УДК 519.8

Устойчивые паросочетания и задача о назначении

Э.Ю. Лернер, О.С. Яковлева

Казанский государственный университет
E-mail: lerner@ksu.ru

Введение

Задача об устойчивом паросочетании, предложенная Гейлом и Шепли в 1962 году, стала источником многочисленных исследований в теории игр и анализе алгоритмов (см [3], [2] и ссылки там). Не менее известна задача о назначении (называемая также задачей о взвешенном паросочетании) [1]. В книге Кнута [3] предлагается 12 исследовательских проблем, связанных с задачей об устойчивом паросочетании. Десятая проблема звучит следующим образом: "Существует ли какая-либо интересная взаимосвязь между задачей об устойчивом паросочетании и задачей о назначении?". В настоящей работе исследуется этот вопрос и рассматриваются различные варианты взаимосвязи между множествами оптимальных решений обеих задач. Заметим, что задача об устойчивом паросочетании часто интерпретируется как задача об устойчивом бракосочетании, а задача о назначении — как задача максимизации счастья всех браков (или минимизации суммарной неприязни) [5]. В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать эти задачи именно в такой интерпретации.

Обозначим через n мощность множества мужчин (и множества женщин). Исходными данными задачи об устойчивом паросочетании являются две матрицы $R = (r_{ik})$ и $J = (j_{ik})$ размерности $n \times n$, в данной модели характеризующие отношение мужчин к женщинам и женщин к мужчинам соответственно. Строка номер i матрицы R характеризует отношение i-го мужчины ко всем женщинам. Наши обозначения несколько отличаются от обозначений в [3], и строки матрицы R будут соответствовать мужчинам, а столбцы женщинам: элемент r_{ik} равен рангу k-й женщины в списке i-го мужчины. Чем меньше значение этого ранга, тем соответствующая женщина предпочтительней для i-го мужчины. Таким образом, каждая строка матрицы R есть перестановка элементов из множества $\{1, \ldots, n\}$. Соответственно, в матрице J строки по-прежнему будут соответствовать мужчинам, а столбцы женщинам, однако, элемент j_{ik} равен рангу i-го мужчины в списке k-ой женщины. Следовательно, k-й столбец матрицы J есть перестановка элементов из множества $\{1, \ldots, n\}$, он характеризует предпочтения k-й женщины.

Паросочетанием M называется набор пар $\{(1, k_1), \ldots, (n, k_n)\}$, где $(k_1, \ldots, k_n)$ — перестановка на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Если в паросочетании M существуют пары (i, k) и (t, m) такие, что $r_{im} < r_{ik}$ и $j_{im} < j_{tm}$, то будем говорить, что в паросочетании M присутствует возможность измены (i, m). Если в паросочетании M не существует возможности измены, то оно называется *устойчивым* .

В задаче об устойчивом паросочетании (в дальнейшем для краткости будем называть её R-J–задачей) требуется найти одно или все устойчивые паросочетания. Известно, что хотя бы одно устойчивое паросочетание существует при любых матрицах R и J.

Для удобства дальнейшего изложения введём ещё один термин. Будем говорить, что мужчина i и женщина k любят друг друга, если $r_{ik} = j_{ik} = 1$. Очевидно, что если мужчина i и женщина k любят друг друга, то в любом паросочетании, не содержащем пары (i, k),

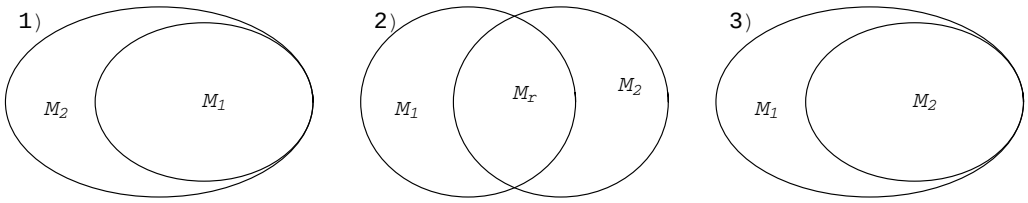

Рис. 1: Различные варианты соотношений между множествами устойчивых паросочетаний и оптимальных решений задачи о назначении

будет возможность измены; в любом паросочетании, содержащем эту пару, измены (i, m) и (t, k) невозможны ни при каких значениях t и m; все устойчивые паросочетания обязаны содержать пару (i, k).

