Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — V

Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis – V

Ростов-на-Дону, 26 Апреля — 1 мая 2015

Rostov-on-Don, 26 April – 1 May 2015,

Материалы конференции/PROCEEDINGS

РФФИ
RFBR

Фонд Д. Зимина «Династия»
D. Zimin Dynasty foundation

ДГТУ
DSTU

ЮФУ
SFEDU

URL : www.karapetyants.sfedu.ru/conf/

E-mail: otha.conference@gmail.com

Ростов-на-Дону, 2015

УДК 330.4 504 37 1Л4

Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — V» в г. Ростове-на-Дону. Тезисы докладов. Издательский центр ДГТУ, Ростов н/Д, 2015. — 211 с. ISBN: 978-5-7890-1013-6

Тематика конференции связана с различными интеркоррелирующими областями математики, в первую очередь гармонического анализа, функционального анализа, теории операторов, теории функций, дифференциальных уравнений и дробного анализа, интенсивно развивающимися в последнее десятилетие. Актуальность этой тематики связана с исследованием сложных многопараметрических объектов, требующих, в частности, привлечения операторов с переменными параметрами и функциональных пространств с дробными и даже переменными размерностями.

Конференция проходит при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-07-20098 -Г) и Фонда Дмитрия Зимина "Династия"на базе Южного федерального и Донского государственного технического университетов.

Информационная поддержка: Вестник Владикавказского научного центра РАН, Электронный научный журнал "Инженерный вестник Дона"(ivdon.ru), Еженедельник науки и образования Юга России "Академия".

Содержание

Секция I

Функциональный анализ и теория операторов
Руководитель секции: В.Б. Дыбин

A. V. Abanin (Southern Federal University and Southern Mathematical Institute, Russian Federation), Pham Trong Tien (Hanoi University of Science, Vietnam)
abanin@math.rsu.ru, phamtien@mail.ru

CLASSICAL OPERATORS IN WEIGHTED SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

Weighted spaces of holomorphic functions and operators in them have several important applications in functional and complex analysis, convolution and partial differential equations, Fourier analysis and other directions. In recent years many authors are interested in the differentiation and integration operators in such spaces (see, e.g., [1]-[3]).

We show that the results of [1] concerning the boundednbess of differentiation and integration operators in weighted spaces given by radial weights in the unit disk D or the complex plane C might fail without some natural additional conditions. Under these conditions we give, in terms on weights, a complete answer for the boundedness of differentiation and integration operators.

It should be noted that our approach is essentially different from the previous one. It can be applied for weights and domains of general types.

The research of A. V. Abanin was supported by RFBR, Project 15- 01-0140415 a.

R E F E R E N C E S

1. *Harutyunyan A., Lusky W.* On the boundedness of the differentiation operator between weighted spaces of holomorphic functions. Studia Math. 2008. Vol. 184, N. 3. P. 233-–247. 1999. Vol. 66, N. 6. P. 59–68.

2. *Bonet J.* Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions. Math. Z. 2009. Vol. 261. P. 649—677.

3. *Beltran M. J., Bonet J., Fernת'andez C.* Classical operators on weighted Banach spaces of entire functions. Proc. Amer. Math. Soc. 2013. Vol. 141. P. 4293–4303.

О. Г. Авсянкин (ЮФУ, Россия)
avsyanki@math.rsu.ru

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ, ВОЗМУЩЕННЫЕ ОДНОСТОРОННИМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ СДВИГАМИ

Пусть $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leqslant 1\}$. Рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{B}_n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{B}_n,$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям:

1° $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y), \quad \forall\, \alpha > 0;$

2° $k(\omega(x),\omega(y)) = k(x,y), \quad \forall\omega \in SO(n)$;
3° $k(e_1,y)|y|^{-n/p} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, где $e_1 = (1,0,\dots,0)$.

Определим оператор одностороннего мультипликативного сдвига U_δ формулой

$$(U_\delta\varphi)(x) = \begin{cases} \delta^{-n/p}\varphi(x/\delta), & |x| < \delta, \\ 0, & |x| > \delta, \end{cases}$$

если $0 < \delta < 1$, и формулой $(U_\delta\varphi)(x) = \delta^{-n/p}\varphi(x/\delta)$, если $\delta > 1$.

Основным объектом нашего исследования является оператор

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j U_{\delta_j} + K,$$

где $a_j \in \mathbb{C}$. Для оператора A получены необходимые и достаточные условия обратимости.

Далее, определим в $L_p(\mathbb{B}_n)$ проектор P_τ, $0 < \tau < 1$, формулой

$$(P_\tau\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau < |x| < 1, \\ 0, & |x| < \tau. \end{cases}$$

Будем говорить, что к оператору A применим проекционный метод по системе проекторов P_τ при $\tau \to 0$ (и обозначать $A \in \Pi\{P_\tau\}$), если оператор A обратим, существует такое $\tau_0 \in (0,1)$, что при $0 < \tau < \tau_0$ операторы $P_\tau A P_\tau$ обратимы в пространстве $P_\tau L_p(\mathbb{B}_n)$, и операторы $(P_\tau A P_\tau)^{-1} P_\tau$ сильно сходятся к A^{-1} при $\tau \to 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы $A \in \Pi\{P_\tau\}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$.*

S. Akturk (Fatih University, Turkey)
semathakturk@hotmail.com

POSITIVITY OF ONE-DIMENSIONAL DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE OPERATORS IN THE HALF-LINE AND THEIR APPLICATIONS

The present study is joint with A. Ashyralyev (Fatih university).

The present study, the positivity of one-dimensional differential and difference operators in the half-line are considered. The structure of fractional spaces generated by differential and difference operators in the half-line is investigated. The equivalence of the norms of these fractional spaces and Holder spaces is established.

In applications, theorems on the well-posedness of the boundary value problems for elliptic equations in a Holder space are established. Moreover, stability, almost coercive stability, and coercive stability estimates for the solution of difference schemes for the approximate solution of these problems are presented.

А. Б. Антоневич (Белорусский госуниверситет, Беларусь и Университет в Белостоке, Польша) ,
Е. В. Пантлеева (Брестский госуниверситет, Беларусь)
antonevich@bsu.by

О КОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ

В работе рассматриваются линейные дифференциально-операторные уравнения вида

$$Lu(t) \equiv \frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t),$$

где u есть функция со значениями в заданном банаховом пространстве Y, $A(t)$ – ограниченная по норме сильно непрерывная функция переменной t со значениями в пространстве $LB(Y)$ линейных ограниченных операторов в Y. Рассматриваются решения, принадлежащие заданному банахову пространству F, состоящем из функций со значениями в Y. Типичным примером является случай, когда F есть пространство $C_b(\mathbb{R}_+, Y)$ ограниченных непрерывных функций со значениями в Y, снабженное sup- нормой.

Один из основных вопросов, рассматриваемых в теории дифференциальных уравнений, заключается в описании *корректных задач* для данного уравнения, т.е. задании таких дополнительных условий на функцию u , при выполнении которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от правой части.

Задача Коши с нулевым начальным условием в общем случае некорректна. В связи с этим подробно исследовались модификации задачи Коши: вместо условия $u(0) = 0$ рассматривается более слабое условие $u(0) \in E$, где E есть заданное замкнутое векторное подпространство в Y (см. [1]). Модифицированная задачи Коши корректна, если для уравнения имеет место дифференциальная дихотомия.

В работе показано, что существование дихотомии не является необходимым условием для существования корректных задач других видов. Введено более слабое, чем дихотомия, свойство, названное *нечеткой дихотомией*, которое обеспечивает существование корректных краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. УМН. 2013. Т.68. №1. С. 77–128.

Э. Ф. Ахмерова (БашГУ, Россия)
eakhmerova@yandex.ru

О ФОРМУЛЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассматривается самосопряженный оператор H^0 в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ с дискретным спектром $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots)$ и соответствующими собственными проекторами P_k, причем $\inf\limits_{k\geq 1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k) > 0$.

Пусть $R^0(\lambda)$ резольвента оператора H^0, а возмущение V таково, что оператор $VR^0(\lambda)$ компактен $\forall\lambda \notin \sigma\left(H^0\right)$ и $\|VR^0(\lambda)\| < 1$. Тогда, согласно рассуждениям работы [1], спектр оператора $H = H^0 + V$ определяется из уравнения

$$\lambda = \lambda_n + P_nVP_n - P_nVR_n(\lambda)VP_n, \tag{1}$$

где $R_n(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[R_n^0(\lambda)V\right]^k R_n^0(\lambda)$, $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - P_n(\lambda_n-\lambda)^{-1}$.

Из уравнения (1) легко следует представление

$$\nu_n\lambda_n + \mathrm{sp}P_nVP_n - \gamma_{\nu_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\nu_n}\mu_k^{(n)}, \tag{2}$$

где $\mu_k^{(n)}$ – собственные значения оператора H, лежащие в окрестности λ_n $\mathrm{sp}P_nVP_n = \sum\limits_{k=1}^{\nu_n}\left(V\varphi_k^{(n)},\varphi_k^{(n)}\right)$, $\varphi_k^{(n)}$ – собственные функции, соответствующие собственному числу λ_n кратности ν_n, $\gamma_{\nu_n}^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(VR_n(\mu_k^{(n)})V\varphi_k^{(n)},\varphi_k^{(n)}\right)$.

Если возмущение V таково, что последовательность $\sum\limits_{n=1}^{m}\gamma_{\nu_n}^{(n)} \to 0$ при $m\to\infty$, то из формулы (2) непосредственно следует справедливость формулы регуляризованного следа оператора H

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)} - \nu_n\lambda_n - \sum_{k=1}^{\nu_n}\left(V\varphi_k^{(n)},\varphi_k^{(n)}\right)\right) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахмерова Э. Ф. Муртазин Х. Х.* Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов. Докл. РАН. 2003.Т. 388, № 6. С. 731-733.

И. В. Баран (Таврическая академия КФУ имени В. И. Вернадского, Россия)

matemain@email.ru

СИММЕТРИЧЕСКИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФРЕШЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В докладе рассмотрено обобщение на симметрический случай введенного И. В. Орловым понятия компактного субдифференциала (K–субдифференциала), путем замены в основной конструкции обычного разностного отношения симметрическим разностным отношением.

Построена развитая теория симметрических дифференциалов Фреше и симметрических K–субдифференциалов Фреше первого и высших порядков для случаев скалярного и векторного аргументов. Найдены простые достаточные условия симметрической K–субдифференцируемости. Рассмотрены некоторые приложения к рядам Фурье и вариационным функционалам.

При дополнительном условии абсолютной непрерывности удалось получить теорему о среднем для симметрического случая. Это позволило распространить на данный случай и асимптотическую форму полной формулы Тейлора, с несколько ослабленной оценкой. В работе эти результаты обобщаются как на случай сильных симметрических дифференциалов, так и на случай сильных симметрических K–субдифференциалов.

Получено точное описание высших симметрических K–субдифференциалов от функционалов. Важным моментом является введение понятия симметрической субгладкости. Это понятие позволяет в приложениях сводить ситуацию к нижним и верхним симметрическим производным, что и продемонстрировано на примере вариационных функционалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ. Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 53. С. 64–132.

2. *Баран И. В.* Теорема о среднем и формула Тейлора для симметрических производных и симметрических K–субдифференциалов. Ученые записки Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. 2014. Т. 27(66), №1. С. 3–20.

3. *Орлов И. В., Баран И. В.* Введение в сублинейный анализ — 2. Симметрический вариант. Современная математика. Фундаментальные направления. 2015 (в печати).

Э. Г Бахтигареева(РУДН, Россия)
salykai@yandex.ru

МИНИМАЛЬНОЕ ПЕРЕСТАНОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОЕ ПРОСТРАНСТВО, СОДЕРЖАЩЕЕ КОНУС ДВОЯКО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $T_0 \in (0, \infty]$, M -множество вещественнозначных измеримых функций, $M_+ = \{f \in M : f \geq 0\}$, f^*- убывающая перестановка функции.

Теорема 1. *Пусть* $\rho : M_+ \to [0,\infty]$*-перестановочно-инвариантная квазинорма:*

$$f, g \in M_+(0,T_0); \quad f^* \le g^* \Rightarrow \rho(f) \le \rho(g);$$
$$Y = Y(0,T_0) = \{f \in M: \quad \|f\|_Y = \rho(|f|) < \infty\} -$$

порожденное ею перестановочно-инвариантное пространство (см. [1]).

$$\textit{Пусть} \quad K_0 = \{h \in Y: \quad 0 \le h(t)\downarrow; \quad th(t)\uparrow\}, \quad \rho_{K_0}(h) := \rho(h).$$

Введем оператор $A_0 : M \to M_+$ *(норма по* τ*):*

$$(A_0f)(t) = \left\|\frac{\tau f^*(\tau)}{t+\tau}\right\|_{L_\infty(0,T_0)}, \quad t \in (0,T_0).$$

Тогда, отображение

$$\rho_0(f) := \rho(A_0f), f \in M_+,$$

есть перестановочно-инвариантная квазинорма, а порожденное ею пространство

$$X_0 = \left\{f \in M : \|f\|_{X_0} = \rho_0(|f|) < \infty\right\}$$

есть минимальное перестановочно- инвариантное пространство, содержащее конус K_0 *(см. [2]).*

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда(проект № 14-11-00443).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of Operators. — New York: Academic Press, 1988.

2. *Бахтигареева Э. Г., Гольдман М. Л., Забрейко П. П.* Оптимальное восстановление обобщенного банахова функционального пространства по конусу неотрицательных функций. Вестник ТГУ. 2014. Т. 19. Вып. 2. С. 316-330.

Э. Г Бахтигареева, М. Л. Гольдман (РУДН, Россия)
salykai@yandex.ru, seulydia@yandex.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ ИДЕАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО, СОДЕРЖАЩЕЕ ЗАДАННЫЙ КОНУС, СОГЛАСОВАННЫЙ С ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА

Теорема 1. *1. Пусть* (A,μ) *- пространство с неотрицательной* σ *- конечной мерой* μ, $M = M(A,\mu)$ *-множество вещественнозначных измеримых функций,* $M_+ = \{f \in M : f \ge 0\}$, ρ*-идеальная квазинорма (кратко: ИКН);* $Y = Y(A,\mu)$ *есть порожденное ею идеальное пространство (кратко: ИП, см. [1]). Пусть в* M_+ *введено отношение порядка, причем* ρ *согласована с ним, т.е. выполнено*

условие: $f \prec g \Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g), \quad f, g \in M_+$.
Пусть $A_0 : M \longmapsto M_+$*- оператор со следующими свойствами:*

$$(A1). \quad \exists c_0 \in \mathbb{R}_+ : |f| \prec c_0 A_0 f, \forall f \in M.$$

$$(A2). \quad A_0(\alpha f) = \alpha A_0(f), \alpha \geq 0, \forall f \in M,$$

$$\exists C_1 \in [1, \infty] : \quad A_0(f+g) \prec C_1[A_0(f) + A_0(g)], \forall f, g \in M;$$

$$(A3). \quad |f| \prec |g| \Rightarrow A_0(f) \prec A_0(g).$$

$$(A4). \quad 0 \leq f_n \uparrow f \quad \mu\text{-п.в.} \Rightarrow A_0 f_n \uparrow A_0 f \quad \mu\text{-п.в.}$$

Тогда, отображение $\rho_0(f) := \rho(A_0 f), f \in M_+$, *есть ИКН, а порожденное ею пространство* $X_0 = X_0(A, \mu) = \left\{f \in M : \|f\|_{X_0} = \rho_0(|f|) < \infty\right\}$ *есть ИП, причем квазинорма* ρ_0 *согласована с отношением порядка и справедливо вложение* $X_0 \subset Y$.
2. Пусть еще K_0 *-конус неотрицательных функций из* Y, *снабженный функционалом* $\rho_{K_0} = \rho$, *и выполнены условия согласования конуса* K_0 *с оператором* A_0*:*

$$(A5). \quad \exists \tilde{c}_0 \in \mathbb{R}_+ : h \in K_0 \Rightarrow \rho(A_0 h) \leq \tilde{c}_0 \rho(h); \quad (A6). \quad A_0(X_0) \subset K_0.$$

Тогда X_0 *есть минимальное ИП с квазинормой, согласованной с отношением порядка, которое содержит* K_0.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда(проект № 14-11-00443).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978.

Н. П. Бондаренко (Саратовский государственный университет, Россия)
BondarenkoNP@info.sgu.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ ПО МАТРИЦЕ ВЕЙЛЯ

Исследуется обратная задача для матричного уравнения Штурма-Лиувилля на полуоси:

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda y, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0,$$

где $Y = [y_k(x)]_{k=1}^m$ — вектор-функция, λ — спектральный параметр, $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=1}^m$ — комплекснозначная матричная функция, $Q_{jk} \in L(0, \infty)$, $h = [h_{jk}]_{j,k=1}^m$ — $m \times m$ матрица.

Обозначим $\rho = \sqrt{\lambda}$, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$. Пусть $\Phi(x, \lambda)$ — матричное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям $U(\Phi) = I_m$, $\Phi(x, \lambda) = O(\exp(i\rho x))$, $x \to \infty$, $\rho \in \{\rho\colon \operatorname{Im}\rho \geq 0,\ \rho \neq 0\}$, где I_m — единичная матрица. Матричная функция $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$ называется *матрицей Вейля*.

Изучаемая **обратная задача** состоит в восстановлении потенциала Q и коэффициента h по заданном матрице Вейля $M(\lambda)$. Отметим, что эта задача отличается от обратной задачи рассеяния (см. [1]). Решение обратной задачи по матрице Вейля было получено в работе [2] методом спектральных отображений. Опираясь на это конструктивное решение, мы получили необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи (см. [3]). Отдельно исследован самосопряженный случай и дана характеризация спектральных данных в этом случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1436.2014К) и РФФИ (проекты 13-01-00134, 14-01-31042 и 15-01-04864).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача теории рассеяния. Харьков, ХГУ, 1960.
2. *Freiling G., Yurko V.* An inverse problem for the non-selfadjoint matrix Sturm-Liouville equation on the half-line. J. Inv. Ill-Posed Problems. 2007. Vol. 1. Pp. 785–798.
3. *Bondarenko N.* An inverse spectral problem for the matrix Sturm-Liouville operator on the half-line. Boundary Value Problems. 2015:15.

Е. В. Бурцева (Ростов-на-Дону)
evg-burceva@yandex.ru

АЛГОРИТМ ФАКТОРИЗАЦИИ СИМВОЛА СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА СОСТАВНОМ КОНТУРЕ

Составной контур $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Gamma_j$ является объединением n простых замкнутых гладких непересекающихся ориентированных кривых Γ_j.

На этом контуре в пространстве $L_p(\Gamma)$ изучается оператор краевой задачи Римана

$$R(a) = P_\Gamma^+ + aP_\Gamma^-,\ \text{где}\ P_\Gamma^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S_\Gamma),$$

с символом $a(z) = (a_1(z_1), a_2(z_2), ..., a_n(z_n))$, где $a_j(z_j)$ принадлежит распадающейся подалгебре алгебры непрерывных функций на контуре Γ_j, $j \in \overline{1, n}$.

Общая теория обратимости сингулярного интегрального оператора (СИО) $R(a)$ построена в [1]. В работах [2] и [3] приведена конструктивная теория обратимости СИО частного вида, опирающаяся на инволютивность оператора S_Γ.

Будем говорить ([3]), что контур Γ называется «допустимой конфигурацией кривых», если он разбивает комплексную плоскость на две области D^+ и D^-, где область D^- расположена справа от Γ и содержит ∞, а область $D^+ = C \setminus D^-$ расположена слева от Γ.

В настоящем докладе предлагается общий алгоритм факторизации символа СИО на контуре Γ и приводится содержательный пример.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973, 426 с.

2. *Дыбин В.Б., Бурцева Е.В.* Оператор краевой задачи Римана на системе концентрических окружностей и его приложения к одному классу систем уравнений в дискретных свёртках // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2012. № 2. С. 109–117.

3. *Дыбин В.Б., Бурцева Е.В.* Несколько замечаний о сингулярных интегральных операторах на контуре, состоящем из конечного числа окружностей // Международный конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-III», г. Ростов-на-Дону, 2-6 июня 2013 г., тезисы докладов, С. 19.

Б. Г.Вакулов (Ростов-на-Дону)
bvak1961@bk.ru

ОПЕРАТОРЫ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С КВАЗИРАДИАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПО $\mathbb{R}^n$ В ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА С ВЕСАМИ ИЗ КЛАССОВ ТИПА ЗИГМУНДА–БАРИ–СТЕЧКИНА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Для операторов типа потенциала комплексного порядка с квазирадиальными характеристиками по $\mathbb{R}^n$ в эллиптическом случае

$$K_g^\alpha f = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\xi,\eta) f(\xi) d\xi}{|\xi-\eta|^{n-\alpha}},\ \eta \in \mathbb{R}^n,\ 0 < \Re\alpha < n,$$

$$g(\xi,\eta) = g\left(\frac{|\xi-\eta|}{\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2}}\right)$$

получены следующие изоморфизмы

I. Оператор K_g^α изоморфно отображает пространство $H_0^\omega(\mathbb{R}^n,\rho_1)$ на пространство $H_0^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}^n,\rho_2)$, где $\rho_1(\xi) = \phi\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)$, $\rho_2(\xi) = \phi\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)(1+|\xi|^2)^{-\alpha}$, а пространство $H_\infty^\omega(\mathbb{R}^n,\rho_3)$ на пространство $H_\infty^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}^n,\rho_4)$, где $\rho_3(\xi) = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)$, $\rho_4(\xi) = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)(1+|\xi|^2)^{-\alpha}$, где $\omega_\alpha(t) = t^{\Re\alpha}\omega_(t)$.

II. Оператор K_g^α изоморфно отображает пространство $H_{0,\infty}^\omega(\mathbb{R}^n,\rho_5)$ на пространство $H_{0,\infty}^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}^n,\rho_6)$, где $\rho_5(\xi) = \phi_1\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)\phi_2\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)$,
$\rho_6(\xi) = \phi_1\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)\phi_2\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)(1+|\xi|^2)^{-\alpha}$.

Здесь весовые функции ϕ, ϕ_1, ϕ_2 и характеристики обобщённых пространств Гёльдера ω удовлетворяют некоторым условиям типа Зигмунда–Бари–Стечкина, естественным образом обобщающим условия на показатели степенных весов, привязанных к нулю и бесконечности, которые были получены автором ранее в [1]. Условие эллиптичности предполагает отличность от нуля символов-моментов, построенных по характеристикам потенциалов. Доказательство этих изоморфизмов основано на изоморфизмах, полученных для сферических аналогов рассматриваемых потенциалов в эллиптическом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вакулов Б. Г.* О действии оператора Риссова потенциала комплексного порядка по $\mathbb{R}^n$ в обобщённых пространствах Гёльдера со степенными весами. Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2001. № 4, с. 47-49.

А. В. Гиль, В. А. Ногин (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, СВЯЗАННОГО С ОПЕРАТОРОМ ШРЕДИНГЕРА.

Исследуются комплексные степени дифференциального оператора с комплексными коэффициентами в главной части:

$$S_{\overline{\lambda}} = m^2 I + ib\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}(1 - i\lambda_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad m > 0 \tag{1}$$

в $\mathbb{R}^{n+1}$, где $m > 0$, $b > 0$ $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_k > 0$, $1 \le k \le n$.

Комплексные степени оператора (1) с отрицательными вещественными частями на функциях $\varphi(x) \in \Phi(\mathbb{R}^{n+1})$, где $\Phi(\mathbb{R}^{n+1})$ - пространство Лизоркина, определяются в образах Фурье равенством

$$(\widehat{S_{\overline{\lambda}}^{-\alpha/2}\varphi})(\xi) = \left(m^2 + b\xi_{n+1} - |\xi'|^2 + i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^2\right)^{-\alpha/2}\widehat{\varphi}(x). \tag{2}$$

Здесь $\xi = (\xi', \xi_n + 1)$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Получены интегральные представления комплексных степеней (2) в виде интегралов типа потенциала с нестандартной метрикой. Соответствующие дробные потенциалы имеют вид:

$$(H_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} h_{\overline{\lambda}}^{\alpha}(y)\varphi(x-y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^{n+1},$$

где

$$h_{\overline{\lambda}}^{\alpha}(y) = d_{n,\alpha}(\overline{\lambda})(y_{n+1})_{+}^{\frac{\alpha-n-1}{2}}\exp\left\{i\frac{m^2}{b}y_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{b(\lambda_k - i)y_k^2}{4(1+\lambda_k^2)y_{n+1}}\right\},$$

$$d_{n,\alpha}(\overline{\lambda}) = \frac{b^{(n-\alpha)/2}\exp(\frac{-\alpha-n}{4}\pi i)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-i\lambda_k}}.$$

Показана ограниченность оператора $H^{\alpha}_{\overline{\lambda}}$ из L_p в L_q при $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < n+2$, $1 \le p < \frac{n+2}{\mathrm{Re}\,\alpha}$, $q = \frac{(n+2)p}{n+2-p\,\mathrm{Re}\,\alpha}$.

В рамках метода АОО построено обращение потенциалов $H_{\overline{\lambda}}\varphi$, $\varphi \in L_p$, и дано описание образа $H_{\overline{\lambda}}(L_p)$ в терминах обращающих конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиль А. В., Ногин В. А.* Описание функциональных пространств, связанных с обобщенными операторами Шредингера. Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2014. № 1. С. 10-13.

2. *Гиль А. В., Ногин В. А.* Комплексные степени одного дифференциального оператора в Lp -пространствах. Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2014. № 5. С. 5-10.

М. Н. Гуров, В. А. Ногин
(ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Россия)
MGurov@inbox.ru

ОБРАЩЕНИЕ И ОПИСАНИЕ ОБРАЗОВ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЯДРАМИ И СИМВОЛАМИ

Изучаются операторы свертки вида

$$(K^{\alpha,\beta}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_{\alpha,\beta}(t)\varphi(x-t)dt \tag{1}$$

с ядрами

$$k_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} \theta(|t|)\omega(t')(1-|t|^2+i0)^{\beta-1},\ 1-\delta \leqslant |t| \leqslant 1+\delta,\ 0<\beta<1; \\ \theta_1(|t|)\omega_1(t')e^{i|t|}|t|^{\alpha-n},\ |t| \geqslant N,\ 0 < Re\alpha < n. \end{cases}$$

Здесь $\delta \in (0;1)$, $N > 1+\delta$. Функция $\theta(r)$ предполагается бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{R}^1_+$, $\theta(1) \neq 0$. Предполагается также, что функция $\theta_1(r)$ принадлежит классу $C^{m,\gamma}(\dot{R}^1_+)$ гёльдеровских функций (см. [2], с. 261); $\omega(t')$ и $\omega_1(t')$ – однородные нулевой степени функции, бесконечно дифференцируемые в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

С помощью метода аппроксимативных обратных операторов (метод АОО) (см. [1]), строится обращение операторов (1) с плотностями из пространства L_p в неэллиптическом случае, когда $mes\{\xi : \widehat{k}_{\alpha,\beta}(\xi) = 0\} = 0$. Здесь $\widehat{k}_{\alpha,\beta}(\xi)$ – символ оператора (1). Обращение потенциала $K^{\alpha,\beta}\varphi$, $\varphi \in L_p$, строится в следующем виде:

$$H^{\alpha,\beta}f = \lim_{\varepsilon\to 0}^{(L_{p,\mu})} \lim_{\delta \to 0}^{(L^2)} h^{\alpha,\beta}_{\varepsilon,\delta} * f,\ \mu < -\frac{(n-1)p}{2},$$

где

$$h^{\alpha,\beta}_{\varepsilon,\delta}(t) = F^{-1}\left(\frac{\overline{\widehat{k}_{\alpha,\beta}(\xi)}(|\xi|^2-1)^{\ell}e^{-\varepsilon|\xi|^2}}{(|\widehat{k}_{\alpha,\beta}(\xi)|^2+i\delta)(|\xi|^2+(\varepsilon+i)^2)^{\ell}}\right)(t).$$

В рамках метода АОО описан образ $K^{\alpha,\beta}(L_p)$ оператора $K^{\alpha,\beta}$, в неэллиптическом случае, в терминах оператора $H^{\alpha,\beta}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nogin V. A., Samko S. G.* Method of approximating inverse operators and its applications to inversion of potential type integral transforms // Integral Transforms and Special Functions. — 1999. — Vol. 6. — P. 1 – 14.

2. *Samko S. G.* Hypersingular integrals and their applications. — London: Taylor and Frances. Internat. Series «Analytical Methods and Special Functions», 2002. — Vol. 5. — 376 p.

А. К. Дронов (Южный Федеральный Университет, Россия)
floberrr@mail.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВА ТРОЕК КОНУСОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СХОДЯЩИХСЯ К НУЛЮ, И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ ТЕОРИИ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Классическая теория интерполяции линейных операторов, действующих в банаховых парах, допускает обобщение на случай операторов, ограниченных на парах конусов. В этой связи целесообразным оказывается введение понятия интерполяционных троек конусов, вложенных в банаховы пространства, по аналогии с интерполяционными тройками банаховых пространств. При этом для построения интерполяционных троек конусов (Q_0, Q_1, Q) удобно пользоваться стандартной конструкцией, основанной на использовании K–функционала Петре. Данный подход позволяет сформулировать достаточное условие интерполяционности тройки конусов и построить ряд примеров, а также получить следующий результат.

Теорема. *Пусть* $E_i = c_0(a_i), F_i = c_0(b_i) (i = 0,1)$ *и* $E = c_0(a)$, $F = c_0(b)$, *причем* $E_1 \subset E \subset E_0, F_1 \subset F \subset F_0$, *и банахова тройка* (E_0, E_1, E) *обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F). *Пусть* $\mathcal{A}$ — *множество конусов в* ω^+ *такое, что каждый конус* $Q \in \mathcal{A}$ *является нижней полурешеткой в* ω, *множество* $Q \cap E_1^+$ *образует тотальный конус в* ω *и* $Q \cap E_1^{++} \neq \{\emptyset\}$. *Тогда семейство троек конусов*

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Данный результат находит применении при исследовании вопроса о существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из классов Драгилева (d_1) и (d_2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М., Мир, 1980.

2. *Каплицкий В. М., Дронов А. К.* К теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей. Зап. научн. сем. ПОМИ 2014. Т. 424, Зап. научн. сем. ПОМИ, СПб., С. 154–178.

В. Б. Дыбин, В. С. Ермаков (ЮФУ, Россия)
vladimir-dybin@yandex.ru, Inocanoan@yandex.ru

УРАВНЕНИЕ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ НА ОСИ И ПОЛУОСИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, СУММИРУЕМЫХ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ ВЕСАМИ

Рассматриваются операторы $C(A),\ W(A),\ \breve{W}(A):$

$$C(A)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\xi_k V_h^k,$$

$$W(A)=P_+C(A)P_+,\ \breve{W}(A)=P_-C(A)P_-,$$

в пространствах функций $\{a,b\}_p,\ P_\pm\{a,b\}_p, 1\le p\le\infty$, суммируемых на $\mathbb{R}$ в степени p с показательными весами. Причём $a,b\in\mathbb{R}$, $\xi_k\in\mathbb{C}$, операторы сдвига $\left(V_h^{\pm1}f\right)(x)=f(x\mp h)$, $h>0$, $P_\pm$ - проекторы на положительную и отрицательную полуоси соответственно.

Символом данных операторов является функция

$$A(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\xi_k e^{izhk},$$

определённая на множестве $\overline{\Pi}_{\widehat{a},\widehat{b}}=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z\in\left[\widehat{a};\widehat{b}\right]\right\}$, где $\widehat{a}=\min(a,b)$, $\widehat{b}=\max(a,b)$, аналитическая в $\Pi_{\widehat{a},\widehat{b}}$ и обладающая непрерывными предельными значениями на $\partial\Pi_{\widehat{a},\widehat{b}}$, а также ее ограничения на прямые $R+ia$ и $R+ib$. Данная функция имеет почти периодический разрыв на бесконечности и бесконечный индекс, а операторы обладают бесконечномерными дефектными подпространствами.

Для всех операторов приведены условия односторонней обратимости в соответствующих пространствах $\{a,b\}_p,\ P_\pm\{a,b\}_p$, построена теория, включающая конструкции обратных операторов соответствующих типов и описание дефектных подпространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.:«Наука». 1971.

2. *Дыбин В. Б., Бредихин И. Н.* Об одном разностном уравнении в пространствах $\{a,b\}_p, 1 \le p \le \infty$. - ЮФУ, Ростов-на-Дону, Деп. в ВИНИТИ. 2010. № 357-В2010. - С. 17.

3. *Dybin V. B., Grudsky S. M.* Introduction to the Theory of Toeplitz Operators with Infinite Index. Birkhauser Verlag AG. 2002.

E. V. Evseeva (University of Reims, France)
evseeva.elena.1989@gmail.com

POISSON AND FOURIER TRANSFORMS FOR TENSOR PRODUCTS FOR REPRESENTATIONS OF $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Any irreducible finite-dimensional representation T_k of the group $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ with the highest weight $k \in (1/2)\mathbb{N}$ acts on the space V_k of polynomials $\varphi(x)$ in x of degree $\leqslant 2k$ (so that $\dim V_k = 2k+1$) by

$$(T_k(g)\,\varphi)\,(x) = \varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{2k}, \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

The tensor product $T_l \otimes T_m$ decomposes into the direct multiplicity free sum of T_k where $k \in \{|r|,\ |r|+1,\ \ldots, l+m-1,\ l+m\}$, $r = m-l$, it is a classical result. We write explicitly intertwining operators $M_k : V_k \to V_l \otimes V_m$ and $F_k : V_l \otimes V_m \to V_k$, we call them Poisson and Fourier transforms, respectively. We use the following notation for "generalized powers": $a^{[s]} = a\,(a+1)\ldots(a+s-1)$, here a is a number or an operator, $s \in \{0,1,2,\ldots\}$. Denote $j = l+m-k$.

Let φ be a polynomial in V_k. Then

$$(M_k\,\varphi)\,(x,y) = (y-x)^j\left\{(y-x)\frac{d}{dx} + k - r + 1\right\}^{[k+r]}\varphi(x)\,.$$

Let $f(x,y)$ be a polynomial in $V_l \otimes V_m$. Then

$$(F_k f)\,(t) = c_k \sum_{\alpha=0}^{j} (-1)^{j-\alpha}\binom{2l-j+\alpha}{\alpha}\binom{2m-\alpha}{j-\alpha}\frac{\partial^j f}{\partial x^{j-\alpha}\,\partial y^{\alpha}}\,(t,t)\,.$$

where $c_k^{-1} = (k-r+1)^{[k+r]}\,(2k+2)^{[j]}$. We normalize F_k such that $F_k M_k = \mathrm{id}$.

We essentially use that $T_l \otimes T_m$ is equivalent to a representation of G in functions on the hyperboloid G/H of one sheet in $\mathbb{R}^3$ induced by a character $\mathrm{diag}\,\{\lambda^{-1},\lambda\} \mapsto \lambda^{-2r}$ of the diagonal subgroup H.

Supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR): grant 13-01-00952-a, and Russian Science Support Foundation.

REFERENCES

1. *Molchanov V. F., Sarycheva E. V.* On tensor products of representations of three-dimensional Lorentz group. Vestnik Tambov University. Ser.: Est. techn. nauki, 2014, vol. 19, issue 2, 491–495.

Н.А. Ерзакова (МГТУ ГА, Россия)
naerzakova@gmail.com

ОБ ОПЕРАТОРАХ, СИЛЬНО УПЛОТНЯЮЩИХ НА СФЕРАХ И ШАРАХ

Пусть E - банахово пространство, $B_\rho = \{u \in E : \|u\| \leqslant \rho\}$, $S_\rho = \{u \in E : \|u\| = \rho\}$, а $\mathbb{R}_+$ - множество всех положительных вещественных чисел.

Пусть ψ - мера некомпактности, эквивалентная мере некомпактности Хаусдорфа.

Теорема 1. *Пусть для оператора $f\colon E \to E$ в точке u_1 существует непрерывная производная Фреше $f'(u_1)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(λ_1). $f'(u_1)$ *- вполне непрерывный оператор.*

(λ_2). $\exists \lambda\colon R_+ \to \mathbb{R}_+, \lim\limits_{r\to 0} \lambda(r) = 0 : \psi(f(u_1 + B_\rho)) \leqslant \lambda(r)\psi(B_\rho)$ *для некоторого* $r_1 > 0$ *и всех* $0 < \rho \leqslant r \leqslant r_1$.

(λ_3). $\exists \lambda\colon R_+ \to \mathbb{R}_+, \lim\limits_{r\to 0} \lambda(r) = 0 : \psi(f(u_1 + S_\rho)) \leqslant \lambda(r)\psi(S_\rho)$ *для некоторого* $r_1 > 0$ *и всех* $0 < \rho \leqslant r \leqslant r_1$.

Аналогично, пусть для оператора $f\colon E \to E$ существует непрерывная асимптотическая производная $f'(\infty)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

$(\tilde{\lambda}_1)$. $f'(\infty)$ *- вполне непрерывный оператор.*

$(\tilde{\lambda}_2)$. $\exists R_1 > 0, \exists \tilde{\lambda}\colon R_+ \to \mathbb{R}_+, \lim\limits_{r\to\infty} \tilde{\lambda}(r) = 0 : \psi(f(B_\rho \backslash B_r)) \leqslant \tilde{\lambda}(r)\psi(B_\rho)\ \forall\ \rho \geqslant r \geqslant R_1$.

$(\tilde{\lambda}_3)$. $\exists R_1 > 0, \exists \tilde{\lambda}\colon R_+ \to \mathbb{R}_+, \lim\limits_{r\to\infty} \tilde{\lambda}(r) = 0 : \psi(f(S_\rho)) \leqslant \tilde{\lambda}(r)\psi(S_\rho)\ \forall\ \rho \geqslant r \geqslant R_1$.

Классы операторов (λ_2) и (λ_3), вообще говоря нелинейных, включают операторы, определенные в [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1.*Erzakova N. A.* On locally condensing operators. Nonlinear Analysis: Theory, Methods, Applications. 2012.T. 75, № 8. C. 3552–3557.

С. А. Золотых, В. А. Стукопин (Ростов-на-Дону)
stukopin@mail.ru

О ГЕОМЕТРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СПЕКТРА

Важной является задача нахождения предельного спектра для различных классов тёплицевых матриц ([2], см. также [1]). Мы получаем формулы для числа компонент связности дополнения предельного спектра ленточной тёплицевой матрицы в терминах числа целых точек внутри выпуклого многогранника. Пусть $V \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраическое многообразие. Напомним, что $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash 0$ это группа ненулевых комплексных чисел относительно групповой операции – умножения комплексных чисел. Пусть отображение $Log : \mathbb{C}^r \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой $Log(z_1, \ldots, z_n) = (\log(|z_1|), \ldots, \log(|z_n|))$.

Амёба ([3]) алгебраического многообразия V это $A = Log(V) \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $a(z) = \sum a_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ – лорановский полином от двух переменных. Рассмотрим на плоскости множество точек с целыми координатами $Lat(a(z)) = \{(k_1, k_2) : a_{k_1,k_2} \neq 0\}$ – являющимися степенями мономов, входящих в заданный полином $a(z)$ с ненулевыми коэффициентами. Будем обозначать через $Con(a(z)) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k : 0 \leq \lambda_i \leq 1, x_i \in Lat(a(z))\}$ – выпуклую оболочку точек $Lat(a(z))$, $\Delta(a(z)) := Lat(a(z)) \bigcap \mathbb{Z}^2$. Пусть $a(z) = \sum_{k=-h}^{r} z^k$ – лорановский полином, являющийся символом последовательности тёплицевых матриц растущих размеров, $\sigma_L(a(z))$ – предельный спектр этой последовательности тёплицевых матриц, $b(z, \lambda) = a(z) - \lambda$. Обозначим через $Comp(a(z))$ – число компонент связности дополнения предельного спектра: $Comp(a(z)) := [\mathbb{C} \backslash \sigma_l(a(z))]$. Будем обозначать через $|X|$ – мощность множества X. Основной результат заметки следующая

Теорема. *Имеют место следующие оценки:*
1. $Comp(a(z)) \leq |\Delta(b(z, \lambda))|$.
2. Пусть $h = r = 1$. В этом случае число компонент связности $Comp(a(z))$ равно числу целочисленных точек лежащих в пересечении $|\Delta(b(z, \lambda))|$ и луча $z = \frac{\lambda}{2}$, то есть всегда равно 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bottcher A. C, Grudsky S. M.* Spectral properties of banded Toeplitz matrices. SIAM, 2005, 411.
2. *Schmidt P., Spitzer F.* The Teoplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial. - Math. Scand. – 1960. – V. 8. – P. 15 – 38.
3. *Mikhalkin G.* Amoebas of algebraic varieties. - math. arXiv: 0108225V1. — 2001.

О. А. Иванова (ЮФУ, Россия), С. Н. Мелихов (ЮФУ, ЮМИ, Россия)
neo_ivolga@mail.ru, *melih@math.rsu.ru*

ОБ ОПЕРАТОРЕ ТИПА ПОММЬЕ

В докладе пойдет речь об операторе типа Поммье D_{0,g_0}, определяемом следующим образом:

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - g_0(t) f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0) f(0), & t = 0. \end{cases}$$

Здесь функция f принадлежит некоторому локально выпуклому пространству E функций, аналитических в области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, непрерывно вложенному в пространство Фреше $A(\Omega)$ всех аналитических в Ω функций. Функция $g_0 \in E$ такова, что $g_0(0) = 1$. Оператор D_{0,g_0} линейно и непрерывно отображает E в себя.

Описаны коммутанты оператора D_{0,g_0} и исследованы его циклические элементы, т.е. функции $f \in E$, для которых множество $\{D^n_{0,g_0}(f)\}_{n=0}^{\infty}$ полно в E. Полученные общие результаты применены к конкретным пространствам E. В частности, доказана

Теорема. *Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *$f \in A(\Omega)$ не является циклическим элементом D_{0,g_0}.*

(ii) *Функции f и g_0 имеют общие нули в Ω или существует рациональная функция R такая, что $f = Rg_0$.*

Предыдущая теорема была доказана ранее Ю. С. Линчуком при предположении, что функция g_0 не обращается в 0 в Ω.

А. И. Иноземцев, А. С. Калитвин (ЛГПУ, Россия)
kalitvinas@mail.ru, inozemcev.a.i@gmail.com

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ПО НОРМЕ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$

Работа содержит достаточные условия равномерной непрерывности оператор-функции с многомерными частными интегралами

$$K(\varphi)x(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)x(s_\alpha)\, dS_\alpha$$

в пространстве $\mathcal{K}_r(L^p)$ $(1 < p < \infty)$ регулярных в L^p операторов с частными интегралами [1], где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $\alpha_j \in \{0, 1\}$ при $j = \overline{1, n}$, $t \in R^n$, $S_\alpha \subset \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, $dS_\alpha \subset \{d\tau_1, \dots, d\tau_n\}$, $D_\alpha = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]^{\alpha_j}$, k_α — измеримые по совокупности переменных функции.

Оператор-функция $K(\varphi)$ со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$ операторов с многомерными частными интегралами, действующих в $X = L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$, называется равномерно непрерывной или непрерывной по норме, если

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} \|K(\varphi) - K(\varphi_0)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Пусть $X_\alpha = L^1(D_\alpha)$, $L^p = L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$, а $L^p[X_\alpha]$ — пространства со смешанной нормой, состоящие из измеримых по совокупности переменных функций $x_\alpha(t, S_\alpha)$, для которых конечны нормы $\|\|x_\alpha(t, \cdot)\|_{X_\alpha}\|_{L^p}$. Следующая теорема содержит условия непрерывности по норме оператор-функции $K(\varphi)$ со значениями в $\mathcal{K}_r(L^p)$.

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Если:*

1. функция $\varphi \to k_{(0,0,\ldots,0)}(\varphi, t)$ *непрерывна как вектор-функция со значениями в* $L^\infty(D)$;

2. функции $\varphi \to k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ *непрерывна как вектор-функция со значениями в одном из пространств со смешанной нормой* $L^\infty[L^p[L^q]]$ *или* $L^\infty[L^q[L^p]]$, *где норма в* $L^p(D_\alpha)$, $L^q(D_\alpha)$, $L^\infty(D_{\bar\alpha})$ *вычисляется по* t_α, S_α, $t_{\bar\alpha}$, *соответственно,* $\bar\alpha = (\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_n)$ $(\bar\alpha_j = 1 - \alpha_j)$;

3. функция $\varphi \to k_{(1,1,\ldots,1)}(\varphi, t, \tau)$ *непрерывна как вектор-функция со значениями в* $L^p[L^q]$ *или* $L^q[L^p]$, *где норма в* $L^p(D)$ $(L^q(D))$ *вычисляется по переменным* t (τ), *то оператор-функция* $K(\varphi)$ *непрерывна по норме пространства* $\mathcal{K}_r(L^p)$.

Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 2014/351. НИР № 1815.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Калитвин А.С., Иноземцев А.И. Оператор-функции с многомерными частными интегралами // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. №25(196). Вып. 37. – С. 19-29.

Х. К. Ишкин (Башкирский государственный университет, Россия)
Ishkin62@mail.ru

ОПЕРАТОР ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим спектральную задачу

$$-v'' = \mu\rho(x)v, \ 0 < x < 1, \qquad (1)$$
$$v(0) = v(1) = 0, \qquad (2)$$

где (комплекснозначная) функция $\rho(x)$ непрерывна и не имеет нулей на $[0;1]$, что обеспечивает дискретность спектра. Пусть $\{\mu_k\}_1^\infty$ — собственные числа задачи (1) — (2), пронумерованные в порядке возрастания модулей, с учетом кратности. Если $\arg\ \rho(x) \equiv \alpha = \mathrm{const}$, то собственные числа μ_k лежат на одном луче, и при дополнительном условии гладкости ρ (скажем, $\rho' \in AC[0,1]$)

$$\mu_k \sim \left(\frac{\pi k}{\int_0^1 \sqrt{\rho}dx}\right)^2, \ k \to \infty. \qquad (3)$$

Известно [1], что формула (3) сохраняет силу и в случае $\arg\ \rho(x) \neq \mathrm{const}$, если функция ρ допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность G отрезка $[0,1]$, удовлетворяющую условиям: **L1)** $\rho(z) \neq 0\ \forall\ z \in G$; **L2)** точки 0 и 1 можно соединить некоторой кривой l, целиком лежащей в G и такой, что при движении точки z от 0 к 1 вдоль l аргумент функции $\int_0^z \sqrt{\rho(t)}dt$ постоянен.

Теорема 1. *Пусть существует некоторая окрестность G отрезка $[0,1]$, удовлетворяющая условиям: 1) функция $\rho(z)$ аналитична в G с конечным числом точек ветвления $z_1,\ldots,z_n$, вблизи которых имеет разложение*

$$\rho(z)=\sum_{r=0}^{\infty}c_{k,r}(z-z_k)^{\frac{-4m_k+r}{2m_k+1}},\ m_k\in\mathbb{N},\ c_{k,2j-1}=0,\ j=\overline{1,m_k+1};$$

2) на своей римановой поверхности S функция $\rho(z)$ не имеет нулей и в S существует кривая, удовлетворяющая условию L2). Тогда для спектра задачи (1) — (2) справедлива формула (3).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-01-01095 и Министерством образования и науки РФ (грант № 01201456408).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Langer R. E.* The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc. 1939. V.46. 151–190.

С. И. Кадченко (Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова, Россия)
kadchenko@masu.ru

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДЕННЫХ ВОЗМУЩЕННЫМИ САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

В работах [1], [2] был разработан численный метод вычисления собственных значений полуограниченных снизу дискретных операторов, который, был назван методом *регуляризованных следов* (РС). На основе построенной теории создан численный метод, позволяющий с высокой вычислительной эффективностью находить численные решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами заданными в сепарабельном гильбертовом пространстве. Рассмотрим спектральную задачу

$$\Big(T+P\Big)u=\mu u,$$

где T - дискретный полуограниченный снизу оператор, P - ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Допустим, что известны собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, которые занумерованы в порядке возрастания собственных значений λ_n по величине с учетом кратности. Обозначим через ν_n кратность собственного значения λ_n, а количество всех неравных друг другу собственных значений λ_n, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0}=0,5|\lambda_{n_0+1}+\lambda_{n_0}|$

с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Тогда количество собственных чисел оператора T лежащих в круге T_{n_0} равно $m_0 = \sum_{n=1}^{n_0} \nu_n$. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ - собственные значения оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Допустим, что для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n = \frac{2\|P\|}{|\lambda_{n+\nu_n}-\lambda_n|} < 1$. Известно, что в этом случае контур T_{n_0} содержит одинаковое количество собственных значений операторов T и $T+P$.

В этом случае собственные значения $\{\mu_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ вычисляются по формулам:

$$\mu_n = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \delta_n, \ n = \overline{1, m_0},$$

где $|\delta_n| \leq (2n-1)\rho_n \dfrac{q^2}{1-q}$, $q = \max\limits_{n \in N} q_n$.

Рассмотрим интегральное уравнение фредгольма первого рода

$$Ap \equiv \int_a^b K(x,s)p(s)ds = f(x), \quad c \leq x \leq d, \tag{1}$$

где функции $f(x)$ и $K(x,s)$ такие, что

$$f(x_n) = \mu_n - \lambda_n - \delta_n, \quad K(x_n, s) = v_n^2(s), \ c \leq x_n \leq d, \ n = \overline{1, m_0}.$$

Пусть ядро интегрального уравнения (1) $K(x,s)$ непрерывно и замкнуто в квадрате $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, а функции $p(s) \in W_2^1[a,b]$ и $f(x) \in L_2[c,d]$.

Задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (1) является некорректно поставленной. Ее приближенное решение может быть найдено с помощью метода регуляризации Н. А. Тихонова. Численное решение уравнения (1) будет определять значения функции $p(s)$ в узловых точках s_i, $i = \overline{1, I}$, $a = s_1 < s_2 < \dots < s_I = b$. Число узловых точек I можно выбрать достаточно большим, чтобы получить хорошую точность при интерполяции функции $p(s)$.

Метод был проверен на обратных задачах для операторов типа Штурма-Лиувилля. Результаты многочисленных расчетов показали его высокую вычислительную эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубровский, В. В.* Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // ДАН России. 2001. Т. 380, № 2. С.160–163.

2. *Кадченко, С. И.* Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов / С. И. Кадченко, Л. С. Рязанова // Вести. Юж-Урал. гос. ун-та. Серия "Математическое моделирование и программирование". 2011. № 17 (234), вып. 8. С. 46–51.

A. G. Kamalyan
(Yerevan State University, Institute of Mathematics NAS of RA, Armenia)
kamalyan_armen@yahoo.com

A METHOD OF FACTORIZATION OF MATRIX FUNCTIONS

Let G be an $n \times n$ matrix function defined on a closed curve Γ. A family of Teoplitz operators with symbols $t^{-j}G$, $t \in \mathbb{Z}$ is considered and using the structural properties of that operators the concept of partial indices n-tuple of G consisting of the $\{-\infty, \mathbb{Z}, +\infty\}$ is introduced. In the case when all partial indices are from $\mathbb{Z}$, matrix function G admits $G_- \bigwedge G_+^{-1}$ in which G_+ and G_- are boundary values on Γ of a matrix functions analytic and invertible in the interior $\mathcal{D}_+$ (resp., exterior $\mathcal{D}_-$) of Γ under some additional conditions on their growth when approaching the boundary. Note that $\Lambda(t)$ is diagonal, with the diagonal entries of the form $(t - z_0)^{k_j}$, where z_0 is an arbitrary fixed point of $\mathcal{D}_+$, and k_j is partial indices of G.

If G admits the standard factorization, then above-mentional representation, is the factorization of G.

Proposed construction allows to build explicit factorization for some classes of matrix functions. Some applications in theory of integral equations are discussed.

В. М. Каплицкий (ЮФУ, Россия)
kaplitsky@donpac.ru

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭРГОДИЧНОСТИ СЕМЕЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ПРОЦЕССА УСТАНОВЛЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Одним из основных постулатов классической статистической механики является следующее допущение: если рассматриваемая динамическая система является макроскопической системой, изолированной от внешних влияний и заключенной в некотором конечном макроскопическом объеме V, то наблюдаемые значения макроскопических динамических величин стремятся при $t \to \infty$ к постоянным значениям, представляемым средними этих величин, взятыми по равновесному распределению Гиббса (см.[1]). Требуемое свойство средних значений динамических величин строго доказать не удалось даже для систем с модельным классическим гамильтонианом системы частиц с центральным взаимодействием. Исключение составляет случай системы невзаимодействующих осцилляторов слабо взаимодействующих с термостатом, рассмотренный Н.Н.Боголюбовым. Как известно, попытки обоснования приведенного выше постулата привели к понятию эргодичности динамической системы и к анализу свойства перемещивания. В статистической механике, как правило, изучаются обьемные свойства макроскопических систем, а поэтому во всех сотношениях совершают предельный переход, считая, что при $N \to \infty$ граничная поверхность бесконечно расширяется ($V \to \infty$), а плотность числа частиц на единицу обьема остается постоянной: $\frac{N}{V} = n$. В связи с этим в [1] (см. также [2]) отмечается, что для обоснования статистической механики совершенно необязательно наличие свойства перемешивания при любых конечных N, V. В работе будет дано определение более слабого свойства больших систем, которое удобно рассматривать как некоторую асимтотическую эргодичность семейства динамических систем при $N \to \infty$ и будет показано как это более слабое свойство связано со стремлением к равновесию решений уравнений для предельных s- частичных функций распределения (уравнений ББГКИ) при $t \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н.* Избранные университетские лекции. М.: Издательство Моск.ун-та, 2009.

2. *Мартынов Г. А.* Классическая статистическая механика. Теория жидкостей. ООО Издательский Дом "Интеллект". 2011.

С. В. Кисляков (ПОМИ РАН, Россия)
skis@pdmi.ras.ru

ИЗОМОРФНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть $\{T_1, \ldots, T_l\}$ — набор дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на торе $\mathbb{T}^n$. Рассмотрим банахово пространство X функций f на торе, для которых все функции $T_j f$, $j = 1, \ldots, l$, непрерывны. Будем интересоваться вопросом о том, можно ли вложить X в некоторое пространство $C(K)$ в качестве дополняемого подпространства. Основной результат состоит в следующем. Зафиксируем некий "шаблон смешанной однородности" и выделим старшие однородные части (относительно выбранного шаблона) $\{\tau_1, \ldots, \tau_l\}$ из исходного набора операторов $\{T_1, \ldots, T_l\}$. Пусть N — размерность линейного пространства, порожденного набором $\{\tau_1, \ldots, \tau_l\}$. Если $N \geqslant 2$, то X не изоморфно никакому дополняемому подпространству пространства $C(K)$.

Доказательство основано на новой теореме вложения (типа Соболевской) для векторных полей. Ее частные случаи имеют классический вид неравенств для производных различных порядков, однако общий случай формулируется в несколько иных терминах.

Доклад основан на совместной работе автора с Д. В. Максимовым и Д. М. Столяровым.

С. Б. Климентов, З. Д. Аль Нафие (Ростов-на-Дону)
sklimentov@pochta.ru, zahirmath20_ru@yahoo.com

О ПАРАКОМПАКТНОСТИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В докладе излагается критерий паракомпактности бесконечномерного хаусдорфова многообразия M со счётной базой, моделируемого в линейном топологическом пространстве L. Установлено, что для паракомпактности необходимо и достаточно, чтобы пространство моделей L было регулярно. Доказывается достаточное условие существования гладкого разбиения единицы на гладком банаховом хаусдорфовом многообразии со счётной базой. Демонстрируется, что это условие выполнено не всегда.

Теорема 1. *Многообразие M паракомпактно тогда и только тогда, когда пространство моделей L регулярно (то есть, является T_3– пространством).*

Теорема 2. *Пусть M — дифференцируемое многообразие класса $C^n, n = 1, 2, ..., \infty$, моделируемое в банаховом пространстве B с нормой $\|.\|$. Если существует строго монотонная биективная вещественная функция $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что суперпозиция $f \circ \|.\|$ есть вещественнозначная функция класса C^n на B, то на M существует разбиение единицы класса C^n.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М.: Мир, 1967. 203 с.

