Характеристические функции.

Опр1 Характеристической функцией случайной величины X называется функция переменной t, определяемая равенством

$$\varphi_X(t) = Me^{itX}.$$

Если X имеет дискретное распределение

X	a_1	a_2	...	a_n
p	p_1	p_2	...	p_n

то $\varphi_X(t) = \sum_i e^{ita_i} \cdot p_i$

Если X имеет непрерывное распределение с плотностью $f_X(x)$, то

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx.$$

Замечание $|\varphi_X(t)| \le 1$.

Доказательство 1) X – дискретная случ. величина:

$$|\varphi_X(t)| = \left|\sum_i e^{ita_i} p_i\right| \le \sum_i p_i = 1, \text{ т.к. } |e^{ita_i}| = 1.$$

2) X – непрерывная случ. величина:

$$|\varphi_X(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1, \text{ т.к. } |e^{itx}| = 1.$$

Теорема1. Если случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы в совокупности, то

$$\varphi_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t), \text{ где } Z = X_1 + \dots + X_n.$$

Доказательство. $\varphi_Z(t) = Me^{it(X_1 + \dots + X_n)} = M\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k} = \prod_{i=1}^{n} Me^{itX_k} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_k}(t)$. Здесь мы использовали, что из независимости случайных величин $X_1, \dots, X_n$ следует независимость функций от этих случайных величин $e^{itX_1}, \dots, e^{itX_n}$, а также теорема: „Если X и Y независимы и сущ. MX и MY, то сущ $MXY = MX \cdot MY$).

<u>Теорема 2.</u> Если $Z = бX + a$, где $б, a$ – числа, то

$$\varphi_Z(t) = e^{ita}\varphi_X(бt).$$

<u>Доказательство.</u> $\varphi_Z(t) = Me^{itZ} = Me^{it(бX+a)} = e^{ita} \cdot Me^{itбX} =$

$$= e^{ita}\varphi_X(бt).$$

<u>Примеры характеристических функций.</u>

1). Пусть X имеет распределение Бернулли, т.е.

X	0	1
P	$1-p$	p

. Тогда $\varphi_X(t) = e^{it}\cdot p + e^{it\cdot 0}\cdot(1-p) = pe^{it} - p =$

$$= p(e^{it} - 1).$$

2. Пусть $X \sim N(0,1)$, т.е. плотность распределения X имеет вид $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$. Найдём $\varphi_X(t)$.

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx + i \sin tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$ т.к. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$, как интеграл от нечётной функции с симметричными пределами интегрирования.

Далее,

$$\varphi'_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot (-\sin tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sin tx \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} t \cos tx \, e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t\varphi_X(t)$$

Здесь мы интегрируем по частям и $\left(\sin tx \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

В итоге получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)} = -t \Rightarrow \varphi_X(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Подставим $t=0$. Т.к. $\varphi_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$, то $C=1$ и следовательно

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \ (t \in \mathbb{R}).$$

Итак: Характеристическая функция случайной величины X нормальной $(0;1)$ имеет вид: $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$.

<u>Следствие</u> $Z = \sigma X + a$, является нормальной (a, σ) и

$$\varphi_Z(t) = e^{ita} e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}}, t \in \mathbb{R}.$$

3. Пусть X имеет распределение Пуассона с параметром λ, т.е. $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Найдём характеристическую функцию X.

$$\varphi_X(t) = Me^{itX} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{it}} = \exp\left(\lambda(e^{it} - 1)\right).$$

<u>Замечание</u>. Характеристическая функция случайной величины однозначно определяет её функцию распределения. Данное утверждение зафиксировано в виде теоремы единственности, которую мы принимаем без доказательства.

Теорема. Пусть $X_k \sim N(m_k, \sigma_k)$, $k=\overline{1,n}$. Тогда $X=\sum_{k=1}^{n} X_k$ имеет распределение $N\left(\sum_1^n m_k, \sqrt{\sum_1^n \sigma_k^2}\right)$, если $X_1, \dots, X_n$ независимы.
(По другому говоря, при сложении независимых, нормальных случайных величин мы снова получаем нормальное распределение.)

Доказательство. $\varphi_{X_k}(t) = e^{itm_k} e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2}}$, $k=\overline{1,n}$. $X_1, \dots, X_n$ — независимы. $\Rightarrow \varphi_{\sum_1^n X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{itm_k} e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2}} = e^{it\sum_1^n m_k} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}\sum_1^n \sigma_k^2} \Rightarrow$ (по теореме единственности) $\Rightarrow$
$\sum_1^n X_k \sim N\left(\sum_1^n m_k, \sqrt{\sum_1^n \sigma_k^2}\right)$.

Теорема. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимы и имеют распределение Пуассона, т.е. $P(X_k = i) = \frac{\lambda_k^i e^{-\lambda_k}}{i!}$. Тогда $X = \sum_1^n X_k$ также имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = \sum_1^n \lambda_k$.

Доказательство. Ранее мы получили, что характеристическая функция X_k имеет вид $\varphi_{X_k}(t) = e^{\lambda_k(e^{it}-1)}$. Т.к. $X_1, \dots, X_n$ — независимы, то $\varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(e^{it}-1)} = e^{\left(\sum_1^n \lambda_k\right)(e^{it}-1)}$, т.е. $\varphi_X(t)$ есть характеристическая функция распределения Пуассона с параметром $\sum_1^n \lambda_k$. $\Rightarrow$ (по теореме единственности) $\Rightarrow$ X имеет распределение Пуассона с параметром $\sum_1^n \lambda_k$.