В задаче о назначении (в отличие от R-J–задачи) имеется всего лишь одна матрица $C = (c_{ik})_{i,k=1}^{n}$, c_{ik} в данной модели характеризует степень суммарной неприязни между мужчиной i и женщиной k. Необходимо найти паросочетание M, для которого сумма $\sum\limits_{(i,k)\in M} c_{ik}$ минимальна. Очевидно, что если $c_{ik} \equiv Const$, то любое паросочетание будет оптимальным. Такой случай назовём *тривиальным*.

Пусть f — функция, определенная на множестве пар (r, j), $r, j \in \{1, \ldots, n\}$. Сопоставим исходным данным задачи об устойчивом паросочетании (матрицам R и J) исходные данные задачи о назначении (матрицу C) следующим образом: $c_{ik} = f(r_{ik}, j_{ik}), i, j = 1, \ldots, n$. Задачу о назначении и задачу об устойчивом паросочетании, матрицы которых связаны таким образом, будем называть f-соответствующими. Введенное нами соответствие кажется вполне естественным, поскольку c_{ik} характеризует степень неприязни мужчины i и женщины k, а r_{ik} и j_{ik} есть ранги соответствующих мужчин и женщин в списках друг друга.

Множество устойчивых паросочетаний M_1 и множество оптимальных паросочетаний f-соответствующей ей задачи о назначении M_2 могут быть связаны между собой различным образом (см. рис. 1):

1) множество устойчивых паросочетаний лежит внутри множества оптимальных паросочетаний f-соответствующей задачи о назначении, то есть любое устойчивое паросочетание даёт оптимум в f-соответствующей ей задаче о назначении;

2) множество устойчивых паросочетаний и множество оптимальных паросочетаний пересекаются, причём их пересечение M_r не пусто, то есть хотя бы одно из устойчивых паросочетаний даёт оптимум в f-соответствующей ей задаче о назначении;

3) множество оптимальных паросочетаний лежит внутри множества устойчивых паросочетаний, то есть любое оптимальное паросочетание является устойчивым.

Случай 1) полностью рассмотрен в работе [4]. В частности, было доказано, что при $n \geqslant 3$ *любое* из устойчивых паросочетаний *любой* R-J–задачи будет давать оптимум f-соответствующей ей задачи о назначении тогда и только тогда, когда f (с точностью до константного слагаемого) задаётся формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y = 1 \\ K, & \text{где } K > 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что $f(1, 1) = 0$.

Целью данной работы является описание класса $\mathcal{L}_n$ нетривиальных функций $f(x,y)$, для которых *хотя бы одно* из устойчивых паросочетаний *любой* R-J–задачи будет давать оптимум f-соответствующей ей задачи о назначении (случай 2). Кроме того, будет описан класс $\mathcal{L}'_n$ нетривиальных функций f, для которых множество устойчивых паросочетаний *любой* R-J–задачи включает в себя множество оптимальных паросочетаний f-соответствующей ей задачи (случай 3). Будет доказано, что этот класс пуст при $n \geqslant 3$. При $n \geqslant 4$ оказывается, что класс $\mathcal{L}_n$ совпадает с классом функций f, заданных формулой (1). При $n = 2$ и $n = 3$ ответ менее тривиален.