2. *Klimentov S. B.* The remark on paracompactness of the infinite dimensional manifolds // 2^{nd} Gauss Univesitдt Mьnchen Symposium, August 2-7, 1993, Abstract Book, Conferences A,B,C, Section A.12, p.46.

А. В. Козак, Д. И. Ханин (Южный федеральный университет, Россия)
avkozak@bmail.ru, dihan@mail.ru

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОМЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ СВЁРТКИ НА МНОГОГРАННИКАХ

В работе предлагается приближённый метод решения многомерных уравнений типа интегральной свёртки на многогранниках в $\mathbb{R}^m$. Излагаемый подход основан на идеях проекционных методов, но в отличии от них, здесь для приближенного решения уравнения на конечном множестве требуется решение некоторых уравнений на бесконечных множествах. Согласно данному методу, исходный многогранник делится на несколько частей, для каждой из которых решение ищется отдельно. Для центральной части при этом используется решение уравнения с многомерным оператором свёртки по всему пространству или оператором свёртки на торе, а для частей, прилегающих к участкам границы размерности $(m-1)$, используются решения уравнений свёртки по полупространствам. Для остальных частей исходного многогранника приближённое решение может быть определено либо из уравнений с операторами свёртки по некоторым другим бесконечным множествам (если соответствующие операторы удастся эффективно обратить), либо с помощью численного решения уравнений, аналогичных первоначальному, но на значительно меньших многогранниках. Особую ценность, по мнению авторов, представляют собой оценки возникающей погрешности.

Полученный результат представляет собой аналог результата, изложенного авторами доклада в статье [1], где рассматривается случай дискретных свёрток.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козак А. В., Ханин Д. И.* Приближенное решение больших систем уравнений с многомерными теплицевыми матрицами. Сибирский журнал вычислительной математики, Новосибирск, 2015(1), с. 55-64.

2. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов. Докл. АН СССР, 1973, т.212, №6, с. 1287-1289.

3. *Симоненко И. Б.* Операторы типа свертки в конусах. Матем. сб., 74(116):2 (1967), 298–313.

4. *Симоненко И. Б.* Обратимость оператора свёртки в больших областях. Математические исследования, Кишинёв, 1980, с. 56-66.

В. Н. Козлов (Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого, Россия)

saiu@ftk.spbstu.ru

О СЖИМАЮЩИХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ СИСТЕМ С ПРОЕКЦИОННЫМИ ЛОКАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ УПРАВЛЕНИЯ

Условия сжатия даны для оператора системы с линейным объектом и *локально оптимальными управлениями* (ЛОУ) при смешанных ограничениях.

Теорема. *Пусть: 1. Разностный оператор системы ЛОУ имеет вид*

$$\begin{gathered} x_{k+1} = G\left(x_k, m_k, p_k\right) = Hx_k + F_u u_{k,*}\left(x_k\right) + F_m m_k = \\ = Hx_k + F_u \Gamma T\left[P_A H x_k + \left(1-2\theta_{k*}\right)\ \left|\sigma\ \right|^{1/2} \tilde{P}^0 C\right] + F_m m_k,\ x_{k0} = x^0, \end{gathered} \tag{1}$$

где проекционный оператор ЛОУ с регуляризацией имеет вид

$$\begin{gathered} \theta_{k*} = p\left(\theta_{k0}\right) = \left(\left|\theta_{k0}\right| - \left|\theta_{k0}-1\right| + 1\right)/2 \in [0,1], \theta_{k0} = \left(1-\tilde{\sigma}_k^{-1}\right)/2,\ \tilde{\sigma}_k = \left|\alpha_k/\rho\right|^{1/2}, \\ \left|\tilde{\sigma}\right|^{1/2} = \alpha_k\left(x_k\right)\rho^{-1},\ \alpha\left(x_k\right) = \sqrt{r^2 - \varphi\left(\|\ P_A b_k^1\ \|^2\right)},\quad b_k^1 = Hx_k, \\ \rho = C^T \tilde{P}^0 C \neq 0, \qquad \varphi\left(q\right) = 0,5\left(\left|q-\varepsilon^2\right| - \left|q-r_1^2\right| + \varepsilon^2 + r_1^2\right),\ q \in \mathbb{R}^1, \end{gathered} \tag{2}$$

а возмущения удовлетворяют условию $m_k = m_{k+l},\ \ l = 1, 2, \ldots$.

2. Состояния объекта в (1) управляемы и локально достижимы при смешанных ограничениях на управления и координаты, учтенных в (2):

$$\alpha = r^2 - \varphi\left(\left\| P_A b_k^1 \right\|^2\right) \ \geq \ 0, \ P_A^T P_A = \left(AA^T\right)^{-1}, \ \| x_k \| \leq r_1 = r\left(\|P_A\| \cdot \|H\|\right)^{-1}.$$

3. Совпадают области определения нелинейной части оператора ЛОУ и совместности регуляризованных ограничений задач оптимизации

$$\alpha_k = r^2 - \varphi\left(b_k^T \left(AA^T\right)^{-1} b_k^1\right) = r^2 - \left\| P_A b_k^1 \right\|^2 \geq 0, \ \ k = 1, 2, \dots .$$

4. Семейство (1) аппроксимировано линейными операторами Фреше $x_{k+1} = F_k(x_k, p)$, $x_{k_0} = x^0 \in T$,*имеет место утверждения теоремы Банаха-Штейнгауса* $\| F_k \| \leq M$, $k = 1, 2, \dots$. *Тогда условия сжатия для (1) имеют вид*

$$\alpha = \|H\| + \|F_u\| \cdot \|\Gamma\| \cdot \|T\| \left\langle \|P_A\| \cdot \|H\| + 2L_p L_\varphi r_1 \rho^{-1} \|P_A\|^2 \cdot \|H\|^2 \ \left\|\tilde{P}^0 C\right\| \right\rangle < 1.$$

Е. В. Комарчук, С. Н. Мелихов (ЮФУ, ЮМИ, Ростов-на-Дону, Владикавказ)
mexanic.87@mail.ru, melih@math.rsu.ru

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ТИПА РУМЬЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ

Пусть Ω – выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$, обладающее фундаментальной последовательностью (выпуклых) компактов K_n, $n \in \mathbb{N}$; H_n– опорная функция K_n, $n \in \mathbb{N}$; ω – квазианалитическая весовая функция, как в [1].

Положим $w_{nk}(z) := \exp\left(-H_n(\mathrm{Im} z) - \frac{1}{k}\omega(z)\right)$, $z \in \mathbb{C}^N$, $n, k \in \mathbb{N}$. Введем весовые пространства целых функций

$$H_{nk}(\mathbb{C}^N) := \{f \in H(\mathbb{C}^N) | \ \ \|f\|_{nk} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)| w_{nk}(z) < +\infty\},$$

$$n, k \in \mathbb{N}; WH(\mathbb{C}^N) := \mathrm{ind}_n \mathrm{proj}_k H_{nk}(\mathbb{C}^N).$$

Сильное сопряженное к некоторому пространству ультрадифференцируемых функций типа Румье, определяемому ω, топологически изоморфно (посредством преобразования Фурье-Лапласа) пространству $WH(\mathbb{C}^N)$. Семейство весов $\overline{W}$ состоит из всех полунепрерывных сверху функций $\overline{w} : \mathbb{C}^N \to [0, +\infty)$ таких, что для любого n существуют $\alpha_n > 0$ и $k = k(n)$, для которых $\overline{w} \leq \alpha_n w_{nk}$ на $\mathbb{C}^N$. Проективная оболочка индуктивного предела $WH(\mathbb{C}^N)$ определяется следующим образом:

$$H\overline{W}(\mathbb{C}^N) := \{f \in H(\mathbb{C}^N)| \ \ \|f\|_{\overline{w}} := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} |f(z)|\overline{w}(z) < +\infty \quad \text{для любого} \ \ \overline{w} \in \overline{W}\}.$$

Топология $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$ задается семейством преднорм $\|\cdot\|_{\overline{w}}$, $\overline{w} \in \overline{W}$. Пространство $WH(\mathbb{C}^N)$ непрерывно вложено в $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$.

Теорема. *(i) Если Ω отлично от компакта, то индуктивная топология в пространстве $WH(\mathbb{C}^N)$ строго сильнее проективной топологии в нем, индуцированной из $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$.*

(ii) Пространства $WH(\mathbb{C}^N)$ и $H\overline{W}(\mathbb{C}^N)$ совпадают алгебраически.

Ранее утверждение (i) теоремы авторами было доказано для неквазианалитической функции ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Result. Math. —1990.— V.17.— P. 206–237.

С. Г. Костюнина (Иркутский государственный университет, Россия)
libertina27@gmail.com
С. С. Орлов (Иркутский государственный университет, Россия)
orlov_sergey@inbox.ru

НЕПРЕРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть E_1, E_2 — вещественные банаховы пространства, $u = u(t)$, $f = f(t)$ — неизвестная и заданная функции действительного аргумента t со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим интегральное уравнение

$$Bu(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s)ds = f(t), \, t \geq 0, \tag{1}$$

где B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $D(B) \subseteq D(A)$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha < 1$. В настоящее время авторами изучен случай непрерывно обратимого оператора B. В качестве основного результата доказана следующая

Теорема. *Пусть линейный оператор B непрерывно обратим, функция $f(t) \in C([0; +\infty)\,; E_2)$, тогда уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение* *вида*

$$u(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-s)^{k\alpha-1}(AB^{-1})^k f(s)ds.$$

Утверждение согласуется с известной теоремой [1] для интегрального уравнения Абеля второго рода. Рассмотрена реализация уравнения (1) — краевая задача для интегро-дифференциального уравнения в частных производных, возникающая в физике плазмы [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-01-31175 мол_а

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gorenflo R., Vessella S.* Abel Integral Equations Analysis and Applications. Springer-Verlag. 1991.

2. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. Физматлит. 2007.

В. Д. Кряквин (Южный федеральный университет, Российская Федерация)
vadkr@math.sfedu.ru

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ СПЕКТРОВ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В докладе рассматриваются псевдодифференциальные операторы из класса Л.Хёрмандера $\Psi^m_{1,\delta}$, $\delta < 1$, в пространствах Зигмунда-Гёльдера на $\mathbb{R}^n$, обсуждаются результаты процитированных в списке литературы статей. Приводятся утверждения о совпадении (как множеств) спектров и существенных спектров ограниченных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространствах Соболева и Зигмунда-Гёльдера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кряквин В. Д.* Критерии компактности и нетеровости псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Гельдера-Зигмунда. Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 101–110.

2. *Кряквин В. Д.* Характеризация псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 3. С. 318–324.

A. G. Kusraev (Southern Mathematical Institute, Russia)
kusraev@smath.ru

DOMINATION PROBLEM IN BANACH LATTICES

The aim of this work is to survey some aspects of the domination problem in Banach lattices. Given two linear operators S and T between Banach lattice with $0 \leq T \leq S$, the *domination problem* asks whether or not T inherits some property of its *dominant* S? The domination problem has been the focus of attention for about 40 years. Various solutions were found for different classes of linear operators under appropriate restrictions on underlying Banach lattices. For the main results we refer to the survey papers [1, 2]. A general approach to the problem is outlined in [3]. We formulate a version of the domination problem for a new class of linear operators and believe that it can be treated by the above mentioned general approach.

Let X be a Banach lattice and $\mathbb{P}(X)$ stands for the Boolean algebra of all band projections in X, see [1]. A bounded operator T in X is said to be of *Simonenko type,* if the operator $\pi T(I_X - \pi)$ is compact for every band projection $\pi \in \mathbb{P}(X)$ (compare with the notion of a *local type operator* in [4]). Now, an interesting problem is to determine necessary and sufficient conditions under which an operator T is of Simonenko type provided that so is some of its dominants.

REFERENCES

1. *Abramovich Y. A. and Aliprantis C. D.* Positive operators. In: Handbook of the geometry of Banach spaces. Vol. 1. 2001./ Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss/ Amsterdam a.o.: Elsevier, P. 85–122.

2. *Flores J., Hernández F. L., and Tradacete P.* Domination problems for strictly singular operators and other related classes. Positivity. 2011. V. 16. P. 595–616.

3. *Kusraev A. G.* Domination problem for positive operators in Banach lattices. In: *Mathematical analysis and mathematical modeling.* Vladikavkaz: SMI Press, 2011. P. 33–40. (Proc. of the Intern. Conf. of Young Scientists, Russia, Vladikavkaz, July 25–30, 2011).

4. *Siminenko I. B.* Local method in the theory of shift invariant operators and their envelopes. Rostov-on-Don, 2007. 120 p.

Z. A. Kusraeva (Southern Mathematical Institute, Russia)
zali13@email.com

INVOLUTIONS AND COMPLEX STRUCTURES ON REAL VECTOR LATTICES

A linear operator T on a vector lattice E is called *involutory* or an *involution* if $T \circ T = I_E$ (or, equivalently, $T^{-1} = T$) and is called a *complex structure* if $T \circ T = -I_E$ (or, equivalently, $T^{-1} = -T$). The operator $P - P^{\perp}$, where P is a projection operator on E and $P^{\perp} = I_E - P$, is an involution. The involution $P - P^{\perp}$ with band projections P is referred to as *trivial*. The main result of this note tells us that in a real non locally one-dimensional universally complete vector lattice the are band preserving complex structures and nontrivial band preserving involutions. The unexplained terms can be found in [1, 2].

Theorem. *Let E be a universally complete real vector lattice which is not locally one-dimensional. Then the following assertions hold:*

(1) *For every finite collection $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ there exists a band preserving involution T on E such that $T(x_i) = x_i$ for all $i = 1, \dots, n$.*

(2) *There exists a band preserving complex structure on E.*

Corollary. *Let E be a universally complete vector lattice. Then the following are equivalent:*

(1) *E is locally one-dimensional.*

(2) *There is no nontrivial band preserving involution on E.*

(3) *There is no band preserving complex structure on E.*

REFERENCES

1. *Abramovich Yu. A., Kitover A. K.* Inverses of disjointness preserving operators. Memoirs of the AMS. 2000. V. 143, № 679. viii+164 p.

2. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators. New York: Academic Press. 1985. xvi+367 p.

E. Liflyand (Bar-Ilan University, Ramat-Gan, Israel)
liflyand@gmail.com

ON THEOREMS OF F. AND M. RIESZ

We discuss various analogs of the famous theorem due to F. and M. Riesz on the absolute continuity of the measure whose negative Fourier coefficients are all zeros. A simpler and more direct proof of one of such analogs is obtained. In the same spirit a different proof is found for another theorem of F. and M. Riesz on absolute continuity. These results are closely related to one theorem of Hardy and Littlewood on the absolute convergence of the Fourier series of a function of bounded variation whose conjugate is also of bounded variation and its extensions to the non-periodic case. Certain multidimensional results are discussed as well.

М. С. Лобанова (КубГУ, Россия)
mary140388@mail.ru

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-ГАММЕРШТЕЙНА

Изучается асимптотика решения интегрального уравнения вида

$$x(t) = \int\limits_0^t K(t-s)[x(s) + \varphi(s,\, x(s))]\, ds + f(t). \qquad (1)$$

Асимптотика решений таких уравнений рассматривалась, в основном, для свободных членов из $A_m[0,\,\infty)$, где $A_m[0,\,\infty)$ - множество непрерывных на $[0,\,\infty)$ функций, допускающих разложение

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{z_k}{(t+1)^k} + \frac{o(1)}{(t+1)^m}, \qquad t \to \infty.$$

Однако, такие свободные члены ограничены. При изучении асимптотики, в качестве свободных членов часто фигрирует решение дифференциальных уравнений. Такие решения, как правило, имеют экспоненциальный рост, поэтому интересно рассмотреть интегральные уравнения со свободным членом вида $f = \sum\limits_{l=1}^{s} e^{\mu_l t}\psi_l(t)$, где $\mu_l = \alpha_l + i\beta_l$, $\alpha_l, \beta_l \in R$, $\psi_l \in A_m$.

Положим $\varphi(t, x) = p(t)q(x)$, причем $p(t) \in BC$, а $q(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j x^{r_j}(t)$, где $r_j = u_j + iv_j$, u_j, $v_j \in R$.

Получена асимптотика решения уравнения (1) для случаев устойчивого и неустойчивого ядра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дербенев В. А., Цалюк З. Б.* Асимптотика решений линейных уравнений Вольтерра с разностным ядром. 2001.

2. *Цалюк З. Б.* Линейные интегральные уравнения. КубГУ. 1980.

А. В. Лукин (ЮФУ, Россия)
alexanderlukin9@gmail.com

О ПРИМЕНЕНИИ ЛОКАЛЬНОГО МЕТОДА СИМОНЕНКО-КОЗАКА В ТЕОРИИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СВЁРТКИ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Через $\mathcal{V}_p(= \mathcal{V}_p(\mathbb{R}^k))$, где $p > 1$, $k \geqslant 2$ обозначим замкнутую подалгебру $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k))$, порождённую операторами свёртки:

$$(C_a f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} a(x-y)f(y)dy,\ a \in L_1(\mathbb{R}^k).$$

Пусть $\mathfrak{X}$ — хаусдорфов компакт с мерой, $\mathcal{K}_p$ — идеал компактных операторов в $\mathcal{L}(L_p(\mathfrak{X}))$, $\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_p} = \mathcal{V}_p \otimes \mathcal{K}_p$, M — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^k$, удовлетворяющее определённым условиям гладкости, K_x — конус с вершиной в x. Пусть Q^m — проектор на первые m элементов базиса в $L_p(\mathfrak{X})$, P_M — проектор на множество M.

Теорема. *Пусть* $A \in (\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_p})^+$. *Для того, чтобы операторы* $(P_{mM} \otimes Q^m)A(P_{mM} \otimes Q^m) : (P_{mM} \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}) \to (P_{mM} \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$ *были обратимы для всех* m, *начиная с некоторого номера* m_0, *и выполнялось условие*

$$\sup_{m \geqslant m_0} \|((P_{mM} \otimes Q^m)A(P_{mM} \otimes Q^m))^{-1}\| < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех $x(\in \partial M)$ *были обратимы операторы* $(P_{K_x}\otimes I)A(P_{K_x}\otimes I):(P_{K_x}\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})\to(P_{K_x}\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$.

Эта теорема доказана для матричного случая А. В. Козаком на основе модификации локального метода Симоненко (см. [1]). Доказательство общего операторного случая потребовало построения новой локальной структуры и исследования её свойств. Ранее в [2] получены только достаточные условия применимости проекционного метода для оператора свёртки с компактными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Элиста: Дифф. и инт. ур–ния и их прилож. 1983. С. 58–73.

2. *Лукин А. В.* Проекционный метод решения уравнений свёртки с операторными коэффициентами // Тез. докл. международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-IV». Ростов-на-Дону. 2014. С. 36.

E. A. Maximenko (National Polytechnic Institute, Mexico)
maximenko@esfm.ipn.mx

EIGENVALUES OF TOEPLITZ-LIKE MATRICES: FROM ASYMPTOTIC DISTRIBUTION TO UNIFORM APPROXIMATION

Given an essentially bounded real-valued function $a\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, we denote by a_n ($n\in\mathbb{Z}$) the Fourier coefficients of a and consider the sequence of Toeplitz matrices $T_n(a)=[a_{j-k}]_{j,k=1}^n$. G. Szegő proved in 1915 that the eigenvalues $\lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_n^{(n)}$ of $T_n(a)$ are asymptotically distributed as the values of the generating symbol, i.e.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(\lambda_j^{(n)})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(a(x))\,dx$$

for every function φ continuous on $\mathbb{R}$. This theorem has many modifications and generalizations (see, for example, $[1,2,3]$). It is known that this limit theorem can be stated in terms of the weak convergence of distributions. Passing from cumulative distribution functions to the quantile functions we observed that under some natural conditions the convergence is *uniform*. Recall that the cumulative distribution function and the quantile function associated to the function a are defined by

$$F_a(v)=\frac{1}{2\pi}\mu\{x\colon\ a(x)\le v\},\quad Q_a(v)=\inf\{p\in(0,1]\colon\ F_a(v)\ge p\}.$$

Supposing that the essential range of a is a bounded connected subset of $\mathbb{R}$ we proved that

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le n}|\lambda_j^{(n)}-Q_a(j/n)|=0.$$

Similar results are true for the singular values and for various generalizations of Toeplitz matrices.

The results of this talk are joint with J. M. Bogoya, A. Bцttcher, and S. Grudsky. The research and the participation in the Conference have been supported by IPN-SIP project 20150422.

R E F E R E N C E S

1. *Bцttcher A., Silbermann B.* Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices. Springer.

2. *Serra-Capizzano S., Sesana D., Strouse E.* The eigenvalue distribution of products of Toeplitz matrices – Clustering and attraction. Linear Algebra Appl. 2010. V. 432. No. 10. P. 2658–2678.

3. *Trench W.F.* An elementary view of Weyl's theory of equal distribution. Amer. Math. Monthly. 2012. V. 119. No. 10. P. 852–861.

M. M. Malamud (Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk)
malamud3m@yahoo.com

SCHOENBERG MATRICES AND RIESZ SEQUENCES OF TRANSLATES

We will discuss boundedness and strong positive definiteness of inffinite Schoenberg matrices. The latter are defined by means of a radial positive definite function f and a countable set of distinct points $X = \{x_k\}$ on Eucledian space $\mathbb{R}^n$.

Using a Grammization procedure the abstract results are applied to the following situation. Starting with a radial positive definite function f and a sequence $X \subset \mathbb{R}^n$ we define a sequence of translates $\{f(x - x_k)\}_1^\infty$. We indicate certain necessary and sufficient conditions for this sequence to form a Riesz sequence, i.e. a Riesz basis in its linear span. For instance, for certain functions a sequence of translates $\{f(x - x_k)\}_1^\infty$ form a Riesz sequence if and only if the set X is separated, i.e. the infimum of pairwise distances is positive.

L. S. Maergoiz (Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia)
bear.lion@mail.ru

EXTENSIONS OF THE CLASS OF ENTIRE FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

The object of the study is the class of holomorphic functions in a multidimensional toric space. We distinguish the subclass of the functions equivalent to entire functions in the following sense: g belongs to the subclass whenever there exists a monomial holomorphic mapping $\mathcal{F}$ such that $f = g \circ \mathcal{F}$ is an entire function. We give a full description of the functions of the subclass under consideration in terms of the geometric properties of the supports of the series they expand in. For the appearing extensions of the class of entire functions of several variables, we develop an approach to constructing a growth theory for these classes. Applying the method, we find a multidimensional analog to the expansion of a holomorphic function in a Laurent series.

REFERENCES

1. *Maergoiz L. S.* Extensions of the Class of Entire Functions of Several Variables and Related Topics. // Сибирский матем. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1137-1159.

М. А. Муратов (Крымский федеральный университет, Россия)
mamuratov@gmail.com
В. С. Шульман (Вологодский государственный университет, Россия)
shulman.victor80@gmail.com

О ТЕОРЕМАХ ТИПА ФУГЛИДА-ПАТНЭМА В $*$-АЛГЕБРАХ

Инволютивная алгебра $(\mathcal{A}, *)$ называется (FP)-алгеброй [1], если из равенства $xa_1 = a_2x$, где a_i — нормальные элементы, следует, что $xa_1^* = a_2^*x$. Если данная импликация верна при $a_1 = a_2$, то $(\mathcal{A}, *)$ называется (F)-алгеброй. Наконец, если импликация верна при ($a_1 = a_2$ и) нормальном x, то $(\mathcal{A}, *)$ называется (CF)-алгеброй. Эти свойства играют важную роль в теории операторных алгебр.

Известная теорема Фуглида-Патнэма [2,3] утверждает, что алгебра $\mathcal{B}(H)$ всех операторов в гильбертовом пространстве H является (FP)-алгеброй относительно стандартной инволюции $*$. Пусть $J \in \mathcal{B}(H)$ — оператор инволюции ($J = J^* = J^{-1}$) с сигнатурой (n, k) $(0 \leq k \leq n \leq \infty)$. Для любого $T \in \mathcal{B}(H)$ положим $T^\star = JT^*J$ и обозначим получающуюся таким образом $*$-алгебру $(\mathcal{B}(H), \star)$ через $\mathcal{B}_{n,k}$. Любая инволюция в $B(H)$ определяет алгебру, $*$-эквивалентную одной из алгебр $\mathcal{B}_{n,k}$, поэтому следующая теорема дает описание фуглидовых свойств алгебры $\mathcal{B}(H)$ относительно всех инволюций.

Теорема 1. *Алгебра $\mathcal{B}_{n,k}$ обладает свойством (a) (FP) — когда $k = 0$, (b) (F) — когда либо $k = 0$, либо $n \leq 1$, (c) (CF) — когда либо $n \leq 2, k \leq 1$, либо $k = 0$.*

Р.С. Исмагилов [4], исследуя представления бесконечномерных групп, ввел в рассмотрение *алгебры Наймарка*. Этот класс $*$-алгебр соединяет некоторые свойства C*-алгебр и левых гильбертовых алгебр.

Теорема 2. *Любая алгебра Наймарка является (CF)-алгеброй.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berberian S. K.* Note on a theorem of Fuglede and Putnam. Proc. Amer. Math. Soc. 1959. vol. 10. P. 175–182
2. *Fuglede B* A commutativity theorem for normal operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1950. vol. 36. P. 35–40.
3. *Putnam C. R.* On normal operators in Hilbert space. Amer. J. Math. 1951. vol. 73. P. 357–362.
4. *Исмагилов Р. С.* О неприводимости представлений групп измеримых токов. Функц. анализ и прил. 1994. Т. 28. Вып. 2. С. 21–30.

Г. П. Омарова (ЮФУ, Россия)
om.gulnara@yandex.ru

О ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С "EXOTIC"СИМВОЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА-ЗИГМУНДА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ГЛАДКОСТИ

Рассматриваются пространства Гельдера-Зигмунда $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с показателем гладкости, зависящим от точки пространства $\mathbb{R}^n$. Показатель $s(x)$ — непрерывая вещественнозначная функция, удовлетворяющая при любом $x \in \mathbb{R}^n$ условию $\infty < s_- \leq s(x) \leq s_+ < \infty$, и существует $S_1 > 0$ такое, что неравенство $|s(x+y) - s(x)| \leq \frac{S_1}{|\log_2 |y||}$ справедливо для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $0 < |y| < 1$.

Определение ([3]). *Будем говорить, что обобщенная функция $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству Зигмунда-Гелььдера $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем гладкости s, если*

$$\|f\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|2^{js(x)} \lambda_j(D) f(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} < \infty,$$

где функции $\lambda_j(\xi)$ образуют стандартное разбиение единицы Литтлвуда–Пэли на $\mathbb{R}^n$ ([1]).

Теорема. *Для любого $\varepsilon > 0$ псевдодифференциальный оператор с символом $a \in S^m_{\rho,\delta}$, $m \in \mathbb{R}$, $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$ непрерывен из $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda^{s(\cdot)-m-(1-\rho)(n+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$. Существуют независящие от a положительное число C и неотрицательные целые числа N_1, N_2 такие, что для операторной нормы справедлива оценка*

$$\|a(x,D)\| \leq C \max_{|\beta| \leq N_1, |\alpha| \leq N_2} \sup_{x,\, \xi \in \mathbb{R}^n} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)|(1+|\xi|)^{\rho|\alpha| - \delta|\beta| - m}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, Princeton. 1993.

2. *Кряквин В. Д., Омарова Г. П.* Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда. Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. № 4. С. 45–48.

3. *Кряквин В. Д.* Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда переменного порядка. Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1315–1327.

А. Э. Пасенчук (ЮФУ, Россия)
pasenchuk@mail.ru

О ТЕОРИИ СИМВОЛА ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$. Обозначим через $C^{\infty}(C^n,\ \Gamma)$ счетно-нормированное пространство гладких на окружности Γ функций со значениями в C^n со стандартными операциями и топологией. Положим $C_{+}^{\infty}(C^n,\ \Gamma) = P^{+}(C^{\infty}(C^n,\ \Gamma))$, где $P^{+} = \frac{1}{2}(I + S_{\Gamma})$.

Рассмотрим оператор Теплица $T_a : C_{+}^{\infty}(C^n,\ \Gamma) \to C_{+}^{\infty}(C^n,\ \Gamma)$, $(T_a\phi)(\xi) = P^{+}a(\xi)\phi(\xi)$, $\xi \in \Gamma$, где символ оператора - $a(\xi)$ есть гладкая матрица-функция.

Известен критерий нетеровости: оператор T_a нетеров в пространстве $C_{+}^{\infty}(C^n, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда его символ таков, что функция $\det a(\xi)$ имеет на Γ не более, чем конечное число нулей конечных порядков

Алгебра гладких матриц-функций $C^{\infty}(C^{n\times n},\ \Gamma)$, элементом которой изначально является символ оператора T_a, является в некотором смысле узкой. Поясним это примером. При $n = 1$ оператор Теплица с символом $a(\xi) = 1 - \xi^{-1}$ обратим и при этом $\left((T_{1-\xi^{-1}})^{-1}\phi\right)(\xi) = P^{+}\left(1 - \xi^{-1}\right)^{-1}\phi(\xi)$. Очевидно, $(T_{1-\xi^{-1}})^{-1}$ можно рассматривать как оператор Теплица, но $\left(1 - \xi^{-1}\right)^{-1} \notin C^{\infty}(C, \Gamma)$. Поэтому для построения алгебры символов нужно расширить алгебру $C^{\infty}(C^{n\times n},\ \Gamma)$, включив в нее все элементы вида $a^{-1}(\xi)$, где $a(\xi) \in C^{\infty}(C^{n\times n},\ \Gamma)$ и имеет на Γ не более, чем конечное число нулей конечных порядков. Разумному определению понятия символа оператора Теплица и посвящена эта работа. Дело в том, что описанное выше расширение понятия символа уже нельзя понимать как поточечно определенную функцию. В самом деле, продолжая рассуждать о приведенном выше примере, заметим, что почти для всех $\xi \in \Gamma$ имеет место равенство $b(\xi) = \left(1 - \xi^{-1}\right)^{-1} = \xi(\xi - 1)^{-1} = c(\xi)$. В то же время оператор $T_b - T_c$ не только не является компактным, но и вообще неограничен в пространстве $C_{+}^{\infty}(C,\ \Gamma)$. Процедура построения алгебры символов приведена в книге [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Пасенчук А. Э.* Дискретные операторы типа свертки в пространствах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности. ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2013.

O. I. Reinov (Saint Petersburg State University, Russia)
orein51@mail.ru

AROUND A QUESTION OF A. HINRICHS AND A. PIETSCH ON OPERATORS WITH S-NUCLEAR ADJOINTS

We discuss the problems around a question, posed by A. Hinrichs and A. Pietsch [1]: Suppose T is an operator acting between Banach spaces X and Y, and let $s \in (0, 1)$. Is it true that if T^{*} is s-nuclear then T is s-nuclear too?

As is well known, for $s = 1$, a negative answer was obtained already by T. Figiel and W.B. Johnson in 1973. The following result (which is sharp in the scale of s-nuclear operators in the sense of Theorem 2 below) gives one of the possible positive answers in this direction. To formulate the theorem, we need a definition: Let $0 < q \leq \infty$ and $1/s = 1/q + 1$. We say that X has the approximation property of order s, if for every $(x_n) \in l_q(X)$ (where $l_q(X)$ means $c_0(X)$ for $q = \infty$) and for every $\varepsilon > 0$ there exists a finite rank operator R in X such that $\sup_n ||Rx_n - x_n|| \leq \varepsilon$.

Theorem 1. *If $s \in [2/3, 1]$ and T is a linear operator with s-nuclear adjoint from a Banach space X to a Banach space Y and if one of the spaces X^* or Y^{***} has the approximation property of order s, then the operator T is nuclear.*

The examples in the following result show that the condition "X^* or Y^{***} has the approximation property of order s"is essential.

Theorem 2. *For each $s \in (2/3, 1]$ there exist a Banach space Z_s and a non-nuclear operator $T_s : Z_s^{**} \to Z_s$ so that Z_s^{**} has the metric approximation property, Z_s^{***} has the AP_r for every $r \in (0, s)$ and T_s^* is s-nuclear.*

Remark. *The space Z_1^{***} is isomorphic to a space of type $Z_1^* \oplus E$, where E is an asymptotically Hilbertian space. This gives us one more example of an asymptotically Hilbertian space which fails the approximation property.*

Acknowledgements: The research was supported by the Grant Agency of RFBR (grant No. 15-01-05796).

REFERENCES

1. *Hinrichs A., Pietsch A.* p-nuclear operators in the sense of Grothendieck. Math. Nachr. 2010. V. 283, № 2. P. 232–261.

И. А. Романенко (КФУ им. В. И. Вернадского, Россия)
rom.igor.alex@gmail.com

ДОМИНАНТНЫЕ ОЦЕНКИ РОСТА ИНТЕГРАНТА И ГЛАДКОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Для вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}[a;b]$ $(1 \leq p < \infty)$ вводится последовательность так называемых доминантных "оценок роста" остаточного члена формулы Тейлора первого порядка для градиента $(n-1)$-го порядка интегранта $(n \in \mathbb{N})$, каждая из которых гарантирует соответствующую гладкость вариационного функционала в достаточно гладких точках соответствующего пространства Соболева. Частными случаями доминантных оценок роста являются изученные ранее K-псевдополиномиальные представления интегранта. Отметим, однако, что в отличие от псевдополиномиального случая $(p \in \mathbb{N})$, наш подход позволяет рассматривать вариационные задачи на полной соболевской шкале $(1 \leq p < \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов И. В.* Необходимые условия компактного экстремума вариационного функционала в пространствах Соболева над многомерной областью. Доповіді НАНУ. 2014. № 4. С. 19–24.

2. *Романенко И. А.* Доминантные оценки роста интегранта для вариационных задач в пространствах Соболева. Крымская международная математическая конференция: сборник тезисов. 2013. Т. 3, С. 12.

А. М. Семенова (ЮФУ, Россия)
sam10101991@gmail.com

ОБ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ С ЯДРОМ РАДИАЛЬНОГО ТИПА НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

В [1] получено условие ограниченности оператора свертки с ядром радиального типа на группе Гейзенберга. В настоящей работе найдены условия обратимости таких операторов в терминах построенного символа. Рассмотрен метод Фурье для решения соответствующего сверточного уравнения. Работа выполнена под руководством В.М.Деундяка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lyall N.* The Heisenberg Group Fourier Transform. Trans. Amer. Math. Soc. 2007. T. 359. C. 4467–4488.

А.П. Солдатов, Ю.Н. Шишмарева (Россия)
soldatov48@gmail.com

ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть C_0 означает пространство вектор- функций $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$, непрерывных и ограниченных на интервале $(0, 1)$ действительной оси. Рассмотрим в этом пространстве функциональные операторы

$$A = \sum_{1}^{m} a_i T(\alpha_i), \tag{1}$$

порожденные операторами умножения a_i на $l \times l-$ матрицы - функции $a_(t) \in C[0, 1]$ и операторами сдвига $T(\alpha_i)\varphi = \varphi \circ \alpha_i$. Под сдвигом α ниже понимается диффеоморфизм отрезка $[0, 1]$ на себя, оставляющий его концы неподвижными и не имеющих других неподвижных точек. Кроме того, в его определение включается требование $\alpha'(k) \neq 1,\ \ k = 0, 1$.

В предположении, что в (1) все сдвиги одного типа (т.е разности $\alpha_i(t) - t$ одного знака), в работе получена оценка спектрального радиуса

$$\operatorname{spr} A \leq \sum_{i=1}^{m} \max(|a_i(0)|_{\mathbb{C}^{l\times l}}, |a_i(1)|_{\mathbb{C}^{l\times l}}), \tag{2}$$

где норма матриц $x \in \mathbb{C}^{l\times l}$ определяется равенством

$$|x|_{\mathbb{C}^{l\times l}} = \max_i \sum_j |x_{ij}|.$$

В предположении, что для некоторого $\varepsilon > 0$ функции

$$|\alpha_i'(t) - \alpha_i'(0)| + |\alpha_i'(1-t) - \alpha_i'(1)| = O(t^\varepsilon)$$

при $t \to 0$, аналогичный результат справедлив и лебеговом пространстве L_0^p, которое определяется нормой

$$|\varphi| = \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^p [t(1-t)]^{-1} dt\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Кроме того, если дополнительно $a_i \in C^\mu[0,1], \quad 0 < \mu < 1$,то оценка (2) имеет место и в гельдеровом пространстве C_0^μ, определяемом нормой

$$|\varphi| = \sup_{0<t<1} |\varphi(t)| + \sup_{0<t_j<1} [t_1(1-t_1)]^\mu \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}.$$

В скалярном случае $l = 1$ для двух сдвигов $(m = 2)$ эта оценка была установлена в [1].

Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113PK01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солдатов А.П.* Оценка спектрального радиуса функциональных операторов. – Неклассические уравнения математической физики. Труды семинара, посвященные 60-летию проф. В.Н.Врагова, Под ред. А.И.Кожанова.- Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005.-297 С.

Л. В. Стефаненко (ЮФУ, Россия)
stefanenko.lv@mail.ru

ОБ УРАВНЕНИЯХ СВЕРТКИ НА НЕВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

Пусть G - область в $\mathbb{C}$; $A(G)$ - пространство Фреше всех функций, аналитических в G. Для целой функции $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, z \in \mathbb{C}$, нулевого типа при порядке 1 дифференциальный оператор бесконечного порядка $a(D)(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}$ линейно и непрерывно отображает $A(G)$ в $A(G)$. В последние 30 лет появилось значительное число работ, в которых решалась проблема существования линейного непрерывного правого обратного (ЛНПО) к оператору $a(D) : A(G) \to A(G)$. Она полностью решена для выпуклых областей G. Для невыпуклых областей G соответствующих результатов получено значительно меньше (см.[1]).

В настоящем докладе идет речь о достаточных условиях, при которых оператор $a(D) : A(G) \to A(G)$ имеет ЛНПО. Эти условия формулируются в терминах, связывающих поведение характеристической функции a, ее нулей и геометрии области G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробейник Ю. Ф.* О разрешимости в комплексной области некоторых классов линейных операторных уравнений. Ростов-на-Дону, издательство ЮФУ, 2009.С. 252.

Ф. С. Стонякин (КФУ им. В.И. Вернадского, Россия)
manmath@list.ru

АНТИКОМПАКТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К АНАЛОГАМ ТЕОРЕМЫ ЛЕБЕГА О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ИНТЕГРАЛА ПЕТТИСА

Рассмотрена проблема недифференцируемости неопределённого интеграла Петтиса по верхнему пределу в банаховых пространствах (известно, что в любом банаховом пространстве можно построить пример нигде не дифференцируемого интеграла Петтиса). Наш подход основан на понятии антикомпактного множества (или антикомпакта), предложенного ранее в [1]. Замкнутое абсолютно выпуклое подмножество $C \subset E$ банахового пространства E есть антикомпакт, если пространство E инъектвно и компактно вложено в другое банахово пространство $E_C = (span\ C, \|\cdot\|_C = p_C(\cdot))$ (p_C — функционал Минковского множества C). Доказано, что банахово пространство имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда оно имеет счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов. В классе таких пространств получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть E — банахово пространство, имеющее антикомпакт. Если отображение $f : I = [a; b] \to E$ вещественного отрезка интегрируемо по Петтису, то существует антикомпакт C такой, что f интегрируемо в E_C по Бохнеру.*

Из теоремы 1 вытекает уже собственно аналог теоремы Лебега.

Следствие 1. *Если $K \in E$ — фиксированная постоянная, то для всякого интегрируемого по Петтису $f : [a; b] \to E$ существует такой антикомпакт*

$C \subset E$, что отображение

$$F(x) = K + (P)\int\limits_a^x f(t)dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

почти всюду дифференцируемо в пространстве E_C и верно равенство $F'_{E_C}(x_0) = f(x_0)$ для почти всех $x_0 \in [a;b]$.

Получены аналогичные результаты при ограничениях на интегрируемые отображения вместо ограничений на класс пространств.

Исследования автора выполнены при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных – кандидатов наук, код МК-2915.2015.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры. Динамические системы. 2013. Т. 31, № 3 – 4. С. 281 –288.

К. В. Сторожук (Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Россия)
stork@math.nsc.ru

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРОВ ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА НА ВЕЩЕСТВЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

Мы «овеществляем» один метод спектральных подпространств. С помощью этого метода мы получаем возможность доказывать для вещественных банаховых пространств ряд результатов, которые были известны ранее для комплексных пространств. В качестве примера приведем теорему (Вермер (1952)— для комплексного случая, Годеман (1947) — для комплексных изометрий).

Теорема. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $\dim X > 2$, $T : X \to X$ — обратимый линейный оператор. Если $\|T^n\| \underset{n\to\pm\infty}{=} O(|n|^k), k < \infty$, то оператор T имеет инвариантное подпространство.*

Работа поддержана программой ведущих научных школ (грант НШ-2263.2014.1) и грантом РФФИ 15-01-05929-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Godement.* Théorèmes taubériens et théorie spectrale. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3, 64 (1947), p. 119-138.

2. *Wermer, J.* The existence of invariant subspaces. Duke Math. J. 19, (1952), p. 615–622.

3. *Баскаков А.Г., Загорский А.С.* К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах. Мат. заметки. 2007, Т. 81, вып. 1, С. 17—31.

4. *Сторожук К. В.* Симметричные инвариантные подпространства у комплексификаций линейных операторов. Мат. заметки. 2012. Т. 91 вып. 4, С. 938–940.

К. Тухлиев (Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова, Таджикистан)
kamaridin.t54@mail.ru

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА-СТЕЧКИНА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\mathbb{R})$

Пусть $\mathbb{N}$ -множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ -множество всех положительных чисел вещественной оси; $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty, \mathbb{R} := (-\infty, +\infty))$ -пространство измеримых и суммируемых в p-й степени на всей оси $\mathbb{R}$ функций f с конечной нормой. Через $L_p^{(r)}(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ обозначим множество функций $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_p(\mathbb{R})$. Символом $B_{\sigma,p}$ $(0 < \sigma < \infty)$, будем обозначать сужение на $\mathbb{R}$ множества всех функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R})$. Величину $\mathcal{A}_\sigma(f)_p := \inf\big\{\|f - g_\sigma\|_p : \ g_\sigma \in B_{\sigma,p}\big\}$ называем наилучшим приближением функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ элементами подпространства $B_{\sigma,p}$ $(\sigma \in \mathbb{R}_+)$. Пусть $\Omega_m(f;t)_p = \sup\big\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})} : \ h \in (0,t]\big\}$ специальный модуль непрерывности $m-$го порядка, определяемой через функции Стеклова, введенный в [1]. Тогда имеет место следующая общая

Теорема. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \leq 2$ и ψ – некоторая неотрицательная измеримая суммируемая и неубывающая на отрезке $[0,t]$ функция, тождественно не равная нулю. Тогда при любом $0 < t \leq 3\pi/(4\sigma)$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \left\{ \mathcal{A}_\sigma(f)_2 \cdot \left(\int_0^t \Omega_m^p(f^{(r)};\tau)_2 \, \psi(\tau) d\tau \right)^{-1/p} \right\} =$$

$$= \sigma^{-r} \left(\int_0^t \left(1 - \frac{\sin \sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp} \psi(\tau) d\tau \right)^{-1/p}.$$

Используя полученный результат, найдены точные значения различных средних ν-поперечников классов функций, определяемых модулем непрерывности Ω_m.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абилов В. А., Абилова Ф. В.* Матем. заметки, 2004, т.76, №6, С. 803-811.

С. М. Умархаджиев
(Академия наук Чеченской Республики, Россия)

umsalaudin@gmail.com

КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Через $L_a^{p),\theta}(\Omega)$ обозначаются гранд-пространства Лебега, введенные и изученные в работах [1, 2] на множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$L_a^{p),\theta}(\Omega) := \left\{ f : \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^\varepsilon)} < \infty \right\}, \ p > 1, \ \theta > 0,$$

где a – некоторая весовая функция. Показано, что $L_a^{p),\theta}(\Omega)$ является расширением классического пространства Лебега $L^p(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $a \in L^p(\Omega)$.

Доказана

Теорема. *Пусть* $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\theta > 0$ *и* a *– вес из* $L^p(\mathbb{R}^n)$. *Потенциал Рисса*

$$I^\alpha f = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(t)}{|x-t|^{n-\alpha}}\, dt, \ 0 < \alpha < n,$$

ограничен из $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{a^{\frac{p}{q}}}^{q),\frac{q}{p}\theta}(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда существует число* $\delta \in (0, \frac{p}{q'})$ *такое, что*

$$a^\delta \in A_{\frac{p-\delta}{p}\left(1+\frac{q}{p'}\right)}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Умархаджиев С.М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега. Известия вузов. Математика. 2014. № 4. С. 42–51.

2. *Samko S.G. and Umarkhadzhiev S.M.* On Iwaniec-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure. Azerb. J. Math., 2011. Т. 1, № 1. С. 67–84.

З. Ю. Фазуллин (Башгосуниверситет, Россия)
fazullinzu@mail.ru

ФОРМУЛА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ИЗ КЛАССА ШАТЕНА-ФОН НЕЙМАНА ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $L_0 = L_0^*$ – полуограниченный снизу дискретный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $V = V^* \in \sigma_p$, $p \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ – собственные числа операторов L_0 и $L = L_0 + V$, соответственно, пронумерованные в порядке роста и с учетом алгебраической кратности. Справедлива

Теорема. *Пусть существуют* $\delta > 0$ *и подпоследовательность* $\{n_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, *такие, что* $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geq \delta$ *и* $V \in \sigma_p$, $p = 2, 3, \ldots$ *Тогда имеет место формула* *регуляризованного следа*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n_m}\left(\mu_k-\lambda_k-\sum_{l=1}^{p-1}\alpha_l^{(m)}\right)=0, \tag{1}$$

$$\alpha_l^{(m)}=(2\pi i)^{-1}(-1)^l\mathrm{tr}\int_{\Gamma_m} z(R_0(z)V)^l R_0(z)\mathrm{d}\, z,\quad R_0(z)=(L_0-z)^{-1},$$

$\Gamma_m=\{z:\ |z|=(\lambda_{n_m+1}+\lambda_{n_m})/2\}$.

Отметим, что В.В. Дубровский [1] доказал справедливость равенства (1) для $V\in\sigma_2$ при условии $N(\lambda):=\sum\limits_{\lambda_k<\lambda}1=O(\lambda)$, $\lambda\to\infty$. Далее, В.А. Садовничий и В.Е. Подольский [2] показали, что для $V\in\sigma_p$, $p=2,3,\dots$, эта формула верна при условии, что $\lambda_{n_m+1}-\lambda_{n_m}\to\infty$, $m\to\infty$, Х.Х. Муртазин и З.Ю. Фазуллин [3] доказали сформулированную выше теорему для случая $p=2$.

Работа выполнена при поддержке гранта №01201456408 Минобрнауки РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубровский В. В.* Формулы регуляризованных следов операторов с компактной резольвентой. Дифф. уравнения. 1990. Т. 26. №12. С. 2046–2051.

2. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением. Матем. сб. 2002. Т. 193. №2. С. 129–152.

3. *Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю.* Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов. Матем. сб. 2005. Т. 196. №12. С. 123–156.

А. В. Цыганкова (Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Россия)

tsygankova_a_v@mail.ru

МНОГОМЕРНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ С СУБГЛАДКИМ ИНТЕГРАНТОМ

Вариационные задачи с негладким интегрантом составляют важную часть современного вариационного исчисления.

Так, например, введение модуля под знак классического вариационного функционала уже приводит к экстремальной задаче, которая не поддается исследованию классическими методами, ввиду нарушения гладкости интегранта.

В подобных ситуациях обычно применяются методы негладкого анализа, использующие различные типы субдифференциалов, каждый из которых имеет свои преимущества и свою разумную область применимости.

Данная работа посвящена детальному рассмотрению приложения K-субдифференциального исчисления к исследованию экстремальных вариационных задач с негладким (а именно субгладким) интегрантом (многомерный случай). Работа содержит вариационные приложения теории K-субдифференциалов первого порядка к экстремальным задачам с субгладким интегрантом. Получена оценка первой вариации K-субдифференциала для вариационного функционала с негладким (K-субдифференцируемым) интегрантом. Рассмотрены частные случаи, в том числе случай композиции негладкой и гладкой функций. Получен компактный выпуклый аналог вариационного уравнения Эйлера–Остроградского. Разработанная методика позволяет найти в примерах гладкую субэкстремаль, которая не поддается определению классическими методами, ввиду негладкости интегранта. На базе теории K-субдифференциалов высших порядков, получена оценка второй вариации K-субдифференциала вариационного функционала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ. Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 53, С. 64-132.

2. *Орлов И. В., Цыганкова А. В.* Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах. Динамические системы. Т. 3(31), № 3-4, С. 233-248.

S. V. Tsykina (Derzhavin Tambov State University, Russia)
tsykinasv@yandex.ru

POLYNOMIAL QUANTIZATION ON PSEUDO-ORTHOGONAL GRASSMANN MANIFOLDS

The pseudo-orthogonal group $G = \mathrm{SO}_0(p,q)$ acts linearly on $\mathbb{R}^n$, $n = p+q$, preserving the bilinear form $[x,y] = \sum \lambda_i x_i y_i$, where $\lambda_i = -1$ for $i = 1,\ldots,p$, $\lambda_i = 1$ for $i = p+1,\ldots,n$. Let $\mathcal{C}$ denote the cone $[x,x] = 0$, $x \neq 0$, in $\mathbb{R}^n$. Let us denote by $\widetilde{\mathcal{C}}$ the manifold of rulings $\mathbb{R}^* x$ of $\mathcal{C}$.

We consider a homogeneous space M of G consisting of 2-planes in $\mathbb{R}^n$ intersecting $\mathcal{C}$ (a *pseudo-orthogonal* Grassmann manifold). The M is a *para-Hermitian* symmetric space of rank two. So that there are *two* Laplace operators Δ_2 and Δ_4 on M (of orders 2 and 4). M can be also realized as a manifold in $\widetilde{\mathcal{C}} \times \widetilde{\mathcal{C}}$. Let $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ denote the universal enveloping algebra of $\mathfrak{g}$. The representation $T_{\sigma,\varepsilon}$, $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0,1$, of G acts by translations in homogeneous functions $\varphi(x)$ on $\mathcal{C}$: $\varphi(tx) = t^{\sigma,\varepsilon}\varphi(x)$, we use the notation $t^{\sigma,\varepsilon} = |t|^\sigma \operatorname{sgn}^\varepsilon t$. We construct *polynomial quantization* on M, see [1] for quantization on para-Hermitian spaces. Now for an initial operator algebra we take $T_{\sigma,\varepsilon}(\mathrm{Env}(\mathfrak{g}))$. Then symbols (co- and contravariant) turn out to be *polynomials* on M. Here is the definition of the covariant symbol $F(x,y)$ of an operator $D = T_{\sigma,\varepsilon}(X)$, $X \in \mathrm{Env}(\mathfrak{g})$, it is: $F(x,y) = [x,y]^{-\sigma,\varepsilon}(D \otimes 1)[x,y]^{\sigma,\varepsilon}$.

The passage from the contravariant symbol of an operator to its covariant symbol is an integral operator $\mathcal{B}$, calling the *Berezin transform*. Our main formula expresses $\mathcal{B}$ in terms of Δ_2 and Δ_4. Namely, let l, c be variables, $m = (n-4)/2$, denote $A =$

$l(l+n-3)+m^2$, $B=c(c+1)-m$, put $\lambda = 2\left(A+B-m(m-1)\right)$, $\mu = 16\left(AB+m^3\right)$. Introduce a function

$$\Psi(\lambda,\mu) = \frac{\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\sigma+n-2)}{\Gamma(\sigma+1-l)\Gamma(\sigma+n-2+l)} \times \\ \times \frac{\Gamma(\sigma+m+1)\Gamma(\sigma+n-2-m)}{\Gamma(\sigma+m+1-c)\Gamma(\sigma+n-2-m+c)}\,.$$

then $\mathcal{B} = \Psi(\Delta_2, \Delta_4)$. It gives a full asymptotic decomposition and the correspondence principle.

Supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR): grant 13-01-00952-a, and Russian Science Support Foundation.

REFERENCES

1. *Molchanov V. F.* Quantization on para-Hermitian symmetric spaces. Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 1996, vol. 175, 81–95.

А. П. Чеголин (ЮФУ, Россия)
apchegolin@mail.ru

ДВУМЕРНЫЕ ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Данная работа посвящена изучению дробных производных в классах Гельдера в двумерном случае. В основе этих исследований положены результаты для одномерного случая, наиболее подробно изложенные в книгах [1,2]. Классы Гельдера вводятся по аналогии с одномерным случаем и, по сути, означает равномерную гельдеровость. Обобщая одномерный случай, вводим в рассмотрение дробные интегралы на прямоугольнике. Такое определение позволяет говорить о сохранении основных свойств дробных интегралов, например, полугруппового свойства. Дробные производные также вводятся по аналогии с одномерным случаем. Определенные таким образом производные обращают дробные интегралы соответствующих порядков на гельдеровских функциях. Кроме того, справедливы представления, являющиеся аналогами хорошо известного в одномерном случае представления в форме Маршо. Основными результатами являются теоремы о действии дробных производных в классах Гельдера, а также некоторых модифицированных гельдеровских классах на прямоугольнике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения. – Ростов н/Д : изд-во Рост. ун-та. 1984. 280с.

2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника. 1987. 688с.

А. Б. Шишкин, Т. А. Волковая (КубГУ, Россия)
shishkin-home@mail.ru

СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ СИММЕТРИЧНОЙ СВЕРТКИ

Пусть $\pi(\zeta)$ — целая функция минимального типа. Целая функция $\psi(\zeta)$ называется *целой симметричной* функцией, если она представляется в виде композиции $\varphi(\pi(\zeta))$, где $\varphi(\xi)$ — некоторая целая функция. Обозначим $\mathbf{C}[\xi]$ — кольцо многочленов от ξ, $\mathbf{C}[\pi(\zeta)]$ — кольцо многочленов от $\pi(\zeta)$, $O(\mathbf{C})$ — пространство целых функций (с топологией равномерной сходимости), $O_\pi(\mathbf{C})$ — пространство целых симметричных функций. Топология в пространстве $O_\pi(\mathbf{C})$ индуцируется из пространства $O(\mathbf{C})$. Линейное непрерывное отображение $\mathrm{sym} : O(\mathbf{C}) \to O_\pi(\mathbf{C})$ назовем *оператором симметризации*, если выполнены следующие условия: $\mathrm{sym}\, 1 = 1$; $\mathrm{sym}\, \mathbf{C}[\xi] = \mathbf{C}[\pi(\zeta)]$; для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ найдутся такие $N \in \mathbf{N}$ и $R > 0$, что для всех $n \geq N$ вне круга $|\zeta| < R$ выполняется неравенство

$$|(\mathrm{sym}\, \xi^n)(\zeta)| \leq \left(\frac{n}{\varepsilon_0}\right)^n e^{\varepsilon|\zeta| - n}.$$

Для каждой целой функции $\pi(\zeta)$ минимального типа существует бесконечное множество операторов симметризации.

Предположим, что Ω, G — выпуклые области, $\overline{G} \subset \Omega$, $\psi(D) : O(\Omega) \to O(G)$ — линейный непрерывный дифференциальный оператор бесконечного порядка. Оператор $(\mathrm{sym}\, \psi)(D) : O(\Omega) \to O(G)$ называем *симметризацией дифференциального оператора* $\psi(D)$ и обозначаем символом $\mathrm{sym}\, \psi(D)$. Если $\psi(\zeta) := e^{h\zeta}$, то при достаточно малом $|h|$ соответствующий дифференциальный оператор $\psi(D)$ функции $f \in O(\Omega)$ ставит в соответствие ее сдвиг $f(z+h) \in O(G)$ на шаг h. Симметризацию этого оператора называем *симметричным сдвигом на шаг* h и обозначаем символом $\mathrm{sym}\, f(z+h)$.

