижении числа разбиений отрезка на 1024 части. Во всех остальных случаях интеграл будем вычислять с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Точность вычисления интеграла определяется сравнением результатов при различном числе разбиения отрезка интегрирования. Точность ε считается достигнутой, если $\left|\operatorname{erf}(x_i)_n - \operatorname{erf}(x_i)_{2n}\right| \le \varepsilon$, где $\operatorname{erf}(x_i)_n$ и $\operatorname{erf}(x_i)_{2n}$ - значения интеграла, полученного с помощью составной квадратурной формулы при разбиении отрезка на n и 2n частей соответственно.

Квадратурная формула правых прямоугольников:

$$\mathcal{J} = \int_a^b f(x)dx = f(b)(b-a) + R_1(f).$$

Погрешность квадратурной формулы правых прямоугольников:

$$R_1(f) = f'(\eta)\frac{(b-a)^2}{2}, \eta\epsilon(a,b).$$

Составная квадратурная формула правых прямоугольников:

$$\mathcal{J}_n = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} hf(x_i) + R_{1,n}(f).$$

Погрешность составной квадратуры:

$$R_{1,n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^2}{2} f'(\eta_i),\ где\ h = \frac{b-a}{n},\ \eta_i \in (x_i, x_{i-1}),\ i = 1,\ldots, n-1,$$

$$\left| R_{1,n}(f) \right| \le \max_{x\in[a,b]} \left| f'(x) \right| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^2}{2} = \max_{x\in[a,b]} \left| f'(x) \right| \frac{(b-a)^2}{2n} .$$

Составная квадратурная формула правых прямоугольников дает уменьшение погрешности в n раз.

Квадратурная формула центральных прямоугольников имеет вид:

$$I(x) = \int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + R_2(f).$$

Погрешность квадратурной формулы центральных прямоугольников:

$$R_2(f) = f''(\eta) \frac{(b-a)^3}{24},\ \eta \epsilon (a,b).$$

Составная квадратурная формула центральных прямоугольников:

$$I(x)_n = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})h, \quad где\ h = \frac{b-a}{n}.$$

Погрешность составной квадратуры:

$$R_{2,n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{24} f''(\eta),\ где\ h = \frac{b-a}{n},\ \eta_i \in (x_i, x_{i-1}),\ i = 1,\ldots, n-1.$$

Оценка погрешности:

$$\left| R_{2,n}(f) \right| \le M \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{24} = M \frac{(b-a)^3}{24n^2},$$

$$где\ M = \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right|.$$

Составная квадратурная формула центральных прямоугольников дает уменьшение погрешности в n^2 раз.

Квадратурная формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + R_2(f).$$

Погрешность квадратурной формулы:

$$R_2(f) = -\frac{f''(\mu)(b-a)^3}{12},\ \mu\epsilon(a,b).$$

Составная квадратурная формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]}{2} h, где\ h = \frac{b-a}{n},\ \mu_i \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1,\dots,n.$$

Погрешность составной квадратурной формулы:

$$R_{2,n}(f) = -\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\mu_i)h^3.$$

Оценка погрешности:

$$\left|R_{2,n}(f)\right| \le \left|\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\mu_i)h^3\right| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)^3}{12n^3} = \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right| \frac{(b-a)^2}{12n^2},$$

$$где\ M = \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|.$$

Составная квадратурная формула трапеций дает уменьшение погрешности n^2 раз.

Квадратурная формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + R_3(f).$$

Погрешность квадратурной формулы:

$$R_3(f) = -\frac{f^{(4)}(\mu)(b-a)^5}{2880}.$$

Составная квадратурная формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right]}{6} h,\ где\ h = \frac{b-a}{n}.$$

Погрешность составной квадратурной формулы:

$$R_{3,n}(f) = -\frac{1}{2880}\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\mu_i)h^5.$$

Оценка погрешности:

$$\left|R_{3,n}(f)\right| \le -\frac{1}{2880}\sum_{i=0}^{n-1} h^5 \,|\, f^{(4)}(\mu) \,|\, \le \max_{x\in[a,\,b]} |f^{(4)}(x)| \sum_{i=1}^{n}\frac{(b-a)^5}{180n^5} == \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|\frac{(b-a)^5}{2880n^4}.$$

$$\text{где } M = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Составная квадратурная формула Симпсона дает уменьшение погрешности в n^4 раз.

