

УДК 519.116

О СОВЕРШЕННЫХ РАЗБИЕНИЯХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

КИНДЕР М.И.

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Казань, Россия (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.), e-mail: mkinder@rambler.ru



Разбиение натурального числа называют совершенным, если каждое меньшее число можно единственным образом представить в виде суммы некоторых частей этого разбиения. В статье предлагается простое доказательство вычислительных рекуррентных формул, связанных с подсчётом количества совершенных разбиений натурального числа. Применение аппарата производящих функций позволяет сократить объем необходимых преобразований, благодаря этому удастся получить еще одно доказательство явной формулы МакМагона для подсчёта упорядоченных факторизаций натуральных чисел, а также некоторые новые рекуррентные соотношения в случае, когда эти числа имеют только два простых множителя. Для таких натуральных чисел доказана связь количества упорядоченных факторизаций с многочленами Якоби и Лежандра.

Ключевые слова: разбиение числа, совершенное разбиение числа, упорядоченная факторизация.

ON PERFECT PARTITIONS OF INTEGERS

KINDER M.I.

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia (420008, Kazan, Kremlin street, 18.), e-mail: mkinder@rambler.ru

A perfect partition of a natural number is one which contains one, and only one, partition of every lower number. The purpose of the research is to prove computing recurrence relations that count the number of perfect partitions of a natural number. Using the method of generating functions, we give a simple proof of an explicit formula MacMahon's for calculating ordered factorizations of natural numbers, and some new recurrence relations when these numbers have only two prime factors. For such natural numbers we found the relationship between the number of ordered factorizations and Jacobi polynomials and Legendre polynomials.

Keywords: partition of integers, perfect partition, ordered factorization.

Введение. Разбиения чисел являются классическим и достаточно хорошо изученным комбинаторным объектом. Понятие *совершенного разбиения* числа в 1886 году ввёл МакМагон [7]. Совершенным разбиением числа N называется такое разбиение, в котором содержится лишь одно разбиение каждого числа, меньшего N , при условии, что равные части считаются неразличимыми. Например, набор 1^N из N единиц является одним из совершенных разбиений для каждого натурального N . Для $N = 9$ разбиения 1^9 , $2^4 1$ и $1^4 5$ и только они являются совершенными.