Выберем произвольным образом непрерывный на пространстве $O(G)$ функционал S и рассмотрим однородное уравнение *симметричной свертки*

$$\langle S, \mathrm{sym}\, f(z+h) \rangle = 0, \quad f \in O(\Omega).$$

Пространство решений этого уравнения является замкнутым подпространством в пространстве $O(\Omega)$ инвариантным относительно оператора $\pi(D)$. Доказано, что оно допускает спектральный синтез. Получены некоторые достаточные условия, при которых пространство решений конечной системы таких уравнений тоже допускает спектральный синтез. Эти результаты обобщают широко известные теоремы, полученные ранее в ситуации $\pi(\zeta)$ — многочлен.

A. A. Shkalikov (Lomonosov Moscow State University, Russia)

NEW TYPE RESULTS ON PERTURBATIONS OF SELF-ADJOINT AND NORMAL OPERATORS

In the first part of the talk we shall deal with perturbations of a self-adjoint or normal operator T with discrete spectrum. There are results which allow to compare the eigenvalue counting functions $n(r, T)$ and $n(r, T + B)$, provided that the perturbation B is relatively compact or p-subordinated to T, i.e.

$$\|Bx\| \leqslant \mathrm{const}\|Tx\|^p\,\|x\|^{1-p}, \quad \text{for } x \in \mathcal{D}(T) \tag{1}$$

with some $p < 1$. There are results (obtained by M.Keldysh, F.Brauder, S.Agmon, V.Lidskii, I.Gohberg and M.Krein, A.Markus and V.Matsaev, V.Kaznelson, M.Agranovich and others) which allow to state that the eigen and associated vectors of the perturbed operator $T+B$ form a basis for Abel summubility method or an uncoditional basis, provided that some relations between p and the order of growth of $n(r, T)$ hold. We shall present similar results provided that the condition (1) is replaced by a weaker assumption

$$\|B\varphi_k\| \leqslant \mathrm{const}|\mu_k|^p,$$

where $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ is an orthonormal system of the eigenvectors corresponding to the eigenvalues $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$. The novelty will be demonstrated by concrete examples.

In the second part we will discuss perturbations of a self-adjoint operator T whose spectrum consists of infinitely many components $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ separated by gaps: $\mathrm{dist}(\sigma_k, \sigma_{k+1}) \geqslant \mathrm{const}$.

М. А. Шубарин (ЮФУ, Россия)
mas102@mail.ru

ОБОБЩЁННЫЕ АБСТРАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА И МАРЦИНКВИЧА

Функцию $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ называют характеристической функцией (точнее, характеристической функцией интерполяционного функтора), если $\Phi \not\equiv 0$ и

I. Φ — однородная функция, т.е. $\Phi(tx, ty) = t\Phi(x, y)$ для произвольных положительных чисел x, y, t;

II. Φ — неубывающая функция по каждой переменной.

Пусть Φ — характеристическая функция и $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — интерполяционная пара банаховых пространств, $1 \leqslant p < +\infty$.

Пространство $M_{\Phi,p}(\overline{X}) = M_{\Phi,p}(X_0, X_1)$ состоит из всех $x \in X_0+X_1$, для которых конечна норма $\|\cdot\|^M_{\Phi,p}$,

$$\|x\|^M_{\Phi,p} := \begin{cases} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{K(1,t,x,X_0,X_1)}{\Phi^*(1,t)}\right]^p \frac{\Phi'_t(1,t)}{\Phi(1,t)}\, dt \right\}^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty \\ \sup\limits_{t_0>0, t_1>0} \left[\frac{K(t_0,t_1,x,X_0,X_1)}{\Phi^*(t_0,t_1)}\right], & p = \infty \end{cases}.$$

Пространство $\Lambda_{\Phi,p}(\overline{X}) = \Lambda_{\Phi,p}(X_0, X_1)$ состоит из тех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма $\|\cdot\|^\Lambda_{\Phi,p}$,

$$\|\cdot\|^\Lambda_{\Phi,p} := \inf \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi^p(\|x_k\|_0, \|x_k\|_1) \right)^{1/p},$$

где точная нижняя грань берётся по множеству разложений

$$x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k, x_k \in X_0 \cap X_1.$$

В докладе предполагается сделать обзор свойств пространств $\Lambda_{\Phi,p}(\overline{X})$ и $M_{\Phi,p}(\overline{X})$.

Например, при выполнении дополнительных условий, имеет место соотношение двойственности: $\Lambda'_\Psi(X_0, X_1) = M_{\Psi^*}(X'_0, X'_1)$.

М. У. Яхшибоев (Самаркандский филиал ТУИТ, Узбекистан)
yahshiboev@rambler.ru

ТЕОРЕМЫ ОПИСАНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ АДАМАРА - ЧЖЕНЯ

Опредление. Для функции $\varphi(x)$, заданной на полуоси $x \in R^1_+$ интеграл

$$\left(I^\alpha_c \varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \int\limits_c^x \frac{\varphi(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t}, & x > c, \alpha > 0, \\ \int\limits_x^c \frac{\varphi(t)}{\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t}, & x < c, \alpha > 0, \end{cases}$$

называется интегралом дробного порядка α по Адамару-Чженя.

Определение. Конструкцию

$$\mathbf{D}^\alpha_c f = \frac{1}{\chi(\alpha, e)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(\tilde{\Delta}^e_t f_{c+}\right)(x) + \left(\tilde{\Delta}^e_{t^{-1}} f_{c-}\right)(x)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t},$$

с нормировочным множителем $\chi(\alpha,e)=\int\limits_0^{+\infty} t^{-1-\alpha}\left(1-e^{-t}\right)^e dt$ (см. [1], с. 102), назовем дробной производной Маршо-Адамар-Чженя.

В работе [2] рассматривается различные способы урезания конструкций Маршо-Адамара-Чженя для дробного дифференцирования $\mathbf{D}_c^\alpha f$. Эти различные варианты урезания в данной работе применяются для описания дробного интеграла (1) от функций из $L_p^{loc}\left(R_+^1,\frac{dx}{x}\right)$.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(x)$ была представлена в виде $f=I_c^\alpha\varphi,\ \varphi\in L_p^{loc}\left(R_+^1,\frac{dx}{x}\right)$, где $\alpha>0,\ c\in R_+^1,\ 1\le p<+\infty$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)\in L_p^{loc}\left(R_+^1,\frac{dx}{x}\right)$ и в $L_p^{loc}\left(R_+^1,\frac{dx}{x}\right)$ существовал

$$\lim_{\rho\to 1}\varphi_\rho(x),$$

где

$$\varphi_\rho(x)=\left(\mathbf{D}_{c,\rho}^\alpha f\right)(x)=\frac{1}{\chi(\alpha,e)}\left[\frac{f(x)}{\alpha\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^\alpha}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{e}(-1)^n\begin{pmatrix} e\\ k\end{pmatrix}k^\alpha\begin{cases}\int\limits_{k\ln\frac{1}{\rho}}^{\left|\ln\frac{x}{c}\right|}\frac{f\left(x\cdot e^{-t\,sign\left(\ln\frac{x}{c}\right)}\right)}{t^{1+\alpha}}dt & \left|\ln\frac{x}{c}\right|>k\ln\frac{1}{\rho},\\ 0, & \left|\ln\frac{x}{c}\right|<k\ln\frac{1}{\rho}.\end{cases}\right]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Из-во: Наука и техника. 1987. с. 688.

2. *Яхшибоев М. У.* О дробных степенях некоторых дифференциальных операторов, коммутирующих с растяжениями. Естественные и технические науки. N. 4 (13). 2004, Москва. 3 с.

Секция II

Теория функций
Руководитель секции:
В.С. Пилиди

Н. Ф. Абузярова (Башгосуниверситет, Россия)
abnatf@gmail.com

О ГЛАВНЫХ ПОДМОДУЛЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ НЕОБРАТИМЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть $[a_1; b_1] \Subset [a_2; b_2] \Subset \ldots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a; b) \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{P}(a; b)$ индуктивный предел последовательности банаховых пространств $\{P_k\}$, каждое из которых состоит из всех целых функций φ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)}, \quad y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + \mathrm{i}y.$$

Пространство $\mathcal{P}(a; b)$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$). Рассмотрим *главные подмодули* $\mathcal{J}_\varphi$ – замыкания в $\mathcal{P}(a; b)$ множеств вида $\{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}$, $\varphi \in \mathcal{P}(a; b)$. Для замкнутого подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a; b)$ положим $c_{\mathcal{J}} = \inf\limits_{\psi\in\mathcal{J}} c_\psi$, $d_{\mathcal{J}} = \sup\limits_{\psi\in\mathcal{J}} d_\psi$, где $\mathrm{i}\,[c_\psi; d_\psi]$ – индикаторная диаграмма функции ψ. Множество $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$ – *индикаторный отрезок* подмодуля $\mathcal{J}$. *Дивизор* n_ψ *функции* $\psi \in \mathcal{P}(a; b)$:

$$n_\psi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \psi(\lambda) \neq 0, \\ m, & \lambda \text{ – нуль } \psi \text{ кратности } m. \end{cases}$$

Дивизор подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a; b)$ определяется как $n_{\mathcal{J}}(\lambda) = \min\limits_{\psi\in\mathcal{J}} n_\psi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит все функции $\psi \in \mathcal{P}(a; b)$, удовлетворяющие условиям: 1) $n_\psi(z) \geq n_{\mathcal{J}}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; 2) индикаторная диаграмма функции ψ содержится в множестве $\mathrm{i}[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$. Для функции $\varphi \in \mathcal{P}(a; b)$ обозначим через $\mathcal{J}(\varphi)$ слабо локализуемый подмодуль с дивизором, равным n_φ и индикаторным отрезком, равным $[c_\varphi; d_\varphi]$. Легко проверить, что $\mathcal{J}_\varphi \subset \mathcal{J}(\varphi)$. Равенство $\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi)$ эквивалентно слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ и, как показывает пример, построенный в работе [1], не всегда справедливо. Достаточное условие слабой локализуемости подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ состоит в требовании *обратимости* функции φ означающей, что если главный идеал $\mathcal{I}_\varphi$, порожденный этой функцией в алгебре $\mathcal{P}(-\infty; \infty)$, замкнут. В этом случае $\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \ \ p \in \mathbb{C}[z]\}$. Оказывается, что обратимость порождающей функции не является необходимым условием для выполнения этих соотношений. Пусть $(a; b) \supset [-\pi; \pi]$ Положим $\varphi(z) = \frac{s(z)}{s_1(z)} + \frac{\pi z s(z)}{s_0(z)}$, где $s(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$, $s_1(z) = s(\sqrt{z}) = \frac{\sin \pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}}$, $s_0(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{2^{2k}}\right)$.

Теорема. *Функция φ содержится в $\mathcal{P}(a; b)$ и не обратима. При этом $\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \ \ p \in \mathbb{C}[z]\}$.*

Работа выполнена при поддержке гранта №01201456408 Минобрнауки РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aleman A., Baranov A., Belov Yu.* Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation. arXiv:1309.6968v2 [math.CV]

Г. М. Айрапетян (Ереван)
hhayrapet@gmail.com
В. Г. Петросян (Ереван)
v.g.petrosyan91@gmail.com

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $\rho(t) = |t-t_1|^{\alpha_1}|t-t_2|^{\alpha_2}\dots|t-t_m|^{\alpha_m}$, $t_k \in T$, $k = 1,\dots,m$, где $T = \{z; |z| = 1\}$ единичная окружность и α_k, $k = 1,\dots,m$ действительные числа. Обозначим

$$\rho_r(t) = \rho^*(t)|r^{\delta_1}t-t_1|^{n_1}|r^{\delta_2}t-t_2|^{n_2}\dots|r^{\delta_m}t-t_m|^{n_m},$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \alpha_k \le -1, \\ 0, & \alpha_k > -1, \end{cases} \qquad n_k = \begin{cases} [\alpha_k]+1, & [\alpha_k] \ne \alpha_k, \\ \alpha_k, & [\alpha_k] = \alpha_k, \end{cases}$$

а функция ρ^* определяется по формуле

$$\rho^*(t) = |t-t_1|^{\lambda_1}|t-t_2|^{\lambda_2}\cdots|t-t_m|^{\lambda_m},$$

для $\lambda_k = \alpha_k - n_k$. Ясно что $\lambda_k \in (-1,0]$ и $\rho^*(t) \in L^1(T)$.

Рассмотрим задачу Римана в следующей постановке:

Задача А. Пусть f произвольная измеримая на T функция из класса $L^1(\rho)$. Определить аналитическую в $D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{z; |z| > 1\}$, $D^- = \{z; |z| < 1\}$ функцию $\Phi(z)$, $\Phi(-\infty) = 0$ так, чтобы имело место граничное условие

$$\lim_{r\to 1-0} ||\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-\left(r^{-1}t\right) - f(t)||_{L^1(\rho_r)} = 0,$$

где $a(t)$, $a(t) \ne 0$ произвольная функция из класса $C^\delta(T)$, $\delta > 0$, $\Phi^\pm$ сужения функции Φ на $D^\pm$ соответственно.

Аналогичная задача, когда $\rho(t) \equiv 1$, исследована в работе [1].

Обозначим $\kappa = \mathrm{ind}\, a(t)$, $t \in T$. Доказывается, что задача А разрешима для любой функции f, если $\sum_{k=1}^m n_k + \kappa \ge 0$. При $\sum_{k=1}^m n_k + \kappa < 0$ получены необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи. Решения получены в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айрапетян Г. М.* Задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1. Изв. АН Арм. ССР мат. 1990, XXУ, 1,3-20.

M. A. Akturk (Istanbul University, Turkey)
mali_akturk@hotmail.com

SHARP MARKOV-TYPE INEQUALITIES FOR RATIONAL FUNCTIONS ON SEVERAL INTERVALS

(joint with A. Lukashov (Fatih university,Turkey & Saratov State university, Russia))

We consider sharp Rusak- and Markov-type inequalities for rational functions on several intervals when the system of intervals is a “rational function inverse image” of an interval and those functions are large in gaps.

Let $\Re(\xi_1,\ldots,\xi_{2n})$ be the set of all “ rational functions ”of the form

$$r(x)=\frac{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}{\sqrt{\rho_\nu(x)}},$$

$b_0,\ldots,b_n\in\mathbb{C}$ and $\rho_\nu(x)=\prod\limits_{j=1}^{2n}(x-\xi_j)$ is a real polynomial of degree ν which is positive on $E=\bigcup\limits_{j=1}^{l}[a_{2j-1},a_{2j}]$, $-1=a_1<a_2<\ldots<a_{2l}=1$. ($\xi_j$ might be equal to ∞, then $(x-\xi_j)$ should be omitted)

Consider also the set $\Re^*(\xi_1,\ldots,\xi_{2n})$ which consists of those functions

$$r\in\Re(\xi_1,\ldots,\xi_{2n}),$$

which satisfy $|r(x)|>\|r\|_{C(E)}$ for all $x\in[-1,1]\backslash E$.

Theorem 1. Suppose that $\sum\limits_{j=1}^{2n}\omega_k(\xi_j)=2q_k,\ q_k\in\mathbb{N},\ k=1,\ldots,l$, and $\xi_j\in\overline{\mathbb{R}}$, $|\xi_j|>1, j=1,\ldots,2n$. Then for any $r\in\Re^*(\xi_1,\ldots,\xi_{2n})$, $\|r\|_{C(E)}=1$ the inequality

$$\|r'\|_{C(E)}\le\|m_n'\|_{C(E)} \tag{1}$$

is valid, where

$$m_n(x)=\cos\left(\gamma_n(x)\right),\gamma_n(x)=\frac{\pi}{2}\int\limits_{a_1}^{x}\sum_{j=1}^{2n}\varpi_E(x,\xi_j)\,dx,$$

$\varpi_E(z,x)=\frac{\partial}{\partial x}\omega\left(z,E\cup[a_1,x],\mathbb{C}\backslash E\right);\omega_k(\xi_j)=\omega(\xi_j,[a_{2k-1},a_{2k}],\mathbb{C}\backslash E)$, $\omega(z,G,\mathbb{C}\backslash E)$ is the harmonic measure of a set $G\subset E$ at a point $z\in\mathbb{C}\backslash E$.

For $r(x)\equiv\varepsilon m_n(x),\ |\varepsilon|=1$, equality in (1) is attained.

Research supported by RFBR-TUBITAK (14-01-91370/113F369).

R. Akgun (Balikesir University, Turkey)
rakgun@balikesir.edu.tr

POLYNOMIAL APPROXIMATION IN BERGMAN SPACES

The purpose of this work is to obtain Jackson and converse inequalities of polynomial approximation in Bergman spaces. Some known results, given for moduli of continuity, are extended to the moduli of smoothness. We proved some simultaneous approximation theorems and obtained the Nikolskii-Stechkin inequality for polynomials in these spaces.

REFERENCES

1. *Shabozov M. Sh. and Shabozov O. Sh.* Best approximation and the value of the widths of some classes of functions in the Bergman space $B_p 1 \le p \le \infty$. Dokl. Akad. Nauk. 2006. Vol. 410, N. 4. P. 661–664.

2. *Storozhenko E. A.* On a Hardy-Littlewood problem. Mat. Sb. (N.S.). 1982. Vol. 119(161), N. 4. P. 564–583.

3. *Xing Fu Chong* A Bernstein-type inequality in Bergman spaces $B_q^p, p > 0, q > 1$. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.). 2006. Vol. 49, N. 2. P. 431–434.

Х. Х. Бурчаев (Чеченский госуниверситет, Россия)
bekhan.burchaev@gmail.com

ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ БЕРГМАНА И ХАРДИ

Обозначения и определения.

$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; $T = \{t = e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi\}$; *$A$ - функции, аналитические в Δ; $A_p(H_p), 0 < p < \infty$, - пространство Бергмана (Харди); $f \in A, f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, f_k - тейлоровы коэффициенты; $D_{\alpha,\beta} f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(2+\beta+k)} f_k z^k$ - производная порядка $\alpha > -2$ с поправкой $\beta > -2$, $\alpha + \beta > -2$, от $f(z)$; $D_{\alpha,\beta}^{-1}$ - оператор, обратный оператору $D_{\alpha,\beta}$ в A, $\mathcal{N}_\alpha f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f_k z^k}{(k+1)^\alpha}$.*

В [1] дано описание некоторых свойств интегралов и производных по Ньютону – Лейбницу функций из $A_p(H_p)$. Продолжением подобных исследований являются, [2]

Теорема 1. *Оператор $D_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta} D_{\alpha,0} = P_{\alpha,\beta} \mathcal{N}_\alpha$, где операторы $S_{\alpha,\beta}$ и $P_{\alpha,\beta}$ гомеоморфны на $A_p, 0 < p < \infty$.*

Теорема 2. *Условие $f \in A_p, 0 < p < \infty$, равносильно $(1 - |z|^2)^\alpha D_{\alpha,\beta} f \in L_p(\Delta), \alpha p > -1$.*

Теорема 3. *Если $f \in A_p, 0 < p < 1$, то $D_{1/p,\beta}^{-1} \in H_p$. Эта теорема необратима .*

Теорема 4. *Если $f \in H_p.0 < p < \infty$, и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\|f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})\|_{H_p}^p dr}{1-r}$ сходится, то $D_{\alpha,0} f \in A_q$, где $0 < \alpha \le 1/p, q = 2p/(1 + \alpha p)$.*

Свойства интегралов и производных дробного порядка находят эффективное применение в решении ряда экстремальных задач в пространствах аналитических функций (см., например, [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рябых В. Г.* О некоторых свойствах аналитических функций класса H'_p. ДАН СССР. 1964. Т. 158. N. 3.

2. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Интегродифференциальные операторы в пространствах аналитических функций и некоторые их приложения. Ростов–на–Дону. ИЦ ДГТУ. 2014.

Х. Х. Бурчаев (Чеченский госуниверситет, Россия)
bekhan.burchaev@gmail.com
В. Г. Рябых (Южный федеральный университет, Россия)
ryabich@aaanet.ru
Г. Ю. Рябых (Донской гостехуниверситет, Россия)
ryabich@aaanet.ru

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ В ПРОСТРАНСТВЕ H_p

Обозначения.

$D(D(R)) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ $(\{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\},\ R > 1)$*;* $T = \{t = e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi\}$*;* $A(A(R))$ *– функции, аналитические в* $D(D(R))$*; пространство Харди* H_p *– подпространство* $L_p(T)$*,* $0 < p < \infty$*, порожденное многочленами по неотриыательным степеням* $e^{i\theta}$*;* $l_g(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_T a(t)\bar{g}(t)\,d\theta$*,* $a \in H_p$*,* $g \in A$ *– линейный функционал над* H_p*;* $f(z)$*,* $z \in D$*, – экстремальная функция (э.ф.) линейного функционала* l *над* H_p*,* $0 < p < \infty$*, если* $f \in H_p$*,* $\|f\| = 1$ *и* $l(f) = \|l\|$*.*

В работе [1] ([2]) дано описание качественных свойств э.ф. и элемента наилучшего приближения (э.н.п.) $\chi \in H_q^0 = \{\chi \in H_q, \chi(0) = 0\}$, $p = 1(1 \le p < \infty)$, $1/q + 1/p = 1$, в соотношении двойственности

$$|f(t)|^p/f(t) = \bar{g}(t)/\|l\| - \chi(t)/\|l\|,$$

когда $g(t)$ удовлетворяет условию Дини (Липшица или Зигмунда; $g \in H_{q'}$, $q < q'$). Там же устанавливается связь между липшиевостью g и аналогичными свойствами для f. В [4] для $1 \le p \le 2$ доказано: если g аналитична в $D(R)$, то f аналитична в $D(R)$.

Продолжением указанных выше исследований являются

Теорема 1. *Если* $0 < p < \infty$*,* $g \in A(R)$*, то э.ф.* $f \in A(R)$*.*

Теорема 2. *Если* $2 \le p < \infty$*,* $g \in A(R)$*, то э.н.п.* $\chi \in A(R)$*.*

Теорема 3. *Если* $1 \le p < 2$*,* $g \in A(R)$*, то э.н.п.* $\chi(z)$*,* $z \in D$*, аналитически продолжим на* $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$*.*

Теоремы 1–3 доказываются методом погружения H_p в более широкое пространство. Этот метод находит эффективное применение и в исследовании подобных экстремальных задач в пространствах функций, близких к H_p (см., например, [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-00331).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carleson L., Jacobs S.* Best approximation by analytic functions. Archiv. math. 1972. N. 10. P. 219–229.

2. *Рябых В. Г.* Приближение аналитических функций неаналитическими. Мат. сборник 2006. Т. 197. N. 2. С. 87–96.

3. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Аналитичность в $\mathbb{C}$ экстремальных функций функционала, образованного полиномом над пространством Бергмана. Мат. форум. Исследования по математическому анализу. ЮМИ ВНЦ РАН и РСО–А. 2014. Т. 8. Ч. 1. С. 204–214.

4. *Пожарский Д. А., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним. Ростов–на–Дону. ИЦ ДГТУ. 2011.

А. И. Вагабов, Х. А. Абдусаламов (Дагестанский государственный университет)
algebra-dgu @mail.ru

N-КРАТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ЭЛЕМЕНТАМ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Нами решается задача теории n-кратного разложения (n произвольных функций) по корневым функциям краевой задачи с n-кратным корнем основного характеристического уравнения $(\phi - 1)^n = 0$.

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^n y\left(x\right) = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

$$U_s\left(y\right) \equiv \left.\frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}}\right|_{x=0} = 0, \quad s = \overline{1,\, n-1},$$

$$U_n\left(y\right) \equiv \left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=1} - \lambda^{n-1}\left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=0} = 0 \tag{2}$$

где λ-комплексный параметр.

Теорема 1. *Пусть $f_0, f_1, \ldots f_{n-2}, f_{n-1}$- функции, имеющие n непрерывных производных, на (0,1). Считаем, что $\left. f_i^{(k)}\left(x\right)\right|_{x=0,1} = 0, \quad k = \overline{0,\, n-1}$. Справедлива формула n- кратного разложения в ряды Фурье по корневым элементам задачи (1) -(2).*

R. A. Veprintsev (Tula State University, Russia)
veprintsevroma@gmail.com

DUNKL ANALYSIS AND FUNDAMENTAL SETS OF FUNCTIONS ON THE UNIT SPHERE

We study some aspects of fundamental sets ("FS" for short) of functions on the unit sphere in the weighted L_p-spaces, where $1 \le p < \infty$.

To formulate our results, we use the notation from the paper [1].

For $g \in L_{1,\lambda_\kappa+1/2}[-1,1]$, $G \subset L_{1,\lambda_\kappa+1/2}[-1,1]$, $f \in L_{1,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$, and $\mathcal{F} \subset L_{1,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$, we need introduce the following notation:

$\mathcal{M}_\kappa(g) \overset{\text{def}}{=} \bigl\{y \mapsto V_\kappa\bigl[g(\langle x,\cdot\rangle)\bigr](y)\colon\ x \in \mathbb{S}^{d-1}\bigr\}$, $f \star_\kappa G \overset{\text{def}}{=} \bigl\{f \star_\kappa g\colon\ g \in G\bigr\}$,

$\mathcal{F} \star_\kappa g \overset{\text{def}}{=} \{f \star_\kappa g\colon\ f \in \mathcal{F}\}$, $M_\tau^\kappa(\mathcal{F}) \overset{\text{def}}{=} \bigl\{M_\tau^\kappa f\colon\ f \in \mathcal{F}\bigr\}$, $\tau \in [-1,1]$,

$\Lambda_{n,\kappa}(g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-1}^{1} g(t) C_n^{\lambda_\kappa}(t)\,\mathrm{d}m_{\lambda_\kappa+1/2}(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Theorem 1. *Let $g \in L_{p,\lambda_\kappa+1/2}[-1,1]$. $\mathcal{M}_\kappa(g)$ is a FS in $L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$ iff $\Lambda_{n,\kappa}(g) \ne 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

Theorem 2. *Suppose that $p,q,r \in [1,\infty)$ and $p^{-1} = q^{-1} + r^{-1} - 1$. Let $\mathcal{F} \subset L_{q,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$ and $g \in L_{r,\lambda_\kappa+1/2}[-1,1]$.*
(I) *If $\mathcal{F} \star_\kappa g$ is a FS in $L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$, then $\Lambda_{n,\kappa}(g) \ne 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.*
(II) *Let $\Lambda_{n,\lambda_\kappa+1/2}(g) \ne 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. If $\mathcal{F}$ is a FS in $L_{q,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$, then $\mathcal{F} \star_\kappa g$ is a FS in $L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$.*

Theorem 3. *Let $\mathcal{F} \subset L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$, $\tau \in [-1,1]$.*
(I) *If $M_\tau^\kappa(\mathcal{F})$ is a FS in $L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$, then $C_n^{\lambda_\kappa}(\tau) \ne 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.*
(II) *Let $C_n^{\lambda_\kappa}(\tau) \ne 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. If $\mathcal{F}$ is a FS in $L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$, then $M_\tau^\kappa(\mathcal{F})$ is a FS in $L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$.*

Theorem 4. *Let $G \subset L_{1,\lambda_\kappa+1/2}[-1,1]$, $f \in L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$. If $f \star_\kappa G$ is a FS in $L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$, then $\bigl\{M_\tau^\kappa f\colon\ \tau \in [-1,1]\bigr\}$ is a FS in $L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$.*

Theorem 5. *Let $g \in L_{p,\lambda_\kappa+1/2}[-1,1]$, $G_\kappa^\xi(x) = V_\kappa\bigl[g(\langle \xi,\cdot\rangle)\bigr](x)$ for ξ, $x \in \mathbb{S}^{d-1}$.*
(I) *Let $\tau \in [-1,1]$. $\bigl\{M_\tau^\kappa\bigl[G_\kappa^\xi\bigr]\colon\ \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\bigr\}$ is a FS in $L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$ iff $C_n^{\lambda_\kappa}(\tau) \ne 0$ and $\Lambda_{n,\kappa}(g) \ne 0$ for all $n \in \mathbb{N}_0$.*
(II) *Let $\tau \in (-1,1)$. $\bigl\{G_\kappa^\xi \pm M_\tau^\kappa\bigl[G_\kappa^\xi\bigr]\colon\ \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\bigr\}$ is a FS in $L_{p,\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$ iff $\Lambda_{n,\kappa}(g) \ne 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

This work was supported by the RFBR (grant no. 13-01-00045), the Minobrnauki of Russia (state contract no. 1.1333.2014K).

REFERENCES

1. *Veprintsev R. A.* Some problems of Dunkl harmonic analysis on the sphere and the ball. Izv. TulGU. Estestv. Nauki. 2013. № 3. P. 6–26.

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков (Донецкий национальный университет, Донецк, Украина)
valeriyvolchkov@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА ГРУППЕ КОНФОРМНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

Пусть G – группа конформных автоморфизмов единичного круга в комплексной плоскости, $K \subset G$ – группа поворотов.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{U}$ – ненулевое подпространство в $C(G)$, инвариантное относительно всех правых сдвигов из G и всех сопряжений из подгруппы K. Тогда $\mathcal{U}$ содержит собственную функцию f оператора Лапласа на группе G, инвариантную относительно K. При этом подпространство в $C(G)$, порожденное указанными сдвигами функции f является минимальным, т.е. не содержит собственных подпространств, инвариантных относительно указанных сдвигов и сопряжений.*

Отметим, что теорема 1 станет неверной, если рассматривать подпространство $\mathcal{U}$, инвариантное только относительно правых сдвигов.

Доказательство теоремы 1 основано на развитии методов, предложенных авторами в [1]. Некоторые результаты, связанные со спектральным анализом для подпространств в $C(G)$, инвариантных относительно двусторонних сдвигов, содержатся в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. London: Springer. 2009. 671 pp.

2. *Ehrenpreis L., Mautner F.* Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups II. Trans. Amer. Soc. 1957. V. 84. P. 1–55.

Н. П. Волчкова (Донецкий национальный технический университет, Донецк, Украина)
volna936@gmail.com

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ С НУЛЕВЫМ ПОТОКОМ ЧЕРЕЗ СФЕРЫ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

Пусть $0 < r < R \leqslant \infty$, $\mathbf{V}_r(B_R)$ – множество непрерывных векторных полей $\mathbf{A} : B_R \to \mathbb{R}^n$, имеющих нулевой поток через все сферы радиуса r, лежащие в B_R. (Символ B_R обозначает открытый шар из $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центом в нуле.) Пусть S^{n-1} – единичная сфера из $\mathbb{R}^n$ с центом в нуле, $\mathcal{H}_k$ – пространство сферических гармоник степени k на S^{n-1}. Пусть d_k – размерность $\mathcal{H}_k$, $\left\{Y_l^{(k)}\right\}_{l=1}^{d_k}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Для точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho = |\mathbf{x}|$, а если $\mathbf{x} \neq 0$, то $\sigma = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Всякой функции $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье $f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$, $\rho \in (0, R)$, где $f_{k,l}(\rho) = \int\limits_{S^{n-1}} f(\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma$.

Обозначим через ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; t)$ гипергеометрическую функцию с индексами (1,2). Пусть также $\{\nu_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{A} : B_R \to \mathbb{R}^n$ *– векторное поле класса* C^∞. *Тогда* $\mathbf{A}$ *принадлежит* $\mathbf{V}_r(B_R)$ *в том и только том случае, когда*

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^s(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in B_R,$$

где $\mathbf{A}^s$ *– соленоидальное векторное поле класса* C^∞, B *– скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами*

$$B_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,k,l} \rho^k {}_1F_2 \left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2} + 1, \frac{n}{2} + k; -\left(\frac{\nu_m \rho}{2r}\right)^2 \right),$$

в которых константы $\gamma_{m,k,l}$ *убывают быстрее любой степени* ν_m *при* $m \to \infty$.

Отметим, что теорема 1 является развитием результатов В.В. Волчкова об описании функций с нулевыми интегралами по сферам фиксированного радиуса (см. [1]), а также усиливает один из результатов Д. Смита [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Acad. Publ. 2003. 454 pp.

2. *Smith J.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$. Proc. Camb. Phil. Soc. 1972. V. 72. P. 403–416.

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов
(Тульский госуниверситет, Россия)
dvgmail@mail.ru, ivaleryi@mail.ru

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА БОМАНА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАНКЛЯ

Пусть $\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x,y)}\, d\mu_k(x)$ — преобразование Данкля функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, где $d\mu_k(x) = c_k v_k(x)\, dx$ и вес $v_k(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)}$, R_+ — положительная подсистема системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ (применяются стандартные обозначения из гармонического анализа Данкля [1]). При $k \equiv 0$ имеем случай преобразования Фурье.

Экстремальная задача Бомана заключается в нахождении величины

$$\mathrm{B}_k(V) = \inf \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\, d\mu_k(x),$$

где $V \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклое центрально-симметричное компактное тело с центром в нуле, инвариантное относительно группы отражений системы корней R, и нижняя грань берется по неотрицательным непрерывным функциям f, для которых $|x|^2 f \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, $\operatorname{supp} \mathcal{F}_k(f) \subset V$, $\mathcal{F}_k(f)(0) = 1$.

Теорема 1. *Если* $\lambda_k = d/2 - 1 + \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)$, *то в случае евклидова шара* B^d *имеем* $\mathrm{B}_k(B^d) = 4q^2_{\lambda_k}$, *где* q_λ *— первый положительный нуль функции Бесселя* $J_\lambda(t)$.

Эта теорема обобщает результаты для случая преобразования Фурье, полученные H. Bohman ($d = 1$) и W. Ehm, T. Gneiting, D. Richards ($d \geq 2$) (см. [2], где задача Бомана решена для преобразования Ганкеля). Экстремальную функцию мы здесь не приводим.

В случае системы корней $R = \{\pm e_i\}_{i=1}^d$ (e_i — единичные орты), веса $v_k(x) = \prod_{j=1}^{d} |x_j|^{2\lambda_j+1}$ задача Бомана решена и для параллелепипеда V.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00045), Министерства образования и науки РФ (госзадания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К) и Фонда Дмитрия Зимина «Династия».

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Rösler M.* Dunkl Operators: Theory and Applications. Lecture Notes in Math. Vol. 1817. Berlin: Springer, 2003. P. 93–135.

2. *Горбачев Д. В.* Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье–Ганкеля. Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.

А. М. Дьячков (МГУП, Россия)
alexdya@mail.ru

ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА НА КЛАССАХ ЧАНТУРИИ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Пусть $v(k) > 0, v(k) \uparrow \infty, v(k)/k \downarrow 0\,(k \in \mathbb{N}, k \to \infty)$. Функции $f(x), x \in [0,1]$, для которых ограничена скорость роста модуля вариации $V(f,n) = O(v(n))$. образуют класс Чантурии Cv. В [1] найдено достаточное условие на классы Cv_1 и Cv_2, при котором для любых функций $f \in Cv_1$ $g \in Cv_2$, не имеющих общих точек разрыва, существует интеграл Стилтьеса $S(f,g) = \int_0^1 f(x)\,dg(x)$, и установлено, что это условие точное в случае $0 < \alpha \leq \ln v_i(n)/\ln n \leq \beta < 1$, $i = 1, 2$. Последнее ограничение можно снять, если при формулировке условия использовать (v_1, v_2)-лакунарную в смысле К.И. Осколкова последовательность: $n_1 = 1$, а при $k \in \mathbb{N}$ полагаем

$$n_{2k} = \min\{n \geq n_{2k-1} : \min\left(\tfrac{v_2(n+1)}{v_2(n_{2k-1})}; \tfrac{v_1(n_{2k-1})(n+1)}{n_{2k-1}v_1(n+1)}\right) \geq 2\},$$
$$n_{2k+1} = \min\{n \geq n_{2k} : \min\left(\tfrac{v_1(n+1)}{v_1(n_{2k})}; \tfrac{v_2(n_{2k})(n+1)}{n_{2k}v_2(n+1)}\right) \geq 2\}.$$

Теорема. *Интеграл Стилтьеса* $S(f,g)$ *существует для любых функций* $f \in Cv_1, g \in Cv_2$, *не имеющих общих точек разрыва, в том и только том случае,* *когда выполнено условие:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_1(n_k)v_2(n_k)}{n_k} < \infty.$$

.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дьячков А. М.* Об интеграле Стилтьеса на классах Чантурии. Вестник МГУП. 2012. № 3. С. 9–18.

В. П. Заставный (Донецкий национальный университет)
zastavn@rambler.ru

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЁННОСТЬ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}^n$ ($f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$), если неравенство $\sum\limits_{k,j=1}^{m} c_k\bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0$ выполняется для любой конечной системы комплексных чисел $c_1, c_2, ..., c_m$ и точек $x_1, ..., x_m$ из $\mathbb{R}^n$.

Пусть ρ – норма на $\mathbb{R}^n$, а $\Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ класс непрерывных функций $f :\ [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ таких, что $f \circ \rho \in \Phi(\mathbb{R}^n)$.

В 1990-1991 гг автором было доказано, что если $z \in \mathbb{C}$, а $\rho(x) = \|x\|_1$ или $\rho(x) = \|x\|_2$, то $\operatorname{Re} e^{-zt} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho) \iff |\arg z| \leq \frac{\pi}{2n}$. В случае евклидовой нормы $\rho(x) = \|x\|_2$ эта задача была поставлена в 1989 году Леоненко и Ядренко.

Рассмотрим более общую задачу. Пусть заданы два комплексных числа $w = C + iD$ и $z = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta, C, D \in \mathbb{R}$. При каких условиях на $w, z \in \mathbb{C}$ функция

$$f_{w,z}(t) := \operatorname{Re}\left(we^{-zt}\right) = e^{-\alpha t}(C\cos\beta t + D\sin\beta t),\ t \geq 0,$$

принадлежит классу $\Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$? Яглом А. М. в 1952 г. показал, что условие $\beta D = C\alpha$, $\alpha > 0$ является достаточным для положительной определённости на $\mathbb{R}$ функции $e^{-\alpha|x|}(C\cos\beta x + D\sin\beta|x|)$.

В теоремах 1, 2, 3 получены общие необходимые условия, а в некоторых случаях и критерий.

Теорема 1. 1) *Если* $f_{w,z} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$, *то* $\operatorname{Re} w \geq 0$.
2) *Если* $\operatorname{Re} w = 0$, *то* $f_{w,z} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho) \iff f_{w,z} \equiv 0$.
3) *Если* $\operatorname{Re} z < 0$, *то* $f_{w,z} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho) \iff f_{w,z} \equiv 0$.
4) *Если* $\operatorname{Re} z > 0$ *и* $f_{w,z} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$, *то* $\operatorname{Re} w \geq 0$, $\operatorname{Re}(wz) \geq 0$ *и* $\operatorname{Re}(w\bar{z}^k) \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$.
5) $f_{w,z} \in \Phi(\mathbb{R}, \rho) \iff \operatorname{Re} w \geq 0$, $\operatorname{Re}(wz) \geq 0$, $\operatorname{Re}(w\bar{z}) \geq 0 \iff C \geq 0$, $|\beta D| \leq \alpha C$.
6) *Если* $\operatorname{Re} z = 0$ *и* $n \geq 2$, *то* $f_{w,z} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho) \iff \operatorname{Re} w \geq 0$, $\operatorname{Re}(wz) \geq 0$ *и* $\operatorname{Re}(w\bar{z}^k) \geq 0$, $k = 1, 2 \iff f_{w,z} \equiv C \geq 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\rho(x) = \|x\|_2$. *Тогда* $f_{w,z} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho) \iff \mathrm{Re}\, w \geq 0$, $\mathrm{Re}\,(wz) \geq 0$ *и* $\mathrm{Re}\,(w\overline{z}^k) \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Теорема 3. *Пусть* $\rho(x) = \|x\|_1$. *Тогда* $f_{w,z} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho) \iff \mathrm{Re}\, w \geq 0$, $\mathrm{Re}\,(wz^k) \geq 0$ *и* $\mathrm{Re}\,(w\overline{z}^k) \geq 0$, $k = 1, \ldots, n \iff C \geq 0$ *и* $|D\mathrm{Im}\, z^k| \leq C\mathrm{Re}\, z^k$, $k = 1, \ldots, n$.

Если w – вещественное положительное число, то оба условия из теорем 2, 3 эквивалентны условию $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2n}$.

А. Ю. Иванов (ДонНУ, г. Донецк, Украина)
sejang@ua.fm

О классе множеств Борсука

В 1933г. польский математик К.Борсук выдвинул гипотезу, которая впоследствии стала одной из центральных проблем комбинаторной геометрии.

Гипотеза К. Борсука *Всякое ограниченное множество* $F \subset \mathbb{R}^n$ *можно разбить на* $n+1$ *часть строго меньшего диаметра.*

Этой проблемой занимались такие математики как В.Г.Болтянский, Б.Грюнбаум, А.Хеппеш, Г.Эглстон, Л. Данцер, В. Кли и многие другие. Однако данная гипотеза была подтверждена только в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$. В 1993г. Д.Канном и Г.Калаи построен контрпример опровергающий данную гипотезу при больших размерностях. А в работах А. Бондаренко при помощи линейно-алгебраического метода показано, что гипотеза неверна уже при $n \geq 64$. Таким образом, вести речь о доказательстве гипотезы Борсука в $\mathbb{R}^n$ для произвольных множеств не имеет смысла. Ввиду этого на первый план выходит вопрос описания класса множеств для которых гипотеза К. Борсука справедлива.

Нами получены новые достаточные условия на множество из $\mathbb{R}^n$ позволяющие утверждать, что данное множество можно разбить на $n+1$ часть строго меньшего диаметра.

Для формулировки результата нам понадобятся некоторые построения. Определим функцию $\chi : G \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел, G — множество постоянной ширины, следующим образом. Для $x \in G$ положим $\chi(x)$ равной количеству диаметров множества G, проходящих через точку x. Если множество таких диаметров бесконечно, будем обозначать $\chi(x) = \infty$.

Обозначим множество точек нерегулярности границы множества G через $EP(G)$ ("essential points"), тогда $EP(G) = \{x | x \in \partial G : \chi(x) = \infty\}$. Введем также множество $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP(G)\}$.

Построим сферическое отображение типа Гаусса $\varsigma : \mathbb{S}^{n-1} \to \partial G$,где $\mathbb{S}^{n-1}$ - сфера в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1, G - множество постоянной ширины, следующим образом. Для

$\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ положим $\varsigma(\theta) = x,$ где $x, y \in \partial G, |x-y| = \mathrm{diam} G$ и $x - y = \theta \mathrm{diam} G$, т.е. x, y - диаметральные точки G в направлении θ.

Теорема 1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — множество постоянной ширины. Тогда, если существует подпространство U размерности $n-1$ такое, что $\Theta \bigcap U = \emptyset$, то множество G можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

П. А. Иванов (ЮФУ, Россия)
pavel_rsm@list.ru

ОБ ОПЕРАТОРЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

В теории целых функций, рядов экспонент, операторов свертки в пространствах аналитических функций важную роль играет интерполяционная формула Лагранжа. В настоящем докладе идет речь о некотором ее обобщении, формулируемом в терминах линейных операторов. Пусть G — выпуклая (не обязательно ограниченная) область в $\mathbb{C}$; $A(G)$ — пространство Фреше всех функций, аналитических в G; P — весовое (LB)-пространство целых (в $\mathbb{C}$) функций экспоненциального типа, топологически изоморфное (посредством преобразования Лапласа) сильному сопряженному к $A(G)$. Для последовательности $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, $|\lambda_j| \to \infty$, определим ассоциированное (LB)-пространство K_∞ числовых последовательностей, задаваемое весами, определяющими P, и введем оператор сужения $R(f) := (f(\lambda_j))_{j \in \mathbb{N}}$, линейно и непрерывно отображающий P в K_∞.

Определение. *Пусть E — локально выпуклое пространство, в которое непрерывно вложено P. Оператором интерполяции из K_∞ в E называется линейный непрерывный оператор $L : K_\infty \to E$ такой, что $LR = \mathrm{id}_P$.*

В терминах оператора интерполяции получены условия того, что: 1) система экспонент $\{\exp(\lambda_j z)\}_{j \in \mathbb{N}}$ является абсолютно представляющей системой в $A(G)$; 2) соответствующий оператор представления функций из $A(G)$ рядами экспонент вида $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} c_j \exp(\lambda_j z)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.

Результаты подобного рода для ограниченных выпуклых областей G анонсированы в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мелихов С. Н.* Об операторе интерполяции // Международная школа-семинар по геометрии и анализу, посвященная 90-летию Н.В.Ефимова. 5-11 сентября 2000 г. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону, 2000. С.137-139.

Э. Н. Карабашева, П. Л. Шабалин (КГАСУ, Россия)
enkarabasheva@bk.ru pavel.shabalin@mail.ru

ОТОБРАЖЕНИЯ НА ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЕРШИН. ВОПРОСЫ ОДНОЛИСТНОСТИ.

В нашей работе рассматривается обобщение одной обратной задачи М.А. Лаврентьева ([1], с.175–181, с.226) о построении конформного отображения верхней полуплоскости с заданными прообразами вершин на многоугольник с заданными углами при неизвестных вершинах на случай счетного множества углов и бесконечного вращения касательной при обходе границы области. Итак, заданы две монотонные последовательности точек вещественной оси t_k, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$, t_{-k}, $\lim\limits_{k\to\infty} t_{-k} = -\infty$, соответствующие при указанном отображении неизвестным вершинам A_k, A_{-k} полигональной области и заданы внутренние углы $\alpha_k\pi$, $0 < \alpha_k < 1$, $\alpha_{-k}\pi$, $1 < \alpha_{-k} < 2$, при вершинах полигональной области. Внутренний угол при вершине A_0 равен $(\eta_0^2 - \eta_0^1)\pi$. Введем $\kappa_k = 1 - \alpha_k$, $\kappa_{-k} = \alpha_{-k} - 1$ и считающие функции

$$n_-^*(\xi) = \sum_{j=1}^{k} \kappa_{-j},\ -t_{-k} < \xi < -t_{-k-1}, \quad n_+^*(\xi) = \sum_{j=1}^{k} \kappa_j,\ t_k < \xi < t_{k+1}.$$

Потребуем выполнения условий

$$n_+^*(\xi) = \Delta_+ \ln^{\kappa_+}\xi + o(\ln^{\kappa_+}\xi),\ n_-^*(\xi) = \Delta_- \ln^{\kappa_-}\xi + o(\ln^{\kappa_-}\xi),\ \xi \to +\infty,$$

с некоторыми постоянными $\Delta_+ > 0$, $\Delta_- > 0$, $1 \le \kappa_+ \le 3$, $1 \le \kappa_- \le 3$. Для искомого конформного отображения $z(\zeta)$ выводится формула, обобщающая на данный случай известный интеграл Шварца – Кристоффеля

$$z(\zeta) = a_0 \int\limits_0^{\zeta} \frac{e^{i\eta_0^1\pi}}{\zeta^{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}} \frac{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{t_k}\right)^{\kappa_k}} d\zeta,$$

и доказывается существование однолистных отображений среди построенных.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ (проект 14-01-00351-а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменого. Наука. 1973.

Б. А. Кац и Д. Б. Кац (Казанский Федеральный Университет, Россия)
katsboris877@gmail.com

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПО НЕСПРЯМЛЯЕМЫМ КРИВЫМ

Пусть Γ есть простая (возможно, замкнутая) кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $f(t)$ — заданная на этой кривой функция. Если кривая Γ спрямляема, то контурный интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(t)dt$ порождает обобщенную функцию

$$\mathcal{I}^{\Gamma,f} : \omega \in C_0^{\infty}(\mathbb{C}) \mapsto \int\limits_{\Gamma} f(t)\omega(t)dt.$$

Пусть теперь кривая Γ неспрямляема, и потому интеграл по ней неопределен. Рассмотрим какое-либо продолжение $F(z)$ функции $f(t)$ на всю комплексную плоскость и какую-либо последовательность спрямляемых кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$, сходящуюся в естественном смысле к неспрямляемой кривой Γ. Если существует предел последовательности обобщенных функций

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}^{\Gamma_n,F} \equiv \mathcal{I}^{\Gamma,f},$$

то его можно считать интегрированием по неспрямляемой кривой Γ.

В докладе устанавливаются условия существования этого предела и его независимости от выбора продолжения F и аппрокимирующей последовательности спрямляемых кривых $\{\Gamma_n\}$. Эти условия улучшают результаты работы [1] в терминах показателей Марцинкевича, введенных в работе [2]. Исследуется также свертка $\mathcal{I}^{\Gamma,f}$ с функцией $(\pi i z)^{-1}$, которую можно рассматривать как интеграл типа Коши по неспрямляемой кривой, и ее приложения в краевых задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J. and Kats B. A.* Integration over non-rectifiable curves and Riemann boundary value problems. J. of Math. Anal. and Appl. 2011, V. 380, № 1, P. 177–187.

2. *Кац Д. Б.* Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах. Изв. вузов, Матем. 2014, № 3, С. 68–71.

С. Н. Киясов (Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия)

Sergey Kijasov@kpfu.ru

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ КЛАССОВ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВЕКТОРА, РАЗРЕШИМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- $(0 \in D^+, \infty \in D^-)$, $G(t) = ||g_{ij}(t)||$, $i, j = 1, 2, 3$, $\det G(t) \neq 0$ – H- непрерывная на Γ матрица-функция третьего порядка. Однородная задача линейного сопряжения для трехмерного вектора состоит в отыскании кусочно-голоморфной функции $\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z), w^3(z)\big)$ с H- непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t) \tag{2}$$

Задаче линейного сопряжения ставится в соответствие система двух задач дробно-линейного сопряжения

$$\Phi^+ = \frac{g_{21} + g_{22}\Phi^- + g_{23}\Psi^-}{g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^-},\ \ \Psi^+ = \frac{g_{31} + g_{32}\Phi^- + g_{33}\Psi^-}{g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^-}. \tag{3}$$

Определение 1. Кусочно-мероморфное решение $\mathbf{w}(z)$ задачи (1) будем называть решением с тройкой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$, если на Γ $w^{1+}(t)/w^{1-}(t) = \lambda_1(t)$, $w^{2+}(t)/w^{2-}(t) = \lambda_2(t)$, $w^{3+}(t)/w^{3-}(t) = \lambda_3(t)$ (мы полагаем, что компонента тройки λ_k равна нулю, неограничена или является неопределенной, если соответственно $w^{k+}(t) \equiv 0$, $w^{k-}(t) \equiv 0$, $w^{k\pm}(t) \equiv 0$; $k = 1, 2, 3$, $t \in \Gamma$).

Определение 2. Кусочно-мероморфное решение $(\Phi(z), \Psi(z))$ задачи (2) будем называть решением с тройкой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$, если на Γ $g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) + g_{13}\Psi^-(t) = \lambda_1(t)$, $g_{22}(t) + g_{21}(t)1/\Phi^-(t) + g_{23}(t)\Psi^-(t)/\Phi^-(t) = \lambda_2(t)$, $g_{33}(t) + g_{31}(t)1/\Psi^-(t) + g_{32}(t)\Phi^-(t)/\Psi^-(t) = \lambda_3(t)$.

Показано, что при наличии двух кусочно-мероморфных решений задачи (1) или задачи (2) с различными тройками, все кусочно-голоморфные решения задачи (1) могут быть записаны в замкнутой форме. Классы таких задач, в частности, выделяются априорным требованием существования решения, для которого одна из компонент тройки рациональная функция либо функция мероморфно продолжимая в область D^+ или D^-.

С. Б. Климентов (ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН, Россия)
sklimentov@hotmail.com

ЕЩЕ ОДИН ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ КЕЛЛОГА

Если в комплексной z-плоскости простая замкнутая кривая L есть регулярный гомеоморфный образ окружности $\Gamma_t : L = \{z : z = z(t) \equiv z(s) = x(s) + iy(s)\}$, $t = e^{is}$, $z'(s) \neq 0$, $z(t) \in C^k_\alpha(\Gamma_t)$, $k \geq 1$, то будем говорить, что кривая L принадлежит классу C^k_α и писать $L \in C^k_\alpha$.

Обозначим $W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ множество граничных значений (следов) функций из класса $W^k_p(\overline{D})$. Если простая замкнутая кривая L есть регулярный гомеоморфный образ окружности Γ_t, получаемый как граничные значения функции класса $W^k_p(\overline{D})$, $k \geq 2, p > 2$, то будем говорить, что кривая L принадлежит классу $W_p^{k-\frac{1}{p}}$ и писать $L \in W_p^{k-\frac{1}{p}}$.

Пусть область G ограничена кривой $L \in C_\alpha^k\,(W_p^{k-\frac{1}{p}})$, тогда будем писать $G \in C_\alpha^k\,(W_p^{k-\frac{1}{p}})$, и говорить, что область G принадлежит соответствующему классу.

В комплексных плоскостях переменной z и переменной w рассмотрим две ограниченные замкнутые односвязные области D_z и G_w с границами Γ и L соответственно, класса C_α^{k+1}, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < \alpha < 1$, либо класса $W_p^{k+1-\frac{1}{p}}$, $k = 1, 2, \ldots$, $p > 2$. Далее обозначаем $\overline{D}_z = D_z \cup \Gamma$, $\overline{G}_w = G_w \cup L$. Хорошо известно следующее утверждение (теорема Келлога).

Теорема 1. *Если $\Phi = \Phi(z)$ — однолистное конформное отображение области $D_z \in C_\alpha^{k+1}$ на область $G_w \in C_\alpha^{k+1}$, то $\Phi(z)$ продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_z$ на $\overline{G}_w$, причём $\Phi(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$, а обратное отображение принадлежит классу $C_\alpha^{k+1}(\overline{G}_w)$.*

Основная цель предлагаемой работы — доказательство следующего аналога теоремы 1.

Теорема 2. *Если $\Phi = \Phi(z)$ — однолистное конформное отображение области $D_z \in W_p^{k+1-\frac{1}{p}}$, $k \geq 1$, $p > 2$, на область $G_w \in W_p^{k+1-\frac{1}{p}}$, то $\Phi(z)$ продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_z$ на $\overline{G}_w$, причём $\Phi(z) \in W_p^{k+1}(\overline{D}_z)$, а обратное отображение принадлежит классу $W_p^{k+1}(\overline{G}_w)$.*

О. В. Котова (Донецк, Украина)
butkot83@mail.ru

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА ПРЯМОЙ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Пусть $W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$ – множество целых функций экспоненциального типа не выше σ, сужение которых на $\mathbb{R}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$, а

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x) - f(x+h), \quad \omega_r(f,h)_p = \sup_{0<\delta\leq h} \left\|\Delta_\delta^r f(\cdot)\right\|_p.$$

В [1] некоторые теоремы из [2] обобщены на любые функции из $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, на евклидовом пространстве. В частности, приведена

Теорема 1. *Пусть G_σ – линейный непрерывный оператор $L_p(\mathbb{R}) \to W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$). Для того чтобы при некотором $r \in \mathbb{N}$ для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$ выполнялось $\|f - G_\sigma(f)\|_p \leq c_1(r)\omega_r\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_p$ необходимо и достаточно: $\sup\limits_\sigma \|G_\sigma\|_{L_p\to L_p} < \infty$, $\|g - G_\sigma(g)\|_p \leq \frac{c_2(r)}{\sigma^r}\left\|g^{(r)}\right\|_p$ для любой функции $g \in W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$.*

Имеется подобная теорема об оценках приближения снизу.

Пример. *При $p \in [1,2]$ $S_\sigma(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \hat{f}(y)e^{ixy}dy$, $G_\sigma(f) = S_\sigma(f) - \beta\Delta_{\frac{\alpha}{\sigma}}^r S_\sigma(f)$,* *тогда при* $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\beta \neq 0$ *для всех* $g \in W_{p,\sigma}$, $\sigma > 0$, $\|g - G_\sigma(g)\|_p \asymp \frac{1}{\sigma^r}\left\|g^{(r)}\right\|_p$.

При $p \in (1, 2]$, $\alpha \in (0, 2\pi), \beta \neq 0$ *для всех* $f \in L_p(\mathbb{R})$ *и* $\sigma > 0$

$$\|f - G_\sigma(f)\|_p \asymp \omega_r\Big(f; \frac{\alpha}{\sigma}\Big)_p.$$

Если же $p = 1$, *то оценка приближения сверху, как в теореме 1, имеет место только в случае* $e^{ir\alpha} = (-1)^r$, $\beta = (1 - e^{i\alpha})^{-r}$.