Квадратурная формула Гаусса:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f\left(a+\frac{b-a}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)+f(a+\frac{b-a}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{3}}))\right]+R_4(f).$$

Погрешность квадратурной формулы:

$$R_4(f) = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\mu)}{4!}((x-x_1)(x-x_2))^2dx,$$

$$\text{где } x_1 = \frac{b+a}{2}-\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x_2 = \frac{b+a}{2}++\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Составная квадратурная формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f\left(x_i+\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)+f\left(x_i+\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)],$$

$$где\ h = \frac{b-a}{n}.$$

Погрешность составной квадратурной формулы:

$$R_{4,n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n!)^4h^{2n+1}}{((2n)!)^3(2n+1)}f^{(2n)}(\varepsilon_i).$$

Сравним погрешности квадратурной формулы и составной квадратурной формулы Гаусса:

$$R_4(f) \le \max_{x\in[a,\,b]} \left|f^{(2n)}(x)\right| \frac{(n!)^4(b-a)^{2n+1}}{\left((2n)!\right)^3(2n+1)},$$

$$R_{4,n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n!)^4 h^{2n+1}}{\left((2n)!\right)^3(2n+1)} \left|f^{(2n)}(\varepsilon_i)\right| \le \max_{x\in[a,\,b]} \left|f^{(2n)}(x)\right| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n!)^4(b-a)^{2n+1}}{\left((2n)!\right)^3(2n+1)n^{2n+1}} = \max_{x\in[a,\,b]} \left|f^{(2n)}(x)\right| \frac{(n!)^4(b-a)^{2n+1}}{\left((2n)!\right)^3(2n+1)n^{2n}}$$

.

Таким образом, мы получили, что составная квадратурная формула дает уменьшение погрешности в n^4 раз.

Квадратурная формула правых прямоугольников

x_i	$Si(x)$	$erf(x)$	|d|	n
0	0	0	0	При любом
0.2	0.22270293	0.22269827	0.000004663348499	1024
0.4	0.42839239	0.42835976	0.000032630363458	1024
0.6	0.60385594	0.60375612	0.000099818435646	1024
0.8	0.74210146	0.74189256	0.000208895518619	1024
1.0	0.84270094	0.84235245	0.000348493154394	1024
1.2	0.91031337	0.90980939	0.000503978085247	1024
1.4	0.95228475	0.95162235	0.000662399019901	1024
1.6	0.97634806	0.97553493	0.000813135935621	1024
1.8	0.98909013	0.98813756	0.000952572802901	1024
2.0	0.99532172	0.99424049	0.001081231514316	1024

Таблица приближенных значений центральных прямоугольников

x_i	$Si(x)$	$erf(x)$	|d|	n
0	0	0	0	При любом
0.2	0.22270293	0.22270330	0.000000364591899	32
0.4	0.42839239	0.42839361	0.000001216953535	64
0.6	0.60385594	0.60385696	0.000001015596183	128
0.8	0.74210146	0.74210135	0.000000102948241	256
1.0	0.84270094	0.84270132	0.000000377844576	256
1.2	0.91031337	0.91031457	0.000001195359609	256
1.4	0.95228475	0.95228567	0.000000926265094	256
1.6	0.97634806	0.97634884	0.000000773692180	256
1.8	0.98909013	0.98909181	0.000001678092300	128
2.0	0.99532172	0.99532311	0.000001385824485	128

Таблица приближенных значений в формуле трапеций

x_i	$Si(x)$	$erf(x)$	|d|	n
0	0	0	0	При любом
0.2	0.22270293	0.22270224	0.000000694138511	64
0.4	0.42839239	0.42839173	0.000000661065006	128
0.6	0.60385594	0.60385566	0.000000281743722	256
0.8	0.74210146	0.74210019	0.000001265030669	256
1.0	0.84270094	0.84269974	0.000001205665867	256
1.2	0.91031337	0.91031280	0.000000566920216	256
1.4	0.95228475	0.95228401	0.000000737459980	256
1.6	0.97634806	0.97634747	0.000000589257158	256
1.8	0.98909013	0.98908985	0.000000288145649	256
2.0	0.99532172	0.99532184	0.000000124475964	256

Таблица приближенных значений в формуле Симпсона

x_i	$Si(x)$	$erf(x)$	|d|	n
0	0	0	0	При любом
0.2	0.22270293	0.22270268	0.000000253038768	2
0.4	0.42839239	0.42839250	0.000000108481498	4
0.6	0.60385594	0.60385685	0.000000911653107	4
0.8	0.74210146	0.74210108	0.000000376449661	8
1.0	0.84270094	0.84270093	0.000000009370034	8
1.2	0.91031337	0.91031430	0.000000930131391	4
1.4	0.95228475	0.95228485	0.000000100315552	8
1.6	0.97634806	0.97634772	0.000000345535188	8
1.8	0.98909013	0.98908951	0.000000624649269	8
2.0	0.99532172	0.99532219	0.000000474852105	16