1. Случай больших размерностей.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 4$. Класс $\mathcal{L}_n$ совпадает с классом функций f, заданных формулой (1).*

Доказательство. Рассмотрим пары матриц R и J вида

$$R = \begin{pmatrix} a & b & \cdots\cdots\cdots \\ c & d & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots & 1 & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} e & g & \cdots\cdots\cdots \\ h & i & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots & 1 & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{r} \text{где } a < b,\ e < h \\ (c \neq d,\ g \neq i). \end{array} \tag{2}$$

Единственное устойчивое паросочетание данной R-J–задачи — это $\{(1,1),(2,2)\ldots,(n,n)\}$. Поскольку оно единственно, оно и должно давать оптимум задачи о назначении. Другими словами, должно выполняться неравенство

$$f(a,e) + f(d,i) + (n-2)f(1,1) \leqslant f(b,g) + f(c,h) + (n-2)f(1,1)$$

или

$$f(a,e) + f(d,i) \leqslant f(b,g) + f(c,h) \tag{3}$$

Будем перебирать все варианты подстановок для чисел a, b, c, d, e, g, h, i, считая, что все они принадлежат множеству X из четырех элементов, в которое входит 1. Разумеется, это множество является подмножеством $\{1,\ldots,n\}$. Для каждого варианта таких подстановок должно выполняться неравенство (3). Для любого X получаем систему из неравенств с 15-ю переменными, которые должны выполняться одновременно. Сгенерировав эти неравенства на компьютере, мы получили систему из 4175 неравенств, среди которых нашлись взаимообратные неравенства. Поскольку система состоит из нестрогих неравенств, то каждую пару взаимообратных неравенств можно заменить на равенство. Решив получившуюся систему однородных линейных уравнений мы обнаружили, что все $f(x,y)$ равны друг другу при x и y, одновременно отличных от 1. Добавив к этим равенствам условие $f(x',y') \geqslant 0$, $x',y' \in \{2,\ldots,n\}$, которое получается при подстановке вместо a, d, e, i единиц, мы заключаем, что для принадлежности к классу $\mathcal{L}_n$ необходимо, чтобы функция имела вид (1). Достаточность этого условия очевидна.

Теорема 2. *Класс $\mathcal{L}'_n$ при $n \geqslant 3$ пуст.*

Доказательство. Для случая, когда $n \geqslant 4$, данное утверждение очевидным образом следует из теоремы 1, поскольку для матрицы задачи о назначении, построенной с помощью

функции (1), может быть много точек оптимума, а у соответствующей ей R-J–задачи только одна. Осталось рассмотреть случай при $n = 3$. Рассмотрим пары матриц R и J вида (2) при $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 3$, $e = 2$, $g = 1$, $h = 3$, $i = 2$ и при $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 2$, $e = 1$, $g = 2$, $h = 2$, $i = 3$. Поскольку устойчивое паросочетание единственно, то оно должно быть единственным оптимальным. Значит, мы можем выписать неравенства, аналогичные (3), только каждое нестрогое неравенство должно быть заменено на строгое. Мы получаем два взаимообратных строгих неравенства: $f(1,2) + f(3,2) < f(2,1) + f(2,3)$ и $f(2,1) + f(2,3) < f(3,2) + f(1,2)$, что говорит о несовместности системы.

2. Размерности $n = 2$, $n = 3$.

Теорема 3. *а) $f \in \mathcal{L}_2$ тогда и только тогда, когда f нетривиальна и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

$$\begin{array}{llll} 1)\ f(2,2) \geqslant 0, & 0 \leqslant f(1,2) \leqslant f(2,2), & f(2,2) - f(1,2) \leqslant f(2,1) \leqslant f(2,2) + f(1,2); \\ 2)\ f(2,2) \geqslant 0, & f(1,2) \geqslant f(2,2), & f(1,2) - f(2,2) \leqslant f(2,1) \leqslant f(2,2) + f(1,2). \end{array}$$

б) $f \in \mathcal{L}_2'$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

$$\begin{array}{llll} 1)\ f(2,2) > 0, & 0 < f(1,2) < f(2,2), & f(2,2) - f(1,2) < f(2,1) < f(2,2) + f(1,2); \\ 2)\ f(2,2) > 0, & f(1,2) > f(2,2), & f(1,2) - f(2,2) < f(2,1) < f(2,2) + f(1,2). \end{array}$$

Доказательство сводится к перебору всевозможных матриц R и J. Поскольку без ограничения общности мы можем считать, что первая строка матрицы R имеет вид $(1,2)$, то при $n = 2$ существует всего 8 различных пар матриц R и J.