Кроме того, в периодическом случае найден точный порядок приближения полиномами Бернштейна–Стечкина в [3,4], а в кратном случае – средними Марцинкевича–Рисса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *О. В. Котова, Р. М. Тригуб.* Аппроксимативные свойства методов суммирования интегралов Фурье. Докл.НАН Украины. 2015. № 1. С. 13–19
2. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and approximation of functions. Kluwer–Springer. 2004.
3. *О. В. Котова.* О приближении непрерывных периодических функций полиномами Стечкина. Вестн. Днепр. ун-та. 2013. № 18. С. 104–124.
4. *Р. М. Тригуб.* Точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна-Стечкина. Мат. сб. 2013. Т.204. № 12. С. 127–146.

А. Н. Марковский (Кубанский госуниверситет, Россия)
mark@kubsu.ru

ДИСКРЕТНОЕ РАВНОВЕСИЕ И КРИТЕРИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОГО КОМПАКТА

Рассматривается задача экстремального распределения точечных зарядов на плоском компакте; варьируются заряды и их интенсивности. Распределениям соответствуют комплексные произведения с неалгебраическими особенностями. Доказывается равномерная сходимость последовательности таких произведений и устанавливается связь с равновесной мерой, её носителем и емкостью компакта, а также с функцией Грина области содержащей бесконечно удалённую точку. Приводится достаточное условие регулярности компакта в терминах рассматриваемой задачи.

Рассмотрим формальные комплексные произведения

$$\pi_n(z) := \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)^{a_j}, \tag{1}$$

где z_j – различные точки на $\mathbb{C}$, а a_j – *действительные* положительные числа, такие что $a_1 + ... + a_n = 1$. В произведениях будем иметь ввиду главные значения многозначных функций.

Вариационная задача [1]. Пусть задан компакт K со связной границей ∂K. Обозначим $\mathfrak{M}^1(K)$ – множество всевозможных произведений (1) с нулями на K.

Введем в $\mathfrak{M}^1(K)$ равномерную норму $\|\pi(z)\|_K := \max_{z\in K}|\pi(z)|$ и рассмотрим задачу отыскания в $\mathfrak{M}^1(K)$ функции, наименее уклоняющейся от нуля на K; задача аналогична известной задаче Чебышева [2] с тем отличием, что решение ищется в более «широком» классе. Обозначим $\mathrm{zr}(\pi)$ – количество нулей π.

Задача $V_n(K)$. *Найти*

$$\mu_n(K) = \inf\left\{\|\pi(z)\|_K : \pi \in \mathfrak{M}^1(K), zr(\pi) \leqslant n\right\},$$

и функции на которых этот infimum достигается.

Теорема 1. *Пусть* $K \subset \mathbb{C}$ *– компакт со связной границей, тогда для каждого* $n \in \mathbb{N}$*, решение задачи* $V_n(K)$ *существует и единственно, если* $\mu_n(K) \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марковский А. Н.* Логарифмическая емкость эквипотенциали энергии системы точечных зарядов // Экол. вест. НЦЧЭС – 2013. № 4. С. 37–41.

2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

П. А. Машаров (Донецкий национальный университет, Донецк, Украина)
pavelmasharov@gmail.com

РАДИУС ПОМПЕЙЮ ДЛЯ НЕОДНОСВЯЗНОГО МНОЖЕСТВА

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Mot}(A,B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) \colon \lambda A \subset B\}$, $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в B (будем обозначать это $A \in \mathcal{P}(B)$), если всякая локально суммируемая функция $f\colon B \to \mathbb{C}$, для которой $\int\limits_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(A,B)$, равна нулю почти всюду в B. Классическая проблема Помпейю об описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ изучалась во многих работах, см. обзор [1] с обширной библиографией. Из результата Вильямса ([2]) следует, что если граница множества A липшицева, гомеоморфна сфере, но не вещественно аналитическая, то $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Если же некоторое множество $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то возникает вопрос, будет ли $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)$ при достаточно большом R? В.В. Волчков доказал, что это так. В связи с этим в [3] поставлена

Проблема. Для данного A найти $\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0 \colon A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)\}$.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К.А. Беренстейном и Р. Гэем, см. [4]. В [3], [5] содержится достаточно полная история данного вопроса и близких к нему.

Рассмотрим $K_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leqslant a, |y| \leqslant a\}$, $K_{a,1} = \overline{K_1 \setminus K_a}$. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для каждого* $a \in (1/2; 1)$ $\mathcal{R}\big(K_{a,1}\big) = \sqrt{a^2 + 2a + 2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zalcman L.* A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation dy solutions of partial differential equations, ed. B. Fuglede et al. 1992. P. 185–194.

2. *Williams S. A.* A partial solution of the Pompeiu problem. Math. Ann. 1976. V. 223. P. 183-190.

3. *V. V. Volchkov* Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers. DordRecht/Boston/London 2003. 454 pp.

4. *Berenstein C. A., Gay R.* Le probleme de Pompeiu locale. J. Anal. Math. 1989. V. 52. P. 133-166.

5. *Иванисенко Н. С., Машаров П. А.* Локальный вариант проблемы Помпейю для невыпуклого четырехугольника. Труды ИПММ НАН Украины. 2012. Т. 25. С. 15–22.

О. А. Очаковская (Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина)
valeriyvolchkov@gmail.com

ФУНКЦИИ С НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ

Пусть G – полупространство в $\mathbb{R}^n$. Для $r > 0$ обозначим через $V_r(G)$ множество всех локально суммируемых в G функций, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, содержащимся в G.

Теорема 1. *Пусть* $f \in V_r(G)$ *и существует последовательность* $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ *положительных чисел такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geqslant k} M_q^{1/q} \right)^{-1} = +\infty$$

и для почти всех (по мере Лебега) $x \in G$ *и всех* $q \in \mathbb{Z}_+$ *выполнено неравенство*

$$|f(x)| \leqslant \frac{M_q}{1 + |x|^q}.$$

Тогда $f = 0$.

Отметим, что условие на $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ в теореме 1 ослабить нельзя. Сформулированный результат является аналогом известной теоремы Карлемана для класса $V_r(G)$.

J. S. Pashkova (Crimea Federal University, Russia)
pashkova.kromsh@gmail.com
O. S. Starkova (Crimea Federal University, Russia)
kisel.kromsh@gmail.com

COMPARISON OF ORLICZ-LORENTZ SPACES

The rearrangement invariant spaces $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}$, can be defined by

$$\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W} := \{f \in \mathbf{L}_0 \colon \mathcal{I}_{\Phi,W}(f/a) < \infty \text{ for some } a > 0\} \ ,$$

with the norm

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}} := \inf\left\{a > 0 \colon \mathcal{I}_{\Phi,W}(f/a) \le 1\right\} ,$$

where

$$\mathcal{I}_{\Phi,W}(f) := \int\limits_0^\infty \Phi(f^*(x))\, dW(x) \ , \ f \in \mathbf{L}_0.$$

The functions Φ and W is Orlicz and Lorentz functions consequently.

Theorem 1. *Let Φ_1 and Φ_2 are Orlicz functions, W is Lorentz functions, the functions $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$ and $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}}$ are fundamental functions of corresponding Orlicz-Lorentz spaces $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}$ and $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}$. Then the following conditions are equivalent:*

(1). $\Phi_1 \succ \Phi_2$;

(2). $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W} \subseteq \mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}$;

(3). $\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}} \le c\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$ *for some* $c > 0$;

(4). $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}} \le c\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$ *for some* $c > 0$;

(5). $\Phi_2(x) \le \Phi_1(cx)$ *for some* $c > 0$ *and for all* $x > 0$.

Theorem 2. *Let W_1 and W_2 are Lorentz functions and Φ is Orlicz function.*

(1). If $W_2(x) \le c\,W_1(x)$ for all $x \ge 0$ and some $c > 0$, then $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_1} \subseteq \mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_2}$;

(2). If the space $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_1}$ is normally embedded in the space $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_2}$ with embedded constant $c \le 1$, то $W_2(x) \le c\,W_1(x)$ for all $x \ge 0$.

REFERENCES

1. *Cerda J., Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M.* Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz-Lorentz spaces. Positivity. 1998. №2. P. 311-337.

2. *Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M.* Geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces. Canad. Math. Bull. 1997. №40. P. 316-329.

3. *Kisel O.S., Pashkova J.S* Comparison of Orlicz, Lorents and Orlicz-Lorentz spaces. Uchenye Zapiski TNU. 2014. Vol. 27 (67). №1. P 234-247.

Д. А. Полякова (ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Россия)
forsites1@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА В ПРОЕКТИВНЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе рассматриваются проективные весовые пространства $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ и $H_\Phi(\mathbb{C})$ соответственно измеримых и целых функций f с системой равномерных весовых оценок $|f(z)| \le C_{n,f}\, e^{\varphi_n(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Исследуется важный с точки зрения приложений случай весовой последовательности $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$, состоящей из радиальных и нерадиальной компонент $\varphi_n(z) = u_n(|z|) + v(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Предполагается, что $U = (u_n)_{n=1}^\infty$ — невозрастающая по n последовательность непрерывных неубывающих функций $u_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, причем 1) функции $u_n(e^x)$, $n \in \mathbb{N}$, выпуклы на $[0, \infty)$; 2) семейство U равномерно ρ-устойчиво на $[0, \infty)$; 3) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists D_n > 0$:

$u_{n+1}(t) + \ln \frac{1+t^2}{\rho(t)} \leq u_n(t) + D_n$, $t \geq 0$. Далее, пусть $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — произвольная субгармоническая ρ-устойчивая функция в $\mathbb{C}$. Здесь $\rho = \rho(t)$ — регулярная функция расстояния. Определения регулярной функции расстояния, ρ-устойчивости, а также используемое ниже понятие слабо приведенного проективного предела можно найти в [1].

Теорема 1. *При перечисленных условиях на весовую последовательность* Φ *справедливы утверждения:*

1) уравнение Коши-Римана $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ *разрешимо в* $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ *при любой правой части* $g \in L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$*;*

2) проективный предел $H_\Phi(\mathbb{C})$ *является слабо приведенным.*

Доказательство основано на применении абстрактного критерия из [2] (см. также [3]).

Теорема 1 имеет приложения к описанию мультипликаторов и порождающих проективных и индуктивно-проективных весовых пространств целых функций и к операторам свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Румье.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-31083).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions and some of its applications. Studia Math. 2010. V. 200. P. 279–295.

2. *Епифанов О. В.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов. Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 83–92.

3. *Langenbruch M.* Differentiable Functions and the $\overline{\partial}$-Complex. Functional Analysis: Proceedings of the Essen Conference (Edited by Bierstedt K.D., Pietsch A., Vogt D.). Marcel Dekker, Inc.: New York. 1993. P. 415–434.

Е.Л. Санина (Воронежский государственный университет, Россия)
sanina08@mail.ru

О СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА В КЛАССЕ ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ С ВЕСОМ ФУНКЦИЙ

Пусть $\gamma{>}0$ и $(T^y f)(x) = C(\gamma) \int_0^\pi f(\sqrt{x^2{+}y^2{-}2xy\cos\alpha})\, d\alpha$ — обобщенный сдвиг f, введенный А. Вайнштейном и Ж.Дельсартом, описанный Б.М.Левитаном в работе [1]. Некоторые его свойства приведены в [2]. В частности:

1) *для любых локально интегрируемых по* $(-a, a)$ *с весом* x^γ *четных функций* f *и* g *имеет место равенство* $\int\limits_0^a (T^y f)(x)\, g(x) |x|^\gamma\, dx = \int\limits_y^{a+y} f(x)\, (T^y g)(x) |x|^\gamma\, dx, \gamma{>}0$.

2) *левая свертка с j-бесселевым многочленом (может представлять собой конечный отрезок ряда Дини, Фурье-Бесселя или Шлемильха), будет снова j-бесселевый многочлен того же порядка и вида.*

Определение. *Пусть $q\geq 1$, $\gamma>0$. Множество четных локально интегрируемых с весом x^γ функций с конечной нормой*

$$\|f\|_{S^\gamma_{l,q}} = \frac{\gamma+1}{l^{2(p+1)}}\left[\sup_x \int\limits_0^l T^y|f(x)|^q\, y^\gamma\, dy\right]^{1/q}$$

будем обозначать $S^\gamma_{l,q}$.

Приведенные свойства, наряду со свойствами обобщенного сдвига, открытых Б.М. Левитаном, исползовались для доказательства следующего утверждения.

Теорема 1. *Нормы пространства $S^p_{l,q}$, отвечающие разным l, эквивалентны*

$$C_1\,\|f\|_{S^p_{l_1,q}} \leq \|f\|_{S^p_{l_2,q}} \leq C_2\,\|f\|_{S^p_{l_1,q}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя. УМН. 1951. Т. 6, 2, № 6. С. 102–143.

2. *Ляхов Л. Н., Санина Е. Л.* Многочлены Шлемильха. Интерполяционная формула Рисса для B-производных и неравенство Берштейна для дробных B-производных Вейля-Маршо. ДАН. 2007. Т 417, № 5. С. 592–596.

Р. М. Тригуб (Украина,Израиль)

О МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ И ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

1. Разные методы суммирования и абсолютная сходимость интегралов Фурье. Сравнение скорости сходимости [1-3].

2. Точный порядок приближения (strong converse inequalities). В частности, для классических методов Гаусса-Вейерштрасса, Бохнера-Рисса, Марцинкевича-Рисса и неклассического метода Бернштейна-Стечкина [4].

3. Общие достаточные условия сходимости в точках, в которых существует производная неопределённого интеграла от функции (почти всюду) [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Trigub and E. Belinsky* Fourier Analysis and Approximation of Functions, Kluwer-Sprimger,2004

2. *Р. М. Тригуб* О мультипликаторах Фурье и абсолютной сходимости интегралов Фурье радиальных функций, Укр. матем. ж., 62(2011), с. 1487-1501

3. *Р. М. Тригуб* Обобщение метода Абеля-Пуассона суммирования тригонометрических рядов Фурье, Матем. зам., 96:3(2014), с. 473-475

4. *Р. М. Тригуб* Точный порядок приближения полиномами Бернштейна-Стечкина, Матем.сб., 204:12(2013), с. 127-146

5. *Р. М. Тригуб* Суммируемость тригонометрических рядов Фурье в d-точках и обобщение метода Абеля-Пуассона, Известия РАН, с.м. (принята к печати)

А. Ю. Трынин (Саратовский государственный университет, Россия)
tayu@rambler.ru

ПРИЗНАК РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ ВНУТРИ ОТРЕЗКА

Оператор классических синк-аппроксимаций ставит в соответствие определенной на отрезке $[0,\pi]$ функции f, интерполирующую ее в узлах $x_{k,n} = k\pi/n$ целую функцию

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx-k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)$$

Теорема 1. *Пусть функция $f \in C[0,\pi]$. Из соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le p\le n} \Big| {\sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]}}' \frac{f(x_{2m+1,n}) - f(x_{2m,n})}{p-2m} \Big| = 0,$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю, следует

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f,x) = f(x) \tag{1}$$

равномерно внутри интервала $(0,\pi)$.

Если, кроме того, $f(0) = f(\pi) = 0$, то сходимость в (1) равномерная на отрезке $[0,\pi]$.

«Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K)».

А. Ф. Чувенков (Ростовский государственный экономический университет (РИНХ), Россия)
chuvenkovaf@mail.ru

ЗАМЕТКА О ВЕСОВЫХ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

Рассматривается класс измеримых функций $f(x)$ на произвольном открытом множестве $\Omega \subset R^n$ с неотрицательным весом $\omega(x)$

$$K_M(\Omega,\omega) = \Big\{ f\colon \rho(f,M,\omega) = \int_\Omega M(|f(x)|)\omega(x)\,dx < \infty \Big\}$$

и пространство Орлича $L_M(\Omega,\omega)$ с нормой Колмогорова–Люксембурга, порождаемые функцией Юнга $M(u)$.

Обозначим через $p = \min\{p_0, p_\infty\}$, $1 < p \leqslant \infty$, где

$$p_0 = \varliminf_{u\to 0} \varphi_M(u), \quad p_\infty = \varlimsup_{u\to\infty} \varphi_M(u), \quad \varphi_M(u) = \frac{uM'(u)}{M(u)}.$$

Определяем весовое гранд-пространство Орлича $L^a_{M)}(\Omega,\omega)$ с дополнительным положительным весом $a(x) \in K_M(\Omega,\omega)$ следующим образом:

$$L^a_{M)}(\Omega,\omega) = \Big\{ f\colon \rho_a(f,M,\omega) \equiv$$

$$\equiv \sup_{0<\delta<1-1/p} \left[\rho\left(f, M^{1-\delta}, (p\delta)^{1/p} M^{\delta}(a)\omega\right)\right]^{\frac{1}{1-\delta}} < \infty\Bigg\}.$$

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит классу Орлича $K_M(\Omega,\omega)$, $1 < p \leqslant \infty$, a — положительный непрерывный на Ω вес. Чтобы была справедлива оценка $\rho_a(f,M,\omega) \leqslant c_{p,a}\rho(f,M,\omega)$ с точной константой $c_{p,a}$, необходимо и достаточно, чтобы $a \in K_M(\Omega,\omega)$. При $p=\infty$ и $\rho(a,M,\omega) \leqslant 1$ имеем $c_{p,a}=1$.*

Для весовых гранд-пространств Орлича справедлива теорема вложения для разных весов.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$. Если*

$$C = \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} \left[\frac{M(b(x))}{M(a(x))}\right]^{p-1} < \infty,$$

то справедливо вложение $L^a_{M)}(\Omega,\omega) \subset L^b_{M)}(\Omega,\omega)$ и оценка $\rho_b(f,M,\omega) \leqslant c\rho_a(f,M,\omega)$.

В случае $M(u)=u^p$, $p>1$, получаем известные утверждения для гранд-пространств Лебега.

Секция III

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Руководитель секции: О.Г. Авсянкин

Abdourahman,E. Djeutcha ,A. P. Yatchet (Department of mathematics, Higher Teacher's Training College, Maroua)
abdoulshehou@yahoo.fr; djeutchaeric@yahoo.fr; yatchet2003@yahoo.fr

ON AN N-ORDER LINEAR SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATION IN THE SPACE OF GENERALIZED FUNCTION K' OVER K.

This work is dedicated to the investigation of the solvability of a linear differential equations of the n-order with singularities and Dirac delta function (or it derivatives of some order) in the right hand side. Namely we consider the equation of the following kind

$$ax^p y^{(n)} + bx^q y^{(n-1)} = \delta^{(s)}(x)\ ,\ a, b \in \mathbb{R},\ p, q \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ , n \geq 1 \qquad (1)$$

Equation (1) is studied in the space of generalized functions K'. The main particularity of such equation is the fact that the homogeneous equation (1) beside classical solutions may also admit centered at the point zero solutions and more their number when $q = p - 1$ could be higher than the number min $(q, p - 1) - 1$.

S. M. Aizikovich, S. S. Volkov, A. S. Vasiliev (Don State Technical University, Russia)
saizikovich@gmail.com

BILATERAL ASYMPTOTIC SOLUTION OF A CONTACT PROBLEM ON INDENTATION OF A PARABOLIC PUNCH INTO AN ELASTIC STRIP LYING ON AN ELASTIC HOMOGENEOUS HALF-PLANE

We extend application of bilateral asymptotic method of solution of a class of dual integral equations (IEs). This class of equations arises in contact problems for inhomogeneous by depth elastic half-space and half-plane. Basis of the method is that transform of kernel of IE for arbitrary elastic modulus inhomogeneity in a strip is construted numerically and then approximated by expressions of a special kind. Substituting this approximation to the initial dual integral equation and using operational calculus, an analytical solution of the equation can be derived. It is proven that the constructed solution is asymptotically exact both for large and small values of characteristic geometric parameter (which is ratio of the strip thickness to a half of the contact area radius) [1].

For the first time, this method is used to construct the solution of a contact problem on the indentation of a parabolic punch into a inhomogeneous elastic strip lying on a homogeneous elastic half-plane. Numerical examples are given for a rigid and for a soft strip, where rigidity/softness refer to significant difference between elastic modulus of the strip and the half-plane on their interface. In particular, solution has been constructed for a case of 100x difference.

This research was supported by RFBR grants 13-08-01435-a, 14-07-00705-a, 15-07-05820-a. Aizikovich S. M. acknowledges support of the Ministry of Education and Sciences of Russia in the framework of the Government Assignment. Volkov S. S. was supported by the scholarship of the President of Russia no. SP-3708.2015.1.

REFERENCES

1. *Aizikovich S. M.* An asymptotic solution of a class of coupled equations. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1990. Vol. 54, no. 5. P. 719–724.

А. С. Андреев (УлГУ, Россия)
andreevas@ulsu.ru

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется задача о применении функционала Ляпунова в задаче о предельном поведении решений функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным и неограниченным запаздыванием.

Пусть B есть пространство непрерывных функций $\varphi : (-\infty, 0] \to R^n$ с системой полунорм $\|\varphi\|_n = sup(|\varphi(s)|, -h \le s \le 0)$ и соответствующей метрикой. Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1}$$

где $f : R^+ \times B \to R^n$ есть непрерывное отображение, такое, что для каждого $\varphi \in B$ существует единственное решение (1) $x = x(t, \alpha, \varphi)$ с начальной точкой $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times B$, $x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$.

Определяются условия, при которых семейство сдвигов правой части (1) $\{f_\tau = f(t+\tau, \varphi)\}$ предкомпактно в некотором пространстве функций $F : R \times B \to R^n$. Соответственно, для уравнения (1) вводятся предельные уравнения. Выводится определяемое предельными уравнениями свойство квазиинвариантности положительного предельного множества ограниченного решения (1). Представлены результаты по исследованию предельного поведения решений, асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения (1) при существовании функционала Ляпунова $V = V(t, \varphi)$ с производной $\dot{V}^+(t, \varphi)$. Полученные результаты развивают и дополняют результаты работ [1–3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-08482).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hale J., Kato J.* Phase space for retarded equations with infinite delay. Funkcialaj Ekvacioj. 1978. V. 21. P. 11–41.

2. *Kato J.* Stability problem in functional differential equations with infinite delay. Funkcialaj Ekvacioj. 1978. V. 21. P. 63–80.

3. *Murakami S., Naito T.* Fading memory spaces and stability properties for functional differential equations with infinite delay. Funkcialaj Ekvacioj. 1989. V. 32. P. 91–105.

О. А. Андронова, В. И. Войтицкий (Крымский Федеральный Университет имени В.И. Вернадского, РФ)
o.andronova@list.ru, victor.voytitsky@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОВЕРХНОСТНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

В произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega = \Gamma \cup S$ рассматривается спектральная краевая задача

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha\lambda u = 0 \ (\text{на } \Gamma), \quad u = 0 \ (\text{на } S). \tag{1}$$

Число $\alpha > 0$ моделирует интенсивность поверхностной диссипации энергии динамической системы. Не сложно доказать, что при $\alpha = 0$ (а также при $\alpha = \infty$) спектр задачи дискретен и расположен на мнимой оси. Если же $\alpha > 0$, то спектр мигрирует в правую комплексную полуплоскость симметрично вещественной оси. С помощью исследования соответствующего операторного пучка на основе одного результата Т.Я. Азизова в [1] установлена дискретность спектра (все собственные значения конечнократные, изолированные с единственной предельной точкой на бесконечности) в областях размерности $m \geq 2$. Если $m = 1$, то дискретность спектра имеет место для всех $\alpha \neq 1$. Например, если $\Omega = [0; 1]$, то собственные значения являются корнями уравнения $\operatorname{cth}\lambda = \alpha$, не имеющего конечных решений при $\alpha = 1$ (они лежат на прямой $\operatorname{Re}\lambda = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\alpha}{|1-\alpha|}$).

В случае прямоугольной двумерной области $\Omega := \{(x, y) : 0 < x < \pi, \ 0 < y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ с $\Gamma := \{(x, 1) : 0 < x < \pi\}$ и $S := \partial\Omega\backslash\Gamma$ собственные значения находятся как решения серии характеристических уравнений $\operatorname{cth}\sqrt{\lambda^2 + n^2} = \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\lambda^2+n^2}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Доказано, что при каждом фиксированном n и $\alpha \neq 1$ имеется ветвь собственных значений λ_{nk}, асимптотически близкая к корням уравнения $\operatorname{cth}\lambda = \alpha$. Если $\alpha = 1$, то при каждом $n > 0$ имеется ветвь асимптотически близкая к некоторой экспоненциальной функции $\operatorname{Im}\lambda = \pm a_n b_n^{\operatorname{Re}\lambda}$, $a_n, b_n > 0$. Этот случай соответствует задаче Редже без потенциала, см., например, [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронова О.А., Копачевский Н.Д. О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2008. – Том 29. – С. 11–28.

2. Шкаликов А.А. Спектральный анализ задачи Редже // Современная математика и ее приложения. 2005. – Том 35. – С. 90-–97.

А. О. Бабаян (Ереван)
barmenak@gmail.com
В. А. Бабаян (Ереван)
bvazgen@gmail.com

ДЕФЕКТНЫЕ ЧИСЛА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Пусть G - единичный круг комплексной плоскости с границей Γ. В работе в области G рассматривается следующая задача Дирихле

Задача D. Определить решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial y}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial x}\right)^n u=0,$$

из класса $C^n(G)\bigcap C^{(n-1,\alpha)}(G\bigcup\Gamma)$, удовлетворяющее на Γ условиям Дирихле

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\right|_\Gamma = f_k(x,y),$$

$k=0,1,\ldots,n-1$, $(x,y)\in\Gamma$.

Здесь $\lambda_j\neq i$ $(j=0,1)$ такие комплексные числа, что $\Im\lambda_1>0>\Im\lambda_2$ (правильно эллиптическое уравнение), f_k $(k=0,\ldots,n-1)$ заданные на Γ функции, такие, что $f_k\in C^{(n-1-k,\alpha)}(\Gamma)$, $\frac{\partial}{\partial r}$ производная по направлению радиус-вектора комплексного числа $(z=re^{i\varphi})$. Доказано следующее предложение.

Теорема. Пусть $\mu=\frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\nu=\frac{i+\lambda_2}{i-\lambda_2}$, $z=\mu\nu$. Тогда задача D однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\det\Omega_k\equiv\det(S_n^k(1)-S_n^k(z))\neq 0,\quad k=n+1,n+2,\ldots,$$

где матрица $S_n(z)$ порядка n определяется по формуле

$$S_n(z)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_0(z) & a_1(z) & a_2(z) & \ldots & a_{n-1}(z)\end{pmatrix}$$

где $a_k(z)=(-1)^{n-k+1}C_n^{n-k}z^{n-k}$. Если это условие нарушается при некотором k, то соответствующая однородная задача имеет ненулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо одно линейно независимое условие. Таким образом, дефектные числа задачи равны количеству номеров при которых $\det\Omega_k=0$.

Рассмотрены также случаи неправильно эллиптического и неэллиптического уравнения.

П. В. Бабич, В. Б Левенштам (ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А , Россия)
vleven@math.rsu.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ИСТОЧНИКОМ

В докладе рассматривается первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в прямоугольнике с быстро осциллирующим по времени источником вида $f(x)r(t,\omega t)$, $\omega \gg 1$. Нами решены две задачи – прямая и обратная. Прямая состоит в построении и обосновании асимптотики решения $u_\omega(x,t)$ задачи при определенных предположениях о функциях $f(x)$ и $r(t,\tau)$. Обратная задача заключается в нахождении функции $r(t,\tau)$, когда известны функция $f(x)$ и значения двучленой асимптотики при $\omega \to \infty$ решения $u_\omega(x,t)$ в точке $x_0 \in (0,\pi)$, в которой $f(x) \neq 0$. Отметим, что аналогичная обратная задача, но без высокочастотного параметра и совершенно в ином контексте рассматривалась в работе [1].

Интерес авторов к данной задаче связан с тем обстоятельством, что здесь по двум первым членам асимптотики функции $u_\omega(x,t)$ однозначно восстанавливается вся функция $r(t,\tau)$, т.е. весь источник. Результат данной работы нетрудно перенести на многомерный случай (x принадлежит ограниченной области в R^n). Мы рассматриваем здесь случай $n=1$ ради простоты и наглядности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денисов А. М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной. ЖВМиМФ, 2013. Т. 53, № 5. С. 744-752.

Ж. А. Балкизов (ФГБНУ ИПМА, Россия, г. Нальчик)
Giraslan@yandex.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a\,(-y)^{(m-2)/2}\, u_x, & y < 0, \\ y^n u_{xx} - u_{yy} + b\, y^{(n-2)/2}\, u_x, & y > 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где a, b, m, $n = const$, $m > 0$, $n > 0$.

Через Ω_1 обозначим область, ограниченную характеристиками AC_1 и C_1B уравнения (1) при $y<0$, выходящими из точек $A=(0,0)$, $B=(r,0)$ и пересекающиеся в точке $C_1=(r/2,\, y_1)$, а через Ω_2 – область, ограниченную характеристиками AC_2 и C_2B уравнения (1) при $y>0$, выходящими из точек A и B, пересекающиеся в точке $C_2=(r/2,\, y_2)$; $y_1<0$, $y_2>0$; $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J$, где $J=\{(x,0): 0<x<r\}$ – интервал AB прямой $y=0$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u=u(x,y)$ из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$, причем $u_x, u_y\in L(J)$, подстановка которой обращает уравнение (1) в тождество.

В работе исследована

Задача 1. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,y)=\psi_i(x) \qquad \forall \quad (x,y)\in AC_i, \quad i=\overline{1,2}, \tag{2}$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ заданные функции из класса $C^1[0,r/2]$, причем $\psi_1(0)=\psi_2(0)$.

Доказана

Теорема 1. *Пусть $|a|\le\frac{m}{2}$ и $|b|\le\frac{n}{2}$, причем $(2a+m)^2+(2b+n)^2\neq 0$. Тогда существует единственное решение задачи 1.*

О. И. Бжеумихова, В. Н. Лесев (Кабардино-Балкарский государственный университет, Россия)
diff@kbsu.ru

О КЛАССИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИНВОЛЮТИВНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Процесс построения математических моделей при решении научных и инженерных задач часто приводит к необходимости использования дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (например, [1]-[4]).

Настоящая работа посвящена классической краевой задаче для уравнения второго порядка в частных производных с инволютивным отклонением аргумента в прямоугольной области.

Пусть $\Omega=\{(x,t): -x_0<x<x_0, 0<t<t_0\}$ – односвязная область евклидовой плоскости R^2 точек (x,t).

В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv u_{xx}(x,t)+u_{tt}(x,t)+u(-x,t)=0, \tag{3}$$

Для уравнения (3) в области Ω исследована следующая

Задача. *Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (3) из класса $C^1\left(\bar{\Omega}\right)\bigcap C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$, удовлетворяющее условиям*

$$\begin{aligned} u_x(-x_0,t) &= \varphi_1(t), \qquad u_x(x_0,t) = \varphi_2(t), \\ u_t(x,0) &= \varphi_3(x), \qquad u_t(x,t_0) = \varphi_4(x), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\varphi_i \ \left(i=\overline{1,4}\right)$ – заданные, достаточно гладкие функции.

Методом разделения переменных доказаны существование и единственность решения задачи (3), (4), явный вид которого найден в виде равномерно сходящихся тригонометрических рядов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Прасолов А. В.* Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии. Лань. 2010.
2. *Huang G., Takeuchi Y., Ma W.* Lyapunov functionals for delay differential equations model of viral infection. SIAM Journal on Applied Mathematics. 2010. Vol. 70, no. 7. P. 2693–2708.
3. *Obaid M. A.* Global analysis of a virus infection model with multitarget cells and distributed intracellular delays. Life Sci J. 2012. Vol. 9, no 4. P. 1500–1508.
4. *Smith H.* An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. Springer. 2011.

А. В. Братищев (ДГТУ, Россия)
avbratishchev@spark-mail.ru

УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЬМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ ПРИ СИНЕРГЕТИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ

Пусть система управления описывается математической моделью вида

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1,x_2) \\ x_2' = f_2(x_1,x_2) + ax_3 \\ x_3' = f_3(x_1,x_2,x_3) + u. \end{cases}$$

Такой является, например, система Росслера. Согласно методу аналитического конструирования нелинейных регуляторов [1] синтез скалярного управления по стягиванию траекторий системы в точку (0-мерное многообразие) осуществляется последовательным введением 2-мерного инвариантного притягивающего многообразия $\psi_1(x_1,x_2,x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 + \varphi_1(x_1,x_2) = 0$ и 1-мерного инвариантного притягивающего многообразия $\psi_2(x_1,x_2) = \beta x_1 + x_2 + \varphi_2(x_1) = 0$ с условием $T_i\psi_{tt}' + \psi_i \equiv 0$, $i=1,2$. Точка стягивания (x_1^0,x_2^0,x_3^0) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2) = 0 \\ \beta x_1 + x_2 + \varphi(x_1) = 0 \\ \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + x_3 + \varphi_1(x_1,x_2) = 0. \end{cases}$$

Тогда условие асимптотической устойчивости этой точки имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{T} + a\left(\alpha_2 + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)\right) f_1(x_1, x_2) > 0 \\ -\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) + a\left(\beta + \dfrac{d\varphi_2}{dx_1}(x_1^0)\right) \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) > 0. \end{cases}$$

Если хотя бы один из знаков неравенства противоположный, то (x_1^0, x_2^0, x_3^0) не является точкой притяжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колесников А. А.* Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза. М.: КомКнига, 2006, 240 с.

А. О. Ватульян, А. В. Моргунова, В. О. Юров (Южный федеральный университет, Донской государственный технический университет, Россия)
vatulyan@math.rsu.ru, annmorgan2077@gmail.com, vitja.jurov@yandex.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

С единых позиций исследованы спектральные задачи для оператора теории упругости с переменными коэффициентами в цилиндрической системе координат. К таким задачам сводятся проблемы распространения нормальных волн в цилиндрических волноводах, в которых упругие характеристики (изотропный и трансверсально-изотропный случай) зависят от радиальной координаты или при наличии неоднородного поля предварительных напряжений.

Рассматриваемые задачи сведены к исследованию операторного спектрального пучка с двумя спектральными параметрами, порожденного канонической системой дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Отыскиваются нетривиальные решения этой системы, возникающие при некоторых сочетаниях спектральных параметров, образующих дисперсионное множество.

На основе численного и асимптотического анализа осуществлено изучение структуры дисперсионного множества. Показано, что при любых законах неоднородности его вещественная компонента образована гладкими кривыми, состоящими из стержневой моды (в длинноволновом приближении) и двух семейств дисперсионных кривых, отличающихся кинематикой распространения волн. На основе асимптотического анализа при произвольном законе неоднородности построено решение для стержневой моды. Получены формулы, отражающие изменение дисперсионной картины в окрестности резонансов первого и второго типа.

На основе метода пристрелки построены дисперсионные кривые для различных законов неоднородности и различных типов предварительного напряженного состояния (растяжение, раздувание, дисторсия).

Проведена серия вычислительных экспериментов для различных законов неоднородностей и различных частотных диапазонов, позволившая определить участки аномальной дисперсии, установить степень влияния предварительных напряжений на структуру компонент дисперсионного множества и изменение скоростей распространяющихся мод.

С. С. Вихарев (Волгоградский государственный университет, Россия)
vhr1987@mail.ru

ТЕОРЕМА ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ.

Работа посвящена вопросам существования положительных решений уравнения Гинзбурга-Ландау на квазимодельных римановых многообразиях. Опишем их подробнее.

Пусть риманово многообразие M изометрично прямому произведению $R_+ \times S_1 \times S_2 \times ... \times S_k$ (где $R_+ = (0, +\infty)$, а S_i, $i = 1, ..., k$ – компактные римановы многообразия без края) с метрикой $ds^2 = dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + g_2^2(r)d\theta_2^2 + ... + g_k^2(r)d\theta_k^2$. Здесь $d\theta_i^2$ – стандартная риманова метрика на S_i, $i = 1, ..., k$.

Рассмотрим на M стационарный случай известного уравнения Гинзбурга-Ландау

$$-\Delta u = c(x)f(u), \tag{1}$$

где $f(0) = f(a) = 0$ для некоторого $a > 0$, $f(u) > 0$ на $(0, a)$ и $f(u) < 0$ на $(a, +\infty)$, $c(x)$ – положительная функция. Пусть $0 < c_1 < c(x) < c_2 < \infty$, $f(s)$ – липшицева на $[0, a]$. Обозначим $G(r) = g_1^{n_1}(r) \cdot g_2^{n_2}(r) \cdot ... \cdot g_k^{n_k}(r)$, где $n_i = dimS_i$, предположим также, что $G(r)$ – неубывающая гладкая функция. Тогда верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия.*

1. Существует константа $q>1$, для которой выполнено

$$\limsup_{\rho\to\infty}\rho^{\frac{2}{q-1}}\left(\frac{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho}G(r)dr}{\int\limits_{\rho/2}^{\rho}G(r)dr}\right)^{\frac{1}{q-1}}\int\limits_{2\rho}^{\infty}\frac{ds}{G(s)}=+\infty.$$

2. Существуют константы $\delta(q)>0$ и $\sigma(q,\delta)>0$ при которых для всех $s\in(0,\delta)$ выполнено $f(s)\geqslant\sigma s^q$.

Тогда любое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $0\leqslant u\leqslant a$, является тождественной константой.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 15-41-02479-р_поволжье_а).

А. М. Гачаев (ЧГУ, Россия)
gachaev_chr@mail.ru

ЗАДАЧА КОШИ В ВИДОИЗМЕНЕННОЙ (ЛОКАЛЬНОЙ) ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассматривается уравнение

$$D^{(\sigma_2)}u(x)-[\lambda+q(x)]u(x)=0, \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр, $q(x)\in C[0,1]$ и

$$D^{(\sigma_2)}u(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_2)}\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\gamma_2}}$$

— оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка σ_2 с началом в точке 0, $L[0,1]$ — пространство абсолютно суммируемых функций, $\gamma=\{\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2\}$ — точка из трехмерного евклидова пространства с координатами $\gamma_i\in(0;1]$, $i=0,1,2$;

$$\sigma_j=\sum_{i=0}^{k}\gamma_i-1,\quad \mu_j=\sigma_j+1,\quad j=0,1,2;\quad \rho=\delta_2^{-1}>0,$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Задачу Коши в локальной постановке для уравнения (1) можно сформулировать следующим образом.

Задача 1. *Найти $u(x)$ уравнения (1) из класса $C[0,1] \cap L[0,1]$, удовлетворяющее видоизмененному начальному условию Коши*

$$\lim_{x\to 0} x^{1-\gamma_0}u(x) = \delta_0, \quad \lim_{x\to 0} x^{-\gamma_1}[x^{1-\gamma_0}u(x) - \delta] = \delta_1, \tag{2}$$

где $\gamma_0 > 1-\gamma_2$, а δ_0 и δ_1 — заданные числа.

Решение этой задачи ищется в классе $C_\delta[0,1]$ функций, представимых в виде $u(x)x^{-\delta}$, где $u(x) \in C(0,1]$, $\delta = \mathrm{const} < 1$.

Доказана

Теорема. *Пусть $q(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда в классе $C_\delta[0,1]$ задача 1 имеет, и притом единственное, решение $u = u(x)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма–Лиувилля. Изв. АМ при СССР, сер. физ.-мат. наук. 1970. Т. 5, № 2. С. 71–97.

2. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. Изв. АМ при СССР. 1968. Т. 13 № 1. С. 3–28.

3. *Нахушев А. М.* Дробные исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.

4. *Гачаев А. М.* Краевые задачи дифференциального уравнения с дробными производными и им сопутствующие интегральные операторы. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 2006.

В. В. Денисенко, И. В. Моршнева, Е. И. Петрова
(ЮФУ, Россия)
morsh@math.sfedu.ru

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ДВОЙНОЙ КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ КОНВЕКЦИИ

Рассматриваются бифуркации рождения равновесий и циклов в динамических системах с группой симметрии $O(2) \times O(2)$. Для исследования стационарных и периодических решений, возникающих при потере устойчивости основного стационарного решения, применяется метод Ляпунова-Шмидта и метод центрального многообразия.

Проведено исследование систем уравнений разветвления и амплитудных систем. В случае ветвления стационарных решений удается полностью исследовать систему уравнений разветвления и амплитудную систему, а при изучении ветвления периодических решений они исследованы только на инвариантных подпространствах. Показано, что в условиях общего положения при потере устойчивости основного стационарного решения возможно возникновение двух типов вторичных стационарных решений и периодических решений типа бегущих волн, косых бегущих волн и их нелинейных смесей. Получены явные выражения для асимптотик возникающих стационарных и периодических решений и для величин, определяющих характер их ветвления и устойчивость.

Приводится применение теории к задаче о возникновении вторичных стационарных и периодических режимов конвекции в горизонтальном слое жидкости с примесью. Показано, что возможны: мягкое возникновение вторичных режимов, а также жесткая потеря устойчивости, вызванная тем, что основное решение сливается с возникшим при докритическом значении параметра неустойчивым режимом. Для вторичных режимов найдены два члена ряда по степеням параметра надкритичности. Также приводится применение теории к задаче о возникновении конвективных автоколебательных течений бинарной смеси в вертикальном слое между твёрдыми изотермическими границами с учетом эффекта термодиффузии. Проведен численный анализ характера ветвления возникающих автоколебательных режимов. Для этого были рассчитаны коэффициенты уравнений разветвления и некоторые соотношения между ними при различных значениях параметров.

Т. Ф. Долгих, М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
doltaf12@gmail.com, zhuk@math.rsu.ru, shir@sfedu.ru

ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА МАССЫ

Уравнения переноса под действием электрического поля E для веществ с концентрациями $u^k(x,t)$ и подвижностями $\mu^k = \mathrm{const}$ имеют вид [1]: $u^k_t + (\mu^k u^k E)_x = 0$, $k = 1, 2$, $E = (1 + u^1 + u^2)^{-1}$. В некоторой области значений параметров μ^k тип этих квазилинейных уравнений— эллиптический. Для исследования поведения начального пространственно-периодического распределения концентраций применен метод годографа в форме законов сохранения [2]. Уравнения приводятся к комплексным инвариантам Римана $\mathbf{K} = p + iq$: $|\mathbf{K}|^2\mathbf{K}\mathbf{K}_t + \mathbf{K}_x = 0$ и, затем, методом годографа — к линейному эллиптическому уравнению в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами, для которого строится функция Римана–Грина [3]. Решение задачи с начальными данными записывается аналитически в неявной форме: $t = t(p,q)$, $x = x(p,q)$.

Для исследования задачи разработан эффективный метод, позволяющий строить решения на изохронах $t(p,q) = \mathrm{const}$ при помощи интегрирования некоторой задачи Коши для системы ОДУ. Численное решение задачи Коши позволило, в частности, проследить возникновение из начальных пространственно-периодических данных солитонообразного решения для $q(x,t)$ и кинкообразного решения для $p(x,t)$. Заметим, что в эллиптическом случае задача описывает некоторую неустойчивую квазигазовую среду [4] и решения, как правило, неустойчивые, например, могут обращаться в бесконечность на конечном интервале времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания

213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 2005.

2. *Senashov S. I., Yakhno A.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA. 2012. Vol. 8. 16 p.

3. *Copson E. T.* On the Riemann-Green Function // Arch. Ration. Mech. Anal. 1958. Vol. 1. P. 324–348.

4. *Жданов С. К., Трубников Б. А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991.

В. А. Еремеев (Магдебург, Германия), А. В. Наседкин (Ростов-на-Дону)

eremeyev.victor@gmail.com, nasedkin@math.sfedu.ru

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НАНОРАЗМЕРНЫХ ТЕЛАХ

В работе рассмотрены различные подходы к моделированию поверхностных эффектов в наноразмерных пьезоэлектрических (электроупругих) телах в рамках теории сплошной среды. Как известно, учет поверхностных эффектов позволяет описывать наблюдаемые эффекты изменения жесткости при уменьшении размеров для наноматериалов. Аналогично упругим наноразмерным телам здесь при анализе пьезоэлектрических сред возможны различные модификации стандартных моделей теории пьезоэлектричества. Так, в [1, 2] рассматривались несвязанные в базовых определяющих соотношениях модели поверхностных упругих мембран и диэлектрических пленок. В продолжение этих исследований для учета поверхностных эффектов в настоящей работе рассмотрены модели с добавлением пьезоэлектрических пленок с полной связанностью электромеханических полей и модели добавления тонких приповерхностных пьезоэлектрических слоев с модулями, отличными от объемных.

Для всех подходов анализируются постановки краевых и начально-краевых задач, включая граничные условия электрического типа для электродированных поверхностей. Обсуждаются также обобщенные или слабые формулировки задач с изменением свойств функционала энергии при учете пьезоэлектрических поверхностных эффектов. Для поиска приближенных решений в задачах пьезоэлектричества с поверхностными эффектами для неканонических областей рассмотрены их конечно-элементные аппроксимации.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00943).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nasedkin A. V., Eremeyev V. A.* Harmonic vibrations of nanosized piezoelectric bodies with surface effects // Z. Angew. Math. Mech. 2014. V. 94, No. 10. P. 878–892.

2. *Nasedkin A. V., Eremeyev V. A.* Modeling of nanosized piezoelectric and magnetoelectric bodies with surface effects // AIP Conference Proceedings. 2014. V. 1627. P. 70–75.

D. A. Zhukov (Rostov-on-Don)
fossil.new@yandex.ru

MG-DEFORMATIONS OF A SURFACE WITH GIVEN VARIATION OF THE SECOND INVARIANT OF THE THIRD TENSOR ALONG A BOUNDARY

We research the infinitesimal MG-deformations, that give variation of Gaussian curvature as the function $\sigma \in D_{1,p}, p > 2$, on a surface and keep a spherical image of the surface. These deformations were introduced by the author [1].

Let S is a simple connected surface with Gaussian curvature $K \geq k_0 > 0, k_0 = const$. The position vector of the surface S is $\vec{r} = \vec{r}(u, v) \in D_{3,p}, p > 2$, $(u, v) \in \Omega$, Ω is a flat simple connected region. The boundary ∂S is in class $C^1_\mu, 0 < \mu < 1$, and the boundary ∂S has not umbilical points, also we assume $\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial K}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial u} \neq 0$ on the surface S (H is a mean curvature of the surface).

Let φ_{ij} is any symmetric tensor on the surface S. Surface S has first tensor γ_{ij}, then $2H_\varphi = \gamma^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}$ is invariant of coordinates transformation. The invariant H_φ called the second invariant of tensor φ_{ij}.

Let ν_{ij} is the third tensor of the surface S (the first tensor of it's spherical image), then $\nu_{ij} = 2H\pi_{ij} - K\gamma_{ij}, (i, j = 1, 2)$, where $\pi_{ij}-$ the second tensor of the surface S. From last formulas we get

$$2H_\nu = \gamma^{\alpha\beta}\nu_{\alpha\beta} = (2H\pi_{\alpha\beta} - K\gamma_{\alpha\beta})\gamma^{\alpha\beta} = 4H^2 - 2K.$$

Thus, we have $H_\nu = 2H^2 - K$ [2, p. 203-206].

Let mark a point Q on the boundary ∂S. On $\partial\Omega$ corresponding point for Q is $\hat{Q}$. Draw line p on surface S from point Q in main direction. An image of line p in region Ω we denote as $\hat{p}$.

Then we draw two tangent line at point $\hat{Q}$ to the line $\hat{p}$ and to the boundary $\partial\Omega$. We denote an angle from tangent line to $\partial\Omega$ up to tangent line to $\hat{p}$, counting anticlockwise, as θ.

A residue of the surface S concerning main directions is a number $V_{MD}(S) = \dfrac{1}{\pi}\Delta_{\partial\Omega}\theta$, where $\Delta_{\partial\Omega}\theta$ is an increament of the angle θ, when we go in direction, that returned the region Ω on the left.

We claim that some point M_0 of the surface moves to defined vector $\vec{C}$. This constraint we call the *point condition*. The result of our work:

Theorem. *Let S is subjected to the infinitesimal MG-deformation with point condition, the invariant H_ν has a given variation along the boundary ∂S, the variation is equal to $\psi \in C^1_\rho, 0 < \rho < 1$. Then:*

1) if $V_{MD}(S) > -2$,

- with $\sigma \equiv 0$ and $\psi \equiv 0$ there exist the unique infinitesimal MG-deformation of the surface S;

- with $\sigma \not\equiv 0$ or $\psi \not\equiv 0$ there exist the unique infinitesimal MG-deformation of the surface S if and only if functions σ and ψ satisfy $(2V_{MD}(S)+3)$ solvability conditions;

2) if $V_{MD}(S) \leq -2$,

- with $\sigma \equiv 0$ and $\psi \equiv 0$ there exist $(-2V_{MD}(S)-3)$ linearly independent infinitesimal MG-deformations of the surface S;

- with $\sigma \not\equiv 0$ or $\psi \not\equiv 0$ the infinitesimal MG-deformations of the surface S exist and depend on $(-2V_{MD}(S)-3)$ arbitrary real constants.

R E F E R E N C E S

1. *Zhukov D. A.* On infinitesimal MG-deformations of a surface of positive Gaussian curvature with stationarity of normal curvature along the boundary // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences – Kharkov: Apostrof, 2011. – P. 377–384.

2. *Kagan V. F.* Foundations of the theory of surfaces. I // M.: Gostechizdat. – 1947. (in Russian)

Д. А. Закора (КФУ, ВГУ, Россия)
dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

ОБ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

В докладе представлены теоремы об однозначной сильной разрешимости для полных эволюционных интегродифференциальных уравнений первого и второго порядка.

Доказано, что в банаховом пространстве E задача Коши

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mathcal{A}(t)z(t) + \int_0^t \mathcal{G}(t,s)z(s)\,ds + f(t), \quad z(0) = z^0$$

однозначно разрешима, если семейство $\mathcal{A}(t)$ стабильно на $[0,T]$ и имеет постоянную область определения $\mathcal{D}$, плотную в E, ядро $\mathcal{G}(t,s)$ подчинено главному оператору, $z^0 \in \mathcal{D}$, $f(t) \in C^1([0,T];E)$.

С использованием доказанной теоремы исследована задача Коши для полного интегродифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A(t)\frac{du}{dt} + B(t)u + \int_0^t G(t,s)u(s)\,ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1$$

в банаховом или гильбертовом пространстве в следующих случаях:

1) $B(t) = B_0^2(t) + Q_0(t)$, $\mathcal{D}(B_0(t)) = \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(A(t))$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(Q_0(t))$;
2) $\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(B(t))$;
3) $A(t) = A$, $B(t) = B_0^2$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B_0)$.

При этом ядро $G(t,s)$ интегрального слагаемого всегда подчинено тем или иным образом главному оператору уравнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 14-21-00066), Воронежский государственный университет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tanabe H.* Equations of Evolution. Pitnam, London. 1979.

2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Наука. 1967.

С. В. Исраилов, А. М. Гачаев (ЧГУ, Россия)
gachaev_chr@mail.ru

НАГРУЖЕННОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Дается уравнение

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) y(x_j) + \int_a^x K(x,s,y(s))\,ds, \tag{1}$$

считается, что функции $a_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ непрерывны на $[a,b]$, $x_j \in [a,b]$.

Функция $K(x,s,y(s))$ непрерывна по x и y, где $|y| \leqslant d$, а по S имеет сингулярность в точке $x = b$ и такова, что

$$|K(x,s,y(s))| < \varphi(x)\psi(x)\psi(s). \tag{2}$$

В области D: $\{|y| \leqslant d,\ x,s \in [a,b]\}$, при этом $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $[a;b]$, $\psi(s)$ непрерывна на интервале $[a;b)$, однако функция

$$\lambda(x) = \varphi(x) \int_a^x \psi(s)\,ds$$

непрерывна на $[a;b]$ и

$$\lim_{x\to b} \lambda(x) = 0. \tag{3}$$

Тогда

$$\lim_{x\to b} \int_a^x K(x,s,y(s))\,ds = 0 \tag{4}$$

и из (1) имеем функциональное условие

$$y(b) = \sum_{j=1}^{m} a_j(b) y(x_j), \tag{5}$$

если $y(x)$ является решением уравнения (1).

Последовательно положим $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ в (1) и получим систему алгебраических уравнений

$$y(x_k) - \sum_{j=1}^{m} a_j(x_k)y(x_j) = \int_a^{x_k} K(x_k, s, y(s))\,ds, \quad k = 1, 2, \dots, m \tag{6}$$

с определителем D, который считается отличным от нуля.

Если $D \neq 0$, то из (6) находим

$$y(x_j) = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{m} A_{k_j}\int_a^{x_k} K(x_k, s, y(s))\,ds, \quad j = 1, 2, \dots, m \tag{7}$$

и (1) преобразуется в интегральное уравнение

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} D^{-1}A_{k_j}\int_a^{x_k} a_j(x)K(x_k, s, y(s))\,ds + \int_a^{x} K(x, s, y(s))\,ds \tag{8}$$

с точкой сингулярности $x = b$, где A_{k_j} — алгебраические дополнения элементов определителя D.

Из (8) получаются теоремы существования и единственности задачи (1), (5) методами работы [1].

Уравнения вида (1) встречаются при изучении сингулярных краевых задач для дифференциальных уравнений [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исраилов С. В., Юшаев С. С.* Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик: Изд. центр «Эль-фа», 2004.

М. Р. Ишмеев (Южный федеральный университет, Россия)
bayern89@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ЗАДАЧИ С ОПЕРАТОРОМ СТОКСА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ И ВЫРОЖДЕНИЕМ

Пусть Ω — ограниченная область в R^3 со сколь угодно гладкой границей $\partial\Omega$, $m \in N$, $\omega \gg 1$. В цилиндре $Q = \Omega \times R$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$-периодических по времени t решениях системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = \Delta u + B_0(x)u + \frac{1}{\omega}C_0(x)u + \sum_{1\le|k|\le m}\left(M_k(x)u + d_k(x)\right)e^{ik\omega t} + d_0(x), \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in R$, $B_0(x)$, $C_0(x)$, $M_k(x)$ и $d_0(x)$, $d_k(x)$ — известные бесконечно гладкие матрицы-функции и вектор-функции соответственно, причем $B_0(x)$, $C_0(x)$ и $d_0(x)$ — вещественные, а $M_k(x)$, $d_k(x)$ комплексно сопряжены с $M_{-k}(x)$, $d_{-k}(x)$.

Символом Π обозначим известный ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на $S_2(\Omega)$ (см. [1, 2]). Введем в $S_2(\Omega)$ оператор $A = \Pi\Delta + \Pi B_0(x)$ с областью определения $D(A) = \left\{u \in S_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$ и выражение $B = \Pi C_0(x) + \sum\limits_{1 \le |k| \le m} \frac{\Pi M_k(x) \Pi M_{-k}(x)}{ik}$. Предположим, что $\lambda = 0$ — простое собственное значение оператора A и соответствующий ему собственный вектор $a_0(x)$ не имеет присоединенных векторов относительно пары A, B [3].

Для задачи (1)-(3) были установлены существование и единственность $\frac{2\pi}{\omega}$-периодического решения при достаточно больших ω, это решение является вещественным и бесконечно дифференцируемым. Построение его полной асимптотики сводится к решению конечного числа однозначно разрешимых задач более простого вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Изд-во РГУ. 1984.
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1970.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 3–80.

В. В. Казак (ЮФУ, Россия)
vkazak@pochta.ru
Н. Н. Солохин (РГСУ, Россия)
nik2007.72@mail.ru

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ

Рассмотрим краевое условие смешанного типа:

$$\alpha(\overline{U}, \bar{\ell}) + \beta(\overline{V}, \bar{L}) = \sigma \text{ на } \partial S, \tag{1}$$

где $\overline{U} = \overline{U}(x, y) \in C^{3,\mu}$, $\overline{V} = \overline{V}(x; y)$ — векторы смещения и вращения бесконечно малого изгибания поверхности, векторные поля $\bar{\ell}$, $\bar{L}$ и функции α, β, σ принадлежат классу C^μ, $0 < \mu < 1$. Изучение этого краевого условия при различных α и β

приводит к следующим краевым задачам:

$$\begin{cases} w_{\bar z} + B\bar w = 0, & z \in D, \\ \mathrm{Re}\{\overline{a(t)}w_t + \varepsilon b(t)w\} = \sigma, & t \in \partial D \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} w_{\bar z} + q_1 w_z + q_2 \bar w_{\bar z} = 0, \\ \mathrm{Re}\left\{\overline{a(t)}w_t + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma - f_{\bar\ell_1}\sin\gamma}\overline{b(t)}w(t)\right\} = \sigma, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} W\hat U = \sum\limits_{k,n=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^k}(a_{n_k}\frac{\partial \hat U}{\partial x^n}) + \sum\limits_{n=1}^{2} l_n \frac{\partial \hat U}{\partial x^n} = 0, \\ f_\rho f_{\rho\rho}^{-1}\hat U_\rho + \hat U = F \end{cases} \tag{4}$$

Данные задачи сводятся к системе интегральных уравнений, которую можно записать в виде $\hat U = \varepsilon T\hat U + \sigma$. Исследование этой системы позволяет судить о характере жёсткости поверхности, подчинённой на краю смешанному краевому условию (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фоменко В. Т.* О квазикорректности внешних связей в теории бесконечно малых изгибаний // СМЖ. — 1974. — Т. XV, № 1. — С. 152–161.
2. *Казак В. В.* Распределение собственных векторных полей поверхностей положительной кривизны // Известия СКНЦ ВШ. Сер. Естеств. науки. — 1973. — № 4. — С. 38–41.
3. *Казак В. В., Солохин Н. Н.* О квазикорректности смешанного краевого условия для одного класса поверхностей. // Современные проблемы математики и механики, том VI, выпуск 2. Издательство Московского университета, 2011. – С. 212 – 216.