Теорема Муавра-Лапласа

Пусть случайные величины $X_1, \dots, X_n$ имеют распределение Бернулли, т.е. $P(X_k = 1) = p$, $P(X_k = 0) = q = 1 - p$, $\forall k = \overline{1,n}$.
Будем считать, что случайные величины связаны схемой испытаний Бернулли $\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины. Рассмотрим случайную величину $\mu = X_1 + \dots + X_n$.

Мы знаем, что $M\mu = np$, $D\mu = npq$.
Рассмотрим случайную величину $\eta = \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}$.

$$M\eta = M\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} M(\mu - np) = \frac{1}{\sqrt{npq}} M\mu - np = 0.$$

$$D\eta = D\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{npq} D(\mu - np) = \frac{1}{npq} D\mu \cancel{-np} = \frac{1}{npq}\cdot npq = 1.$$

$$\cancel{\frac{1}{npq}(npq) = np}$$

$$P\left(\eta = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) = P(\mu = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{1,n}$$

Пусть $F_n(x) = P(\eta < x)$, $\varphi_\eta(t)$ — характеристическая функция случайной величины η.

$\varphi_{X_k}(t) = pe^{it} + q$, при $\forall\, k = \overline{1,n}$ $\Rightarrow \varphi_\mu(t) = (pe^{it} + q)^n \Rightarrow$

$$\varphi_\eta(t) = e^{it\frac{np}{\sqrt{npq}}}\left(pe^{i\frac{t}{\sqrt{npq}}} + q\right)^n = \left(pe^{\frac{itq}{\sqrt{npq}}} + q\,e^{-\frac{itp}{\sqrt{npq}}}\right)^n \quad (*)$$

Рассмотрим теперь поведение функции $F_n(x)$ при возрастании n и фиксированном p.

Теорема (Муавра-Лапласа). $F_n(x) \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, при $n \to +\infty$, равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для $\forall$ целого $k > 0$ и $\forall\, z \in \mathbb{R}$ имеем разложение по формуле Тейлора

$$e^{iz} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(iz)^r}{r!} + \theta\frac{z^k}{k!}, \quad \text{где } |\theta| \le 1.$$

Используя это разложение при $k = 3$, получим

$$pe^{i\frac{qt}{\sqrt{npq}}} = p + \frac{pq\,it}{\sqrt{npq}} - \frac{pq^2t^2}{2npq} + \theta\frac{pq^3t^3}{3!(npq)^{3/2}},$$

$$qe^{-i\frac{pt}{\sqrt{npq}}} = q - \frac{qp\,it}{\sqrt{npq}} - \frac{p^2qt^2}{2npq} + \theta\frac{p^3qt^3}{3!(npq)^{3/2}}$$

Применяя эти разложения и формулу (*), получим

$$\varphi_Y(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \theta \frac{t^3}{(npq)^{3/2}}\right)^n.$$

Положим $y = -\frac{t^2}{2} + \theta \frac{t^3}{(pq)^{3/2} n^{1/2}}$.

Получим

$$\varphi_Y(t) = \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Посмотрим как меняется y при $n \to +\infty$.

$$\left|y - \left(-\frac{t^2}{2}\right)\right| \le \left|\theta \cdot \frac{t^3}{(pq)^{3/2} n^{1/2}}\right| \le \frac{|\theta| T^3}{(pq)^{3/2} n^{1/2}}. \Rightarrow$$

$y \to \left(-\frac{t^2}{2}\right)$ (при $n \to +\infty$) равномерно относительно $t \in (-T, T)$, где T – любое фиксированное число.

~~Однако, $\frac{y}{n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ равномерно относительно $t \in (-T, T)$.~~

Используя второй замечательный предел, получаем $\varphi_Y(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ при $n \to +\infty$ равномерно относительно $t \in (-T, T)$. Таким образом, мы получили характеристические функции $\varphi_Y(t)$ сходятся равномерно относительно $t \in (-T, T)$ при $n \to +\infty$ к характеристической функции нормального $(0, 1)$ распределения.

Сформулируем результат, который мы хотим применить для окончательного доказательства теоремы Муавра–Лапласа.

<u>Теорема (непрерывности).</u> Пусть последовательность характеристических функций $(\varphi_{X_n}(t))$ случайных величин (X_n) сходится к характеристической функции случайной величины X, причём сходимость $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$

равномерно в любом конечном интервале $|t| < T$, где T — фиксировано. Далее, пусть $F_X(x)$ — функция распределения случайной величины X является непрерывной функцией. Тогда (при $n \to +\infty$): $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$, причём сходимость равномерна относительно $x \in \mathbb{R}$.

Данную теорему мы принимаем без доказательства.

Возвратимся к доказательству теоремы Муавра-Лапласа. Мы получили $\varphi_\zeta(t) \to e^{-t^2/2}$ равномерно на $[-T, T]$ при $n \to +\infty$. $e^{-t^2/2}$ — характеристическая функция нормального $(0,1)$ распределения, функция распределения которого есть $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Очевидно, что условия теоремы непрерывности выполняются и следовательно $F_n(x) = P(\zeta < x) \to \Phi(x)$, равномерно на $\mathbb{R}$. Теорема Муавра-Лапласа доказана.