Отметим, что к описанному выше классу функций $\mathcal{L}_2'$ (а следовательно и $\mathcal{L}_2$) принадлежат функции $f(x,y) = \max\{x,y\}$ и $f(x,y) = x + y$.

Теорема 4. *$f \in \mathcal{L}_3$ тогда и только тогда, когда f нетривиальна и выполняются соотношения:*

$$\begin{array}{l} 1)\ f(1,2) = f(2,1) \geqslant 0, \\ 2)\ f(1,2) \leqslant f(1,3) = f(2,3) = f(3,1) = f(3,2) = f(3,3) \leqslant 2f(1,2), \\ 3)\ f(1,2) \leqslant f(2,2) \leqslant f(1,3). \end{array} \tag{4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Перебирая всевозможные матрицы R, J вида (2), где a, b, c, d, e, g, h, i принадлежат множеству $\{1,2,3\}$, получаем систему неравенств вида (3). Получилась система из 282 неравенств. Ее анализ показывает, что она эквивалентна соотношениям (4).

Достаточность. Без ограничения общности будем считать, что $f(2,2) = 1$. Обозначим через x значение $f(1,2)$ (которое совпадает с $f(2,1)$), через y — $f(2,2)$. Имеем:

$$1/2 \leqslant x \leqslant 1, \quad x \leqslant y \leqslant 1. \tag{5}$$

Для каждой пары матриц R и J решение f-соответствующей задачи о назначени и представляет собой минимум шести функций, линейных по x, y. Если же допустимое множество представляет собой не все возможные паросочетания, а лишь те из них, которые являются устойчивыми, то мы должны отыскать минимум не шести функций, а лишь соответствующей части из них. Мы должны доказать, что для каждой пары матриц

R и J первый и второй минимумы совпадают при любых x, y, удовлетворяющих неравенствам (5). Очевидно, что первый минимум не превышает второго. Следовательно, мы должны доказать, что минимум их разности при всех x, y, удовлетворяющих условиям (5), равен 0. Проверку этого равенства мы осуществили перебором всевозможных задач минимизации на компьютере. Количество этих задач равно 3888 ($3888 = 6^5/2$), поскольку без ограничения общности можно считать, что первая строка матрицы R имеет вид $(1, 2, 3)$, а первый столбец матрицы J обладает свойством $J_{21} > J_{31}$. Выполнение такого требования достигается путем перенумерации столбцов матрицы J и последних строк матрицы R.

Как видно из этой теоремы, в классе $\mathcal{L}_3$ нет несимметричных функций. К числу функций из этого класса принадлежат, в частности, функция $f(x, y) = \max\{x, y\}$ и функция, заданная формулой (1). В то же время функция $f(x, y) = x + y$ не принадлежит классу $\mathcal{L}_3$.

Список литературы

1. **Ловас Л., Пламмер М.Д.** Прикладные задачи теории графов: Теория паросочетаний в математике, физике, химии. М.: Мир. – 1998.
2. **Gusfield D., Irving R.W.** The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms. MIT Press, Massachusetts. – 1989.
3. **Knuth D.E.** Stable marriage and its relation to other combinatorial problems: an introduction to other mathematical analysis of algorithms. CRM Proceedings & Lecture Notes. Volume 10. Providence, RI, American Mathematical Society. – 1996.
4. **Lerner E.Yu.** Stable marriages and summary happiness. Will be published.
5. **Talagrand M.** Spin Glasses: A New Direction for Probability Theory? http://www.math.ohio-state.edu/ talagran/.