А. В. Казарников, С. В. Ревина (Ростов-на-Дону), Х. Хаарио (Лаппеенранта)
kazarnikov@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕЖИМОВ В СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ С ДИФФУЗИЕЙ В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НЕЙМАНА

Рассматривается система Рэлея с диффузией

$$\begin{cases} v_t = \nu\Delta v + w \\ w_t = \nu\Delta w - v + \mu w - w^3 \end{cases} \tag{1}$$

где $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $x \in D$, $t > 0$, $D \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ - ограниченная область, $\mu \in \mathbb{R}$ - управляющий параметр, $\nu > 0$ - фиксированный параметр, отвечающий за вязкость. Предполагается, что на границе области D заданы однородные условия Неймана.

Целью настоящей работы является нахождение решений системы (1), ответвляющихся от нулевого решения при изменении параметра μ и фиксированном коэффициенте диффузии ν. Для получения вторичных решений применен метод Ляпунова-Шмидта в форме, развитой в работе В.И. Юдовича ([1]). В настоящей работе явно найдены первые члены асимптотики, выведены формулы для общего члена разложения. Показано, что в системе присутствует пространственно-однородный автоколебательный режим. Краевые условия Дирихле в случае одной пространственной переменной рассмотрены в ([2]).

Поведение системы при $\mu > 1$ также было исследовано численно. Эксперименты проводились в случае $x \in \mathbb{R}^1$ и $x \in \mathbb{R}^2$. Помимо автоколебательного режима обнаружены стационарные решения данной системы. Для численного исследования системы применяются пакеты MATLAB и Maple и собственный программный комплекс, использующий технологию NVIDIA CUDA v 7.0 для ускорения вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // ПММ. 1972. Т. 36. № 3. С. 450-459.

2. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Бифуркационное поведение решений системы Рэлея с диффузией в случае одной пространственной переменной // Труды XVII Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". В 2 т. Ростов-на-Дону: издательство ЮФУ. 2014. Т. 2, С. 6-10.

А. С. Калитвин(Липецк)
kalitvinas@mail.ru

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БАРБАШИНА С ДРОБНОЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

В работе рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$({}^C D^{\alpha}_{a+,t}x)(t,s) = c(t,s)x(t,s) + \int_c^d m(t,s,\sigma)({}^C D^{\alpha}_{a+,t}x)(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+ \int_c^d n(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + f(t,s) \qquad (1)$$

с дробной частной производной по t порядка α в смысле Капуто, где $(t,s) \in D = [a,b] \times [c,d]$, $0 < \alpha < 1$, $m \in C(D \times [c,d])$, $n \in C(D \times [c,d] \times R)$ и удовлетворяет условию Липшица $|n(t,s,\sigma,u) - n(t,s,\sigma,v)| \leq N|u-v|$. Уравнение (1) рассматривается вместе с дополнительным условием $x(a,s) = \varphi(s)$, где $\varphi \in C([c,d])$. Под решением данной задачи (задачи типа Коши) понимается функция $x \in C_t(D)$, удовлетворяющая уравнению (1) и дополнительному условию.

Напомним, что левосторонняя дробная частная производная по t и левосторонний дробный частный интеграл по t Римана-Лиувилля порядка $\alpha(0 < \alpha < 1)$

функции $x(t,s)$ определяются соответственно равенствами

$$(D^{\alpha}_{a+,t}x)(t,s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t \frac{x(\tau,s)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau,$$

$$(I^{\alpha}_{a+,t}x)(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{x(\tau,s)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau,\ t>a,$$

где через $\Gamma(z)$ обозначена гамма-функция. Дробная частная производная по t порядка α в смысле Капуто определяется равенством

$$({}^C D^{\alpha}_{a+,t}x)(t,s) = (D^{\alpha}_{a+,t}(x-g))(t,s), \text{где } g(t,s)\equiv x(a,s).$$

Применяя к (1) $I^{\alpha}_{a+,t}$, учитывая дополнительное условие и равенство (см. [1])

$$(I^{\alpha}_{a+,t})({}^C D^{\alpha}_{a+,t}x)(t,s) = x(t,s) - x(a,s).$$

получим нелинейное уравнение Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами и ядрами типа потенциала. Если теперь в $C([c,d])$ обратим при каждом $t\in[a,b]$ оператор $y(s)-\int_c^d m(t,s,\sigma)y(\sigma)d\sigma$, то это уравнение, а потому и задача типа Коши, имеет единственное решение в $C_t(D)$.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект 2014/351, № 1815).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kilbas A. A., Srivastava N. M., Trujllo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam-Boston-Heidelberg-London-New York-Oxford-Paris-San Diego-Francisco-Singapur-Sydney-Tokio: Elsevier Inc., 2006. – 541 p.

А. С. Калитвин, В. А. Калитвин (Липецк)
kalitvinas@mail.ru, kalitvin@mail.ru

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БАРБАШИНА С ДРОБНОЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

В работе изучается линейное интегро-дифференциальное уравнение Барбашина

$$({}^C D^{\alpha}_{a+,t}x)(t,s) = c(t,s)x(t,s) + \int_c^s m(t,s,\sigma)({}^C D^{\alpha}_{a+,t}x)(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+\int_c^d n(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s) \qquad (1)$$

с дробной частной производной по t порядка α в смысле Капуто, где $(t,s)\in D = [a,b]\times[c,d]$, $0<\alpha<1$, $m,n\in C(D\times[c,d])$. Уравнение изучается вместе с дополнительным условием $x(a,s)=\varphi(s)$, где $\varphi\in C([c,d])$. Под решением данной задачи (задачи типа Коши) понимается функция $x \in C_t(D)$, удовлетворяющая уравнению (1) и дополнительному условию.

Пусть

$$(D^{\alpha}_{a+,t}x)(t,s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t \frac{x(\tau,s)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau,$$

$$(I^{\alpha}_{a+,t}x)(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{x(\tau,s)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau,\ t>a,$$

где через $\Gamma(z)$ обозначена гамма-функция. Дробная частная производная по t порядка α в смысле Капуто определяется равенством

$$({}^C D^{\alpha}_{a+,t}x)(t,s) = (D^{\alpha}_{a+,t}(x-g))(t,s), \text{где } g(t,s) \equiv x(a,s).$$

Применяя к обеим частям уравнения (1) $I^{\alpha}_{a+,t}$, учитывая дополнительное условие и равенство

$$(I^{\alpha}_{a+,t})({}^C D^{\alpha}_{a+,t}x)(t,s) = x(t,s) - x(a,s)$$

[1], получим линейное уравнение с частными интегралами и ядрами типа потенциала. В силу равенства нулю спектрального радиуса оператора Вольтерра с частными интегралами из последнего уравнения это уравнение имеет единственное решение в $C_t(D)$. Тогда и задача типа Коши имеет единственное решение в $C_t(D)$.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект 2014/351, № 1815).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kilbas A. A., Srivastava N. M., Trujllo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam-Boston-Heidelberg-London-New York-Oxford-Paris-San Diego-Francisco-Singapur-Sydney-Tokio: Elsevier Inc., 2006. – 541 p.

И. В. Коноплева (УлГТУ, Россия)
i.konopleva@ulstu.ru

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВОЛНОВОДА

Пусть пространство $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат (ρ,φ,z) заполнено изотропной средой без источников с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$, где ε_0 - проницаемость вакуума. В эту среду помещен неограниченный вдоль Oz цилиндрический диэлектрический волновод с однородным анизотропным немагнитным заполнением. Рассматриваются электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль Oz (собственные волны структуры), гармонически зависящие от t

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\rho,\varphi,z) = \mathbf{E}_+(\rho,\varphi,z)\cos\omega t + \mathbf{E}_-(\rho,\varphi,z)\sin\omega t,$$
$$\widetilde{\mathbf{H}}(\rho,\varphi,z) = \mathbf{H}_+(\rho,\varphi,z)\cos\omega t + \mathbf{H}_-(\rho,\varphi,z)\sin\omega t,$$

комплексные амплитуды имеют вид $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + i\mathbf{E}_-, \mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + i\mathbf{H}_-$. Электромагнитное поле удовлетворяет системе Максвелла

$$rot\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, rot\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \tag{1}$$

условию непрерывности поля на границе волновода и затухает при $\rho \to \infty, \omega$ - собственные частоты волновода, ε, μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Из (1) следует $div\mathbf{E} \equiv 0, div\mathbf{H} \equiv 0$.

В работах Смирнова Ю.Г. и Валовика Д.В. (г. Пенза) показано, что (1) распадается на две системы, описывающие ТЕ- и ТМ-поляризации. Система (1) с граничными условиями является задачей на дискретный спектр Шмидта определения частот ω собственных колебаний волновода и отвечающих им собственных векторов.

Методами, изложенными в работах Логинова Б.В. и Макеевой О.В. (г. Ульяновск), строится сопряженная система уравнений. Основная формула теории поля для задач, связанных с операторами математической физики, установленная в работах И.С. Аржаных (г. Ташкент), позволяет получить интегральные представления векторов поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ и доказать фредгольмовость задачи о собственных колебаниях волновода методами теории потенциала и интегральных уравнений. Задачи определения собственных колебаний цилиндрического волновода с нелинейной средой являются модельными задачами для стационарных и динамических бифуркационных нелинейных задач со спектром Э. Шмидта в линеаризации в условиях групповой симметрии, исследованных в работах Логинова Б.В. и Коноплевой И.В.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

Н. Д. Копачевский
(КФУ им. В. И. Вернадского, ВГУ, Россия)
kopachevsky@list.ru

ОБ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЕ ГРИНА ДЛЯ ТРОЙКИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

1. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм.

Теорема 1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F и G (с введенными на них скалярными произведениями) и для оператора $\gamma : F \to G$ выполнены условия:* 1°. $F \hookrightarrow E$, $\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \forall u \in F;$ 2°. $\gamma : F \to G_+ \hookrightarrow G$, $\|\gamma u\|_E \leqslant b\|u\|_F, \forall u \in F;$ 3°. $N := \ker \gamma \hookrightarrow E$, $\|u\|_E \leqslant c\|u\|_F, \forall u \in N$. *Тогда суще-*

ствует абстрактное дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ и абстрактная производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F.$$

При этом ∂u по элементам $u \in F$ и $Lu \in F^*$ определяется однозначно.

Основной пример: обобщенная формула Грина для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$, тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ и оператора следа γ, $\gamma u := u|_\Gamma$:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial u/\partial n \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega),$$
$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad (\partial u/\partial n)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Пусть полуторалинейная форма $\Phi(\eta, u) : F \times F \to \mathbb{C}$ ограничена на F, т.е.

$$|\Phi(\eta, u)| \leqslant c_1 \|\eta\|_F \cdot \|u\|_F, \quad \forall \eta, u \in F, \ \ c_1 > 0, \tag{1}$$

и равномерно аккретивна:

$$\mathrm{Re}\, \Phi(u, u) \geqslant c_2 \|u\|_F^2, \quad c_2 > 0, \ \ \forall u \in F. \tag{2}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия (1) и (2), то имеет место представление*

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au \rangle_E, A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}, A \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*), Q = Q^* \in \mathcal{L}(E),$$

$F_0 = F$ — пространство с эквивалентной нормой $\|u\|_{F_0}^2 := \mathrm{Re}\, \Phi(u, u)$, A_0 — оператор гильбертовой пары $(F_0; E)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и условия (1), (2). Тогда имеет место следующая формула Грина:*

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F = F_0,$$

при этом ∂u определяется однозначно по $u \in F_0$ и $Lu \in F_0^*$.

2. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач.

Пусть для пространства G имеют место свойства

$$G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k, \ \ \exists (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*, \ \ k = \overline{1, q}, \tag{3}$$

$$p_k := \omega_k \rho_k, \quad \rho_k \omega_k = (I_+)_k, \quad k = \overline{1, q}, \quad \sum_{k=1}^{q} p_k = I_+, \tag{4}$$

$$p_k^* = \rho_k^* \omega_k^*, \ \rho_k^* : (G_+)_k^* \to (G_+)^*, \ \omega_k^* : \widehat{(G_+)_k}^* := (p_k G_+)^* \to (G_+)_k^*, \tag{5}$$

где ρ_k и ω_k — ограниченные операторы сужения и продолжения соответственно, ω_k^* — оператор сужения, а ρ_k^* — оператор продолжения.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1, условия (3), а также условия (4) либо (5). Тогда имеет место формула Грина для смешанных краевых задач*

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u\rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F,$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k, \ \ \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*.$$

На основе этого абстрактного утверждения приводятся варианты обобщенных формул Грина применительно к тройке пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\Gamma := \partial\Omega$ — липшицева. Вид таких формул Грина зависит от характера краевых условий.

3. Абстрактные краевые и спектральные задачи.

На базе теорем 1–4 изучены некоторые классы абстрактных краевых, абстрактных спектральных, а также аналогичных смешанных задач. Это краевые задачи Дирихле, Неймана, Ньютона, а также соответствующие спектральные проблемы, задачи Стеклова, Стефана, Аграновича, С. Крейна, Чуешова и задачи сопряжения.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-21-00066), Воронежский государственный университет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях. Спектральные и эволюционные задачи. 2011. Т. 21, № 1. С. 2–39.

2. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм. Современная математика. Фундаментальные приложения. 2015. (в печати).

Копачевский Н. Д., Радомирская К. А. (КФУ, ВГУ)
kopachevsky@crimea.edu, radomirskaya@mail.ru

Абстрактные краевые задачи

1. Для тройки гильбертовых пространств, удовлетворяющих некоторым условиям связи, и абстрактного оператора следа выводится абстрактная формула Грина, частным случаем которой является обобщенная формула Грина для оператора Лапласа, справедливая для функций из пространства $H^1(\Omega)$, заданных в области Ω из $\mathbb{R}^m$ с липшицевой границей. Приводятся дополнительные условия, при которых справедлива абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач, а также обобщенная формула Грина для оператора Лапласа.

2. На базе абстрактной формулы Грина формулируются абстрактные краевые задачи сопряжения и приводится общий подход к их исследованию.

3. На основе обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа рассматриваются некоторые классы классических задач сопряжения в липшицевых областях. Доказываются теоремы о существовании слабых (вариационных)решений этих задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-21-00066), Воронежский госуниверситет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях. Spectral and Evolution Problems Proceedings of 21 Crimean Autumn Mathematic School-Symposium (KROMSH-2010). Simferopol. Crimea. Ukraine. 2011. Volume 21. Issue 1. pp. 2-39.

2. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения. Сборник трудов "Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по математике и информатике". 22-25 апреля 2014г. Издательство КНЦ НАНУ. Симферополь. - с. 30-36.

Н. Д. Копачевский, З. З. Ситшаева
(КФУ им. В.И. Вернадского, ВГУ, КИПУ, Россия)
kopachevsky@list.ru, szz2008@mail.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С НЕСВЯЗНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В работе рассматривается проблема статики, устойчивости и малых движений идеальной жидкости, находящейся в сосуде в условиях, близких к невесомости, причем свободная поверхность жидкости является неодносвязной. В частности, имеется верхняя свободная поверхность, а также капли жидкости, свисающие с днища сосуда.

1. Для плоской и осесимметричной проблем разработаны итерационные алгоритмы нахождения как верхней поверхности, так и поверхностей капель.

2. Проблема устойчивости гидросистемы сведена к задаче на собственные значения для оператора потенциальной энергии, представляющего собой операторную матрицу блочно-треугольного вида, действующего в ортогональной сумме гильбертовых пространств, связанных со структурой свободной поверхности жидкости. На этой основе установлено, что статическая устойчивость гидросистемы теряется на сдвиговых возмущениях верхней свободной поверхности жидкости.

3. Проблема малых движений системы приведена к задаче Коши для операторного гиперболического уравнения в упомянутом гильбертовом пространстве. При этом введена операторная матрица кинетической энергии, которая оказывается компактным положительным оператором. На базе свойств операторов потенциальной и кинетической энергии получены следующие результаты:

а) доказана теорема о структуре спектра собственных колебаний гидросистемы;

б) установлен спектральной признак динамической устойчивости;

в) доказана теорема о существовании сильного решения как в случае ее устойчивости, так и неустойчивости гидросистемы.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда, (код проекта 14-21-00066), Воронежский государственный университет.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Kopachevsky N. D., Sitshaeva Z. Z.* On the Equilibrium and Stability of a Capillary Liquid with Disconnected Free Surface in an Open Vessel. Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 205, № 6. P. 777-790.

2. *Kopachevsky N. D., Sitshayeva Z. Z.* On the spectral criterion of stability in the problem of small motions of an ideal capillary fluid with disconnected free surface. Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 206, № 1. P. 39-57.

А. В. Котляр (Физико-технический институт низких температур им Б.И. Веркина, Украина), Л. С. Панкратов Московский физико-технический институт, Российская Федерация
leon_s_pan@yahoo.fr

МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Рассматривается двухфазное течение сжимаемых жидкостей (типа нефть-вода) в среде с двойной пористостью (см., например, [1]), в случае когда плотность жидкости зависит только от глобального давления (определение глобального давления см., например, [2]).

В работе [3], предполагалось, что пористость среды и глобальный коэффициент проводимости являются быстро осциллирующими функциями и было получено макроскопическое описание данного течения. В нашей работе мы обобщаем этот результат на случай когда плотность сжимаемой жидкости зависит только от глобального давления и получено макроскопическое описание данного процесса.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва, Недра. 1982

2. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н., Лаврентьев М. М.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Наука, Сибирское отд-ние, 1983.

3. *Amaziane B., Antontsev S., Pankratov L., Piatnitski A.* Homogenization of Immiscible Compressible Two-Phase Flow in Porous Media: Application to Gas Migration in a Nuclear Waste Repository. MMS SIAM. 2010. T. 8, № 5. C. 2023—2047.

Л. Г. Куракин (Южный федеральный университет, Россия)
kurakin@math.rsu.ru
И. В. Островская (Южный федеральный университет, Россия)
ostrov@math.rsu.ru

М. А. Соколовский (Институт водных проблем РАН, Институт океанологии РАН им. П.П. Ширшова, Россия)

УСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЕВОГО КВАДРУПОЛЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается система четырех точечных вихрей в двухслойной жидкости, три из которых одинаковой интенсивности расположены в одном слое, а один вихрь произвольной интенсивности — в другом. Движение такой вихревой конфигурации описывается гамильтоновой системой. У нее есть стационарное решение, которое принято называть «каруселью»: три одинаковых вихря вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг четвертого, находящегося неподвижно посередине между ними.

Проведен анализ устойчивости рассматриваемой вихревой карусели в рамках подхода, развитого В. И. Юдовичем для задачи устойчивости стационарных движений динамических систем, обладающих группой симметрии. Устойчивость здесь понимается как устойчивость по Раусу (устойчивость стационарного движения).

В работе исследована квадратичная часть приведенного гамильтониана и собственные значения соответствующей матрицы линеаризации. Показано, что все пространство параметров задачи разбивается на три части: область устойчивости по Раусу в точной нелинейной постановке, область экспоненциальной неустойчивости и область в которой требуется нелинейный анализ. Результаты анализа подтверждаются численным расчетом траекторий вихрей.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (Задание №1.1398.2014/K), и гранта РНФ (проект 14-50-00095).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куракин Л. Г., Островская И.В., Соколовский М.А.* Об устойчивости дискретных вихревых мультиполей в однородной и двухслойной вращающейся жидкости. Доклады РАН. 2015. Т. 462, № 2.

Д. А. Леонов (ЮФУ, Россия)
tori_92@inbox.ru

Быстрое преобразование Фурье для решения свёрточных уравнений на некоторых конечных некоммутативных группах

Исследуется метод Фурье решения сверточных уравнений на диэдральных группах $\mathbb{D}_m$ и группах Гейзенберга. Строится быстрое преобразование Фурье на диэдральных группах и группах Гейзенберга на основе редукции к быстрому преобразованию Фурье на циклических группах. Разработана программная реализация численного метода решения свёрточных уравнений с применением построенного быстрого преобразования Фурье на этих группах. Приведены результаты численных экспериментов.

D. V. Limanskii (Donetsk National University, Ukraine)
4125aa@gmail.com

SUBORDINATED CONDITIONS FOR SYSTEMS OF MINIMAL DIFFERENTIAL OPERATORS

Our aim is to study the construction of the linear space $L(P)$ of minimal differential polynomials $Q(D)$ subordinated to the operator $P(D)$ in the $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ norm, i.e., the space of operators $Q(D)$ satisfying the a priori estimate

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_1\|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

with constants $C_1, C_2 > 0$ not depending on $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

We consider the case where the symbol $P(\xi)$ is the tensor product of two polynomials, i.e., it is the product of polynomials $P_1(\xi)$ and $P_2(\xi)$ acting on different variables:

$$P(\xi) = P_1(\xi) \otimes P_2(\xi) := P_1(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, 0, \dots, 0) \cdot P_2(0, \dots, 0, \xi_{p_1+1}, \dots, \xi_n).$$

In [1, 2], there was investigated the space $L(P_1 \otimes P_2)$ in the case of elliptic operators $P_1(D)$ and $P_2(D)$. In [3], the space $L(P_1 \otimes P_2)$ was completely described if $P_1(D_1)$ and $P_2(D_2)$ are ordinary differential operators, and zeros of the symbol $P_1(\xi_1)$ are real and simple. In the above situations, the basis of $L(P)$ consists of both differential monomials and the polynomial P.

Here we consider the same problem where $P_1(D_1)$ and $P_2(D_2)$ are still ordinary differential operators whose symbols can have multiple real zeros. In this case, we construct an example of an operator P of high order such that the space $L(P)$ contains a nontrivial linear combination of differential monomials Q_1 and Q_2 while the monomials themselves do not belong to $L(P)$.

R E F E R E N C E S

1. *Limanskii D. V., Malamud M. M.* Elliptic and weakly coercive systems of operators in Sobolev spaces. Sbornik: Mathematics. 2008. Vol. 199, No. 11. P. 1649–1686.
2. *Limanskii D. V.* On estimates for a tensor product of two homogeneous elliptic operators. Ukr. Math. Bulletin. 2011. Vol. 8. No. 1. P. 101–111.
3. *Limanskii D. V.* Subordination conditions for a tensor product of two ordinary differential operators. Dopovidi NAN Ukrainy. 2012. №. 4. P. 25–29.

Р. М. Мавлявиев, И. Б. Гарипов (КФУ, Россия)
mavly72@mail.ru, ilnur_garipov@mail.ru

ПРИВЕДЕНИЕ ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ К ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

При изучении процессов проходящих в пористых средах наблюдается, что изучаемая величина подвержена флуктуациям. Но на практике, бывает достаточно установить среднее значение физической величины. В работе [1] предложена методика составления уравнений, описывающих осесимметрические явления в пористых средах с фрактальной структурой. Функции, удовлетворяющие таким уравнениям, имеют смысл плотности вероятности обнаружения частицы.

При симметрическом распределении изучаемой величины относительно некоторой оси, целесообразно переходить к цилиндрическим координатам. При таком переходе, как правило, и возникает оператор Бесселя в уравнении, описывающем процесс.

Рассмотрим линейное уравнение с младшими членами

$$\Delta_B u + 2\sum_{i=1}^{p-1} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - c^2 u = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_B = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_{x_p}$, $\quad B_{x_p} = \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{k}{x_p}\frac{\partial}{\partial x_p}$ — оператор Бесселя, $a_i > 0$, $\quad c > 0$, $\quad k > 0$.

С помощью подстановки

$$u = e^{-\sum\limits_{i=1}^{p-1} a_i x_i}\omega,$$

уравнение (1) приводится к осесимметрическому уравнению Гельмгольца

$$\Delta_B \omega - \lambda^2 \omega = 0, \tag{2}$$

где $\lambda^2 = c^2 + \sum\limits_{i=1}^{p-1} a_i^2$.

Решение уравнения (2) зависящее лишь от расстояния r может быть записано в терминах гипергеометрической функции Гаусса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *O'Shaughnessy B., Procaccia I.* Analitikal solutions for diffusion fractal objekts. Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54, № 5. P. 455–458.

О. Х. Масаева (ИПМА, Россия, г. Нальчик)
olesya.masaeva@ya.ru

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ уравнение

$$D_{0x}^{\alpha-1} u_x(\xi, y) + D_{0y}^{\beta-1} u_y(x, \eta) + cu = f(x, y), \tag{1}$$

где $1 < \alpha, \beta < 2$, $c = c(x, y)$, $u = u(x, y)$, D^{ν}_{0t}– оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка ν с началом в точке 0 и с концом в точке t [1, с. 9].

В работах [2], [3] исследована задача Дирихле для обобщенных уравнений Лапласа дробного порядка. В данной работе доказана единственность решения следующей смешанной задачи.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$[D^{\alpha-2}_{0x} u_x(\xi, y)]_{x=0} = [D^{\alpha-2}_{0x} u_x(\xi, y)]_{x=a} = 0,$$
$$u(x, 0) = u(x, b) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003.
2. *Масаева О.Х.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто. Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, №3. С. 442- 446.
3. *Масаева О. Х.* Априорная оценка для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части. Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. академии наук 2009. Т. 11, №1. С. 36-37.

А. М. Морад, М. Ю. Жуков (Ростов-на-Дону)
zhuk@math.rsu.ru, am.morad@menofia.edu.eg

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЗМУЩЕНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ ПОКРЫВАЮЩЕЙ ЦИЛИНДР

Работа посвящена исследованию поведения тонкого слоя несжимаемой жидкости на внешней поверхности бесконечного цилиндра. В данной работе для описания поведения покровной пленки, предлагается использовать аналог уравнений мелкой воды в приближении Буссинеска — системы двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка [1-2]

$$\Phi_t + \Gamma\Phi_x + \Phi\Gamma_x = 0, \quad \Gamma_t + \Gamma\Gamma_x - \Omega_0^2\Phi_x = 0. \tag{1}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями"опрокинутой"мелкой воды

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad v_t + vv_x = g\rho_x, \quad \rho = \Phi, \quad v = \Gamma, \quad g = \Omega_0^2. \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность, v — скорость, g — центробежное ускорение. Метод годографа позволяет получить решение системы уравнений для неизвестных функции $\Phi = \Phi(x, t)$ и $\Gamma = \Gamma(x, t)$

$$\Phi_t = \frac{x_\Gamma}{\Delta}, \quad \Gamma_t = -\frac{x_\Phi}{\Delta}, \quad \Phi_x = -\frac{t_\Gamma}{\Delta}, \quad \Gamma_x = \frac{t_\Phi}{\Delta}, \tag{3}$$

где $\Delta = t_\Phi x_\Gamma - t_\Gamma x_\Phi$ — Якобиан. Подставляя преобразование годографа (3) в (1), получим систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$x_\Gamma = \Gamma t_\Gamma - \Phi t_\Phi, \quad x_\Phi = \Omega_0^2 t_\Gamma + \Gamma t_\Phi. \tag{4}$$

Используя безразмерные функции $\Phi = r^2$, $\Gamma = 2\Omega_0 z$, и условия совместности (4) получим уравнение для времени: $t_{rr} + t_{zz} = -\frac{3}{r} t_r$.

Неустойчивости возмущения свободной поверхности описываются некоторыми эволюционными решениями, растущими с течением времени. В работе представлены результаты вычислений, описывающие поведение свободной поверхности слоя жидкости для некоторых типов периодических возмущений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и правительство Египта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жданов С. К., Трубников Б. А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991.

2. *Morad A. M., Zhukov M. Yu.* The motion of a thin liquid layer on the outer surface of a rotating cylinder // Eur. Phys. J. Plus. 2015. **130**. 8 pp.

А. Б. Моргулис (ЮФУ и ЮМИ РАН, Россия)
morgulisandrey@gmail.com

МЕДЛЕННЫЙ КОЛЛАПС И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Речь пойдёт о постепенной потере гладкости решениями уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости в областях с непроницаемыми границами или при условиях пространственной периодичности. Потеря гладкости может выражаться, например, в постепенном, но неограниченном росте градиента вихря со временем в двумерном случае, или самого вихря в общем случае. Из-за потери гладкости течение, устойчивое в некоторой грубой «энергетической» метрике, может оказаться неустойчивым в более сильных метриках.

Потерю гладкости (=медленный коллапс) обнаружил В. Юдович в 1974 г для частных классов течений, и на этой основе предположил, что потеря гладкости имеет место для «большинства» течений [1]. Эта гипотеза пока не доказана. Не доказана и более слабая гипотеза «имманентной неустойчивости», также высказанная В. Юдовичем [1], которая утверждает, что любое стационарное течение неустойчиво по Ляпунову в метрике, зависящей от производных вихря в двумерном случае или от самого вихря в общем случае. В докладе рассмотрено современное состояние этих проблем. Особое внимание уделено проблеме существования возрастающих функционалов Ляпунова; такие функционалы будут указаны явно для широких классов плоских течений, и на этой основе установлена плотность начальных полей скорости, «запускающих» течения с потерей гладкости (в смысле сходимости полей завихренности в L_p). Кроме того, будут значительно расширены (по сравнению с известными) классы стационарных потоков, возмущения которых приводят к потере гладкости возмущённого течения, и установлено, что такие возмущения могут быть сколь угодно малы (вместе производными до любого порядка).

Доклад подготовлен в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности № 1.1398.2014/К.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В.И.* О потере гладкости решения уравнений Эйлера со временем. Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1974. Вып. 16. С. 71-78. On the loss of smoothness of the solutions to the Euler equations and the inherent instability of an ideal fluid flows. Chaos, 2000. Vol. 10, 705-719.

2. *Morgulis A., Shnirelman A., Yudovich V.* Loss of Smoothness and Inherent Instability of 2D Inviscid Fluid Flows//Communications in Partial Differential Equations. 2008. Vol. 33:6, P. 943–968.

A. B. Muravnik (JSC “Concern “Sozvezdie”, Russia)
amuravnik@yandex.ru

ON QUALITATIVE PROPERTIES OF SOLUTIONS OF QUASILINEAR PARABOLIC PROBLEMS

The Bitsadze idea to reduce nonlinearities including the second power of the first derivative of the unknown function (see [1]) is developed and applied in the following three directions:

1. the stabilization of solutions of quasilinear parabolic equations;
2. blow-up effects in quasilinear parabolic inequalities;
3. special properties of solutions (such as a finite propagation velocity for perturbations, support compactification, finite-time extinction, etc.) of quasilinear parabolic problems.

Regarding the first and second directions, a number of results is already published (see, e. g., [2–5]). Regarding the third one, an example of a recent result is the proof of the claimed properties for the Cauchy problem for inequalities of the kind

$$\Delta u+\sum_{j=1}^{n}a_j(x,u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2-\frac{\partial u}{\partial t}\geq f(u),$$

provided that there exists $a\geq 0$ such that $a_j(x,s)\leq\frac{a}{s}$ in $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$, $j=\overline{1,n}$, and there exist $b>0$ and $p\in(-a,1)$ such that $f(s)\geq bs^p$ in $(0,+\infty)$.

This research was supported by RFBR grant No. 14-01-00265 and by the president grant for government support of the leading scientific schools of the Russian Federation No. 4479.2014.1.

REFERENCES

1. *Bitsadze A. V.* Some classes of partial differential equations. Nauka. 1981.

2. *Denisov V. N. and Muravnik A. B.* On stabilization of the solution of the Cauchy problem for quasilinear parabolic equations. Differ. Equ. 2002. Vol. 38, N. 3. P. 369–374.

3. *Muravnik A. B.* Stabilization of solutions of certain singular quasilinear parabolic equations. Math. Notes. 2003. Vol. 74, N. 6. P. 812–818.

4. *Muravnik A. B.* On local blow-up of solutions of quasilinear elliptic and parabolic inequalities. Nonlinear Bound. Value Probl. 2006. Vol. 16. P. 86–95.

5. *Muravnik A. B.* On blow-up of solutions of some systems of quasilinear parabolic inequalities. J. Math. Sci. (New York). 2014. Vol. 202. N. 6. P. 859—868.

К. А. Надолин (ЮФУ, Россия)
nadolin@math.sfedu.ru

РЕДУЦИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКИ И ПАССИВНОГО МАССОПЕРЕНОСА В ВОДОТОКАХ

В докладе обсуждается методика получения редуцированных пространственно трехмерных моделей гидродинамики и распространения пассивной неконсервативной примеси в мелких протяженных и слабо искривленных водотоках. Уравнения моделей получены методом малого параметра из уравнения диффузии распадающегося вещества в движущейся среде и уравнений Рейнольдса для несжимаемой жидкости, замкнутых на основе гипотезы Буссинеска. Предложена их классификация.

В основу предлагаемого подхода к выводу модельных уравнений положены следующие соображения.

Во-первых, потоки характеризуются относительно малой глубиной русла по сравнению с его шириной, а также значительной протяженностью. Поскольку отношение характерной глубины к характерной ширине области течения мало, ее геометрия может быть основой для введения малого параметра.

Во-вторых, естественные водотоки всегда являются турбулентными, поэтому любая, даже самая упрощенная модель должна учитывать турбулентность течения. Однако из-за недостаточности экспериментальных данных можно ограничиться простейшими моделями турбулентности.

В-третьих, рассматривая перенос пассивной примеси, когда изменение концентрации вещества в потоке не влияет на скорость течения жидкости. Таким образом, задача определения поля скорости потока отделяется от задачи определения концентрации вещества в потоке с заданным полем скорости.

Отметим, что в отличие от распространенных осредненных моделей, предлагаемые модели учитывают пространственную структуру течения, что позволяет исследовать влияние формы дна и береговой линии русла, а также некоторых внешних факторов (например, воздействие ветра) на особенности перемешивания и распределения вещества в потоке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Надолин К. А.* Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках. Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 2. С. 11–28.

П. В. Николенко (Ростов-на-Дону)
petr.v.nikolenko@gmail.com

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ О НАИСКОРЕЙШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ В ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Задачи теории управления вида:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha + \beta|u|^2)\,dt \to \min, \quad \dot{x} = v(x) + u,\ x(t_0) = x^0,\ x(t_1) = 0,$$

v — гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^2$, управление u таково, что $u(t) \in \mathbb{R}^2$, $\|u(t)\| \leqslant 1$ имеют непрерывные экстремали Понтрягина.

Точка x_0 называется точкой неоднозначности, если управление u и $\widetilde{u}$ переводят x_0 в 0 и $J(u) = J(\widetilde{u})$.

Имеется эффективный способ вычисления множества N, состоящего из всех точек неоднозначности. Множество N, образуя многообразие, пересекает траектории Понтрягина и отсекает от них неоптимальную часть. Таким образом, оптимальными могут быть либо траектории, непересекающиеся с N, либо куски траекторий, обрезанные множеством N.

Оказывается, что если задача удовлетворяет определённым условиям регулярности, то все указанные объекты действительно оптимальны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николенко П. В.* О наискорейших перемещениях в поле скоростей // Дифференциальные уравнения, 2011. № 5.

2. *Николенко П. В.* Множество неоднозначности и задача о наискорейших перемещениях в поле скоростей // Дифференциальные уравнения, 2014. № 3.

Л. В. Новикова (Ростов-на-Дону)
lvnovikova@sfedu.ru

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассматриваются операторы $N_\delta : U \to U(\delta \in R_1)$ в банаховом пространстве U и исследуются условия, при которых у операторов N_δ рождаются инвариантные многообразия, гомеоморфные $n-$мерным торам для всюду плотного на отрезке $(0, \varepsilon)$ множества M_ε значений параметра δ.

При этом мера $mes\ T_\varepsilon$ множества T_ε значений параметра $\delta \in (0, \varepsilon)$, для которых существует инвариантный притягивающий тор, соотнесённая к мере ε отрезка $(0, \varepsilon)$, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Для значений параметра δ, принадлежащих к дополнению $(0, \varepsilon) \subset T_\varepsilon$ множества T_ε, сколь угодно малые изменения параметра δ полностью меняют качественную структуру аттракторов $\{N_\delta\}, k = 0, 1, 2, \ldots$

М. В. Норкин (Южный федеральный университет, Россия)
norkinmi@mail.ru

РЕЗКО НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ЖИДКОСТЬЮ (УДАР И РАЗГОН)

Начальный этап движения твердых тел в идеальной несжимаемой жидкости, во многих случаях, сопровождается падением давления в жидкости и образованием одной или нескольких каверн вблизи плавающих тел. Такая картина течения возникает при ударе твердого тела, полностью погруженного в жидкость, а также при его разгоне с достаточно большими ускорениями. В динамической задаче удара первоначальная зона отрыва определяется на основе классической модели удара с отрывом Л.И. Седова, решение которой является регулярным в точках отрыва. Положение точек отрыва в следующие после удара моменты времени определяется таким образом, чтобы выполнялось условие конечности скорости жидкости (условие Кутта-Жуковского). Отметим, что функция, описывающая возмущение внутренней свободной границы жидкости, найденная прямым асимптотическим методом или методом шагов по времени, в общем случае, имеет особенности в точках отрыва. Эти особенности необходимо сгладить с помощью построения специальных погранслойных решений. Подробное исследование эти вопросов проведено для случая кругового цилиндра с помощью асимптотик малых времен [1–2]. Задача разгона твердого тела в жидкости отличается от задачи удара тем, что она является динамической уже в главном приближении по времени. Первоначальные зоны отрыва определяются здесь на основе математической модели, аналогичной модели удара с отрывом Л.И. Седова. Основные результаты, полученные в динамических задачах удара и разгона, состоят в построении регулярных асимптотических решений на малых временах. В задаче удара такие решения строятся с учетом первых двух членов асимптотики, а в задаче разгона – на основании главного приближения по времени.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере

научной деятельности (Задание №1.1398.2014/k).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Norkin M. V., Korobkin A. A.* The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder //J. Engng. Math. 2011. V. 70. P. 239–254.

2. *Норкин М. В.* Движение кругового цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны// Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 101–112.

С. Н Овчинникова (Ростов на Дону)
ovch.09@mail.ru

БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 В ЗАДАЧЕ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА С ЦИДИНДРАМИ, ВРАЩАЮЩИМИСЯ В ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СТОРОНЫ

Течение вязкой несжимаемой жидкости между бесконечно длинными соосными вращающимися цилиндрами описывается начально-краевой задачей для системы Навье-Стокса. Задача обладает симметрией и зависит от вещественных параметров. В пространстве параметров существуют значения (точки бифуркации коразмерности 2), при которых пересекаются две границы устойчивости течения Куэтта, отвечающие различного рода бифуркациям. В каждой точке бифуркации коразмерности 2 существует несколько независимых нейтральных мод (ненулевых решений линеаризованной на течении Куэтта системы Навье-Стокса). Взаимодействие нейтральных мод в малой окрестности такой точки описывается нелинейной системой амплитудных уравнений на центральном многообразии. Существует семь типов точек бифуркации коразмерности 2 для невращательно-симметричных мод, которым отвечают амплитудные системы, различающиеся дополнительными резонансными слагаемыми. Самые многочисленные точки резонансов Res 0 и Res 1 существуют при любом направлении вращения цилиндров и образуют в четырехмерном пространстве параметров поверхности (двупараметрические семейства). Пространственные кривые (однопараметрические семейства), состоящие из точек остальных резонансов, находятся на этих поверхностях. В случае вращения цилиндров в противоположные стороны на поверхностях, образованных точками резонанса Res 0, существуют еще точки Res 2, Res 4 и Res 5. В их окрестности проведен численный анализ условий существования и устойчивости решений амплитудных систем на инвариантных подпространствах, которым соответствуют стационарные, периодические, квазипериодические решения системы Навье-Стокса.

Е. Ю. Панов (Новгородский гос. университет, Россия)
Eugeny.Panov@novsu.ru

О ТРАНСПОРТНЫХ УРАВНЕНИЯХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное транспортное уравнение

$$u_t + a(x) \cdot \nabla_x u = 0, \tag{1}$$

$u = u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi = (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, с лишь ограниченным измеримым вектором коэффициентов $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x)) \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющим условию соленоидальности

$$\operatorname{div} a(x) = 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Это условие позволяет переписать (1) в дивергентной форме

$$u_t + \operatorname{div}(a(x)u) = 0$$

и ввести понятие обобщенного решения (о.р.) $u = u(t,x) \in L^2_{loc}(\bar\Pi)$, $\bar\Pi = [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными

$$u(0,x) = u_0(x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \tag{2}$$

с помощью стандартного интегрального тождества

$$\int_\Pi u(f_t + a \cdot \nabla_x f) dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) f(0,x) dx = 0 \quad \forall f \in C_0^1(\bar\Pi).$$

Известно, что о.р. задачи (1), (2) всегда существует, но может быть неединственным, для единственности о.р. обычно накладывают дополнительные условия регулярности коэффициентов.

Мы предлагаем следующий операторный критерий единственности о.р. Рассмотрим косо-симметричный линейный оператор $Au = a(x) \cdot \nabla u(x)$ в гильбертовом пространстве $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$ с областью определения $D(A) = C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. *О.р. $u(t,x) \in L^2_{loc}(\bar\Pi)$ задачи (1), (2) единственно тогда и только тогда, когда оператор A является существенно кососопряженным в L^2. Кроме того, в этом случае $g(u(t,x))$ является о.р. задачи (1), (2) (с начальной функцией $g(u_0)$) для любой функции $g(u) \in C(\mathbb{R})$, такой что $g(u) \in L^1_{loc}(\bar\Pi)$, $g(u_0) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (свойство ренормализации).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15-01-07650-а) и Министерства образования и науки РФ (гос. задание, проект 1.857.2014/К).

В. А. Попов (Москва)

vlapopov@gmail.com

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ АФИННЫХ ПРЕОРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим локально заданную аналитическую аффинную связность Γ_{ij}^k на аналитическом многообразии M. Инфинитезимальные аффинные преобразования – это векторные поля $\xi^k(x)$ такие, что

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial\Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}\xi^l-\Gamma_{ij}^l\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}+\Gamma_{lj}^k\frac{\partial\xi^l}{\partial x^i}+\Gamma_{il}^k\frac{\partial\xi^l}{\partial x^j}\right)=0.$$

Теорема 1. *Пусть ζ – алгебра Ли всех инфинетеземальных аффинных преобразований на пространстве аффинной связности M, $\eta\subset\zeta$ – стационарная подалгебра, G – односвязная группа Ли с алгеброй Ли ζ и $H\subset G$ – подгруппа с алгеброй Ли η. Тогда, если алгебра ζ не имеет центра, то подгруппа H замкнута в G. и таким образом, определено однородное риманово пространство G/H.*

В случае риманова многообразия локально заданная аффинная связность аналитически продолжается до аффинной связности непродолжаемого многообразия M такого, что любая изометрия меду открытыми подмножествами M продолжается до изометрии всего многообразия. Для метрик, алгебра Ли векторных полей которых не имеет центра, определим квазиполное продолжение, как непродолжаемое многообразие M, которое не допускает нетождественных сохраняющих векторные поля Киллинга изометрий между своими открытыми подмножествами. Такое продолжение единственно, и каждая изометрия между открытыми подмножествами продолжается до изометрии всего M.

Даная работа является естественным продолжением работ [1], [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Popov V.* On analytic extensions of Riemannian manifolds // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. Kharkov “Apostrof”, 2011.

2. *Попов В. А.* Локально заданные изометрии псевдоримановых аналитических пространств. // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках. Издательская группа «Апостроф». Харьков, 2012.

V. S. Rabinovich (National Polytechnic Institute of Mexico)
vladimir.rabinovich@gmail.com

DIFFRACTION PROBLEMS ON GENERAL UNBOUNDED OBSTACLES

Let $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n$, where $x'=(x_1,...,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\Pi_R=\{x\in\mathbb{R}^n:|x'|>R\}$. We consider the diffraction problem on unbounded obstacles D with $C^\infty-$boundary

∂D such that

$$D_R = D \cap \Pi_R = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > F(x'), |x'| > R\}$$

for some $R > 0$, where F is an infinitely differentiable real-valued function on $\mathbb{R}^{n-1}$ with bounded derivatives $\partial_{x'}^{\alpha'} F$ for all multiindeces $\alpha' = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \neq 0$. The diffraction problems are described by the Helmholtz operators

$$\mathcal{H}u(x) = \left(\rho(x)\nabla \cdot \rho^{-1}(x)\nabla + a(x)\right) u(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

where ρ, a belong to the space $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ the infinitely differentiable functions on $\mathbb{R}^n$ bounded with all derivatives. The operator $\mathcal{H}$ describes the propagation of acoustic or polarized harmonic electromagnetic waves in unhomogeneous media. We suppose that $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(x) > 0$, $\operatorname{Im} a(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$, $\liminf\limits_{\mathbb{R}^n \ni x \to \infty} \operatorname{Im} a(x) > 0$. Given conditions provide the invertibility of the Helmholtz operator $\mathcal{H}$ acting from $H^s(\mathbb{R}^n)$ into $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$, for every $s \in \mathbb{R}$. Moreover $\mathcal{H}^{-1}$ is a pseudodifferential operator in the class $OPS_{1,0}^{-2}(\mathbb{R}^n)$. We introduce single and double layer potentials $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ and $\mathcal{D}_\mathcal{H}$ associated with the operator $\mathcal{H}$. By means of these potentials we reduce the mentioned boundary value problems to boundary pseudodifferential equations on the unbounded surface ∂D. We give the necessary and sufficient conditions for the boundary operators to be Fredholm in the Sobolev spaces $H^s(\partial D)$ in terms of their limit operators.

In a particular case if the coefficients ρ, a of $\mathcal{H}$, and the function F describing the boundary ∂D are slowly oscillating at infinity, we obtain the classical for bounded obstacles result: the boundary integral operators of the Dirichlet and Neumann problems are invertible in $H^s(\partial \mathcal{D})$ for every $s \in \mathbb{R}$.

А. П. Солдатов, А. Б. Расулов (Белгород, Москва)
НИУ БелГУ, НИУ МЭИ
Soldatov48@gmail.com, rasulov_abdu@rambler.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим односвязную область G, ограниченную гладким контуром L, который пересекает вещественную прямую $\operatorname{Im} z = 0$ в двух точках $\tau_0 < \tau_1$. Пусть L^+ и L^- – части L, лежащие, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях, и аналогичный смысл имеют области $G^\pm$. В области G рассмотрим обобщенную систему Коши-Римана

$$\partial_{\bar z} U - A(z)U + B(z)\overline{U} = F(z), \tag{1}$$

с коэффициентами, допускающую сверхсингулярность на отрезке $l = [\tau_0, \tau_1] \subseteq \overline{G}$:

$$A(z) = \frac{(z-\overline{z})a(z)}{|z-\bar{z}|^{n+1}},\ B(z) = \frac{b(z)}{|z-\bar{z}|^{m}}, \quad a, b \in C(\overline{G}), \tag{2}$$

где $n > 0, 0 < m \leq 1$. Существует несколько различных математических теорий уравнения (1), которые обобщают методы ТФКП, наиболее весомым из которых является теория обобщенных аналитических функций И.Н.Векуа. Теория Векуа построена в предположении, что $A(z), B(z), F(z)$ принадлежат пространству $L^p(G), p > 2$. Поэтому даже уравнение с такими коэффициентами, как $A(z) = 1/z, B(z) = 1/\overline{z}$ не вписывается в теорию Векуа. Развитие теории сингулярных интегральных уравнений во многом способствовало дальнейшему изучению уравнений с особыми коэффициентами.

В настоящей работе для уравнения (1) коэффициенты которого допускают особенности высокого порядка на отрезке, найдено интегральное представление общего решения. Кроме того, исследована краевая задача, объединяющая черты задач линейного сопряжения и Римана-Гильберта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.-М.:Физматгиз, 1988. -509с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М; Наука, 1968. -511с.
3. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. Высшая школа. 1991. -206с.

С. В. Ревина (ЮФУ, Ростов-на-Дону; ЮМИ, Владикавказ)
revina@math.rsu.ru

КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНЫХ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно, описываемое системой уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nu \Delta \boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Средняя по пространству скорость считается заданной. Предполагается, что один из пространственных периодов $L_2 = 2\pi/\alpha$ стремится к бесконечности, когда волновое число $\alpha \to 0$.

Строится длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарного течения, когда основное поле скорости принадлежит классу течений, близких к параллельным

$$\boldsymbol{V} = (\alpha V_1(x_2), V_2(x_1)),$$

обобщающих классическое течение Колмогорова с синусоидальным профилем скорости

$$\boldsymbol{V} = (0, \gamma \sin x_1).$$

Предполагается, что среднее скорости основного течения вдоль длинного периода отлично от нуля: $\langle V_2 \rangle \neq 0$.

Линейная спектральная задача для сдвиговых (параллельных) течений рассмотрена в [1], показано, что при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости. Настоящая работа посвящена линейной спектральной задаче для непараллельных течений. Найдены первые члены длинноволновой асимптотики собственных значений, собственных функций и критического значения вязкости. Коэффициенты разложений явно выражаются через некоторые вронскианы, применяются также интегральные операторы типа Вольтерра. Проведено сравнение со случаем сдвиговых течений. Полученные результаты предполагается применить для нахождения автоколебаний, ответвляющихся от основного течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ревина С.В.* Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // ЖВМиМФ. 2013. Т.53. № 8. С. 1387–1401.

И. Д. Ремизов (Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского)
ivremizov@yandex.ru

КВАЗИФЕЙНМАНОВСКИЕ ФОРМУЛЫ — НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

Формула Фейнмана – это равенство следующего вида: слева стоит определяемая равенством функция, а справа – предел кратного интеграла при стремящейся к бесконечности кратности (и только он). Предложенный О.Г.Смоляновым подход, основанный на теореме Чернова, позволил в виде формул Фейнмана получить решения для некоторых важных эволюционных уравнений: теплопроводности, Шрёдингера и других, см. обзоры [1], [2]. В настоящем докладе предлагается расширить поле внимания с фейнмановских формул до квазифейнмановских.

Определение 1.*Квазифейнмановская формула – это равенство следующего вида: слева стоит определяемая равенством функция, а справа – выражение, содержащее кратные интегралы сколь угодно большой кратности. В отличие от фейнмановских, квазифейнмановские формулы в правой части могут содержать суммирование или другие операции.*

Естественность такого расширения диктуется недавно полученной теоремой 2, дающей представление решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера не в виде фейнмановских, а в виде квазифейнмановских формул. Причём доказательство двух классов квазифейнмановских формул, даваемых новым методом, оказывается на два порядка проще, чем фейнмановских. Продвижение было достигнуто на основе структурирования условий теоремы Чернова следующим образом:

Теорема 1. (П.Р.Чернов, 1968) *Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство и $L_b(\mathcal{F},\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$, наделённое обычной операторной нормой. Пусть дан линейный оператор $L\colon \mathcal{F}\supset Dom(L)\to\mathcal{F}$ и такая функция G, что:*

(E). Существует сильно непрерывная полугруппа $(e^{tL})_{t\geq 0}$ с генератором $(L, Dom(L))$.

(CT1). Функция G определена на $[0,+\infty)$, принимает значения в $L_b(\mathcal{F},\mathcal{F})$, и отображение $t\longmapsto G(t)f$ непрерывно на каждом векторе $f\in\mathcal{F}$.

(CT2). $G(0)=I$.

(CT3). Существует такое плотное в $\mathcal{F}$ подпространство $\mathcal{D}\subset\mathcal{F}$, что при всех $f\in\mathcal{D}$ существует $G'(0)f=\lim_{t\to 0}(G(t)f-f)/t$.

(CT4). Замыкание оператора $(G'(0),\mathcal{D})$ существует и равно $(L, Dom(L))$.

(N). Существует такое число $\omega\in\mathbb{R}$, что $\|G(t)\|\leq e^{\omega t}$ при всех $t\geq 0$.

Тогда для каждого $f\in\mathcal{F}$ справедливо $(G(t/n))^n f\to e^{tL}f$ при $n\to\infty$, где предел равномерен по $t\in[0,t_0]$ при каждом фиксированном $t_0>0$.

Замечание 1.*Если функция G (или, как иногда говорят, семейство $(G(t))_{t\geq 0}$) удовлетворяет условиям (CT1)-(CT4), то её предлагается называть касающейся по Чернову (Chernoff-tangent) оператора L. Если же функция удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова, то она называется (или оказывается, в зависимости от определения эквивалентности по Чернову) эквивалентной по Чернову полугруппе $(e^{tL})_{t\geq 0}$, что означает сходимость $(G(t/n))^n f\to e^{tL}f$. В случае, когда при каждом t оператор $G(t)$ интегральный, равенство $e^{tL}f=\lim_{n\to\infty}(G(t/n))^n f$ и есть формула Фейнмана.*

Основной анонсируемый в докладе результат кратко выражается так: если семейство $(S_t)_{t\geq 0}$ состоит из самосопряжённых операторов и находится в черновском касании с самосопряжённым оператором H, то семейство $R_t=e^{i(S_t-I)}$ эквивалентно по Чернову полугруппе Шрёдингера $(e^{itH})_{t\geq 0}$. В несколько большей общности это выглядит так.

Теорема 2. (И.Д.Ремизов, 2014) *Пусть даны линейный самосопряжённый оператор $H\colon\mathcal{F}\supset Dom(H)\to\mathcal{F}$ в гильбертовом пространстве F и число $a\in\mathbb{R}$. Пусть функция S черновски касается оператора H и $(S_t)^*=S_t$ для каждого $t\geq 0$.*

Тогда функция $\left(t\longmapsto e^{ia(S_{|t|}-I)\mathrm{sign}(t)}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ эквивалентна по Чернову группе

$(e^{iatH})_{t\in\mathbb{R}}$ *и для каждого* $f\in\mathcal{F}$ *по норме в* $\mathcal{F}$

$$e^{iatH}f=\left(\lim_{n\to\infty}\left(e^{ia(S_{|t/n|}-I)\mathrm{sign}(t)}\right)^n\right)f,\ e^{iatH}f=\left(\lim_{n\to\infty}e^{ian(S_{|t/n|}-I)\mathrm{sign}(t)}\right)f \quad (1)$$

$$e^{iatH}f=\left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{i^m a^m n^m(\mathrm{sign}(t))^m}{m!}(S_{|t/n|}-I)^m\right)f \quad (2)$$

$$e^{iatH}f=\left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left[\left(1-\frac{ian\,\mathrm{sign}(t)}{k}\right)I+\frac{ian\,\mathrm{sign}(t)}{k}S_{|t/n|}\right]^k\right)f \quad (3)$$

равномерно по $t\in[-t_0,t_0]$ *для каждого фиксированного* $t_0>0$. *Символ* $|x|$ *означает модуль действительного числа* x.

Замечание 2. *Если оператор* S_t *интегральный, то два последних равенства — квазифейнмановские формулы. Здесь кратко отметим только три полезных свойства теоремы 2. Во-первых, она позволяет свести решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера к построению семейства, касающегося оператора из уравнения теплопроводности (это проще, чем в случае оператора Шрёдингера). Во-вторых, более не требуется контролировать рост нормы аппроксимирующего семейства. В-третьих, метод работает на уровне полугрупп, а, значит, применим к уравнениям с любым пространством координат. Доказательство теоремы 2, замечания к ней и формулировки связанных с ней открытых вопросов см. в статье [3].*

Настоящее исследование профинансировано грантом РФФИ 14-41-00044 в ННГУ им. Н.И.Лобачевского.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smolyanov O. G.* Feynman formulae for evolutionary equations. — Trends in Stochastic Analysis, London Mathematical Society Lecture Notes Series 353, 2009.

2. *Butko Ya. A.* Feynman formulae for evolution semigroups (in Russian). Electronic scientific and technical periodical "Science and education DOI: 10.7463/0314.0701581 , N 3 (2014), 95-132.

3. *Remizov I. D.* The latest version of the preprint http://arxiv.org/abs/1409.8345

М. Ю. Ремизов (Ростов-на-Дону)
Remizov72@mail.ru

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВОЯКО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН

Изучение явления отражения волн, распространяющихся в упругой среде, содержащей упорядоченную систему трещин является важным вопросом для практического применения механики, электромагнетизма, акустики [1-3].

Для двух направлений в исследовании твердых тел с дефектами первый основан на их случайном распределении. Существует довольно большое количество публикаций, где рассмотрен широкий спектр таких задач.

Если в акустике прохождение сигнала через двояко-периодической решетки полностью изучено как для плоских, так и для пространственных задач [4,5], то в теории упругости исследования касались лишь задач в плоской постановке.

В данной работе рассматривается двояко-периодической система трещин, расположенных в плоскости, ортогональной к направлению падающей волны в трехмерной постановке.

В условиях низкочастотного режима, задача сводится к двумерному интегральному уравнению относительно функции раскрытия трещины в направлении падающей волны. Описывается процесс выделения регулярной и гиперсингулярной части ядра полученного интегрального уравнения для проведения процедуры численного решения методом коллокаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Теория и методы, т.1,2. М.: Мир, 1983.
2. *Jones D.S.* Acoustic and Electromagnetic Waves. Clarendon Press, Oxford, 1989.
3. *Krautkramer J., Krautkramer H.* Ultrasonic Testing of Materials. Springer-Verlag, New-York, 1983.
4. *Sumbatyan M.A.* Low frequency penetration of acoustic waves a periodic arbitrary-shaped grating: the three-dimensional problem. *Wave Motion*, 1995, **22**, 133–144.
5. *Scarpetta E.,Tibullo V.* Explicit results for scattering parameters in three-dimensional wave propagation through a doubly periodic system of arbitrary openings. *Acta Mechanica*, 2006, **185**, 1–9.

Н. Х. Розов (МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия)
rozov@rozov.mccme.ru

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И МОДЕЛЬ НЕЙРОНА

Релаксационные колебания широко распространены в механике, радиофизике, экологии, технике. Так принято называть периодические по времени процессы, в которых в течение каждого периода происходит несколько последовательных чередований участка медленного, плавного изменения характеристики процесса и участка её быстрого, скачкообразного изменения. Теоретический пример «классического» релаксационного цикла доставляет уравнение Ван дер Поля с «большим» параметром, а примером релаксационных колебаний в технике может служить явление помпажа.

Существуют такие сингулярно возмущенные автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых имеют место релаксационные циклы качественно иного, «неклассического» типа. «Неклассические» релаксационные колебания наблюдаются в специальной модификации известной модели ФитцХью — Нагумо функционирования нейрона. В этой модифицированной модели медленная компонента цикла асимптотически близка к разрывной функции, а его быстрая компонента δ-образна, что более точно отражает реальное функционирование нейрона.

А. Р. Рустанов (МПГУ, Россия)
aligadzhi@yandex.ru
С. В. Харитонова (ОГУ, Россия)
hcb@yandex.ru

ТОЖДЕСТВА КРИВИЗНЫ НОРМАЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО ПОЧТИ КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Пусть M – нормальное $lcAC_S$-многообразие. Известно [1], что ненулевые существенные компоненты тензора римановой кривизны такого многообразия на пространстве присоединенной G-структуры, с учетом свойств симметрии тензора кривизны [1] имеют вид:

$$R^a_{00b} = (\sigma_{00} + \sigma_0^2)\delta^a_b; \quad R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - \delta^a_c \delta^d_b \sigma_0^2; \quad R^a_{\hat{b}cd} = -2\delta^a_{[c}\delta^b_{d]}\sigma_0^2.$$

Плюс соотношения, полученные с учетом свойств симметрии, а остальные компоненты нулевые.

Определение 1. *Назовем нормальное $lcAC_S$-многообразие многообразием класса R_3, если его тензор кривизны удовлетворяет равенству:*

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z = 0; \quad \forall X,\ Y,\ Z \in X(M).$$

Теорема 1. *Нормальное $lcAC_S$-многообразие класса R_3 либо имеет размерность 3, либо является косимплектическим. В случае, когда $A^{ad}_{bc} = 0$ и $\sigma_{00} = 0$ оно является пространственной формой неположительной кривизны. И если $\sigma_0^2 = 1$ оно является конформно плоским многообразием Кенмоцу, если $\sigma_0 = 0$, то плоским косимплектическим многообразием.*

Определение 2. *Назовем нормальное $lcAC_S$-многообразие многообразием класса R_4, если его тензор кривизны удовлетворяет равенству:*

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z - R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = 0; \quad \forall X,\ Y,\ Z \in X(M).$$

Теорема 2. *Нормальное $lcAC_S$-многообразие класса R_4 либо имеет размерность 3, либо является косимплектическим.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кириченко В. Ф., Харитонова С. В.* О геометрии нормальных локально конформно почти косимплектических многообразий. Математические заметки. 2012. Т. 91, №1 , С. 40–53.

2. *Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р.* Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий. Математический сборник. 1988. Т. 193, № 8, С. 71–100.

S. Rutkauskas (Institute of Mathematics and Informatics of Vilnius University, Lithuania)
stasys.rutkauskas@mii.vu.lt

ON THE DIRICHLET TYPE PROBLEM TO DEGENERATE AT A LINE ELLIPTIC SYSTEMS

Let $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, $\Gamma := \partial D \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, be a domain of points $x = (x_0, x')$, $x' = (x_1, \ldots, x_n)$, containing the cylinder $C_R = \{(x_0, x') : |x'| < R,\ 0 < x_0 < H\}$, both bases of which lie on Γ. Thus, the line $x' = 0$ cross the domain D and intersect with Γ by two points $O\,(0,0)$ and $P\,(H,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

We consider in D the system of equations

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=0}^{n} B_i(x) u_{x_i} + C\,(x)\,u = F\,(x)\,, \tag{1}$$

assuming that matrixes $A_{ij} = \mathrm{diag}\ (a_{ij}^{(1)}, \ldots, a_{ij}^{(m)})$, $B_i = \mathrm{diag}\ (b_i^{(1)}, \ldots, b_i^{(m)})$, $C = (c_{kl})$ $(k, l = \overline{1,m})$ and right-hand side $F = (f_1, \ldots, f_m)$ are smooth enough in $\overline{D}$.

Let Ω be the projection of D onto the plane $x' = 0$. We assume that there exist continuous in $\overline{\Omega}$ and positive for $|x'| \neq 0$ functions a_1 and a_2 such that $a_2\,(0) = 0$ and

$$a_1(x')\,|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}^{(k)}(x)\xi_i\xi_j \leq a_2(x')\,|\xi|^2\,, \quad k = \overline{1,m},$$

in $\overline{D}$ for each $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Therefore, system (1) is elliptic in $D_0 = D \backslash \{x' = 0\}$ in the sense of Petrovskii and its order degenerates at the line $x' = 0$.

Let $D_\delta = D \backslash \{x : |x'| \leq \delta < R\}$. Introduce the class of vector-functions

$$C_{loc}^{2,\alpha}\,(D_0) := \{u : u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{D_\delta}\right)\ \forall \delta > 0\}.$$

The following two Dirichlet type problems to system (1) are studied:

$$u = g \text{ on } \Gamma_0 = \Gamma \backslash \{O \cup P\}, \quad |u| < \infty \text{ in } D_0; \tag{2}$$

$$u = g \text{ on } \Gamma_0, \quad \lim_{x' \to 0}\left(u(x_0, x') - h(x_0, x/\,|x'|)\right) = 0. \tag{3}$$

The sufficient conditions of existence and uniqueness of the solution $u \in C_{loc}^{2,\alpha}\,(D_0)$ of both problems (2) and (3) are given.

Л. В. Сахарова (Ростов-на-Дону)
L_Sakharova@mail.ru

ОДНОСКОРОСТНАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В ПЛОСКОЙ КАПЛЕ ПРИ ИСПАРЕНИИ В УСЛОВИЯХ ПИННИНГА

Выполнено моделирование процесса испарения капли жидкости, содержащей взвешенные частицы, на непроницаемом твердом горизонтальном основании в условиях пиннинга - фиксации границы. Предполагается, что радиус основания капли R существенно превышает ее относительную толщину δ, форма капли осесимметрична; кроме того, на линии контакта жидкости с поверхностью задан угол смачивания α. Процесс испарения определяется плотностью потока пара J над поверхностью капли, а процесс осаждения твердых частиц на основание — коэффициентом седиментации k_d.

Для моделирования течений в капле использована модель односкоростного континуума, включающая в себя: 1) уравнение массопереноса для жидкости, 2) уравнение сохранения импульса, 3) уравнение теплопроводности; 4) уравнение диффузии для взвешенных частиц. Система уравнений рассматривается в области с подвижной границей — свободной поверхностью капли, форма которой меняется из-за испарения и определяется силами поверхностного натяжения, а также гравитационным полем. Краевые условия на подвижной границе капли задаются: 1) определением поля скоростей жидкости через скорость испарения растворителя и локальную скорость движения поверхности; 2) балансом давления, вязких напряжений и поверхностного натяжения; 3) непроницаемостью свободной границы для твердых частиц; 4) термодинамикой фазового перехода на поверхности капли. Начальные условия определяются заданием начальной концентрации примеси, температуры, нулевого поля скоростей, а также равновесной формы поверхности капли в начальный момент времени.

Для решения задачи использован метод осреднений для искомых функций по толщине капли h, в результате чего уравнение массопереноса сведено к уравнению движения свободной границы капли, а исходная трехмерная краевая задача к двумерной задаче в полярной системе координат относительно неизвестных функций: v_r v_φ — радиальной и угловой скоростей поля течения жидкостей, c — концентрации твердых частиц, T — температуры жидкости. Решения полученной начально-краевой задачи найдены в виде рядов по степеням малого параметра — относительной толщины капли δ.

В. И. Седенко (Ростов-на-Дону)
visedenko@mail.ru

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Приводится развитие результатов, полученных в [1]-[3].

Скорость $v(x,t)$ и давление $p(x,t),\ (x,t) \in R_3 \times R$, течения вязкой несжимаемой жидкости удовлетворяют системе уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v - \gamma \triangle v = -\nabla p + F, div_x v = 0,$$

где $F(x,t),\ (x,t) \in R_3 \times R$ - массовые силы. Скорость $v(x,t)$ удовлетворяет условию убывания на бесконечности

$$v(x,t) \to 0,$$

и начальному условию

$$v(x,0) = v_0(x).$$

Введем обозначения:

$$r(x,t) = rot_x v(x,t),\ \Phi(x,t) = rot_x F(x,t).$$

Теорема. *Имеет место следующая априорная оценка*

$$\left(\|v\|_{L^{2,0}_{\frac{4}{3}-,\frac{4}{3}}(R_3\times[0,T])}\right)^{\frac{4}{3}} \leq$$

$$\leq \sigma\left(\|v(,0)\|^2_{L_2(R_3)} + \|r(,0)\|_{L_1(R_3)} + \|F\|^2_{L_2(R_3\times[0,T])} + \|\Phi\|_{L_1(R_3\times[0,T])}\right),$$

где константа σ зависит лишь от γ и T.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Седенко В.И.* Слабые решения трехмерных уравнений Навье-Стокса, обладающих дополнительной гладкостью. Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2000. № 2.

2. *Седенко В.И.* О существовании обобщенных решений многомерных уравнений Навье-Стокса, обладающих дополнительной гладкостью. Дифференциальные уравнения. Минск. 2001. № 9. С. 1223–1228.

3. *Седенко В.И.* Слабые решения трехмерных уравнений Навье-Стокса, обладающих дополнительной гладкостью. Известия вузов Северо-Кавказский регион, естественные науки, 2000, ISSN 0321-3005, С. 10–13.

В. И. Седенко, Т. В. Богачев, Т. В. Алексейчик (Ростов-на-Дону)
visedenko@mail.ru

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЕЙ МАРГЕРРА-ВЛАСОВА ТЕРМОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С МАЛОЙ ИНЕРЦИЕЙ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Используются средства, являющиеся развитием методов, предложенных в [1],[2].

Пусть оболочка проектируется на плоскую ограниченную область Ω с границей Γ класса C^1. Рассмотрим систему уравнений

$$w_{tt} - \gamma \triangle w_{tt} + D\triangle^2 w + \delta \triangle^2 w_t + \alpha \triangle r =$$

$$= Z + (N_1 w_{x_1})_{x_1} + (N_2 w_{x_x})_{x_2} + (N_{12} w_{x_2})_{x_1} - N_1 k_1 - N_2 k_2,$$

$kr_t - \beta\triangle r - \alpha\triangle w_t = 0$, с краевыми условиями $w|_\Gamma = \frac{dw}{dn}|_\Gamma = 0,\ r|_\Gamma = 0$ и начальными условиями $w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = w_1(x),\ r(x,0) = r_0(x)$.

Теорема. *Пусть граница области Ω $\Gamma \in C^3$ и имеет ограниченные производные четвёртого порядка. Пусть*

$$w_0 \in H_2^{02}(\Omega),\ w_1 \in H_2^{01}(\Omega),\ X(,0), Y(,0) \in L_p(\Omega),$$

$$X, Y \in L_{p,1}^{0,1}(\Omega \times [0, t_f]),\ P > 1,$$

$Z \in L_2(\Omega \times [0, t_f])$.

Тогда существуют и единственны слабые решения начально-краевой задачи со следующими дифференциальными свойствами:

$w \in L_{2,\infty}^{2,0}(\Omega \times [0, t_f]) \cap L_{2,\infty}^{0,1}(\Omega \times [0, t_f]) \cap$

$\cap C([0, t_f], H_2^r(\Omega)) \cap L_{2,2}^{2,1}(\Omega \times [0, t_f])$ *для всех* $r \geq 1$.

При $1 < p < 2$ $u, v \in L_\infty\left([0, t_f], \dot{H}_2^1(\Omega)\right) \cap L_\infty\left([0, t_f], H_p^2(\Omega)\right)$.

При $p \geq 2$ $u, v \in L_\infty\left([0, t_f], \dot{H}_2^1(\Omega)\right) \cap L_\infty\left([0, t_f], H_q^2(\Omega)\right)$ *для всех* $q < 2$.

При $\gamma > 0$ $w \in L_{2,\infty}^{1,1}(\Omega \times [0, t_f])$.*При* $\delta > 0$ $w \in L_{2,2}^{2,1}(\Omega \times [0, t_f])$.

Кроме того, $r \in L_{2,\infty}^{2,0}(\Omega \times [0, t_f]) \cap L_{2,2}^{1,0}(\Omega \times [0, t_f])$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. Известия АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21, № 6. С. 747–784.

2. *Колпакова Е.В., Седенко В.И.* Решения модели Маргерра-Власова с шарнирным закреплением края оболочки. Германия. Lambert Academic Publishing. ISBN: 978-3-8484-4720-6. 2012. 146с.

В. И. Седенко, С. В. Рогожин (Ростов-на-Дону)
visedenko@mail.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЕЙ МАРГЕРРА-ВЛАСОВА ТЕРМОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Используются средства, являющиеся развитием методов, предложенных в [1], [2].

Пусть оболочка проектируется на плоскую ограниченную область Ω с границей Γ класса C^1. Рассмотрим систему уравнений

$$w_{tt} - \gamma\triangle w_{tt} + D\triangle^2 w + \delta\triangle^2 w_t + \alpha\triangle r = Z + (N_1 w_{x_1})_{x_1} + (N_2 w_{x_x})_{x_2} +$$

$$+ (N_{12} w_{x_2})_{x_1} - N_1 k_1 - N_2 k,$$

$kr_t - \beta\triangle r - \alpha\triangle w_t = 0$, с краевыми условиями жесткого защемления

$u_{tt} - \triangle u - \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{x_1} = 2(1-\mu)^{-1}\times$
$\times\left[(k_1 w)_{x_1} + w_{x_1x_1}w_{x_1} + \mu(k_2 w)_{x_1} + \mu w_{x_1x_2}w_{x_2}\right] + w_{x_1x_2}w_{x_2} + w_{x_1}w_{x_2x_2} + X,$

$v_{tt} - \triangle v - \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{x_2} = 2(1-\mu)^{-1}\times$
$\times\left[(k_2 w)_{x_2} + w_{x_2x_2}w_{x_2} + \mu(k_1 w)_{x_2} + \mu w_{x_1x_2}w_{x_1}\right] + w_{x_1x_2}w_{x_1} + w_{x_2}w_{x_1x_1} + Y.$

Теорема. *Пусть граница области* Ω $\Gamma \in C^3$ *и имеет ограниченные производные четвёртого порядка.*

Пусть $w_0 \in \dot{H}_2^2(\Omega)$, $w_1 \in \dot{H}_2^1(\Omega), u_0, v_0 \in \dot{H}_2^1(\Omega), u_1, v_1 \in L_2(\Omega)$,
$X(,0), Y(,0) \in L_p(\Omega)$, $X, Y \in L_{p,1}^{0,1}\left(\Omega\times[0,t_f]\right)$, $P > 1$,
$Z \in L_2\left(\Omega\times[0,t_f]\right)$.

Тогда существуют и единственны слабые решения начально-краевой задачи со следующими дифференциальными свойствами:

$w \in L_{2,\infty}^{2,0}\left(\Omega\times[0,t_f]\right) \cap L_{2,\infty}^{0,1}\left(\Omega\times[0,t_f]\right) \cap C\left([0,t_f], H_2^r(\Omega)\right)$ *для всех* $r \geq 1$.

При $1 < p < 2$ $u, v \in L_\infty\left([0,t_f], \dot{H}_2^1(\Omega)\right) \cap L_\infty\left([0,t_f], H_p^2(\Omega)\right)$.

При $p \geq 2$ $u, v \in L_\infty\left([0,t_f], \dot{H}_2^1(\Omega)\right) \cap L_\infty\left([0,t_f], H_q^2(\Omega)\right)$ *для всех* $q < 2$. $w \in L_{2,2}^{2,1}\left(\Omega\times[0,t_f]\right)$.

$u, v \in L_{2,\infty}^{1,0}\left(\Omega\times[0,t_f]\right) \cap L_{2,\infty}^{0,1}\left(\Omega\times[0,t_f]\right)$.

Кроме того, $r \in L_{2,\infty}^{2,0}\left(\Omega\times[0,t_f]\right) \cap L_{2,2}^{1,0}\left(\Omega\times[0,t_f]\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. Известия АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21, № 6. С. 747–784.

2. *Колпакова Е.В., Седенко В.И.* Решения модели Маргерра-Власова с шарнирным закреплением края оболочки. Германия. Lambert Academic Publishing. ISBN: 978-3-8484-4720-6. 2012. 146с.

Л. И. Сербина (г. Нальчик, Россия)
lserbina@mail.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Исследование локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных является одним из наиболее важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными].Интерес к изучению задач подобного типа объясним как внутренними потребностями теоретического обобщения решений классических задач математической физики, так и прикладными значениями этих задач в различных областях естествознания [1].Значительная роль в развитии теории краевых задач для нагруженных уравнений принадлежит нагруженным дифференциальным уравнениям , которые выступают в качестве математических моделей различных процессов и систем с распределенными параметрами, имеющих фрактальную пространственно-временную организацию. В данной работе, продолжая ранее начатые исследования [2], проблемы методов математического моделирования долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод в водонасыщенных средах с фрактальной пространственно-временной структурой, сведены к постановке и изучению вопроса однозначной разрешимости краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка параболического типа. Для нелинейной математической модели нестационарного плоскопараллельного безнапорного движения грунтовых вод со слабоизменяющейся поверхностью предложен и реализован алгоритм теоретического поиска необходимых нелокальных краевых условий, порождаемых методом ее линеаризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука. 2012.

2. *Сербина Л. И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука. 2007.

А. С. Скалиух (Южный федеральный университет, Россия)
a.s.skaliukh@gmail.com

О ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ОПЕРАТОРАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ПОЛЯРИЗАЦИИ

На основе теории запертой стенки для сегнетоэлектрических материалов [1] была построена математическая модель поляризации поликристаллических сегнетоэлектрических материалов в случае интенсивных электрических полей. Получены операторные соотношения между вектором поляризации и вектором электрической индукции. В случае одномерной модели получено уравнение в дифференциалах, которое сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению, исследование которого проводится численными методами. В трехмерной модели получена система уравнений в дифференциалах, которую удается свести к системе квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, допускающих сведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложены численные алгоритмы решения полученных уравнений. Построены большие и малые петли диэлектрического гистерезиса. Разработанные модели включают в себя ряд параметров, выбором которых удается распорядиться таким образом, чтобы рассчитанные гистерезисные кривые не только качественно, но и количественно совпадали с экспериментальными данными. Результаты исследований могут быть использованы при построении определяющих соотношений при моделировании нелинейных и необратимых процессов поляризации поликристаллических сегнетоэлектрических материалов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-01094-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоконь А. В., Скалиух А. С.* Математическое моделирование необратимых процессов поляризации. Физматлит. 2010.

А. М. Столяр, Г. С. Муталибов
(Южный федеральный университет, Россия)
ajoiner@mail.ru

О РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

В работе исследуется математическая модель, описывающая продольные колебания вязкоупругого троса с грузом на конце под внешним воздействием. Асимптотический и численный подходы, применённые в монографии [1] к задачам математической физики с подвижными и переменными границами для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов, переносятся на решение следующей начально-краевой задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu a^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + g + f(x,t),$$
$$U\Big|_{x=\ell(t)} = 0, \quad U(x,t) = \xi(t) - x - u(x,t),$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\bigg|_{x=0} = b\left(\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0} + 1\right) + g, \quad \frac{d\ell}{dt}\left[1 + \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial \ell}\right] = \varepsilon\psi(t),$$
$$\ell(t)\Big|_{t=0} = \ell_0, \quad \ell(t) = \ell_0 + \varepsilon\ell_1(t), \quad U\Big|_{t=0} = \Phi_1(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \Phi_2(x).$$

Здесь $u(x,t)$ — продольное смещение троса в подвижной системе координат, связанной с грузом; $\xi(t)$ — расстояние от точки схода троса с колеса до груза, $\ell(t)$ — длина троса в недеформированном состоянии; остальные обозначения понятны. В качестве малого параметра ε принималось отношение скорости изменения длины троса к скорости распространения волны в нём. Неизвестная функция на подвижной границе разлагается в ряд Тейлора по ε. Решение строится также в виде ряда по степеням малого параметра, который подставляется во все уравнения задачи. В результате — решение исходной задачи на отрезке интегрирования $x \in [0, \ell(t)]$, который изменяется со временем, сводится к решению последовательности начально-краевых задач на постоянном промежутке $x \in [0, \ell_0]$. На основе метода конечных разностей разработан численный алгоритм решения исходной задачи, использующий подвижную сетку.

Проводится сравнение результатов асимптотического и численного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Столяр А. М.* О задачах математической физики с подвижными и переменными границами. — Saarbrьcken: LAP Lambert Academic Publishing, 2013. — 60 с.

М. А. Сумбатян, К. И. Мещеряков (ЮФУ, Россия)
sumbat@math.sfedu.ru

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЛОПАСТИ ВЭУ

В линеаризованной стационарной трехмерной теории крыла в идеальной несжимаемой жидкости известно основное двумерное интегральное уравнение ($(x_1,x_2)\in S$):

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[\frac{x_1-y_1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}+1\right]\frac{\gamma(y_1,y_2)}{(y_2-x_2)^2}\,dy_1dy_2=f(x_1,x_2)\ . \qquad (1)$$

Ядро по переменной x_2 является гиперсингулярным [1]. Из общей теории следует [2], что ограниченное решение автоматически обращается в ноль на боковых ребрах (при $y_2=\pm L$). Также доказывается, что при построении численной схемы вдоль переменной y_2 можно брать квадратурную формулу как для непрерывных функций [3]. Получающееся одномерное ядро по переменной y_1 имеет сингулярную особенность типа Коши, и по этой переменной можно брать специальную квадратурную формулу с чередующимися узлами для внутренней переменной y_1 и внешней переменной x_1 [3].

В данной работе для вращающейся лопасти ВЭУ получено двумерное интегральное уравнение, родственное уравнению (1):

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\gamma(y)\left(\int\limits_{\theta}^{\theta_0}\frac{d\tau}{|y-x|^3}\right)dy_2dy_3=f(r,\theta),\quad (r,\theta)\in S, \qquad (2)$$
$$|y-x|=\sqrt{(y_2-r\cos\tau)^2+(y_3-r\sin\tau)^2},\ (x_2=r\cos\theta,x_3=r\sin\theta).$$

Доказывается, что его ядро обладает теми же качественными свойствами, что и в уравнении (1). Для решения уравнения (2) предлагается специальный численный алгоритм.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, проект № 9.1371.2014/К.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and Their Applications. CRC Press: Boca Raton, Florida. 2002.

2. *Сумбатян М. А., Скалия А.* Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит. 2013.

3. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука. 1985.

Е. В. Тюриков (Южный федеральный университет, Россия)
etyurikov@pochta.ru

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается обобщённая граничная задача (задача R) мембранной теории выпуклых оболочек с кусочно–гладкой боковой поверхностью, впервые поставленная для обобщённых сферических куполов в [1]. Предполагается, что серединная поверхность оболочки есть односвязная $W^{3,p}$–регулярная поверхность S $(p > 2)$ положительной гауссовой кривизны с кусочно–гладкой границей L, в каждой точке которой известна проекция вектора усилий на направление заданного на поверхности S вдоль L векторного поля $\bar{r}$, допускающего разрывы 1-го рода в угловых точках. Введённое в дальнейшем понятие существенной квазикорректности задачи R (см. [2]) позволяет сформулировать ряд важных результатов о безусловной разрешимости задачи R. Эти результаты допускают уточнение, если ограничиться рассмотрением непрерывного векторного поля $\bar{r}$. Для этого в каждой угловой точке c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с помощью некоторого алгоритма задаётся пара различных направлений $\sigma_i^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ на S, разбивающая множество всех направлений в точке c_i на два непересекающихся класса $R_i^{(k)}$ $(k = 1, 2)$. Показывается, что в случае существенной квазикорректности задачи R число вещественных параметров, входящих в её решение, вполне определяется принадлежностью направления $\bar{r}(c_i)$ одному из классов $R_i^{(k)}$, а также величинами внутренних углов в угловых точках c_i и величинами главных направлений на поверхности в этих точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тюриков Е. В.* Обобщённая граничная задача Гольденвейзера для безмоментных сферических куполов. Труды XVI международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 19–24 июня 2010. — Ростов-на-Дону, 2010. — Т. II — С. 290–293.

2. *Тюриков Е. В.* О квазикорректности обобщённой граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек. Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — IV» Ростов-на-Дону, 27 апреля– 1 мая 2014. Тезисы докладов.— Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2014. — С. 117.

А. Н. Фирсов (Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого, Россия)
anfirs@yandex.ru

ПРОСТРАНСТВА "БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ"ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В докладе описывается построение специального пространства обобщенных функций (в смысле Гельфанда – Шилова), предложенного автором в [1]. В качестве приложений представлены: конструктивное решение уравнения типа Колмогорова-Феллера с квадратичным коэффициентом сноса [2] и доказательство экспоненциального по времени характера установления равновесия в разреженном газе, описываемом кинетическим уравнением Больцмана [1].

Определение 1. *Пусть* $s > 0$*. Через* E_s *будем обозначать пространство функций* $\varphi \in C^\infty\left(R^\nu\right)$ *таких, что для любого* $\rho > 0$

$$|D^q\varphi\left(x\right)| \le C(s+\rho)^{|q|}e^{(s+\rho)|x|},\ x \in R^\nu.$$

Здесь C *постоянная, зависящая, вообще говоря, от* φ*,* s *и* ρ*, но не зависящая от* q*. Введем в* E_s *счетную систему норм*

$$\|\varphi\|_s^{(\rho)} = \sup_{q,\,x}\left[\frac{|D^q\varphi(x)|}{(s+\rho)^{|q|}}e^{-(s+\rho)|x|}\right](1), \quad \rho = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},...,$$

.

Теорема 1. *Пространство* E_s*, наделенное системой норм (1), является полным счетно-нормированным пространством. Пусть* $E = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} E_s$*. Соответствующее пространство обобщенных функций* E' *вводится стандартным образом как сопряженное к* E*.*

Теорема 2. *Пусть* $a \in R^\nu$*. Всякую обобщенную функцию* $f \in E'$ *можно единственным образом представить в виде*

$$f = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{|q|=l}^{C_a^{(q)}}\delta_a^{(q)},\ \text{где}\ \delta_a^{(q)} \equiv \delta^{(q)}(x-a) - q\text{-я производная}\ \delta\text{-функции.}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Фирсов А. Н.* Обобщенные математические модели и методы анализа динамических процессов в распределенных системах. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2013.

2. *Фирсов А. Н., Коваль А. В* Решение уравнения Колмогорова-Феллера в пространстве «быстро убывающих» обобщенных функций. // Системный анализ в проектировании и управлении. Труды XVIII международной научно-практической конференции. Часть 1. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та 2014. С. 128-132.

Ф. Г. Хуштова (Федеральное государственное бюджетное научное учреждение “Институт прикладной математики и автоматизации”, Россия)

khushtova@ya.ru

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ВИДОИЗМЕНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \frac{b}{x}\, u_x - D^{\alpha}_{0y} u = 0, \tag{1}$$

где D^{α}_{ay} – оператор Римана-Лиувилля порядка α с началом в точке a и с концом в точке y [1, с. 9], $|b| < 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, и такую, что $y^{1-\alpha}u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, u_x, u_{xx}, $D^{\alpha}_{0y}u(x, t) \in C(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha}u(x, y) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty,$$

$$u(0, y) = \tau(y), \quad 0 < y < T,$$

где $\varphi(x)$, $\tau(y)$ – заданные функции, $\tau(y) \in C]0, T]$, $\varphi(x) \in C[0, \infty)$, $\varphi(x)$ ограничена при $x \to \infty$.

В работе в терминах H-функции Фокса [2, с. 528] построено явное представление решения исследуемой задачи.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.

2. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. Дополнительные главы. М.: Наука. 1986. Т. 3.

Э. Л. Шишкина (Воронежский государственный университет, Россия)
ilina_dico@mail.ru

ОГРАНИЧЕННОСТЬ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Пусть $\mathbb{R}^+_n{=}\{x{=}(x_1, \ldots, x_n){\in}\mathbb{R}_n,\ \ x_1{>}0, \ldots, x_n{>}0\}$, $\gamma{=}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел γ_i, $i{=}1, 2, ..., n$, $|\gamma|{=}\gamma_1{+}\ldots{+}\gamma_n$.

В пространстве $\mathbb{R}^+_n$ применяется многомерный обобщенный сдвиг, отвечающий мультииндексу γ вида $(T^t f)(x){=}T^{t_1}_{x_1}...T^{t_n}_{x_n}f(x)$, где $T^{t_i}_{x_i}$, $i{=}1, ..., n$ – одномерный обобщенный сдвиг, определеный в [1].

Через $L_p^\gamma(\mathbb{R}_n^+){=}L_p^\gamma$, $p\geq 1$, будем обозначать замыкание по норме $||f||_{p,\gamma}=(\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}|f(x)|^p x^\gamma dx)^{1/p}$, $x^\gamma=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\gamma_i}$ множества измеримых на $\mathbb{R}_n^+$ функций $f(x)$, для которых выполнено условие четности (см. [2], с.21) вида
$f'_{x_i}(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)=0$, $i=1,...,n$.

Через S_{ev} будем обозначать часть класса основных функций Шварца, состоящее из четных функций определенных на $\mathbb{R}_n^+$.

В-гиперболический потенциал Рисса определим формулой

$$(I_B^\alpha f)(x)=\frac{1}{H_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_{K^+}r^{\alpha-n-|\gamma|}(y)(T^y f)(x)y^\gamma dy,$$

где $H(\alpha,\gamma)$ – нормировочная константа, $r(y)=\sqrt{y_1^2-y_2^2-...-y_n^2}$, $n+|\gamma|-2{<}\alpha{<}n+|\gamma|$, $K^+{=}\{y\in\mathbb{R}_n^+{:}y_1^2{\geq}y_2^2{+}...{+}y_n^2\}$. Случай, когда вместо многомерного обобщенного сдвига применялся обычный рассмотрен в [3].

Теорема 1._Пусть_ $n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|$, $1<p<\frac{n+|\gamma|}{\alpha}$. _Для того чтобы выполнялась оценка_

$$||I_B^\alpha f||_{q,\gamma}\leq C_{n,\gamma,p}||f||_{p,\gamma},\quad f(x)\in S_{ev},\quad C_{n,\gamma,p}=const,$$

необходимо и достаточно чтобы $q=\frac{(n+|\gamma|)p}{n+|\gamma|-\alpha p}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. _Левитан Б. М._ Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. Успехи матем наук. Т. VI, в.2 (42). 1951. С. 102–143.

2. _Киприянов И. А._ Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука. 1997. С. 200.

3. _Ногин В. А., Сухинин Е. В._ Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p-плотностями. Докл. РАН. 1993. Т. 329, № 5. С. 550–552.

Секция IV

Фундаментальная и прикладная информатика
Руководитель секции: Р.А. Нейдорф

А. В. Александров, А.Д. Метлинов (ВлГУ, Россия)
alex_izi@mail.ru

О СИММЕТРИЧНЫХ РЮКЗАЧНЫХ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ УКЛАДКИ

Задача об укладке рюкзака, где по заданным $S \in N$, и относительно выбранного базиса $\{a\}_1^k \in N$ находится сумма

$$S = \sum_{i=1}^{k} e_i a_i \ \ ; \ \ e_i \in GF_2,$$

принадлежит классу NP- сложных задач, и только в ряде частных случаев становится легко решаемой. В 1978 году Меркль и Хеллман, выделив класс супервозрастающих базисов [1], предложили использовать задачу о рюкзаке в асимметричных криптографических схемах шифрования. Последующий криптоанализ показал, что наряду с практичностью и высокую скоростью шифрования, криптосистемы Меркля и подобные им небезопасны. (См. подробный обзор в [2]). Нами выделен класс базисов медленного роста $\{f\}_1^n \in N$, для которых задача (1), как и в схемах Меркля – легко решаема, однако определяет плотность укладки криптографических схем за пределами традиционного интервала $0 < \rho < 1$, в котором разработаны атаки криптографического анализа рюкзачных схем. Обозначим $D = \{d_1, d_2, \dots d_l\}$ - общую память, которой обладают отправитель и получатель, и только они. Для $m, m \in N, m \geq 2$ положим

$$f(D)_i = \sum_{j=1}^{m} f(D)_{i-j}, \qquad i \geq m+1, \tag{1}$$

где стартовые значения $f(D)_1, \dots, f(D)_m$ некоторым образом зависят от элементов булеана общей памяти. Справедлива следующая

Теорема 1. *(a) Для любого целого числа $S \in N$ относительно однопроходного алгоритма, просматривающего значения элементов базиса сверху вниз, справедливо однозначное и равномерное по выбору параметров стартовых значений $f(D)_1, \dots, f(D)_m$ представление*

$$S = \sum_{i=1}^{k} e_i f(D)_i + \Delta(S) \ \ ; \ \ e_i \in GF_2, \tag{2}$$

и остаточным слагаемым $\Delta(S)$.

(b) Алгоритмическая сложность задачи (2)при этом оценивается величиной $O(\log S)$.

(c) При больших значениях k в (2) асимптотика роста элементов базиса обеспечивает значение плотности укладки соответствующих рюкзаков в интервале $1 < \rho < 1,44$...

В работе [2] для построения рюкзачных симметричных криптосистем использован случай "возмущенных общей памятью базисов фибоначчиевого типа, соответствующий $m = 2$ в формуле (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Diffie R. Merkle, M. Hellman.* Hiding information and signatures in trapdoor knapsacks // Information Theory, IEEE Transactions, 1978, P. 525-530. 1999. Т. 66, № 6. С. 59–68.

2. *Александров А.В., Метлинов А.Д.* Симметричная рюкзачная криптосистема с общей памятью и плотностью укладки больше единицы// Журнал "Проблемы информационной безопасности. Компьютерные системы №4 2014. С. 58-66.

Е. В. Алымова (ЮФУ, Россия)
langnbsp@gmail.com
С. А. Клеветова (ЮФУ, Россия)
klevetova91@mail.ru

WPF-КЛИЕНТ ДЛЯ WEB-ОРИЕНТИРОВАННОЙ БАЗЫ ДАННЫХ "ГЕНОФОНД РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ"

Рассматриваемое приложение представляет собой инструмент для взаимодействия с базой данных, содержащей информацию о генах жителей Ростовской области. База данных разработана на основе информации, собранной сотрудниками НИИ биологии ЮФУ, и размещена в сети Интернет. Введена поддержка изменения структуры базы за счет добавления новых категорий данных.

Разработанный WPF-клиент позволяет взаимодействовать с текущей структурой базы данных, тем самым адаптируясь ко всем изменением в ней. В связи с этим архитектура приложения построена таким образом, чтобы обеспечить динамическое формирование интерфейса на основе текущей структуры базы данных. Это становится возможным благодаря использованию шаблона проектирования MVC (Model-View-Controller), а также широкого набора инструментов WPF (Windows Presentation Foundation) [1].

Информация из базы представляется в табличном виде с гибкой системой фильтров по типам данных. Реализована возможность создания различных статистических отчетов по отфильтрованным выборкам:

1. Расчет критерия Пирсона для двух выборок данных.
2. Процентное соотношение вариантов генотипов в выборке данных.
3. Процентное соотношение всех возможных вариантов генотипов в выборке данных.

Рассчитанные значения по требованию могут быть выгружены в Excel таблицу. Для обеспечения защиты данных в приложении реализован авторизованный доступ к базе, и поддерживается система уровней доступа пользователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Троельсен Э.* Язык программирования C# и платформа .NET 4.5. М.: Вильямс. 2013.

Е. В. Алымова (ЮФУ, Россия)
langnbsp@gmail.com
К. М. Колесникова (ЮФУ, Россия)
murzik6667@rambler.ru

ГЕНЕРАТОР ТЕСТОВЫХ СЦЕНАРИЕВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ WEB-ИНТЕРФЕЙСА АВТОМАТИЧЕСКОГО РАСПАРАЛЛЕЛИВАТЕЛЯ ПРОГРАММ

В работе представлен инструмент, предназначенный для автоматического построения вариантов использования web-интерфейса распараллеливателя программ [1, 2].

Web-интерфейс выполнен в виде мастера опросов, т.е. набора связанных между собой страниц. На каждой странице расположена группа управляющих элементов, состояния которых могут меняться в зависимости от действий пользователя. Переход на следующую страницу осуществляется при условии выбора корректного значения параметров на текущей странице. Тестовый сценарий – это последовательность переходов по страницам, начиная с первой и заканчивая получением сообщения о результате выполнения преобразования.

Количество тестов в наборе конечно и зависит от числа страниц и управляющих элементов на них. Сгенерированный набор тестов удовлетворяет критерию полноты. Набор считается полным, если сценарии в этом наборе исчерпывают все возможные комбинации состояний групп управляющих элементов.

Генерация тестов основывается на автоматическом изучении web-интерфейса. Для взаимодействия с web-интерфейсом через браузер и получения доступа к его элементам используется программная библиотека Selenium WebDriver. Она представляет собой семейство драйверов для различных браузеров, а также набор клиентских библиотек для этих драйверов на разных языках программирования.

Разработанный генератор является частью системы тестирования web-интерфейса автоматического распараллеливателя программ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Автоматический распараллеливатель. [Электронный ресурс].*
URL: http://ops.opsgroup.ru (дата обращения: 24.03.2015)

2. *Штейнберг Б. Я., Аллазов А. Н., Алымова Е. В.* Web-ориентированный автоматический распараллеливатель программ. // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2014): труды международной научной конференции (г.

Ростов-на-Дону, 1–3 апреля 2014 г.), Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014, С. 380

Е. В. Алымова (ЮФУ, Россия)
langnbsp@gmail.com
А. Ю. Река (ЮФУ, Россия)
rekaandrey@gmail.com

МОДУЛЬ ГЕНЕРАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ WEB-ИНТЕРФЕЙСА К КОМПОНЕНТАМ БИОИНФОРМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА ПРОГРАММ

Работа основана на биоинформатическом пакете [1, 2]. Веб-часть пакета разработана на Node.js [3]. Ядром системы является набор программ с известными входными и выходными данными. Цель работы - автоматизировать процесс добавления новых программ. Для этого разработано формальное описание компонентов (программ) web-пакета в формате XML и реализовано отображение этого описания в элементы web-интерфейса. Такой подход позволяет автоматизировать процесс управления составом программ в web-пакете, что намного упрощает работу с ним. Управление пакетом теперь может осуществляться на уровне пользователя.

Новые страницы и ссылки на эти страницы создаются автоматически по формальному описанию в виде XML-документа. Документ подается на вход модулю. После чего происходит генерация элементов интерфейса и создание ссылок.

Ниже представлен пример входных данных, описанных на языке формального описания.

<input type="file"name="file1"ext="fasta"pattern = "[^ A,C,G,T, a,c,g,t]+$"/>

После преобразования эта строчка певращается в элемент web-интерфейса:

<input type="button"name="file1"value="Выбрать файл"onclick= "LoadFile() "/>

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Биоинформатический web-пакет, URL: http://stud.mmcs.sfedu.ru/bio/ (дата обращения: 20.11.2014)

2. *Абу-Халил Ж.М., Авдяков С.В., Адигеев М.Г., Бут А.А., Раманчаускайте Г.В., Штейнберг Б.Я.* Разработка биоинформатического веб-пакета. // Материалы V Международной научно-практической конференции "Актуальные проблемы биологии, нанотехнологий и медицины". 3-5 октября 2013 г., Ростов-на-Дону, с. 19.

3. Программная платформа Node.js, URL: https://nodejs.org/

(дата обращения: 30.03.2015)

Демяненко Я. М., Михайличенко А. А. (ЮФУ, Институт математики, механики и компьютерных наук, Россия)
demyanam@gmail.com
alexey.a.mikh@gmail.com

РЕКОНСТРУКЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ ПО ОДНОЙ ФОТОГРАФИИ

В работе представлена интерактивная техника реконструкции 3D-моделей объектов по одной фотографии. Когнитивные способности человека используется для определения элементов фигуры, а компьютер выполняет сложные вычислительные задачи. При этом предлагается очень простой и понятный пользовательский интерфейс.

Метод опирается на такое повсеместное свойство физических объектов, как симметрия, и применим для реконструкции объектов, имеющих в качестве 2D-профиля своего основания круг. Для выполнения реконструкции пользователю достаточно выделить 2D-профиль объекта на изображении и указать направление формирования фигуры относительно этого профиля (некоторая воображаемая ось K).

Учитывая, что рассматриваемые объекты по предположению имеют в сечении, проходящем через ось K, круг, из параметров выделенного 2D-профиля, являющегося эллипсом, рассчитываются различные характеристики, необходимые для восстановления трехмерного объекта из его проекции, и углы поворота камеры. После этого в автоматическом режиме происходит формирование модели объекта путем последовательного ее разбиения вдоль оси K на множество слоев. Пользовательский 2D-профиль объекта считается первым слоем. Следующий слой получается из предыдущего путем сдвига на некоторую величину в направлении K и корректировки его размеров путем притягивания точек, формирующих главную ось эллипса, к границам объекта. Множество слоев образуют основной каркас искомого объекта.

В качестве поля сил, используемого для определения краев объектов на изображении, используется векторное поле потока градиента, предложенное в [1].

Для демонстрации метода и доказательства эффективности описанного подхода для решения поставленной задачи реализован программный продукт, который позволяет сохранять полученные трехмерные объекты в распространенных форматах хранения 3D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. Xu* and *J. L. Prince*. Snakes, Shapes, and Gradient Vector Flow. // IEEE Transactions on Image Processing, 7(3), pp. 359-369, March 1998

В. М. Деундяк (ЮФУ, Россия)
vl.deundyak@gmail.com
С. А. Евпак (ЮФУ, Россия)

sergej-evpak@yandex.ru

УЯЗВИМОСТИ ПОЛИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КЛЮЧЕЙ

Исследуется теоретико–кодовая полилинейная система распределения ключей, обеспечивающая безопасность проведения конференции при наличии коалиции злоумышленников, мощность которой не превышает некоторого порога [1]. В случае, когда мощность коалиции превышает порог, система распределения ключей становится уязвимой. В докладе строятся вероятностные модели таких уязвимостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидельников В. М.* Теория кодирования. М.:ФИЗМАТЛИТ. 2008.

Д. В. Явна, В. В. Бабенко (ЮФУ, Россия)
yavna@fortran.su

ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ В ИЗОБРАЖЕНИИ, ВОСПРИНИМАЕМОМ ЧЕЛОВЕКОМ

Способ определения количества информации в изображении основан на моделировании работы проекционных зон коры головного мозга наблюдателя. Вычисляемый показатель представляет собой долю от теоретического максимума информации, которая может быть получена с участка поля зрения. Минимальной единицей информации выступает яркостный градиент определённой пространственной частоты (ПЧ) и ориентации.

По классической теории Хьюбела и Визела [1], начальная зрительная обработка выполняется простыми нейронами стриарной коры. Эти клетки выполняют функцию полосовых ПЧ-фильтров, ориентационно и фазово избирательных. В зрительной системе человека имеются $n_\lambda = 6$ ПЧ-каналов, имеющих полосы пропускания шириной примерно 1,25-2,5 октавы с пиками на 0,5; 1; 2; 4; 8 и 16 периодах на угл. град. [2]. Полоса пропускания каждого канала по ориентации составляет около 30 градусов [3]. Рецептивное поле стриарных клеток имеет вытянутую форму и оппонентную организацию; оно описывается двумерной функцией Габора [4].

Если считать число ориентационных каналов равным n_θ и ограничиться моделированием только on-клеток, реагирующих на оттенки серого, для оценки числа «активированных» нейронов достаточно выполнить $n_\lambda \cdot n_\theta$ операций фильтрации с разными настройками фильтра по ПЧ и ориентации. Целесообразно использовать пороговый критерий для определения факта «активированности» нейрона. Оценка рассчитывается отнесением суммы числа активированных элементов во всех каналах к их максимальному количеству, равному числу точек в изображении, умноженному на $n_\lambda \cdot n_\theta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хьюбел Д.* Глаз, мозг, зрение. Мир. 1990.

2. *Wilson H. R., McFarlane D. K., Phillips G. C.* Spatial frequency tuning of orientation selective units estimated by oblique masking // Vision Research. 1983. Vol. 23, no. 9. P. 873–882.

3. *DeValois R. L., DeValois K. K.* Spatial vision. Oxford University Press. 1988.

4. *Daugman J. G.* Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency, and orientation optimized by two-dimensional visual cortical filters. J. Opt. Soc. Am. A. 1985. Vol. 2, no. 7. P. 1160–1169.

Секция V

Математика в естествознании, интеллектуальные системы и компьютерные науки Руководитель секции: Б. Я. Штейнберг

Штейнберг Б. Я. (Южный федеральный университет, Россия)
borsteinb@mail.ru

ВЫДАЮЩЕМУСЯ МАТЕМАТИКУ, УЧИТЕЛЮ И ЧЕЛОВЕКУ ИГОРЮ БОРИСОВИЧУ СИМОНЕНКО – 80. (16.08.1935 – 22.03.2009).

В этом году Игорю Борисовичу Симоненко могло бы быть 80 лет. Игорь Борисович оставил после себя 230 публикаций, которые известны не только глубиной своих исследований, но и разнообразием тем: алгебраическая топология, функциональный анализ, теория псевдодифференциальных операторов, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения, теория краевых задач Римана, теория линейных операторов, теория упругости, гидромеханика, гидроакустика, электростатика, методы приближенных вычислений, дискретная математика, нормированные кольца, теория выпуклых множеств. А еще И.Б. Симоненко опубликовал научно-популярную статью «Как доказывать трансцендентность чисел». И еще писал программы... Математика во всех ее проявлениях была интересна Игорю Борисовичу Симоненко!

Игорь Борисович искал внедрения математических достижений в другие науки или сферы человеческой деятельности, и эти поиски имели много проявлений. И.Б. Симоненко руководил хоздоговорными работами по гидроакустике и по электростатике (для проектирования электронных схем в ТРТИ, г. Таганрог). Его исследования условий возможности возникновения вибрационной конвекции в невесомости были подтверждены экспериментом на американской космической станции «Скайлаб». На его имя (с соавторами) зарегистрировано изобретение «Исследование горизонтального статического взаимодействия электровоза и пути». Серию публикаций последних лет Игорь Борисович посвятил разработке новых методов вычислений с оценками быстродействия и оценками погрешностей.

Игорь Борисович оставил после себя не только публикации, но и много последователей (кандидатов и докторов наук). Этот список составляют 30 учеников непосредственных и еще 60 «учеников-учеников». Очень сложно учесть многочисленных математиков, которым Игорь Борисович писал отзывы на диссертации и на которых, безусловно, оказал огромное влияние. К последователям И.Б. Симоненко себя относят и сотрудники, которые были постоянными участниками кафедрального семинара. Многие последователи Игоря Борисовича представлены на данной конференции. Участие научных потомков в научной жизни – это лучший памятник замечательному математику, учителю и человеку Игорю Борисовичу Симоненко!

А. В. Абрамян, В., В. Курочкин, В. С. Пилиди (ЮФУ, Россия)
annaabr@yandex.ru, vdmkrchkn@gmail.com, pilidi@sfedu.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим стационарную марковскую модель второго порядка при следующих предположениях. Имеется последовательность дискретных случайных величин x_1, x_2, …, x_T, принимающих значения в некотором алфавите $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, причем имеет место равенство вероятностей

$$\mathbf{P}(x_t = u_k | x_{t-1} = u_j, x_{t-2} = u_i, \ldots) =$$
$$= \mathbf{P}(x_t = u_k | x_{t-1} = u_j, x_{t-2} = u_i),$$

для любых элементов $u \in \mathcal{A}$, и эта вероятность не зависит от t, $3 \le t \le T$. Обозначим

$$\mathbf{P}(x_t = u_k | x_{t-1} = u_j, x_{t-2} = u_i) = a_{ijk}.$$

Случайные величины x_i являются *ненаблюдаемыми*. Для каждой из случайных величин x_t генерируется некоторое значение *наблюдаемой* случайной величины y_t, принимающей значения в том же алфавите $\mathcal{A}$. Обозначим:

$$\mathbf{P}(y_t = u_j | x_t = u_i) = b_{ij}.$$

Предполагаем, что величины b_{ij} не зависят от времени t и значений случайных величин x_τ, y_τ при $\tau \ne t$. Предположим также, что известны вероятности распределения начальных биграмм скрытых переменных:

$$\pi_{ij} = \mathbf{P}(x_1 = u_i, x_2 = u_j).$$

Задача состоит в том, чтобы по известной последовательности $\{y_t\}$ восстановить параметры модели a, b, π. Следуя схеме анализа скрытой марковской модели [1, 2], выведены формулы, позволяющие восстановить эти параметры. Проведенные численные эксперименты подтверждают эффективность предлагаемого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рабинер Л.* Скрытые марковские модели и их применение в избранных приложениях при распознавании речи. ТИИЭР. 1989. Т. 77, № 2. С. 86–120.

2. *Моттль В. В., Мучник И. Б.* Скрытые марковские модели в структурном анализе сигналов. ФИЗМАТЛИТ. 1999.

Ж. М. Абу-Халил, Б. Я. Штейнберг (Южный федеральный университет, Россия)
jumana.abukhalil@gmail.com borsteinb@mail.ru

Параллельный алгоритм выравнивания последовательностей, учитывающий иерархию памяти

В работе получен параллельный алгоритм выравнивания последовательностей, учитывающий иерархию памяти. Задача выравнивания последовательностей возникает в биоинформатике и при анализе больших текстов на естественных языках (например, при анализе социальных сетей).

Рассматривается модель вычислительной системы, обладающая несколькими ядрами и хотя бы двумя уровнями кэш-памяти. Будем считать, что у процессора есть кэш большой-медленный (низкого уровня) и малый-быстрый (высокого уровня). При этом, большой-медленный кэш является общим для всех вычислительных ядер, малый-быстрый – у каждого вычислительного ядра свой. Такими являются процессоры фирмы Интел и многие процессоры цифровой обработки сигналов.

В основе алгоритма лежит перехода к блочной организации вычислений (тайлинг). Каждая из последовательностей, выравнивание которых требуется найти, разбивается на части равной длины. Длина частей последовательностей подбирается так, чтобы в малом-быстром кэше помещалась квадратная числовая таблица, количество элементов которой равно произведению длин рассматриваемых подпоследовательностей. Это позволяет в малой-быстрой кэш-памяти выравнивать рассматриваемые фрагменты последовательностей. Другое ограничение состоит в том, чтобы в большой-медленной кэш-памяти помещались все необходимые данные для вычисления в малой-быстрой кэш-памяти каждого вычислительного узла.

Структура циклов программы должна быть организована так, чтобы в большой-медленный кэш попали как можно больше частей выравниваемых последовательностей и при этом выполнялись описанные выше ограничения. Это позволит эффективно использовать оба уровня кэш-памяти. Оптимизация использования одного уровня кэш-памяти для выравнивания последовательностей описана в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абу-Халил Ж.М., Морылев Р.И., Штейнберг Б.Я.* Параллельный алгоритм глобального выравнивания с оптимальным использованием памяти // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 1 (Электронный журнал http://www.science-education.ru/107-8139)

М. М. Алиев, А. В. Козак, Б. Я. Штейнберг, О. Б. Штейнберг
(Южный федеральный университет, Россия)
avkozak@aaanet.ru idento@mail.ru borsteinb@mail.ru olegsteinb@gmail.com

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ СВЕРТКИ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КАМЕРОЙ

В работе рассмотрена задача восстановления смазанного изображения, полученного вращающейся камерой. Эта задача может быть актуальна при создании автоматических систем управления автомобилем, для систем мониторинга территорий, для роботов.

Математической моделью задачи восстановления смазанных изображений горизонтально вращающейся камеры является уравнение с оператором свертки на циклической группе большой размерности или, в пределе, на единичной окружности. Более точно, семейство таких уравнений одинаковой размерности с одним оператором, или, в дискретном случае, система линейных уравнений с несколькими правыми частями. Если вращающаяся видеокамера расположена под углом к горизонтальной плоскости, то необходима корректировка получаемых данных, чтобы свести эту задачу к предыдущей.

Рассмотрены несколько алгоритмов решения рассматриваемой задачи, включая использование преобразование Фурье и решение СЛАУ с циклической матрицей специального вида. Разработана программная реализация полученных алгоритмов, проведены численные эксперименты, проведено сравнение результатов. Специфика матрицы СЛАУ позволяет построить нестандартный эффективный алгоритм решения.

М. М. Алиев, Б. Я. Штейнберг (Южный федеральный университет, Россия)
idento@mail.ru borsteinb@mail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ СРАВНЕНИЯ НУКЛЕОТИДНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работе рассмотрена задача выравнивания двух нуклеотидных последовательностей без вставки дополнительных пробелов во внутрь этих последовательностей. Выравнивание происходит за счет сдвига одной последовательности относительно другой. Задача состоит в быстром поиске такого сдвига, при котором количество совпадающих символов исходных последовательностей максимально.

Данная задача рассматривалась ранее в работе [1]. Там предлагалось искать количество совпадений при каждом сдвиге для каждого нуклеотида отдельно. Для каждого нуклеотида по последовательности строится булев вектор, в котором данный нуклеотид заменяется единицей, а остальные – нулями. Свертка таких векторов, соответствующих исходным последовательностям, дает нам количества совпадений выбранного нуклеотида при различных сдвигах. Предлагается получать такие функции для каждого из четырех нуклеотидов, после чего их складывать. Эти функции (свертки) предлагается строить с помощью преобразования Фурье.

В данной работе предлагается сразу строить функцию с суммарным количеством совпадений сразу двух нуклеотидов (сначала АТ - аденин и тимин, а. затем, ГЦ - гуанин и цитозин). Для этого в векторе, который строится по последовательности, первый нуклеотид заменяется единицей, второй – корнем квадратным из (-1), а остальные – нулями. Затем берется преобразование Фурье от свертки такого вектора первой последовательности и сопряженного вертора, соответствующего второй последовательности. Этим самым, сокращается время решения задачи вдвое.

По разработанному методу написана программа и проведены численные эксперименты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дэн Гасфилд* 1. Строки, деревья и последовательности в алгоритмах. Информатика и вычислительная биология, С-Петербург «БХВ-Петербург», 2003, 319 с.

Е. В. Алымова, А. П. Баглий, А. С. Коненко, А. А. Питинов, Б. Я. Штейнберг, Р. Б. Штейнберг (Южный федеральный университет, Россия)
langnbsp@gmail.com, taccessviolation@gmail.com, yadummer@gmail.com, alexvitpit@rambler.ru, borsteinb@mail.ru, romanofficial@yandex.ru

ПРЕДСКАЗАНИЕ ВОЗМОЖНОГО УСКОРЕНИЯ ЗА СЧЕТ ОПТИМИЗАЦИИ И РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ ПРОГНОЗА УРОВНЯ ВОДЫ В ВОДОЕМЕ.

Рассматриваемая программа предназначена для прогноза уровня воды в Неве и управления шлюзами на дамбе г. Санкт-Петербурга. При повышающемся уровне воды в реке городу может угрожать наводнение, и шлюзы следует закрывать. При закрытых шлюзах прекращается судоходство и простой кораблей влечет убытки. Точный прогноз изменения уровня воды в реке позволяет оптимизировать режим закрывания-открывания шлюзов.

В основе модифицируемой программы – известная математическая модель Cardinal движения воды в водоеме. Уровень воды в водоеме описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных. Изменения уровня воды зависят, например, от наличия в отдаленных участках ветра, дождя, льда и других погодных условий. Поэтому, на входе программы, в частности, используются данные метеонаблюдений, получаемые по сети Интернет из нескольких точек. Использовалось профилирование кода для выявления наиболее долго считаемых участков. Выяснилось, что программа представляется шестью последовательно вызываемыми функциями, требующими сравнимое время выполнения. Из этого обстоятельства вытекает необходимость ускорения каждой из этих шести функций, что существенно увеличивает объем работы.

Для предсказания возможного ускорения выполнялись численные эксперименты с некоторыми функциями или фрагментами исходной программы.

Ускорение предполагалось получить за счет целого ряда факторов:

1. перевод вычислительной части программы на другой язык программирования;
2. распараллеливание;
3. оптимизация ввода данных;
4. инлайнинг некоторых функций (подстановка вместо);
5. развертка циклов;
6. понижение силы операций;
7. вынос общих подвыражений.
8. др.

При анализе возможности распараллеливания учитывались граф вызовов подпрограмм и граф информационных связей.

С. Г. Аммаев, Б. Я. Штейнберг (Южный федеральный университет, Россия)
jumana.abukhalil@gmail.com borsteinb@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КЭШ-ПАМЯТИ В ИТЕРАЦИОННЫХ СЕТОЧНЫХ МЕТОДАХ

В данной работе рассматривается ускорение итерационного метода Гаусса-Зейделя численного решения Задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Ускорение достигается за счет оптимизации использования кэш-памяти.

Кэш память начали встраивать в процессоры с тех пор, когда время обращений к памяти в компьютерах начало превышать время вычислительных операций. На сегодняшний день время выполнения умножения в процессоре может быть на порядок быстрее, чем считывание аргументов этого умножения из оперативной памяти в процессор. Предлагается метод повышения локализации данных при вычислении. Локализация состоит в таком изменении порядка операторов программы, при котором с данными, попавшими в кэш-память, производится много вычислительных операций, а количество пересылок данных между оперативной памятью и кэш-памятью уменьшается.

Идея предлагаемого метода состоит в том, чтобы, не завершив выполнение одной итерации алгоритма, начинать выполнение следующей итерации. При этом данные, полученные на предыдущей итерации, еще не вытеснены из кэш-памяти и доступ к ним требует меньшего времени, чем при чтении из оперативной памяти.

Представленные методы дают ускорение в несколько раз. Данная работа является развитием [1]. В работе используется метод гиперплоскостей [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штейнберг Б. Я., Аммаев С. Г., Абу-Халил Ж. М., Гервич Л. Р., Штейнберг О. Б.* Согласование метода гиперплоскостей и структуры памяти НСКФ-2014 Переславль-Залесский, 24-27 ноября 2014 г. http://2014.nscf.ru/prezentacii/

2. *Lamport L.* The parallel execution of DO loops// Commun. ACM.- 1974.- v.17, N 2, p. 83-93.

М. В. Бабаев (РостГМУ, Россия), В. С. Пилиди, Т. С. Шаренко (ЮФУ, Россия)
pilidi@sfedu.ru

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВЫДЕЛЕНИЮ ОТКЛОНЕНИЙ НА МЕДИЦИНСКИХ РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Обработка медицинских изображений и, в частности, рентгенографических изображений, является одной из важных и востребованных областей цифровой обработки изображений. Точное детектирование объекта, определение отклонений границ объекта на изображении и иных особенностей изображения являются основными этапами построения системы диагностики.

В качестве одного из важнейших методов детектирования произвольных кривых на изображениях является обобщенное преобразование Хафа. Алгоритм характеризуется полным покрытием всевозможных состояний объекта (в стандартном алгоритме это реализуется с помощью полного перебора). Однако практическое применение указанного алгоритма осложняется высокой вычислительной сложностью и большими затратами памяти. В работе предложена модификация, позволяющая минимизировать эти проблемы в рассматриваемом случае медицинских рентгенографических изображений без потери точности. Модификация позволила уменьшить число точек шаблона, а также размер накопительного пространства.

Искомый шаблон был модифицируется с учетом различной степени девиации отдельных точек. Такой подход позволяет задать «фиксированные» точки шаблона, которые должны совпасть с изображением с высокой точностью, и «свободные», которые должны совпасть с изображением с некоторым допустимым отклонением. Точки шаблона классифицируются и область допустимого отклонения задается экспертом. После того, как найдено преобразование, отображающее шаблон на имеющееся изображение, происходит поиск отклонений границ изображения от «свободных» точек шаблона, которые могут быть в дальнейшем рассмотрены и классифицированы как признаки заболеваний. Предлагаемый метод позволяет игнорировать большинство ложно-положительных отклонений в зонах не принадлежащих к областям интереса в контексте рентгенограмм. Работа проводилась с рентгенограммами коленного сустава.

Разработано приложение с пользовательским интерфейсом, позволяющее создавать модель, анализировать изображение в поисках этой модели и выделять области девиации.

Н. В. Боев , Л. В. Чернова (Южный федеральный университет, Россия)
boyev@math.rsu.ru

СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН НА СИСТЕМЕ ДЕФЕКТОВ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

Исследуется многократное отражение высокочастотных упругих волн от скопления дефектов в виде полостей в упругой среде.

Детерминированная модель реализована в лабораторном макете, который в качестве тела конечных размеров использует стальной образец в форме прямого параллелепипеда, толщина образца 40 мм, высота 78 мм, длина 300 мм. На расстоянии $H = 45$ мм от верхней грани, на которой располагается датчик продольных ультразвуковых волн диаметром 30 мм и частотой 2,5 МГц, по дуге окружности радиуса $R = 7,5$ мм в вершинах правильного шестиугольника просверлены три одинаковых соосных цилиндрических отверстия радиуса $r = 1,5$ мм с образующими перпендикулярными боковым стенкам образца. Для проведения эксперимента используется дефектоскоп-приставка «ЭВУД-ПК» (в дальнейшем дефектоскоп), общего назначения по ГОСТ 23049-94 и он предназначен для УЗ контроля продукции на наличие дефектов типа нарушения сплошности и однородности металлов. Дефектоскоп работает совместно с IBM компьютером.

Перемещения в продольной и поперечной волнах, отраженных от препятствий получены на основе модификации физической теории дифракции Кирхгофа с использованием интегральных представлений Сомильяны. Главный член асимптотики дифракционного интеграла получен методом многомерной стационарной фазы. Он соответствует геометрической теории дифракции (ГТД) и определяется коэффициентами отражения и трансформации упругих волн и определителем ленточной матрицы Гессе порядка $2N$ (где N — число отражений), элементы которой зависят от механических и геометрических параметров задачи.

Для сравнительного анализа экспериментальные измерения проведены на стальном образце. При частоте, излучаемой продольной волны 2,5 МГц, ее длина составляет 2,34 мм. Приведено сравнение теоретических расчетов и результатов экспериментальных измерений амплитуды в обратно отраженной волне, в двукратно и трехкратно отраженных волнах последовательно от одного, двух и трех дефектов.

А. В. Братищев А. Г. Кривошея (ДГТУ, Россия)
avbratishchev@spark-mail.ru sunny-anny.k@mail.ru

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И СИНЕРГЕТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Математическая модель системы «Регуляризатор предпринимательской деятельности» задается автономной системой [1]

$$\begin{cases} x'_t = a_1 x + a_2 y^2 - a_3 xy \\ y'_t = b_1 xy - b_2 x \end{cases}, \qquad a_i, b_i > 0$$

В случае $a_1 b_1 \neq a_3 b_2$ параметрический портрет 5-мерного пространства параметров системы разбивается на две области бифуркационной поверхностью $a_1 b_1 = a_3 b_2$. В случае 4-мерный портрет топологически однородный и совпадает с положительным октантом, а фазовый портрет имеет только седло-узел $(0, 0)$. Применение метода аналитического конструирования нелинейных регуляторов [2] для стягивания траекторий системы в точку (x_c, y_c) дает такую систему уравнений для нахождения координат этой точки

$$\begin{cases} a_1 x_c + a_2 y_c^2 - a_3 x_c y_c = 0 \\ \alpha x_c + \beta y_c + \varphi(x_c) = 0 \end{cases}.$$

(x_c, y_c) будет точкой притяжения, если $x_c > \frac{2a_1 a_2}{a_3^2}$, и не будет таковой, если $x_c < \frac{2a_1 a_2}{a_3^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Милованов В. П.* Синергетика и самоорганизация: Экономика. Биофизика. М.: КомКнига, 2005, 168 с.

2. *Колесников А. А.* Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза. М.: КомКнига, 2006, 240 с.

Л. Р. Гервич (Южный Федеральный Университет, Россия)
lgervith@gmail.com

МОДЕЛИ ВРЕМЕНИ ВЫПОЛНЕНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПАМЯТИ

Время выполнения алгоритма - это функция, зависящая от размера входных данных. Для вычислений на системах с распределенной памятью время выполнения определяют как сумму времени арифметических операций и времени пересылок данных. Время выполнения можно представить в виде: $\mathrm{F(N)} = \mathrm{S(N)} +$

T(N), где N - количество входных данных, S(N) - формула времени выполнения вычислительных операций и операций чтения-записи, а T(N) - формула времени пересылки данных.

Построена модель времени выполнения для параллельной явной схемы решения одномерного уравнения теплопроводности, а также модель для параллельного метода Якоби двумерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Модели времени выполнения позволяют более точно оценивать соотношение времени вычислений и времени пересылок данных. Модели учитывают такие параметры вычислительной системы, как латентность, пропускная способность. Также учитывается буферизация пересылаемых данных. Благодаря данным моделям выбраны оптимальные параметры для алгоритмов, использующих размещения данных с перекрытием. Определены оптимальные перекрытия, при которых время выполнения минимально.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гервич Л. Р., Кравченко Е. Н., Штейнберг Б. Я., Юрушкин М. В.* Автоматизация распараллеливания программ с блочным размещением данных. Сиб. журн. вычисл. матем. 2015. Т. 18, № 1. С. 41–53.

2. *Гервич Л. Р., Штейнберг Б. Я., Юрушкин М. В.* Разработка параллельных программ с оптимизацией использования структуры памяти. Изд-во Южного федерального университета. 2014.

Я М. Ерусалимский (Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия)
dnjme@math.sfedu.ru, ymerusalimskiy@sfedu.ru

О СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЯХ ПО ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ

Вершины графа — точки плоскости с координатами из Z_+. Из каждой вершины $(m;n)$ выходит две дуги — в вершину $(m+1;n)$ и вершину $(m;n+1)$. На дугах графа заданы вероятности перехода равные 0,5. Процесс случайного блуждания частицы по вершинам такого графа является Марковским и вероятность перехода из одной вершины графа в другую легко вычисляется. Так если в начальный момент частица находилась в вершине $\overline{O}=(0;0)$, то через n шагов она окажется в одной из вершин $(k;n-k)$, $k=0,1,\ldots,n$ с вероятностью

$$p\left(\overline{O};(k;n-k)\right)=\frac{C_n^k}{2^n}. \qquad (1)$$

Введем в рассмотрение ограничение на достижимость — пути, по которым совершается движение по вершинам графа, не должны проходить подряд по горизонтальным дугам. В этом случае процесс случайного блуждания не является Марковским процессом.

Количество путей, ведущих из вершины $\overline{O} = (0;0)$ в вершину $(k; n-k)$ определяется при $k \leq \dfrac{n+1}{2}$ формулой C_{n-k+1}^{k}, в противном случае путей ведущих из вершины $\overline{O} = (0;0)$ в вершину $(k; n-k)$ нет. Однако, формулу для $p\left(\overline{O}; (k; n-k)\right)$, аналогичной формуле (1), выписать нельзя, поскольку пути перестают быть равновероятными. В вершину $(3;1)$ из вершины $\overline{O} = (0;0)$ ведут пути (1000), (0100), (0010), (0001) (здесь единицей кодируется переход по вертикальной дуге, нулем — по горизонтальной). Вероятности прохождения по первому, второму и третьему пути равны 0,125, а по четвертому — 0,0625.

E. Kengne and A. Lakhssassi
Department of Engineering and Computer sciences
University of quebec at Outaouais
101 St-Jean-Bosco, Succursale Hull, Gatineau(PQ) J8Y 3G5, Canada
kengem01@uqo.ca

ANALYTICAL STUDIES OF STEADY-STATE TEMPERATURE DISTRIBUTION IN NORMAL AND POST SURGERY PERIPHERAL TISSUES OF HUMAN LIMB

An axisymmetric one-dimensional bioheat transfer model has been developed to study steady-state temperature distributions in different layers of normal and post surgery peripheral (abnormal) tissues of human limb. Using the method of modified Bessel functions, we derive the exact solution of a bioheat transfer problem for one-dimensional Pennes bioheat equation that describes the steady-state temperature distribution in the peripheral tissues of human limb. The obtained analytical solution is used to analyze and compare temperature distribution of normal as well as abnormal tissues.

С. Ю. Князев (Донской Государственный Технический Университет, Россия)
ksy@donpac.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ

Значительное число краевых задач для уравнений эллиптического типа, имеющих важное прикладное значение, допускают только приближенное численное решение. Точность и время решения таких задач определяется в первую очередь используемым численным методом. В настоящее время наиболее часто в этих случаях применяется метод конечных элементов (МКЭ). Однако, при решении ряда краевых задач этот метод не обеспечивает требуемую точность результата. Кроме того, время численного решения задачи на компьютере может оказаться недопустимо большим для использования его в режиме реального времени. Поэтому критически важным может оказаться вопрос поиска численного метода, обеспечивающего высокое быстродействие компьютерных расчетов при требуемой точности результатов вычислений. Таким методом может являться метод точечных источников поля (МТИ), в зарубежной литературе называемый также «Method of Fundamental Solutions» (MFS).

В МТИ искомое поле представляется в виде суперпозиции полей точечных источников, располагаемых за пределами области решения задачи. Нахождение численного решения краевой задачи сводится в МТИ к определению точечных зарядов, моделирующих искомое поле (моделирующих зарядов). Требование выполнения граничных условий в точках коллокации, располагаемых на границе области решения задачи, приводит к системе линейных алгебраических уравнений, системе МТИ, решая которую находят моделирующие заряды. Точность полученного численного решения зависит от положения моделирующих зарядов и точек коллокации и, в первую очередь, от количества моделирующих зарядов.

МТИ может использоваться для решения достаточно широкого круга задач математической физики [1]. Однако, наиболее исследовано применение МТИ при решении лишь некоторых типов краевых задач для однородных уравнений эллиптического типа, в первую очередь для уравнения Лапласа, Гельмгольца и бигармонического уравнения. Было показано, что в этом случае для двумерных задач погрешность численного решения убывает с ростом числа моделирующих зарядов по экспоненциальному закону. Такое быстрое убывание погрешности позволяет получить численное решение весьма высокой точности, с относительной погрешностью вплоть до значений порядка 10^{-14}.

Значительно слабее исследованы возможности МТИ при решении трехмерных задач математической физики. Показано, что при решении трехмерных задач для уравнения Лапласа наблюдается экспоненциальная зависимость погрешности МТИ от квадратного корня из числа моделирующих зарядов [2].

Важное прикладное значение имеют задачи теории упругости, которые приводят к системе трех (при решении трехмерных задач) уравнений эллиптического типа. Решение этих задач также возможно с использованием МТИ. Показывается, что также как и при решении краевых задач для уравнения Лапласа, при численном решении трехмерных задач теории упругости наблюдается экспоненциальная зависимость погрешности МТИ от квадратного корня из числа моделирующих зарядов. Приводятся также конкретные примеры решения трехмерных задач теории упругости с использованием МТИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач-М.: Наука. 1991. 352 с.

2. *Князев С. Ю.* Устойчивость и сходимость метода точечных источников поля при численном решении краевых задач для уравнения Лапласа. Изв. вузов. Электромеханика. 2010. № 1. С. 3–12.

И. В. Колесников (Россия)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТЯЖЕЛОНАГРУЖЕННЫХ УЗЛАХ ТРЕНИЯ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

Нахождение температурного поля скользящего контакта колесо - тормозная колодка подвижного состава затруднительно из-за смены граничных условий. Действительно любой участок поверхности бандажа, то находится под колодкой, то охлаждается во время движения между ними. Желание рассмотреть особенности температурного поля в погранслоях данной системы приводит к необходимости решения краевых сингулярно возмущенных задач - задач с малым параметром при старшей производительной, которая обусловлена тем, что толщина колодки намного меньше радиуса колеса. Для нахождения температурного поля был применен метод регуляризации сингулярно возмущенных задач. Суть его - в регуляризации сингулярного возмущения с помощью перехода в пространство безрезонансных решений, которое индуцируется исходной задачей. Это индуцированное пространство определяется по спектральным характеристикам исходного оператора, что дает возможность использовать спектральную теорию операторов. Расчеты показали, что максимальное значение температуры достигается не на поверхности, а внутри колеса, т.е. имеем в приповерхностной зоне отрицательный температурный градиент со всем вытекающими последствиями фрикционного сопряжения. Кроме того нами исследована зависимость теплофизических параметров композиционных тормозных колодок - коэффициентов теплоемкости C_p и теплопроводности λ от температуры. В результате показано, что с увеличением температуры - величины C_p и λ увеличиваются, что приводит к тому, что подповерхностный максимум температуры по величине уменьшается и смещается к поверхности колеса. При этом максимум находится на расстоянии 300..500 мкм от поверхности катания в зависимости от режимов торможения.

К. В. Рогатов, М. Юрушкин, Б. Я. Штейнберг (Южный федеральный университет, Россия)
kirill.bort.4@gmail.com, m.yurushkin@gmail.com, borsteinb@mail.ru

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГНЕЗД ЦИКЛОВ К БЛОЧНЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ И БЛОЧНЫМ РАЗМЕЩЕНИЯМ ДАННЫХ

Переход к блочным вычислениям позволяет оптимизировать использование иерархии памяти современных процессоров. Такой переход может дать ускорение простой программы, содержащей гнездо циклов, от нескольких десятков процентов, до нескольких раз. Переход к блочным вычислениям встречается под названием «тайлинг».

Блочное размещение массивов в оперативной памяти является дополнением к блочным вычислениям. Блочное размещение массивов позволяет уменьшить количество кэш-промахов за счет увеличения доли читаемых программой кэш-линеек, полностью насыщенных необходимыми для ближайших вычислений данными. Для многих программ, выполняющих блочные вычисления, блочное размещение данных позволяет получить дополнительное ускорение более десяти процентов.

Переход к блочным вычислениям и к блочным размещениям массивов существенно усложняет индексные выражения массивов и предполагает дальнейшую оптимизацию вычислений адресов. Это увеличивает объем программы (более, чем в два раза) и требует существенных интеллектуальных усилий программиста. Данная проблема делает актуальной автоматизацию преобразования программы к блочным вычислениям и блочным размещениям данных.

В работе представлены средства автоматизации преобразований программ языка Си к блочным вычислениям и блочным размещениям данных. Автоматизация реализована с помощью специальных прагм. Данные прагмы поддерживаются компилирующей системой ОРС. ОРС – это Оптимизирующая распараллеливающая система Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета [1] . Рассматриваются прагмы одновременно преобразующие гнездо циклов программы к блочным вычислениям и блочному размещению данных.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Оптимизирующая распараллеливающая система Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета www.ops.rsu.ru

В. В. Семенов (Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина)
semenov.volodya@gmail.com

СИЛЬНО СХОДЯЩИЙСЯ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ НЕЛИПШИЦЕВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Рассмотрено операторное уравнение

$$Ax = 0,$$

где A — монотонный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Для решения данного уравнения в работе предложен сильно сходящийся метод с динамической регулировкой величины шага. Относительно оператора A не предполагается липшицевость. Метод имеет следующий вид.

Инициализация. Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$, элемент $x_0 \in H$, последовательность $(\alpha_n) \subseteq (0,1)$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

Итерационный шаг. Для $x_n \in H$ вычисляем

$$y_n = x_n - \lambda_n A x_n,$$

где λ_n получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min\left\{j \geq 0 : \ \left\|A\left(x_n - \sigma\tau^j A x_n\right) - Ax_n\right\| \leq \theta \left\|Ax_n\right\|\right\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Вычисляем

$$x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)\left(x_n - \lambda_n A y_n\right).$$

Пусть P_C — оператор метрического проектирования на выпуклое замкнутое множество $C \subseteq H$. Справедлива следующая теорема о сходимости метода.

Теорема. *Пусть оператор $A : H \to H$ — монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображающий ограниченные множества в ограниченные. Предположим, что $A^{-1}0 \neq \emptyset$. Тогда последовательности (x_n) и (y_n), порожденные методом, сильно сходятся к точке $z_0 = P_{A^{-1}0} x_0$.*

В. А. Скороходов (Ростов-на-Дону)
pdvaskor@yandex.ru

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ЖЁСТКО РАСПРЕДЕЛЁННОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим сеть $G(X,U,f)$, для каждой дуги $u \in U$ которой заданы две величины: пропускная способность $c(u)$ и доля $p(u)$ прохождения по ней потока, приходящего в начальную вершину дуги u (см. [1]).

Определение 1 *Поток F в сети G будем называть жёстко распределённым, если величины пропускаемого по дугам потока пропорциональны долям потока, проходящего по этим дугам, т.е.*

$$F(u_i) \cdot p(u_j) = F(u_j) \cdot p(u_i), \quad \forall u_i, u_j \in [x]^+, \quad \forall x \in X \setminus \{t\}.$$

Рассмотрим для сети $G(X, U, f)$ задачу о максимальном жёстко распределённом потоке. Для решения поставленной задачи будем использовать подход, согласно которому составим следующую систему уравнений (1) относительно неизвестных величин $F(u)$, описывающую жёсткое распределение потока в сети:

$$\begin{cases} p(u)\cdot \sum\limits_{v\in[x]^+} F(v) - F(u) = 0,\ \forall x \in X\backslash\{t\},\ \forall u \in [x]^+ \setminus \{w_x\}; \\ p(w_x)\cdot \sum\limits_{v\in[x]^-} F(v) - F(w_x) = 0,\ \forall x \in X\backslash\{s,t\}; \\ F(w) = a. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Решение системы уравнений (1) существует и единственно для любого действительного значения a.*

Для одной и той же сети G рассмотрим две системы вида (1), которые отличаются лишь последним уравнением: $F(u) = a_1$ — последнее уравнение первой системы, $F(u) = a_2$ — последнее уравнение второй системы. Пусть F_1 и F_2 — соответственно решения первой и второй системы вида (1).

Теорема 2. *Если $a_1 \geq a_2$, то для любой дуги u_i сети G выполняется соотношение: $F_1(u_i) \geq F_2(u_i)$.*

Таким образом, решение задачи о максимальном жёстко распределённом потоке сводится к решению системы вида (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А., Кузьминова М.В., Петросян А.Г.* Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. -Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. – 195 С.

В. И. Субботин (ЮРГПУ(НПИ) им. Платова, Россия)
geometry@mail@ru

ОБ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СЕРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Рассматриваются выпуклые многогранники в трёхмерном евклидовом пространстве, обладающие главной осью симметрии. Дополнительной особенностью изучаемых многогранников является наличие у них единственной симметричной ромбической вершины; так названа вершина, инцидентная только совокупности ромбов, через которую проходит главная ось симметрии многогранника. Двойной симметричной ромбической вершиной названа ромбическая вершина, ромбы которой равны через один. В докладе описана бесконечная серия выпуклых многогранников с двойной симметричной ромбической вершиной. Многогранник с двойной симметричной ромбической вершиной может быть построен следующим образом. Рассмотрим равносторонне-полуправильный многоугольник. На каждой его стороне построим равносторонние треугольники, которые будут представлять собой часть боковых граней будущего многогранника. Пустоты двух типов между построенными треугольными гранями могут быть заполнены двумя типами ромбов, чередующимися между собой.

Доказано, что все построенные ромбы пересекаются в одной вершине.

Число сторон основного равносторонне-полуправильного многоугольника может быть как угодно велико, поэтому и число граней, сходящихся в двойной симметричной ромбической вершине может быть как угодно большим. Заметим, что построенный многогранник является также примером многогранника, содержащего только правильные и равносторонне-полуправильные грани.

Сделано предположение, что единственными многогранниками с двойной симметричной ромбической вершиной и правильными и равносторонне-полуправильными гранями является построенная выше бесконечная серия многогранников. Рассмотрен также случай двух двойных симметричных ромбических вершин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин В. И.* Перечисление многогранников, сильно симметричных относительно вращения. —//Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. —Абрау-Дюрсо, 5-11 сент. 2002г. — Ростов-на-Дону,2002.. С. 77–78.

Секция VI

Вероятностно - аналитические модели и методы (секция памяти проф. Н.С. Ландкофа). Руководитель секции: И.В. Павлов

H. Acar (Fatih university,Turkey)
hulyaacar98@gmail.com

LOEWNER EVOLUTION AS ITÔ DIFFUSION

(Joint with A. Lukashov (Fatih university, Turkey & Saratov State university, Russia))

F. Bracci, M.D. Contreras, S. Díaz-Madrigal proved that any evaluation family of order d is described by a generalized Loewner chain. G. Ivanov and A. Vasil'ev considered randomized version of the chain and found a substitution which transforms it to an Itô diffusion.We generalize their result to vector randomized Loewner chain and prove there are no other possibilities to transform such Loewner chains to Itô diffusions.

Let $\check{C}$ be the set of functions $f(z,\mathbf{x})$ from $C^n(\mathbb{D}\times\mathbb{R}^n)$ such that these functions have continuous derivatives up to order n, $\frac{\partial f}{\partial z}$ doesn't vanish and $H(\mathbb{D})$ is the set of analytic functions in $\mathbb{D}$ ($\mathbb{D}$ is unit disc). Let function $p:\mathbb{D}\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ be measurable in t, holomorphic in z, $p(0,t)=1$ and $\Re(p(z,t))\geq 0$ for all $z\in\mathbb{D}$ and $t\geq 0$, such functions p are called Herglötz functions. In our work $p(w,t)=\tilde{p}\left(\frac{w}{\tau(t)}\right)$ and τ depends on independent Brownian motions, $\tau(t)=\tau(\mathbf{B}_t)$, where $\mathbf{B}_t=(B_t^1,B_t^2,\dots,B_t^n)$.

Theorem 1. *Consider Loewner random differential equation*

$$\begin{cases} \frac{d\phi_t(z,w)}{dt}=\frac{(\tau_1(t,w)-\phi_t(z,w))^2}{\tau_1(t,w)}\tilde{p}(\frac{\phi_t(z,w)}{\tau_1(t,w)}) \\ \phi_0(z,w)=z \end{cases} \tag{1}$$

where $|\tau_1(t,\omega)|=1$ *for each fixed* $w\in\Omega$ *(*Ω *is a sample space) and* $\tilde{p}$ *is an arbitrary Herglötz function. Suppose* $\psi_t=m(\phi_t,B_t^{(1)},B_t^{(2)},\dots,B_t^{(n)})$ *where* $B_t^{(i)}$ *are independent Brownian motions,* $m\in\check{C}$ *and* $\tau_1(t,\omega)=\tau(\mathbf{B}_t)$ *then,* ψ_t *is an* $n\times 1$ *dimensional Itô diffusion with coefficients from* $H(\mathbb{D})$ *for an arbitrary Herglötz function* $\tilde{p}$ *if and only if* $\tau(\mathbf{B}_t)=e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_t}$ *where* $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n)$ *and* $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^n$.

Furthermore the infinitesimal generator of ψ_t (when it is an Itô diffusion) is given by

$$A=\left(-\frac{z}{2}\left|\mathbf{k}\right|^2+(1-z)^2\tilde{p}(z)\right)\frac{d}{dz}-\frac{1}{2}\left|\mathbf{k}\right|^2z^2\frac{d^2}{dz^2}. \tag{2}$$

Research supported by RFBR-TUBITAK (14-01-91370/113F369).

Э. М. Асадуллин (Россия)
mrsine@mail.ru

О ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОМЕРНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАВИСИМЫМИ ВИНЕРОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Рассматриваются диффузионные процессы $x(t)$, $y(t)$, являющиеся решением системы уравнений Ито:

$dx(t) = b_1(t, x(t), y(t))dt + \sigma_1(t, x(t), y(t))dW_t,$

$dy(t) = b_2(t, x(t), y(t))dt + \sigma_2(t, y(t))dN_t,$

где W_t и N_t – зависимые винеровские процессы, такие что:

$$E(W_t^2) = \int_0^t Q(s)ds, \quad E(N_t^2) = \int_0^t R(s)ds, \quad E(W_tN_t) = \int_0^t S(s)ds.$$

Процесс $y(t)$ считается доступным для наблюдения, а $x(t)$ – нет. Необходимо построить наилучшую в среднем квадратическом оценку процесса $x(t)$ по наблюдениям за процессом $y(t)$.

Известно [1, 2], что оценку для ненаблюдаемого процесса можно вычислить используя ненормализованную фильтрационную плотность (далее – НФП) $V(t, x)$, для которой найдено стохастическое уравнение параболического типа.

Оказывается, что уравнение для НФП сводится к некоторой цепочке нестохастических уравнений, одно из которых является линейным уравнением в частных производных первого порядка, а второе – уравнением параболического типа со случайными коэффициентами, но не содержащим стохастических интегралов. Из первого уравнения цепочки обнаруживается структура НФП: $V(t, x) = F(t, z(t, x, y(t))) \exp(g(t, x, y(t)))$, где функции $z(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ известны, а $F(t, z)$ – неизвестная функция, которая находится из второго уравнения цепочки и начального условия:

$$F'_t = (z'_x)^2 AF''_{zz} + [(z''_{xx} + 2z'_x g'_x)A + z'_x B - z'_t]F'_z + \\ +[(g''_{xx} + (g'_x)^2)A + g'_x B + C - g'_t]F,$$

$$F(0, z) = \pi_0(\widetilde{x}(0, z, y(0))) \exp(-g(0, \widetilde{x}(0, z, y(0)), y(0))).$$

Здесь A, B и C – известные функции, выражающиеся через исходные коэффициенты b_1, b_2, σ_1, σ_2, Q, R, S.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розовский Б. Л.* Эволюционные стохастические системы. М.: Наука. 1983.

2. *Kunita H.* Nonlinear Filtering Problems II, Associated Stochastic Partial Differential Equations. The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering, Oxford Handbooks. 2011.

A. D. Bendikov (IM UWr, Poland)
Alexander.Bendikov@math.uni.wroc.pl

ON A CLASS OF RANDOM PERTURBATIONS OF THE HIERARCHICAL LAPLACIAN

This is joint project with Alexander Grigor'yan (SFB 701, Bielefeld, Germany), Stanislaw Molchanov (UNC at Charlotte, USA) and Gennady Samorodnitsky (Cornell, USA).

Let (X, d) be a locally compact separable ultrametric space. Given a measure m on X and a function $C(B)$ defined on the set of all non-singleton balls B of X we consider the hierarchical Laplacian $L = L_C$. The operator L acts in $L^2(X, m)$, is essentially self-adjoint and has a purely point spectrum. Choosing a family $\epsilon(B)$ of i.i.d. we define the perturbated function $C(B, \omega)$ and the perturbated hierarchical Laplacian $L^\omega = L_{C(\omega)}$. We study the arithmetic means $\lambda(\omega)$ of the L^ω-eigenvalues. Under some mild assumptions the normalized arithmetic means $\frac{\lambda - E\lambda}{\sigma[\lambda]}$ converge to $N(0,1)$ in law. We also give examples where the normal convergence fails. We prove existence of the integrated density of states. We introduce the empirical point process N^ω of the L^ω-eigenvalues and, assuming that the density of states exists and is continuous, we prove that the finite dimensional distributions of N^ω converge to the finite dimensional distributions of the Poisson point process. As an example we consider random perturbations of the Vladimirov operator acting in $L^2(X, m)$, where $X = Q_p$ is the ring of p-adic numbers and m is the Haar measure.

Devoted to the memory of N.S. Landkof (20.01.1915-07.12.2004).

О. В. Висков, В. И. Хохлов
(Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН, РФ),
В. М. Максимов (Тверской гос. ун-т, РФ)
tvp@tvp.ru

АННУЛЯТОРЫ, ПРЕД-АННУЛЯТОРЫ И ХАРАКТЕРИЗАТОРЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

В докладе представлен новый метод получения моментных характеризаций вероятностных распределений типа характеризаций Стейна и Чена (см. [4], [6]).

Востребованность моментных характеризаций вероятностных распределений — следствие успеха метода Стейна–Чена, ставшего, в частности, одним из важных инструментов получения нормальных и пуассоновских предельных распределений сумм независимых и *зависимых* случайных величин; зачастую этот метод позволяет оценивать расстояния между допредельными и предельными распределениями (см., например, [5] и библиографию там). К настоящему времени получены разрозненные результаты в этой области, касающиеся и других классических распределений теории вероятностей (см. [1–3], [5], [7]).

Авторами для широкого класса вероятностных мер (распределений) разработан универсальный метод получения моментных характеризационных тождеств вида $\mathbf{M}\,\mathcal{A}_\xi\,[f(\xi)] = 0$, т. е. таких тождеств, которые, с одной стороны, при всех функциях f из заданного широкого класса функций выполняются на распределении, порождаемом случайной величиной ξ, а с другой стороны, будучи выполненными для функций f из данного класса функций, однозначно определяют само это распределение. Операторы $\mathcal{A}_\xi$, доставляющие такие тождества, будут называться *характеризаторами.*

В основе метода лежит следующий функционально-операторный подход.

Для всякой случайной величины ξ, имеющей (экспоненциальную) производящую функцию $P_\xi(t) = \mathbf{M}\, e^{t\xi}$ своих моментов, определяется ее *производящий* оператор $P_\xi(\mathcal{D}) = \mathbf{M}\, e^{\mathcal{D}\xi}$ как результат подстановки в ее производящую функцию оператора дифференцирования $\mathcal{D} : \mathcal{D}\,[f(x)] = f'(x)$ вместо (в общем случае формальной) переменной t. Доказывается, что действие этого оператора допускает следующее толкование: $P_\xi(\mathcal{D})\,[f(x)] = \mathbf{M}\, e^{\mathcal{D}\xi}\,[f(x)] = \mathbf{M}\, f(x+\xi)$. Если к левой части применить функционал (Бернулли) $\mathcal{V}_0 : \mathcal{V}_0\,[f(x)] = f(0)$, получим $\mathcal{V}_0\, P_\xi(\mathcal{D})\,[f(x)] = \mathbf{M}\, f(\xi)$.

Вслед за этим определяется *аннулятор* $\mathcal{A}$ (1-*го порядка*) как оператор, с которым тождество $\mathcal{V}_0\, P_\xi(\mathcal{D})\,\mathcal{A}\,[f(x)] = 0$ имеет место для любой функции $f(x)$ из заданного широкого класса. Оператор $\mathcal{B}(\mathcal{D})$, при котором соотношение $\mathcal{A} = \mathcal{X} - \mathcal{B}(\mathcal{D})$ задает аннулятор 1-го порядка, будем называть *пред-аннулятором*; здесь $\mathcal{X}$ есть оператор умножения на независимую переменную $\mathcal{X}\,[f(x)] = x\, f(x)$.

Теорема. *Если для вероятностной меры, порождаемой случайной величиной* ξ, *существует производящий оператор* $P_\xi(\mathcal{D})$, *то ее аннулятор* 1-*го порядка задается пред-аннулятором*

$$\mathcal{B}_\xi(\mathcal{D}) = \frac{P'_\xi(\mathcal{D})}{P_\xi(\mathcal{D})} = \frac{d \ln P_\xi(t)}{dt}\Big|_{t=\mathcal{D}}. \tag{1}$$

Следствие. *Если пред-аннулятор вида* (1) *представи́м степенным рядом по* $\mathcal{D}$ *с ненулевым радиусом сходимости или многочленом от* $\mathcal{D}$ *произвольной степени, то аннулятор* $\mathcal{A}_\xi = \mathcal{X} - \mathcal{B}_\xi(\mathcal{D})$ *является характеризатором.*

В докладе будет приведен целый ряд ранее неизвестных характеризаторов, полученных применением этого следствия.

Работа выполнена в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН и в Тверском государственном университете.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И.* Характеризационное тождество для биномиального распределения. Обозрение прикл. и промышл. матем. 2013. Т. 20, в. 2. С. 136–137.

2. *Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И.* Характеризационное тождество для распределения Паскаля. Обозрение прикл. и промышл. матем. 2013. Т. 20, в. 4. С. 532–533.

3. *Висков О. В., Хохлов В. И.* Характеризационное свойство тождества Лью для многомерного нормального распределения. Обозрение прикл. и промышл. матем. 2014. Т. 21, в. 4. С. 340–341.

4. *Chen L. H. Y.* Poisson approximation for dependent trials. Ann. Probab. 1975. V. 3, № 3. P. 535–545.

5. *Ross N.* Fundamentals of Stein's method. Probab. Surveys, 2011. V. 8. P. 210–293.

6. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Probability Theory. Berkeley, CA: Univ. California Press. 1972. P. 583–602.

7. *Wey Zh.*, *Zhang X.*, *Li T.* On Stein identity, Chernoff inequality, and orthogonal polynomials. Commun. Statist. Theory Methods. 2012. V. 39, is. 14. P. 2573–2593.

Т. А. Волосатова (Ростовский государственный строительный университет, Россия)
kulikta@mail.ru

АРБИТРАЖНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ В СЛУЧАЕ СКУПКИ АКЦИЙ

В период финансовой нестабильности (такова, например, ситуация в настоящее время в России и во многих других странах) особую актуальность представляют исследования, связанные с (B,S)-рынками, допускающими арбитражные возможности (см., например, [1]), и в том числе с финансовыми рынками, подверженными агрессивной скупке акций (см. [2]). Автором настоящего доклада получен ряд результатов в данной области исследования. В частности, с помощью интерполяционных процедур изучен вопрос "улучшения"(в вычислительном плане) исходного финансового рынка, допускающего арбитраж. Разработаны принципы построения процессов, интерполирующих цены акций, для преобразования исходного финансового рынка в полный рынок и в глобально полный рынок. Для каждого случая получены необходимые и достаточные условия интерполируемости и универсальной интерполируемости по Хаару. В случае, когда исходный финансовый рынок интерполируем до полного, предложена схема построения наилучшего рынка в смысле минимизации моментов нарушения полноты. Также были изучены рынки, полные по отношению к любому моменту времени, кроме одного.

С помощью хааровских интерполяций моделируется финансовый рынок с арбитражными возможностями, на котором присутствуют два агрессивными скупщика акций, поведение которых носит случайный характер. При этом скупаются акции одного типа. Анализируются возможности расширения таких моделей на арбитражные рынки, где скупаются несколько типов акций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 13-01-00637а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б. Д.* Максимизация капитала на арбитражных финансовых рынках с операционными издержками. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва. 2006.

2. *Волосатова Т. А.* Исследование моделей финансовых рынков, допускающих арбитраж, с помощью метода хааровских интерполяций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону. 2006.

Ю. Е. Гликлих (Воронежский государственный университет, Россия)
yeg@math.vsu.ru

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ: СВОЙСТВА, ПРИЛОЖЕНИЯ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Понятие производных в среднем случайных процессов было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX века [1].

В настоящем докладе, следуя [2], дается введение в теорию уравнений и включений с производными в среднем по Нельсону, а также обзор новых результатов из этой теории и ее приложений с упором на последние публикации автора [3 – 5].

Работа [4] выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (проект 1.1539.2014/К).

Результаты статьи [5] получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Nelson E.* Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics. Phys. Reviews. 1966. Vol. 150, № 4. P. 1079 – 1085

2. *Gliklikh Yu. E.* Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics. London: Springer-Verlag. 2011.

3. *Gliklikh Yu. E., Zheltikova O. O.* Stochastic Equations and Inclusions with Mean Derivatives and Some Applications. Optimal Solutions for Inclusions of Geometric Brownian Motion Type. Methodology and Computing in Applied Probability. 2015. Vol. 17, № 1. P. 91–105.

4. *Gliklikh Yu. E., Zalygaeva M. E.* Non-Newtonian fluids and stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms. Applicable Analysis (in print)

5. *Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu.* Stochastic Leontieff type equations with non-constant coefficients. Applicable Analysis (in print)

А. С. Гречко (Южный федеральный университет, ООО НПФ “ИнВайз Системс”, Россия)

alexredrnd@gmail.com

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ РЫНОЧНОЙ ВОЛОТИЛЬНОСТИ

Ключевым статистическим финансовым показателем, характеризующим изменчивость цены, важным для правильной оценки опционов является волатильность базового актива. В случае, когда базовый актив - фьючерс на фондовый индекс, данную величину рассматривают как волатильность рынка в целом - это один из самых важных рыночных индикаторов. Самой известной характеристикой волатильности является индекс волатильности VIX Чикагской опционной биржи CBOE, рассчитываемый на основе цен опционов на фьючерсы на индекс S&P500. В конце 2010 года на российском срочном рынке FORTS был введён аналогичный индекс волатильности RTSVX, который рассчитывается на основе цен опционов на фьючерс на индекс РТС. Из-за непрозрачности своего алгоритма фьючерсы на RTSVX так и не стали ликвидными, поэтому в начале 2014 года был предложен более простой модифицированный вариант - индекс RVI. Алгоритмы расчета VIX, RTSVX и RVI основаны на формуле волатильности свободной от модели, которая использует цены опционов "вне денег". Однако применения метода CBOE на российском срочном рынке сталкивается с рядом сложностей, в частности, низкая ликвидность опционов на дальних страйках и большой шаг между страйками, что может привести к неверной оценке рыночной волатильности инвесторами.

Альтернативный подход, предложенный в [1], был адаптирован к российскому рынку и апробирован на реальных рыночных данных. Численные эксперименты показали, что новая методика лучше аппроксимирует квадратическую вариацию, однако также в значительной степени недооценивает реализованную волатильность. Для моделирования динамики российского рынка, следует использовать модели со скачками.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ, проект № 15-32-01390.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Fukasawa et al.* Model-Free implied volatility: from surface to index. International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2011. V. 14, № 4, с. 433–463.

О. В. Гробер (Ростовский государственный строительный университет, Россия)
grober71@mail.ru

ОБ ОЦЕНКЕ ЧЕЗАРОВСКИХ СРЕДНИХ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С ОБОБЩЁННЫМИ УСЛОВИЯМИ ГЁЛЬДЕРА

Пусть $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности. Обозначим через $C^0_\omega[-\pi;\pi]$ пространство функций, удовлетворяющих на указанном отрезке обобщённому усиленному условию Гёльдера:

$$|f(x_1)-f(x_2)| = o(\omega(|x_1-x_2|)),$$

где $x_1, x_2 \in [-\pi;\pi], |x_1-x_2| \to 0$.

Норма в пространстве $C^0_\omega[-\pi;\pi]$ определяется в виде суммы

$$\|f\|_\omega = \|f\|_C + |f|_\omega, \quad \text{где} \quad |f|_\omega = \sup_{x_1\neq x_2} \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{\omega(|x_1-x_2|)}.$$

Если выполняется условие

$$t = o(\omega(t))$$

при $t \to 0$, то будем говорить, что $\omega(t)$ относится к классу Φ.

Теорема. *Пусть* $f \in C^0_\omega[-\pi;\pi], \omega \in \Phi$. *Тогда чезаровские средние функции* f

$$\sigma_n^f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)K_n(t)\,dt\,,$$

где

$$K_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2,$$

сходятся к этой функции по норме $\|f\|_\omega$, *то есть*

$$\left\|f - \sigma_n^f\right\|_\omega \to 0 \quad \text{\textit{при}} \quad n \to \infty\,.$$

Заметим, что для функций, удовлетворяющих обычному (не усиленному) обобщённому условию Гёльдера такой факт неверен, поскольку $C_\omega[-\pi;\pi]$ — несепарабельное пространство.

Результат обобщен (при некоторых ограничениях) на пространства, являющиеся проективными пределами рассмотренных выше пространств.

А. А. Гущин (МИАН, Россия)
gushchin@mi.ras.ru

О ВЛОЖЕНИИ ПРОЦЕССОВ В БРОУНОВСКОЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

В известной работе [2] Монро доказал, что непрерывный справа и имеющий пределы слева случайный процесс вкладывается в броуновское движение конечной заменой времени тогда и только тогда, когда он — семимартингал. Мы доказываем аналогичный результат для геометрического броуновского движения.

Теорема. (i) *Пусть* $X = (X_s)_{s\geq 0}$ — *неотрицательный супермартингал с* $\mathsf{E}X_0 \leq 1$. *Тогда существуют такие пространство с фильтрацией* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathsf{P})$, $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$*-броуновское движение* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *и* $(\mathcal{F}_t)$*-замена времени* $(T_s)_{s\geq 0}$ *со значениями в* $[0,\infty]$, *что процессы* $(X_s)_{s\geq 0}$ *и* $(Z_{T_s})_{s\geq 0}$ *имеют одинаковое распределение, где* $Z_t = e^{W_t - t/2}$, $t \geq 0$.

(ii) *Обратно, для любой* $(\mathcal{F}_t)$*-замены времени* (T_s) *со значениями в* $[0,\infty]$, *процесс* (Z_{T_s}) *является неотрицательным* $(\mathcal{F}_{T_s}, \mathsf{P})$*-супермартингалом.*

Мы также укажем на связь этого результата с другой теоремой Монро [1], которая утверждает, что мартингал может быть получен из броуновского движения конечной заменой времени, состоящей из так называемых минимальных моментов остановки. Наша теорема влечет, что то же утверждение верно для всех супермартингалов, ограниченных снизу.

Наша заключительная цель — описать все интегрируемые процессы, которые могут быть получены из броуновского движения конечной заменой времени, состоящей из минимальных моментов остановки.

Доклад основан на совместной работе с М. А. Урусовым (Университет Дуйсбург-Эссен).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Monroe I.* On embedding right continuous martingales in Brownian motion. Ann. Math. Statist. 1972. V. 43, P. 1293–1311.

2. *Monroe I.* Processes that can be embedded in Brownian motion. Ann. Probability. 1978. V. 6, P. 42–56.

А. Г. Данекянц (Ростовский государственный строительный университет, Россия)
dangegik@mail.ru

БЕЗАРБИТРАЖНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ В СЛУЧАЕ СКУПКИ АКЦИЙ

В настоящем докладе анализируются возможности моделирования финансовых рынков, подверженных агрессивной скупке акций, при отсутствии на рынке арбитражных возможностей. В частности, исследуется поведение инвестора в рамках трех взаимосвязанных моделей (B,S)-рынков, подверженных целенаправленной скупке акций со стороны не более чем счетного числа скупщиков: а) модель с произвольным конечным числом агрессивных скупщиков, анализ которой производится приближением мартингальных мер мартингальными мерами, удовлетворяющими свойству универсальной хааровской единственности (СУХЕ, см. [1]); б) модель (B,S)-рынка со счетным числом скупщиков акций, исследование которой производится её сведением к модели а) методом «усечения» финансового рынка; в) модель (B,S)-рынка (типа Кокса-Росса-Рубинштейна) со счетным числом скупщиков акций, в рамках которой построение совершенных хеджей происходит методом специальных хааровских интерполяций с использованием того факта, что все мартингальные меры удовлетворяют ослабленному свойству универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ, см. [2]). Отметим, что существенный прогресс в изучении мартингальных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ, сделан в статьях [3,4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 13-01-00637а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богачева М. Н., Павлов И. В.* О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных. 2002. Том 57. Вып. 3. С. 143–144.

2. *Данекянц А. Г., Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности. Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Том 11, Вып. 3. С. 506–508.

3. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров. Вестник РГУПС. 2012. Вып. 3. С. 177–181.

4. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров: конструктивистский подход. Вестник РГУПС. 2014. Вып. 4. С. 132–139.

M. A. Zhdanova (Southern Federal University, Russia)
mary.zhdanova@gmail.com

INVERSE PROBLEMS OF HSMM-BASED MATHEMATICAL MODELING OF JAMMING ENVIRONMENT

Mathematical models of error sources for digital data transmission channels are applied in the simulation experiments aimed to select the appropriate error-correcting codec for particular channel. Inverse problems, i.e. an adequate representation of jamming environment in the channel by means of mathematical error source model, are of the considerable interest. It seems convenient to employ hidden semi-Markov models (HSMMs) to describe error sources. First of all, these models are able to simulate different types of jamming environment. Moreover, it is possible to solve inverse problems for them.

In the paper we consider two error source models – hidden semi-Markov Ferguson model and hidden semi-Markov QP-model. The first one, also known as implicit duration hidden Markov model, belongs to the classical HSMMs. In [1] we suggested a polynomial representation of this model allowing to speed up the generation process. The second model was introduced and studied in [2].

For both models, solutions of the inverse problem are proposed. Particularly, we provide the approach to selecting such model from the set of models that can generate error sequences similar to one registered in the channel. The solutions are based on the forward algorithm offered in [3].

The main results of the work are partly published in [1], [2], [4].

REFERENCES

1. *Deundyak V. M., Zhdanova M. A.* Polynomial representation for hidden semi-Markov model of Ferguson's type. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta, Ser.: Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii. 2013. N. 2. P. 71–78. (in Russian)

2. *Deundyak V. M., Zhdanova M. A.* Generalized Markov's mathematical model for the error-source of $GF(q)$-alphabet based digital channel with a number of physical states. Matematika i ee prilozhenija: ZhIMO. Ivanovo: IvGU. 2010. N. 1(7). P. 33–40. (in Russian)

3. *Yu Shun-Zheng.* Hidden semi-Markov models. Artificial Intelligence. 2010. V. 174, n. 2. P. 215–243.

4. *Deundyak V. M., Zhdanova M. A.* On the solution of the evaluation problem for Hidden Semi-Markov QP-models. Vestnik DGTU. 2014. V.14, n. 4. P. 22–39. (in Russian)

Д. С. Климентов (ЮФУ, Россия)
dklimentov75@gmail.com

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть S — гладкая поверхность класса C^3 положительной гауссовой кривизны с первой квадратичной формой $I = g_{ij}dx^i dx^j$, второй формой $II = b_{ij}dx^i dx^j$. Пусть на S заданы две диффузии X_t, Y_t порождённые квадратичными формами I и II соответственно (то есть генератор диффузии X_t $A = g^{ij}\partial^2_{ij}$, для диффузии Y_t аналогично). Переходную плотность процесса X_t будем обозначать $p(t, \vec{x}, \vec{y})$ (отметим, что $\vec{x}$ и $\vec{y}$ являются точками на поверхности S с контравариантными координатами (x^1, x^2), (y^1, y^2)), переходную функцию процесса Y_t будем обозначать $P(t, \vec{x}, \Gamma)$. Кроме того, будем требовать, чтобы поверхность S была односвязной, конформно эквивалентной кругу.

Теорема. *Для того, чтобы поверхность S допускала бесконечно малые изгибания k-го порядка необходимо и достаточно выполнения системы уравнений*

$$\begin{cases} \Sigma_{s=1}^{l}\left(\delta^{l-s}\left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{{y^1}^2}{2}\right]\delta^{s}\left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{{y^2}^2}{2}\right]+\right. \\ +\delta^{s}\left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{{y^1}^2}{2}\right]\delta^{l-s}\left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{{y^2}^2}{2}\right]- \\ \left.-2\delta^{l-s}\left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{y^1y^2}{2}\right]\delta^{s}\left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{y^1y^2}{2}\right]\right)=0 \\ \partial_2(\delta^{l}\left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{{y^1}^2}{2}\right])-\partial_1(\delta^{l}\left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{y^1y^2}{2}\right])= \\ =\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\Delta p}\Gamma_{12,\beta}\delta^{l}\left[\delta_{\gamma\alpha}\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{y^\gamma y^1}{2}\right]- \\ -\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\Delta p}\Gamma_{11,\beta}\delta^{l}\left[\delta_{\gamma\alpha}\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{y^\gamma y^2}{2}\right] \\ \partial_2(\delta^{l}\left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{y^1y^2}{2}\right])-\partial_1(\delta^{l}\left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{{y^2}^2}{2}\right])= \\ =\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\Delta p}\Gamma_{22,\beta}\delta^{l}\left[\delta_{\gamma\alpha}\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{y^\gamma y^1}{2}\right]- \\ -\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\Delta p}\Gamma_{21,\beta}\delta^{l}\left[\delta_{\gamma\alpha}\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial_t}P(t,\vec{x},dy)\frac{y^\gamma y^2}{2}\right] \end{cases}$$

где частные производные переходной функции берутся в момент времени $t = 0$, $\Gamma_{ij,l} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\delta_{ik}\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\delta_{jk}\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta_{ij}\frac{\Delta p}{\partial_t p}\right)\right]$.

А. В. Крахоткин (Южный федеральный университет, Россия)
alexforvard@mail.ru

О МИНИМИЗАЦИИ ОЖИДАЕМОГО ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ЭТАЛОННОГО УРОВНЯ КАПИТАЛА В ФАКТОРНОЙ ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ

Изучение задач оптимального инвестирования с эталоном в рамках диффузионных моделей было инициировано Брауном [1]. Мы рассматриваем одну из задач [1], в которой цель инвестора состоит в том, чтобы превзойти стохастическую цель в кратчайшее время. В рассматриваемой модели рисковый актив подвержен влиянию случайного фактора Y:

$$dX_t = X_t\,\left(r + \pi_t\,\left(\mu(Y_t) - r\right)\right)\,dt + X_t\,\pi_t\,\sigma(Y_t)\,dW_t,$$
$$dY_t = g(Y_t)\,dt + h(Y_t)\,dW'_t.$$

Здесь X — капитал инвестора, W, W' — независимые стандартные броуновские движения, $\pi_t \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$ — инвестиционная стратегия.

Рассмотрим отношение $Z = X/L$, где L — стохастический эталон: $dL_t = \alpha\,L_t\,dt + b\,L_t\,dW_t + \beta\,L_t\,dW''_t$ с броуновским движением W'', не зависящим от W, W'. По формуле Ито

$$dZ_t = Z_t\,\left(\hat{r} + \pi_t\,\hat{\mu}\right)\,dt + Z_t\,(\pi_t\,\sigma(Y_t) - b)\,dW_t - Z_t\,\beta\,dW''_t,$$

где $\hat{r} = r - \alpha + b^2 + \beta^2$ и $\hat{\mu} = \mu(Y_t) - r - \sigma(Y_t)\,b$.

Обозначим через τ момент выхода процесса Z из интервала $[l,\,u]$, где $0 \le l < u < \infty$ и введем функцию Беллмана

$$v(z,y) = \sup_{\pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]} \mathsf{E}(e^{-\lambda\tau} I_{\{Z_\tau = u\}}), \quad \lambda > 0.$$

При определенных предположениях показано, что функция Беллмана v является единственным ограниченным непрерывным вязкостным решением задачи Дирихле для соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Для численного решения задачи использованы монотонные разностные схемы [2]. Расчеты проводились для случайного фактора Y, моделируемого процессом Орнштейна-Уленбека.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Browne S.* Beating a moving target: Optimal portfolio strategies for outperforming a stochastic benchmark. Finance Stoch. 1999. Vol. 3. no. 3. P. 275–294.

2. *Oberman A.M.* Convergent difference schemes for degenerate elliptic and parabolic equations: Hamilton–Jacobi equations and free boundary problems. SIAM J. Numer. Anal. 2006. Vol. 44. no. 2. P. 879–895.

О. Е. Кудрявцев (Ростовский филиал Российской таможенной академии, Россия)
koe@donrta.ru

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ЦЕН ОПЦИОНОВ В МОДЕЛЯХ ЛЕВИ

Последние годы большой практический интерес вызывают модели Леви, позволяющие моделировать скачки цен и адекватно оценивать ценовые риски. Целью данного исследования является разработка нового численного метода Монте-Карло для вычисления цен экзотических опционов в одномерных моделях Леви.

Пусть X_t – процесс Леви, обозначим $q > 0$, $T_q \sim \operatorname{Exp} q$, $\overline{X}_t = \sup_{0\le s\le t} X_s$ и $\underline{X}_t = \inf_{0\le s\le t} X_s$ – процессы супремума и инфимума. Рассмотрим экзотический опцион, функция выплат которого в момент исполнения T зависит $(X_T, \underline{X}_T)$. Обозначим

$$V(T,x) = E^x\left[e^{-rT} g(X_T, \underline{X}_T)\mathbf{1}_{\{\tau_{\mathbf{h}}^- > \mathbf{T}\}}\right],$$

где время $t = 0$ – начало периода обращения опциона, $t = T$ – конечная дата, h – поглощающий барьер, τ_h^- – момент первого входа в $(-\infty, h]$, $g(X_T, \underline{X}_T)$ – функция выплат в момент времени T.

Вычисление функционала $V(T,x)$ можно свести к достаточно сложному псевдодифференциальному уравнению, решение которого потребует применения сложных численных методов. Вместе с тем, трейдеры предпочитают более просто алгоритмизируемые методы Монте-Карло, существенным недостатком которых (в случае процессов Леви) является низкая скорость вычислений. Для вычисления $V(T,x)$ в докладе предлагается новый метод Монте-Карло симуляции совместного распределения положения процесса Леви и его процесса супремума (инфимума) в фиксированный момент времени, комбинирующий идеи [1] и [2].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ, проект № 15-32-01390.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kuznetsov A., Kyprianou A. E., Pardo J. C., van Schaik K.* A Wiener-Hopf Monte Carlo simulation technique for Lévy processes. Annals of Applied Probability. 2011. V. 21, №. 6. P. 2171–2190.

2. *Kudryavtsev O., Levendorskiĭ S.* Fast and accurate pricing of barrier options under Levy processes. J. Finance and Stochastics. 2009. V. 13, № 4. P. 531–562.

К. В. Лыков
(Институт систем обработки изображений РАН, Россия)
alkv@list.ru

ПРОСТРАНСТВА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОПРЕДЕЛЕННОЙ ПРОБЛЕМОЙ МОМЕНТОВ

Через $\Lambda_r(\varphi)$ обозначим пространство Лоренца случайных величин на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ с нормой

$$\|\xi\|_{\Lambda_r(\varphi)} = \left(\int_0^1 \xi^*(t)^r \, d\varphi(t)\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

где ξ^* — невозрастающая перестановка случайной величины ξ.

Теорема 1. *Пусть $r \geqslant 1$, вогнутая функций $\varphi(t)$ на $[0,1]$ удовлетворяет условию $\varphi(t) \leqslant C\varphi(t^2)$, $C > 0$, и представима в виде*

$$\varphi(t) = \int_{\ln 1/t}^{\infty} g(s)^{r+1}\, ds$$

с некоторой неотрицательной функцией $g(s)$, для которой

$$\int_{1}^{\infty} g(s)\, ds = +\infty.$$

Тогда для каждой случайной величины $\xi \in \Lambda_r(\varphi)$ имеет место единственность в проблеме моментов Гамбургера.

Пример. Для каждой с.в. $\xi \in \Lambda_1(\varphi)$ с $\varphi(t) \asymp \ln^{-1}(e/t)\ln^{-2}(\ln e/t)$ имеет место единственность в проблеме моментов Гамбургера. В классе функций вида $\ln^{-1}(e/t)\ln^{\alpha}(\ln e/t)$ результат точен.

Пусть $c_k > 1, k = 1, 2 \ldots, n$. Обозначим $\ln_{c_1}^{(1)}(x) := \ln(|x| + c_1)$ и, по индукции,

$$\ln_{c_k}^{(k)}(x) := \ln(\ln_{c_{k-1}}^{(k-1)}(x) + c_k).$$

Теорема 2. *Пусть $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $a > 0$, $b_i \in \mathbb{R}$, и $Y = \operatorname{sign}(X) \cdot |X|^a \cdot (\ln_{c_1}^{(1)}(x))^{b_1} \cdot \ldots \cdot (\ln_{c_n}^{(n)}(x))^{b_n}$. Для случайной величины Y имеет место единственность в проблеме моментов Гамбургера тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $a \in (0,2)$; 2) $a = 2$, $b_1 < 1$; $\ldots$; n) $a = 2$, $b_1 = \ldots = b_{n-2} = 1$, $b_{n-1} < 1$; n+1) $a = 2$, $b_1 = \ldots = b_{n-1} = 1$, $b_n \leqslant 1$.

Аналогичные результаты получены для других симметричных пространств с.в. и для проблемы моментов Стилтьеса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-31452-мол-а) и Министерства образования и науки РФ.

Л. Э. Мелкумова, С. Я. Шатских (Самарский Государственный Аэрокосмический Университет, Россия)
lana.melkumova@gmail.com, s.shatskikh@inbox.ru

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КВАНТИЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

Теорема 1. *Если для многомерного вероятностного распределения $F_{1\ldots n}(x_1, \ldots, x_n)$ все k-мерные условные квантили*

$$q_{i|1\,\ldots\,k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, \ldots, x_k), \;\; i = \overline{k+1,\, n}$$

обладают свойством воспроизводимости при сужении на одномерные условные квантили (см. [1]) и определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \dot{q}_{2|1}^{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_1) & \dots & \dot{q}_{k|1}^{(x_1^\circ,x_k^\circ)}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{q}_{1|k}^{(x_1^\circ,x_k^\circ)}(x_k) & \dot{q}_{2|k}^{(x_2^\circ,x_k^\circ)}(x_k) & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то поверхность, задаваемая условными квантилями

$$\left\{ \left(x_1,\, \dots,\, x_k,\, q_{k+1|1\dots k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1,\, \dots,\, x_k),\, \dots,\, q_{n|1\dots k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1,\, \dots,\, x_k) \right) \right\},$$

является k-мерным решением квантильного уравнения Пфаффа

$$\omega = \begin{vmatrix} \boldsymbol{dx}_1 & \boldsymbol{dx}_2 & \dots & \boldsymbol{dx}_n \\ \dot{q}_{1|2}^{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ) & 1 & \dots & \dot{q}_{n|2}^{(x_n^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{q}_{1|n}^{(x_1^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ) & \dot{q}_{2|n}^{(x_2^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ) & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, решая квантильное уравнение Пфаффа, мы находим многомерную условную квантиль по двумерным маргинальным распределениям исходного многомерного распределения. Это обстоятельство может быть использовано при построении статистической оценки многомерной условной квантили по двумерным наблюдениям случайного вектора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мелкумова Л.Э., Шатских С.Я.* Решение квантильных дифференциальных уравнений Пфаффа при отсутствии полной интегрируемости. Вестник Самарского Государственного Университета. Естественнонаучная серия. 2012. № 3/1(94). С. 20–39.

В. П. Микка, К. В. Микка (МарГУ, Россия)
mikka-k@mail.ru

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕГО УРАВНЕНИЯ Ф. Д. ГАХОВА В КЛАССЕ a-ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В исследовании [1] обосновано, что внешнее уравнение Ф. Д. Гахова [2]

$$z\frac{F''(z)}{F'(z)} = -\frac{2}{|z|^2-1} \tag{1}$$

имеет единственное решение $z = \infty$ в классе

$$\Sigma_2^* = \left\{ F(z) = z + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots : \left| \arg z\frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Естественно возникает вопрос о возможности обобщения этого результата, рассматривая

$$\Sigma^*_{n;a} = \left\{ F(z) = z + \frac{a_{-n+1}}{z^{n-1}} + \frac{a_{-n}}{z^n} + \ldots : \left| \arg z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \le \frac{\pi}{2} a, a \ge 1 \right\} \qquad (2)$$

в зависимости от параметра n.

Теорема 1. *Постоянная $a = a(n) = 1$ в (2) является неулучшаемой в достаточных условиях единственности решения $z = \infty$ уравнения (1).*

Теорема 2. *Точный радиус единственности $R_e[\Sigma^*_{n;a}] = 1/r_0$ определяется как наибольшее возможное значение параметра r_0, определяемого из соотношения*

$$\sup_{\substack{(r,\rho)\in\widetilde{D}_{n-1}\\ \alpha\in(-\pi,\pi],\theta\in(-\pi,\pi]}} \frac{1-r^2}{r^2}\left\{ \left| \left[\left(\frac{1+r_0 r\rho e^{i(\theta+\alpha)}}{1-r_0 r\rho e^{i(\theta+\alpha)}} \right)^a - 1 \right] - \frac{2ar_0 r\rho e^{i(\theta+\alpha)}}{1-r_0^2 r^2\rho^2 e^{i\cdot 2(\theta+\alpha)}} \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{2a(n-1)r_0^n r^n (1-\rho^2)}{1-r_0^{2(n-1)} r^{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{|1-r_0^2 r^2 \rho^2 e^{i\cdot 2(\theta+\alpha)}|} \right\} = 2,$$

где

$$\widetilde{D}_{n-1} = \{(r,\rho) : \rho \le r_0^{n-1} r^{n-1}, r_0 \in (0,1), r \in [0,1)\}.$$

Отметим, что $R_e[\Sigma^*_{2;a}] = R_e[\Sigma^*_{1;a}] = \sqrt{a}$ являются неулучшаемыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Насыров С. Р., Хохлов Ю. Е.* Единственность решения внешней обратной краевой задачи в классе спиралеобразных областей. // Известия вузов. Математика. 1984. № 8. С. 21–27.

2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука. 1977.

Г. В. Мироненко (ЮФУ, Институт математики, механики и компьютерных наук, Россия)
georim89@gmail.com

РЕГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С КОНЕЧНЫМ ТОПЛИВОМ

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(X_t, \alpha_t)dt + \sigma(X_t, \alpha_t)dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d.$$

Процесс $\alpha \in [\underline{u}, \overline{u}]$, $\underline{u} \le 0 \le \overline{u}$ определяет интенсивность потребления ресурса, объем которого Y удовлетворяет соотношению

$$dY_t = -|\alpha_t|dt, \quad Y_0 = y.$$

Процесс α *допустим* (обозначение: $\alpha \in \mathcal{A}(x,y)$), если $Y_t \ge 0$, $t \ge 0$. Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^d$. Функция Беллмана v определяется дисконтированным критерием:

$$v(x,y) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(x,y)} \mathsf{E} \int_0^{\theta^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,y,\alpha}, \alpha_t)\, dt, \quad (x,y) \in \overline{G} \times [0,\infty),$$
$$\theta^{x,y,\alpha} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,y,\alpha} \notin G\}.$$

При определенных технических предположениях установлено, что v является единственным ограниченным вязкостным решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\beta v - \sup_{a \in [\underline{u}, \overline{u}]} \left\{ f(x,a) + b(x,a) v_x + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, (\sigma(x,a)\sigma^T(x,a) v_{xx}) - |a| v_y \right\} = 0,$$

$(x,y) \in G \times (0,\infty)$, которое непрерывно на $\overline{G}$ и удовлетворяет граничным условиям:

$$v(0,x) = \psi(x), \ \ x \in \overline{G}; \quad v(x,y) = 0, \ x \in \partial G, \ y \geq 0$$

в классическом смысле. Здесь ψ — функция Беллмана соответствующей задачи «без топлива».

В качестве примера рассмотрена стохастическая система, описывающая малые колебания вблизи положения равновесия. С использованием монотонных разностных схем проведено численное исследование задач оптимальной коррекции и оптимального слежения в рамках данной системы в устойчивом и неустойчивом случаях. Представленные результаты содержаться в препринте [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rokhlin D.B., Mironenko G.* Regular finite fuel stochastic control problems with exit time. Preprint arXiv:1501.07437 [math.OC], 19 pages, 2015.

В. Х. Нго (Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия)
vladimirngo@gmail.com

ОЦЕНКА VaR И ХВОСТОВОГО VaR РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В последнее время показатели VaR (стоимость под риском) и хвостовой VaR [1] (хвостовая стоимость под риском) часто используют многие центральные банки и крупные финансовые компании для оценки достаточности своих резервов. Целью данной работы является сравнение точности двух подходов к оценке показателей VaR и хвостового VaR равномерного распределения.

В данной работе были рассмотрены 2 подхода к оценке VaR и хвостового VaR для равномерного распределения на $[a,b]$:

а) с помощью оценки параметров равномерного распределения;

б) порядковой статистики.

Дана выборка $X_1, X_2, ..., X_n$ - н.о.р.с.в. $\sim U\ [a,b]$;
$\bar{a} = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$ (оценка параметра a); $\bar{b} = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ (оценка параметра b), то по первому подходу выражение квадратичных отклонений оценок $\bar{q}_\lambda = \bar{a} + \lambda(\bar{b} - \bar{a})$ и $\bar{u}_\lambda = \bar{a} + \lambda\left(\bar{b} - \bar{a}\right)/2$ от истинных q_λ и u_λ имеют вид:

$$E(\bar{q}_\lambda - q_\lambda)^2 = \frac{(b-a)^2(6\lambda^2 - 6\lambda + 2)}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{2(b-a)^2}{n^2}, n \to \infty;$$
$$E(\bar{u}_\lambda - u_\lambda)^2 = \frac{(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{3\lambda^2}{2} - 3\lambda + 2\right) \sim \frac{2(b-a)^2}{n^2}, n \to \infty;$$

где λ - близкое к нулю положительное число; n - размер выборки.

Имеется $X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$ - порядковая статистика данной выборки, по второму подходу выражение квадратичных отклонений оценок $X_{(k)} = X_{[\lambda n]}$ и $\hat{u}_k = \left(X_{(1)} + X_{(2)} + ... + X_{(k)}\right)/k$ от истинных значений q_λ и u_λ имеют вид:

$$E\left(X_{(k)} - q_\lambda\right)^2 = \frac{(b-a)^2\left(\lambda n - \lambda^2 n + 2\lambda^2\right)}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{(b-a)^2\left(\lambda - \lambda^2\right)}{n}, n \to \infty;$$

$$E(\hat{u}_k - u_\lambda)^2 = \frac{(a-b)^2\left[\left(2\lambda - \lambda^2\right)n + 2\lambda^2 - 4\lambda + 3\right]}{4(n+1)(n+2)} \sim \frac{(a-b)^2\left(2\lambda - \lambda^2\right)}{4n},$$
$n \to \infty$.

В результате расчета показано, что в обоих случаях оценки VaR и хвостового VaR сходятся (по вероятности) к истинным значением VaR и хвостового VaR, однако со скоростью c/n (во втором случае) в отличие от c/n^2 (во первом) при $n \to \infty$.

Таким образом в первом подходе оценки VaR и хвостового VaR сходятся (по вероятности) к истинным значением VaR и хвостового VaR быстрее чем во втором подходе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D.* Coherent measures of risk. Mathematical Finance, 9 (1997), No. 3, p. 203 228.

I. V. Pavlov, O. V. Nazarko (Rostov state university of civil engineering, Russia)
pavloviv2005@mail.ru

NEW RESULTS RELATING TO DEFORMED MARTINGALES

This work is a natural continuation of the articles [1–2]. In discrete time the decomposition of deformed supermartingale of the 2^{nd} kind as a sum of two deformed processes of the 2^{nd} kind (namely, of a martingale and a potential) is proved (Riesz type decomposition). Criterion of the uniqueness of such decomposition is established. The coincidence of local deformed martingale of the 1^{st} kind with generalized deformed martingale of the 1^{st} kind and deformed martingale transformation of the 1^{st} kind is shown. Let us give the strict formulations of these facts.

Theorem 1. *Let $\left(X_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ be a deformed supermartingale of the 2^{nd} kind dominating a deformed submartingale of the same kind. Then there are a deformed martingale of the 2^{nd} kind $\left(M_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ and deformed potential $\left(Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ of the same kind such that for any $n\,(0 \le n < \infty)$ the decomposition $X_n = M_n + Z_n$ is true $Q^{(n)}$-a.e. This decomposition is unique if and only if the deformation $\mathbf{Q} = \left(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n\right)_{n=0}^{\infty}$ is a weak one.*

Theorem 2. *Let $\mathbf{Q} = \left(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n\right)_{n=0}^{\infty}$ be a bounded deformation of the 1^{st} kind, i.e. for any $n\,(0 \le n < \infty)$ the densities $\frac{dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n}}{dQ^{(n)}}$ are bounded $Q^{(n)}$-a.e. Let $X = \left(X_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ be a random process ($X_0 = 0$ $Q^{(n)}$-a.e.). Then the following conditions are equivalent: 1) X is a local deformed martingale of the 1^{st} kind; 2) X is a generalized deformed martingale of the 1^{st} kind; 3) X is a deformed martingale transform of the 1^{st} kind.*

The main definitions concerned deformations can be found in [1–3].

This work was supported by the RFBR, project no. 13-01-00637a.

REFERENCES

1. *Pavlov I. V., Nazarko O. V.* Theorems on deformed martingales decomposition and their possible application to intellectual modeling. Vestn. Rostov Gos. Univ. Putei Soobshcheniya. 2013. N. 4. P. 145–151.

2. *Pavlov I. V., Nazarko O. V.* Optional sampling theorem for deformed submartingales. Teor. Veroyatn. Primen. 2014. Vol. 59, N. 3. P. 585–594.

3. *Pavlov I. V., Nazarko O. V.* Characterization of density processes of deformed stochastic bases of the first kind. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2014. Vol. 287. P. 256–267.

I. V. Pavlov, V. V. Shamraeva, I. V.Tsvetkova (Rostov state university of civil engineering, Russia)

pavloviv2005@mail.ru, shamraeva@mail.ru

ON INTERPOLATION PROPERTIES OF MARTINGALE MEASURES

Let us consider on $\{\Omega, \mathbf{F}\}$ a one period (B, S)-market, where $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ is one-step filtration, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, and $\mathcal{F}_1$ is generated by a decomposition of Ω into a countable number of atoms $B_i, i \in N = \{1, 2, 3, ...\}$. We denote by $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^{1}$ an $\mathbf{F}$-adapted stochastic process which we think like a discounted value of stock ($Z_0 = a, Z_1(B_i) = b_i, i \in N$). Assume that $\inf\limits_i b_i < a < \sup\limits_i b_i$. This condition provides the absence of arbitrage possibilities on the financial market. The incompleteness of this market is obvious. We denote by $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ the set of nondegenerate martingale measures P of (B,S)-market under study.

Let $\{k_1, \ldots, k_n, \ldots\}$ be a permutation of $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Let us construct the filtration with an infinite horizon:
$\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{H}_1 = \sigma\{B_{k_1}\}$, $\ldots$, $\mathcal{H}_n = \sigma\{B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n}\}$, $\ldots$, $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{F}_1$. For $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ let us define Dirichlet martingale $Y_n := E^P[Z_1|\mathcal{H}_n]$. It is obvious that $Y_0 = Z_0, \quad Y_\infty = Z_1$. If for any permutation $\{k_1, \ldots,\ k_n, \ldots\}$ of $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ the process $\mathbf{Y} = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^{\infty}$ admits only one martingale measure (it is just the initial measure P) then we say that P satisfies special interpolation property (the set of all such measures will be denoted as SIP$(\mathbf{Z})$).

Suppose that $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ contains r different values $(3 \le r < \infty)$. Without loss of generality we can assume that $b_1 < b_2 < \ldots < b_r$.

Theorem. *Let the numbers $b_1 < b_2 < \ldots < b_r$ be rational, $b_1 < a < b_r$, $a \ne b_k$ $(k = 2, 3, \ldots, r-1)$. Then SIP$(Z) \ne \varnothing$.*

Remark. *As is proved in [2], in the case $r = 3$ this theorem is valid without assumption that the numbers b_1, b_2, b_3 are rational.*

This work was supported by the RFBR, project no. 13-01-00637a.

REFERENCES

1. *Pavlov I. V., Tsvetkova I. V., Shamraeva V. V.* Some results of martingale measures of one-step model financial markets associated with the condition of the noncoincidence of barycentres. Vestn. Rostov. Gos. Univ. Putei Soobshcheniya. 2012. N 3. P. 177–181.

2. *Pavlov I. V., Tsvetkova I. V., Shamraeva V. V.* On the existing of martingale measures satisf ying weakened noncoincidence barycenter condition: constructivist approach Vestn. Rostov. Gos. Univ. Putei Soobshcheniya. 2014. N 4. P. 132–139.

V. V. Rodochenko (Southern Federal University; InWise Systems, Russian Federation)
angle.vasily@gmail.com

A HYBRID TREE - FINITE DIFFERENCE APPROACH TO PRICE OPTIONS UNDER HESTON MODEL

Pricing derivatives is a brilliant example of a problem both of great importance for world economy and of impressive mathematical complexity. Heston option pricing model, first published in [3], is believed to be one of the most popular stochastic volatility models.

The dynamics under the risk neutral measure of the share price S and the variance process V are governed by the stochastic differential equation system

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r - \delta)dt + \sqrt{V(t)}dZ_S(t),$$
$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dZ_V(t),$$

with $S(0) = S_0 > 0$ and $V(0) = V_0 > 0$, where Z_S and Z_V are Brownian motions with correlation coefficient ρ: $d(Z_S, Z_V)(t) = \rho dt$. Here r is the risk free rate of interest, δ is the continuous dividend rate, the dynamics of V follows a CIR process with mean reversion rate κ and long run variance θ. The parameter σ is called the volatility of the volatility.

A new approach to option pricing under Heston model is presented. It is based on tree methods in contamination with finite difference methods, alongside with handling early exercise effects.

Roughly speaking, we, following [1], use tree approximation of CIR type volatility process, as described in [2]. On each step the appropriate transformation of asset price process is performed, allowing one to take care of a new diffusion process with null correlation to volatility. After that, the expectations are being calculated and finite difference scheme is being constructed. The method suggested can be extended to the case of barrier options with application to risk estimation problems.

Supported by Russian Humanitarian Scientific Fund Grant 15-32-01390.

REFERENCES

1. *M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette* A hybrid tree-finite difference approach for the Heston model. 2014.

2. *E. Appolloni, L. Caramellino, A. Zanette* A robust tree method for pricing American options with CIR stochastic interest rate. 2013

3. *L. Heston* A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. Review of Financial Studies. 1993. v. 6. p. 327–343.

Д. Б. Рохлин (Южный федеральный университет, Россия)
rokhlin@math.rsu.ru

СТОХАСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПЕРРОНА И ПРОБЛЕМА ВЕРИФИКАЦИИ ВЯЗКОСТНЫХ РЕШЕНИЙ

Хорошо известно, что в задачах оптимального управления диффузионными процессами функция Беллмана удовлетворяет соответствующему нелинейному дифференциальному уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB) в вязкостном смысле. Традиционное доказательство этого факта основано на на принципе динамического программирования (DPP) Беллмана. При этом первый и, зачастую, трудный шаг состоит в доказательстве самого принципа динамического программирования.

Стохастический метод Перрона (SPM), изобретенный Э. Байрактаром и М. Сирбу [1], не предполагает использования DPP и непосредственного изучения функции Беллмана. Данный метод имеет дело с семействами $\mathcal{V}_-$, $\mathcal{V}_+$ *стохастических* суб- и суперрешений u, w. Функции u, w производят процессы суб- и супермартингального типа при суперпозиции с фазовой переменной, и ограничивают функцию Беллмана v снизу и сверху: $u \le v \le w$, $u \in \mathcal{V}_-$, $w \in \mathcal{V}_+$. Суть SPM состоит в том, что $u_-(x) := \sup_{u \in \mathcal{V}^-} u(x)$, $w_+(x) := \inf_{w \in \mathcal{V}^+} w(x)$ являются соответственно *вязкостными* супер- и субрешениями уравнения HJB. Тогда, при чисто аналитическом предположении о справедливости теоремы сравнения, можно сделать вывод о том, что единственное (непрерывное) вязкостное решение совпадает с v.

SPM применялся к линейным параболическим уравнениям, стохастическим дифференциальным играм, регулярным и сингулярным задачам оптимального управления. В докладе будут обсуждаться результаты автора, касающиеся задач оптимального управления с выходом из области [2] и с фазовыми ограничениями [3].

Данные исследования поддержаны Южным федеральным университетом, проект 213.01-07-2014/07.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bayraktar E., Sîrbu M.* Stochastic Perron's method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations, SIAM J. Control Optim. 2013. Vol. 51. no. 6. P. 4274–4294.

2. *Rokhlin D.B.* Verification by Stochastic Perron's Method in stochastic exit time control problems. J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 419. no 1. P. 433–446

3. *Rokhlin D.B.* Stochastic Perron's method for optimal control problems with state constraints. Electron. Commun. Prob. 2014. Vol. 19, P. 1–15.

В. Н. Русев (РГУ нефти и газа имени И.М.Губкина, Россия)
vnrusev@yandex.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА-ГНЕДЕНКО

Пусть случайная величина ξ подчиняется распределению Вейбулла-Гнеденко со следующей функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha x)^\beta}, x \geq 0 \\ 0, \; x < 0. \end{cases}$$

Коэффициент вариации случайной величины ξ имеет вид

$$(Var\ \xi)^2 = \frac{D\xi}{(M\xi)^2} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} - 1.$$

В работе получена следующая асимптотическая формула для коэффициента корреляции:

$$(Var\ \xi)^2 = \frac{\pi^2}{6\beta^2} + \left(\gamma\left(\frac{\pi^2}{2}+1\right) - \frac{2}{3}\pi^2 - 2\zeta(3)\right)\frac{1}{\beta^3} + o\left(\frac{1}{\beta^3}\right), \; (\beta \to \infty),$$

где $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$– дзета-функция Римана, а $\gamma = 0,5772156...$ -эйлерова постоянная. Итак, справедлива формула

$$Var\xi \simeq \frac{\pi}{\beta \cdot \sqrt{6}}, \ (\beta \gg 1).$$

Отсюда по выборочной средней $\bar{x}$ и выборочной дисперсии S^2, можно записать равенство

$$\frac{\sqrt{S^2}}{\bar{x}} \simeq \frac{\pi}{\beta \cdot \sqrt{6}},$$

которая даёт точечную оценку параметра β.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Русев В. Н.* Применение распределения Вейбулла-Гнеденко для описания этапов жизненного цикла газоперекачивающих агрегатов при управлении техническим состоянием газотранспортных систем. - НТЖ «Промышленный сервис». 2013. № 1. С. 17–22.

2. *Русев В. Н., Скориков А. В.* Стохастическое моделирование. Учебное пособие - М.: Издательский центр РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина. 2015.

В. Н. Русев, А. В. Скориков (РГУ нефти и газа имени И.М.Губкина, Россия)
vnrusev@yandex.ru, skorikov.a@gubkin.ru

МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ МОМЕНТОВ ПРИ АНАЛИЗЕ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО ЭКСПЛУАТАЦИОННЫМ ДАННЫМ

Исследуется зависимость между показателями надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых систем и их элементов (в случае ГПА и САУ ГПА объекты с точки зрения отказов или аварийных остановов, можно рассматривать с двоякой позиции: как ремонтируемые, так и неремонтируемые). Для рекуррентного потока отказов указанная связь выражается интегральным уравнением Вольтерра, связывающим параметр потока $\omega(t)$ и плотность $f(t)$ распределения времени ξ_k между отказами :

$$\omega(t) = f(t) + \int\limits_0^t \omega(\tau) f(t-\tau)\, d\tau.$$

Уравнение Вольтерра решается с помощью метода производящих функций моментов. Преобразование Лапласа плотности представляется в виде ряда $\tilde{f}(s) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{s^n}{n!} \nu_n$, где ν_n- моменты случайной величины ξ_k порядка n. Переход от изображения к оригиналу $\omega(t)$, даёт следующее представление параметра потока в виде ряда:

$$\omega(t)=\frac{1}{\nu_1}\cdot\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau+\frac{\nu_2}{2\nu_1^2}f(t)+\frac{3\nu_2^2-2\nu_1\nu_3}{12\nu_1^3}f'(t)+$$

$$+\frac{3\nu_2^3-4\nu_1\nu_2\nu_3+\nu_1^2\nu_4}{24\nu_1^4}f''(t)+\cdots$$

В качестве обоснования заметим, что в частности получаем элементарную теорему восстановления:

$$\lim_{t\to+\infty}\omega(t)=\frac{1}{\nu_1}\cdot\int\limits_0^{+\infty} f(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\nu_1}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сухарев М. Г.* Модели надёжности марковского типа с приложениями к нефтегазовому делу. Учебное пособие - М.: Издательский центр РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина. 2012.

Е. А. Савинов (Самарский Государственный Университет, Россия)
henrylee@dxdy.ru

ОБ АСИМПТОТИКЕ МАКСИМУМА В ОДНОЙ СХЕМЕ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассматривается схема серий случайных векторов, имеющих t-распределения Стьюдента. Для максимума гауссовских случайных величин, полученных в результате преобразований независимости указанных векторов, установлены условия сходимости к распределению Гумбеля (см. [1]). Ранее преобразования независимости и предельные теоремы для них изучались в работах [2]-[5].

Именно, предположим, на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ задана мера Стьюдента μ как масштабная смесь гауссовских мер, определяемая положительным ядерным оператором B и смешивающим обратным гамма-распределением. Рассмотрим конечномерные проекции $F(x_1,\ldots,x_n)$ меры μ на произвольный отонормированный базис $\{f_k\}$ и соответствующие условные функции распределения
$F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_i|x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n)$.

Введем семейство случайных величин

$$X^*_{i,n}=\Phi^{-1}\left(F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(X_i|X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_n)\right),$$

где $X_i = \langle \cdot, f_i \rangle$, Φ – функция $(0,1)$-гауссовского распределения. Обозначим $B_n = \pi_n B \pi_n$, где π_n ортопроектор $\mathbb{H} \to \mathbb{H}_n = span\{f_1, \ldots, f_n\}$,

$$\alpha_n = (2\ln n)^{1/2}, \quad \beta_n = (2\ln n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2\ln n)^{-1/2}(\ln\ln n + \ln 4\pi),$$

$$c_{i,j,n} = \left| \left\langle B_n^{-1} f_i, f_j \right\rangle / \left[\left\langle B_n^{-1} f_i, f_i \right\rangle \left\langle B_n^{-1} f_j, f_j \right\rangle \right]^{1/2} \right|.$$

Теорема. *Если базис* $\{f_k\}$ *такой, что* $\sup_{n\geq 1} \max_{i\neq j} c_{i,j,n} < 1$, *и для любого* $\alpha \in (0,1)$ $\max_{n^\alpha < j-i < n} c_{i,j,n} \ln n \to 0, \quad n \to \infty$, *то для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$\mu\left\{\alpha_n \left(\max_{1\leq i\leq n} X_{i,n}^* - \beta_n\right) \leq x\right\} \to \exp\left\{-e^{-x}\right\}, \quad n \to \infty.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Савинов Е. А.* Предельная теорема для максимума случайных величин, связанных IT-копулами t-распределения Стьюдента. Теория вероятн. и ее примен., 2014, Т. 59, в.3. С .594–602.
2. *Rosenblatt M.* Remarks on multivariate transformation. Ann. Math. Stat., 1952, v.23, P. 470-472.
3. *Шатских С. Я.* Об одном варианте преобразования независимости. Теория вероятн. и ее примен., 1992, Т. 37, в.4, С. 815-816.
4. *Шатских С. Я.* Усиленный закон больших чисел для схемы серий условных распределений эллиптически контурированных мер. Теория вероятн. и ее примен., 2005, Т. 50, в.2. С. 291-312.
5. *Савинов Е. А.* Предельная теорема для копул преобразований независимости t-распределения Стьюдента. Вестник СамГУ, 2011, №8(89). С. 69-85.

М. М. Цвиль (Ростов-на-Дону)
tsvilmm@mail.ru

СУММИРОВАНИЕ КРАТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЯДОВ ФАБЕРА

Пусть $D^+ = D_1^+ \times D_2^+ \times \ldots \times D_n^+$, $D^- = D_1^- \times D_2^- \times \ldots \times D_n^-$ — полицилиндрическая область в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ с остовом $\sigma = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$; где D_k^+ — конечная односвязная область в плоскости C^1, ограниченная спрямляемой жордановой кривой L_k; D_k^- — ее дополнение до всей плоскости; функция $z_k = \psi_k(w_k)$ конформно и однолистно отображает внешность единичного круга $\{|w_k| > 1\}$ на область D_k^- при условиях $\psi_k(\infty) = \infty$, $\psi_k'(\infty) > 0$; функция $w_k = \varphi_k(z_k)$ — обратная к $\psi_k(w_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через T^n — единичный тор; $\Pi^n = \{\theta \in \mathbb{R}^n \colon -\pi \leqslant \theta_k \leqslant \pi,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ — n-мерный куб; $\Pi_+^n = \{\theta \in \mathbb{R}^n \colon 0 \leqslant \theta_k \leqslant \pi\}$; Z^n — множество векторов $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ с целочисленными координатами; Z_+^n — множество векторов $\ell \in Z^n$ с неотрицательными координатами.

С помощью весовой функции n комплексных переменных $g(z)$, аналитической в области D^-, отличной от нуля в $\overline{D}^-$ и $g(\infty) > 0$, образуем производящую функцию (см. [1]) для системы обобщенных полиномов $\Phi_\ell(z,g)$ n-переменных:

$$\mathcal{G}(z,w) = \frac{(\Psi^* g)(w)\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^I} = \sum_{\ell\in Z_+^n} \frac{\Phi_\ell(z,g)}{w^{\ell+I}}, \tag{1}$$

где $I=(1,1,...,1), w^{\ell+I} = w_1^{\ell_1+1}\cdot w_2^{\ell_2+1}\cdot ... \cdot w_n^{\ell_n+1}$,

$$(\Psi^* g)(w) = g(\psi_1(w_1),\psi_2(w_2),...,\psi_n(w_n)), \quad \Psi'(w) = \psi_1'(w_1)\cdot\psi_2'(w_2)\cdot\ldots\cdot\psi_n'(w_n).$$

Далее рассмотрим в D^+ функцию $f(z)$ n комплексных переменных, которая представима интегралом типа Коши с плотностью $\tau(\zeta)$. В работе [1] построен аналог формулы суммирования В. К. Дзядыка обобщенных рядов Фабера n переменных, а именно:

$$P_{\Omega_+}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Pi_+^n} S_\Omega(\theta)d\theta \int\limits_{T^n} \frac{\tau[\psi(te^{-i\theta})]}{g[\psi(te^{-i\theta})]}\mathcal{G}(z,t)\,dt =$$

$$= \sum_{\ell\in\Omega_+} \lambda_\ell a_\ell \Phi_\ell(z,g), \quad z\in D^+,\ \Omega_+ = \Omega\cap Z_+^n, \tag{2}$$

где $S_\Omega(\theta) = \sum\limits_{\ell\in\Omega}\lambda_\ell e^{i|\ell\theta|}$ — произвольный тригонометрический полином n переменных, где Ω — некоторое конечное подмножество решетки Z^n.

В случае n переменных, когда в качестве $S_\Omega(\theta)$ берутся различные частичные суммы кратного ряда Фурье, можно получать с помощью формулы (2) различные алгебраические полиномы.

Далее, при условии, что многочлен $S_\Omega(\theta)$ является ядром, имеем равенства

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Pi^n} S_\Omega(\theta)\,d\theta \int\limits_{\sigma} \frac{\tau(\zeta)}{g(\zeta)}\frac{g(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^I}, \quad z\in D^+,$$

$$f(z) - P_{\Omega_+}(z) = f(z) - \sum_{\ell\in\Omega_+}\lambda_\ell a_\ell\Phi_\ell(z,g) = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Pi^n} S_{\Omega_+}(\theta)\,d\theta \int\limits_{\sigma}\left\{\frac{\tau(\zeta)}{g(\zeta)} - \frac{\tau[\psi(te^{-i\theta})]}{g[\psi(te^{-i\theta})]}\right\}\frac{g(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^I} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Pi^n} S_{\Omega_+}(\theta)\,d\theta \int\limits_{T^n}\left\{\frac{(\psi^*\tau)(t)}{(\psi^* g)(t)} - \frac{(\psi^*\tau)(te^{-i\theta})}{(\psi^* g)(te^{-i\theta})}\right\}\frac{(\psi^* g)(t)\Psi'(t)}{(\psi(t)-z)^I}\,dt.$$

Известные свойства ядер $S_\Omega(\theta)$ из теории приближений можно применять для оценок величины (3) при различных условиях на функции $f(z)$ и $g(z)$.

Теорема. *Если последовательность четных ядер $S_m(\theta)$, построенная из прямоугольных частичных сумм кратного ряда Фурье функции $S(\theta)$, удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_{\Pi_+^n} |S_m(\theta)|\, d\theta \leqslant c_1, \quad \int\limits_{\Pi_+^n} \sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\ldots+\theta_n^2}\,|S_m(\theta)|\, d\theta \leqslant \frac{c_1}{M},$$

$M = \min(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, а функции $(\psi^* g)(t)\psi_1'(t_1)\ldots\psi_n'(t_n)$ и $\chi(t) = \frac{(\psi^*\tau)(t)}{(\psi^* g)(t)}$ непрерывны на торе T^n, то последовательность $P_m(z)$, построенная с помощью таких ядер, сходится равномерно внутри D^+ к функции $f(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цвиль М. М.* О суммировании кратных обобщенных рядов Фабера // Тез. докл. Международного семинара «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения». Ростов-на-Дону, 2013. С. 42–43.

А. В. Чернов, (РГСУ, Россия), М. А. Бутакова (РГУПС, Россия)
avche@yandex.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ С ТРЕНДОМ

Автомодельным процессом Леви с трендом будем называть процесс, определяемый равенством $V_t = f(t) + X_t$, где X_t — автомодельный процесс Леви с симметричным устойчивым распределением, а $f(t)$ — неслучайный тренд. В докладе будут представлены алгоритмы генерации такого рода процессов.

Алгоритм 1 (**генерация автомодельного Леви процесса**)

1. Задаем входные параметры α , n (число генерируемых значений), T (интервал моделирования), σ (дисперсия случайного процесса). Будем рассчитывать Δ_k по формуле $Law(\Delta_i) = Law\left(\eta^H \sigma\sqrt{2\zeta}\nu\right)$.

2. Начало цикла 1 для $i = 1, \ldots, n$. 2.1. Начало цикла 2 для $k = 1, \ldots, i$. 2.2. Вызов функции для расчета Δ_k. 2.3. $S := S + \Delta_k T$.
2.4. Конец цикла 2 по k.

3. Конец цикла 1 по i.

Функция для расчета Δ_k

Параметры: α, n, σ.

1. $\eta = \frac{1}{n}$. 2. $H = \frac{1}{\alpha}$. 3. $\beta = \frac{\alpha}{2}$. 4. $\Delta_k = 0$. 5. $\chi = X_{U[0,1]} \cdot 2\pi$. 6. $\delta = X_{E(1)}$. 7. $\nu = X_{N(0,1)}$.

8. Рассчитываем $\zeta = \left(\frac{a(\chi,\beta)}{\delta}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}$, где $a(\chi,\beta) = \left(\frac{\sin(\beta\chi)}{\sin\chi}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{\sin(1-\beta)\chi}{\sin(\beta\chi)}$.

9. Рассчитываем Δ_k по формуле $Law(\Delta_i) = Law\left(\eta^H \sigma \sqrt{2\zeta}\nu\right)$.

Алгоритм 2 (**генерация автомодельного Леви процесса с трендом**)

Используем алгоритм 1 генерации автомодельного Леви процесса, добавив влияние тренда следующим образом. Рассмотрим фрагмент алгоритма для каждой итерации цикла 2 из алгоритма 1.

1. Разбиваем интервал $[0,T]$ с шагом $t_1 = \frac{1}{T}$. 2. Тренд $=0$. 3. К выходным значениям прибавляем тренд, причем EV_1 является математическим ожиданием выборки n значений, сгенерированных по закону распределения (любому из реализованных).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 13-01-0032а и 13-01-00637а.

А. Н. Чупрунов (КФУ, Россия)
achuprunov@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ СОБЫТИЯ СХЕМ РАЗМЕЩЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Пусть $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N) = (\eta_{N1}, \eta_{N2}, \ldots, \eta_{NN})$, $N \in \mathbf{N}$, - независимые одинаково распределенные в каждой серии случайные величины, событие $A_{r'r''} = \cup_{i=1}^{N}\{\omega \in \Omega : r' \le \eta_{Ni}(\omega) \le r''\}$, где $r', r'' \in \mathbf{N_0}$. Тогда

$$\mathbf{P}(A_{r'r''}) \to 1 - e^{-\beta}, \tag{1}$$

где $0 < \beta < \infty$, тогда и только тогда, когда $N\mathbf{P}(r' \le \eta_{Ni} \le r'') \to \beta$. Справедливы аналоги этого результата для некоторых зависимых случайных величин.

Теорема 1. *Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ - равновероятная схема размещения n различимых частиц по N ячейкам. Пусть $n, N \to \infty$ так, что $N\left(\frac{n}{N}\right)^{r''} e^{-\frac{n}{N}} \to \alpha$, где $\alpha < \infty$. Тогда справедливо (1), где $\beta = \frac{\alpha}{r''!}$.*

Теорема 2. *Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ - случайные лес, состоящий из N деревьев с n некорневыми вершинами. Пусть $n, N \to \infty$ так, что $Ne^{-\frac{r''+1}{1+\frac{N}{n}}} \frac{1}{\left(1+\frac{N}{n}\right)^{r''}} \to \alpha$, где $\alpha < \infty$. Тогда справедливо (1), где $\beta = \alpha\frac{(r''+1)^{r''-1}}{(r''+1)!}$*

Теорема 3. *Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ - многоцветная равновероятная урновая схема без возвращения, причем N - количество цветов, n - количество частиц одного цвета, m - количество извлекаемых частиц, т. е. распределение $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ имеет вид*

$$\mathbf{P}(\eta_1 = k_1, \eta_2 = k_2, \ldots, \eta_N = k_N) = \frac{C_n^{k_1} C_n^{k_2} \ldots C_n^{k_N}}{C_{Nn}^m},$$

где $k_1 + k_2 + \ldots k_N = m$, $0 \leq k_i \leq n$, $1 \leq i \leq N$. *Пусть* n *фиксировано,* $m, N \to \infty$ *так, что* $N \left(\frac{m}{N}\right)^n \to \alpha$, *где* $\alpha < \infty$. *Тогда справедливо (1), где* $\beta = \alpha \sum\limits_{k=r'}^{r''} C_n^k$.

Подробно обсуждаются приложения приведенных результатов к информационным технологиям и информационным системам.

Соавторами настоящего доклада являются
Д. Е. Чикрин и П. А. Кокунин (КФУ, dmitry.kfu@gmail.com, pkokunin@mail.ru).

Секция VII

Интегральные преобразования и специальные функции (секция памяти проф. А.А.Килбаса). Руководитель секции: В.С. Пилиди

A. N. Karapetyants (Southern Federal University and Don State Technical University, Russia)
karapetyants@gmail.com

WEIGHTED ANALYTIC BESOV SPACES AND OPERATORS OF FRACTIONAL DIFFERENTIATION OF HADAMARD'S PRODUCT COMPOSITION TYPE

Let $\mathbb{D}$ stand for the unit disc in the complex plane $\mathbb{C}$. Given $0 < p < \infty$, $-1 < \lambda < \infty$, the analytic weighted Besov space $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ is defined to consist of analytic in $\mathbb{D}$ functions such that $\int\limits_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{Np-2}|f^{(N)}(z)|^p d\mu_\lambda(z) < \infty$, where $d\mu_\lambda(z) = (\lambda+1)(1-|z|^2)^\lambda d\mu(z)$, $d\mu(z) = \frac{1}{\pi}dxdy$, and N - is an arbitrary fixed natural number, satisfying $Np > 1 - \lambda$.

Analytic Besov spaces on the unit disk in $\mathbb{C}$ as well as the so-called Q_p - spaces defined without use of derivatives have been extensively studied during the last decade within the mainstream of the study of spaces of functions which are invariant under Mobius transformations of the unit disk. The important class of analytic Besov spaces, so-called diagonal Besov space $B_p(\mathbb{D})$, is introduced and described by Kehe Zhu in case of the unit disk (see [1]), and furthermore studied in the case of bounded symmetric domains.

We provide a characterization of weighted analytic Besov spaces $B_p^\lambda(\mathbb{D})$, $0 < p < \infty$, in terms of certain operators of fractional differentiation $R_z^{\alpha,t}$ of order t. These operators are defined in terms of construction known as Hadamard product composition with the function b (see [2] for details). The function b is calculated from the condition that $R_z^{\alpha,t}$ (uniquely) maps the weighted Bergman kernel function $(1 - z\overline{w})^{-2-\alpha}$ to the similar (weight parameter shifted) kernel function $(1 - z\overline{w})^{-2-\alpha-t}$, $t > 0$. We also show that $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ can be thought as the image of certain weighted Lebesgue space $L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ under the action of the weighted Bergman projection $P_{\mathbb{D}}^\alpha$ (here $d\nu_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^{-2}d\mu_\lambda(z)$). The talk is based on [3].

REFERENCES

1 *Zhu K,* Analytic Besov spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1991, Volume 157, pp. 318-336.

2. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.,* Fractional Integrals and Derivatives. Gordon and Breach Science Publishers (1993).

3 *Karapetyants A. N., Kodzoeva F. D.* Characterization of weighted analytic Besov spaces in terms of operators of fractional differentiation. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2014, Volume 17, No 3, pp. 897-906.

М.Г. Лапшина (Липецкий государственный педагогический университет, Россия)
marina.lapsh@yandex.ru

В-ПОТЕНЦИАЛЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ПО ГЕЛЬДЕРУ ФУНКЦИЙ

В монографии [1] изучались B-потенциалы дважды непрерывно дифференцируемых функций. Здесь приводятся результаты исследований B-потенциалов гельдеровских функций.

Пусть $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n^+ = \{x_i > 0\}$, $x''=(x_{n+1}, \ldots, x_N) \in R_{N-n}$, $x = (x', x'') \in \mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, $(x')^\gamma = = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. Действие обобщенного сдвига $f(x) \to (T_x^y f)(x)$ определяется равенством

$$(T_x^y f)(x) = C \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi f(\sqrt{x'^2+y'^2-2x'y'\cos\alpha},\, x''-y'') sin^{\gamma_j-1}\alpha_j d\alpha\,,$$

где $\sqrt{x_j'^2 + y_j'^2 - 2x_j'y_j'\cos\alpha}$ — n-мерный вектор, с координатами $\sqrt{x_j'^2 + y_j'^2 - 2x_j'y_j'\cos\alpha_j}\,,\ \ j = \overline{1,n}\,.$

B-Потенциал Ньютона функции f определяется выражением

$U_f(x) = \int_{\Omega_N^+} f(y)\,(T_y^x |y|^{2-N-|\gamma|})(y')^\gamma\, dy\,.$

Получен следующий результат (ср. с [2], стр. 250).

Теорема 1. *Пусть f четная по каждой из координат вектора x' функция, удовлетворяет условию Гельдера в области Ω. Тогда B-потенциал этой функции имеет равномерно непрерывные первые производные, которые можно получить дифференцированием под знаком интеграла; имеет непрерывные производные второго порядка и B-производные, определяемые по формулам*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} U_{f,\gamma}(x) = -f(x) \int_{\partial\Omega_N^+} \frac{\partial}{\partial x_i} T^x |y|^{2-N-|\gamma|}\ (y')^\gamma\, d\Gamma_N +$$
$$+ \int_{\Omega_N^+} (\,f(y) - f(x)\,)\ \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_i} T^x |y|^{2-N-|\gamma|}\ (y')^\gamma\, dy\,,$$

Если B_{γ_i} сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, то

$$B_{x_i} U_\gamma^\alpha f(x) = -C(\gamma)\, f(x) \int_{\partial\Omega_{n+1}} \left(B_{x_i}^{(1)} |z - \hat{x}|^{2-n-\gamma} \right) \cos\nu_1\, z_2^{\gamma-1}\, d\Gamma_{n+1} +$$
$$+ \int_{\Omega_N^+} [f(y) - f(x)] \left(B_{x_i}\, T_y^x |y|^{2-n-\gamma} \right) (y')^\gamma\, dy\,, \text{ где } B_{x_i}^{(1)} = \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{d}{dx_i} x_i^{\gamma_i}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляхов Л. Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007. — С. 232.

2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир. 1964. С. 830 .

Л. Н. Ляхов (Воронежский государственный университет, Россия)
levnlya@mail.ru

ТЕОРЕМЫ О СФЕРИЧЕСКОМ УПЛОТНЕНИИ И О ПРЕОБРАЗОВАНИИ КИПРИЯНОВА-КАТРАХОВА

Преобразование Фурье радиальной функции $f = f(|x|)$, записанное в виде

$$F[f](\xi) = \int_0^\infty f(r)\ \left(\delta_{S_r}\,,\, e^{\langle x\,,\,\xi\,\rangle}\right)\ r^{n-1}\, dr\,,$$

где δ_{S_r} — обобщенная δ-функция, сосредоточенная на сфере $S_r(n)$=$\{x \in \mathbb{R}_n,\ |x| = r\}$, представляет собой один из вариантов теоремы о сферическом уплотнении. Другой ее вариант касается представления сверток радиальных функций:

$$(u * v) = (u * v)_\gamma = \int_0^\infty u(r)\ T_r^\rho v(r)\ r^\gamma\, dr\,,$$

где обобщенный сдвиг T_r^ρ представляет собой сферическое среднее евклидовых расстояний.

Если учесть, что $\left(\delta_{S_r}\,,\, e^{\langle x\,,\,\xi\,\rangle}\right) = j_{\frac{n-1}{2}}(r|\xi|)$, то получим формулу $F[f] = F_{B_\gamma}[f]$, в которой преобразование Фурье-Бесселя F_B индекса $\gamma = n-1$ определяется формулой

$$F_{B_\gamma}[f](\rho) = \int_0^\infty f(r)\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(r\rho)\ r^\gamma\, dr, \quad \gamma = n-1.$$

Заметим, что если индекс $\gamma \in (n-1\,,\,n)$, то преобразование F_{B_γ} оказывается промежуточным между преобразованиями Фурье радиальных функций в $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{R}_{n+1}$, т.е. может рассматриваться как преобразование Фурье радиальных функций в пространстве дробной размерности $n+\alpha,\ 0 < \alpha < 1$.

Существенное преимущество преобразование F_B имеет при работе с оператором Бесселя $B_\gamma = D^2 + \frac{\gamma}{x} D$, поскольку символом этого сингулярного оператора является $-\xi^2$. Существенным ограничением для построения теории ПДО явился тот факт что в рамках преобразования F_B невозможно представить «нечетные» (например первую) производные. Киприянов И.А. и Катрахов В.В. в [1] ввели модернизацию преобразования Фурье-Бесселя, на основе ядра интегрального преобразования $j_{\frac{\gamma-1}{2}} - i\frac{x\xi}{\gamma+1}\ j_{\gamma+1}(x\xi)$. Введенное ими преобразование дает возможность исследовать задачи сингулярных уравнений в частных производных, более общие, по сравнению с рассмотренными, см., например, [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов. Математ. сборн., 104, № 1, — 1977.

2. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов. Дифференц. Уравнен. — 2011, Т. 47. № 5. — С. 681 — 695.

Л. Н. Ляхов, О. И. Попова, С. А. Рощупкин
(Воронежский государственный университет, АО «Концерн «Созвездие», Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Россия)
levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru

О ТЕОРЕМЕ ПЭЛИ-ВИНЕРА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ-КИПРИЯНОВА-КАТРАХОВА

Теорема Пэли-Винера для преобразования Ганкеля получена Н.И. Ахиезером. В этих тезисах приводится теорема Пэли-Винера для *полного* преобразования Фурье-Бесселя введенного в [1] и более общно в [2].Это преобразование построено на основе ядра

$$\Lambda^{\pm}(x,\xi)=\prod_{i=1}^{n}\left(j_{\frac{\gamma-1}{2}}\mp i\ \frac{x_i\xi_i}{\gamma+1}j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x_i,\xi_i)\right)\ e^{-i\langle x'',\xi''\rangle},$$

следующим образом:

$$\mathcal{F}_B[\Phi](\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_N}\Lambda_{\gamma}^{+}(x',\xi')\ \Phi(x)\,(x')^{\gamma}\,dx\,,\ \ x'^{\gamma}=\prod_{i=1}^{n}|x_i|^{\gamma_i}\,,\ \gamma_i>0\,,$$

$$\mathcal{F}_B^{-1}[\Phi](x)=C(\gamma)\mathcal{F}_{\mathcal{B}}[\Phi](-x)\,,$$

$\nu=\frac{\gamma-1}{2}$ — соответствующий мультииндекс. В этих формулах j_ν — j-функция Бесселя первого рода, $x=(x',x'')\in\mathbb{R}_N=\mathbb{R}_n\times\mathbb{R}_{N-n}$.

Обозначим через $C^{\infty}_{ev+,0}$ класс функций вида $\Phi=\varphi(x)+\psi'(x)$, где φ и ψ четные по каждой координате x_i, $i=\overline{1,n}$, бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем. Весовые обобщенные функции строятся на основе весовой линейной формы

$$(u\,,\,v)_{\gamma}=\int u(x)\ v(x)\,(x')^{\gamma}\ dx'dx''\,.$$

Теорема. *Целая аналитическая функция $\Phi(\xi)$ является $\mathcal{F}_B$-преобразованием весовой обобщенной функции ϕ с supp $\phi\in\mathbb{B}_\nu=\{x:\ |x|<\nu\}$ тогда и только тогда, когда с некоторыми константами P и q справедливо неравенство $|\Phi(\xi)|\le P\,(1+|\xi|)^{q}\ e^{\nu\,|Jm\,\xi|}$. Для того, чтобы весовая обобщенная функция Φ совпала с функцией из $C^{\infty}_{ev+,0}(\mathbb{B}_\nu)$ необходимо и достаточно, чтобы ее $\mathcal{F}_B$-преобразование было целой аналитической функцией и для каждого q выполнялось неравенство $|\Phi(\xi)|\le C\ (1+|\xi|)^{-q}\ e^{\nu\,|Jm\,\xi|}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов. Математ. сборн., 104, № 1, — 1977.

2. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов. Дифференц. Уравнен. — 2011, Т. 47. № 5. — С. 681 — 695.

Л. Н. Ляхов, С. А. Рощупкин (Воронежский государственный университет, Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Россия)

levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru

О ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ КИПРИЯНОВА-КАТРАХОВА В КЛАССАХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ

Обозначим через $C^{\infty}_{ev+,0}$ класс функций вида $\Phi = \varphi(x) + \psi'(x)$, $x{=}(x', x''){\in}\mathbb{R}_N{=}\mathbb{R}_n\mathbb{R}_{N-n}$. Предполагается, что φ и ψ четные по каждой координате x_i, $i{=}\overline{1,n}$, бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем. Пусть $j_{\frac{\gamma-1}{2}}$ — j-функция Бесселя,

$\Lambda(x,\xi) = \prod\limits_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_i,\xi_i)e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}$, $x'^{\gamma} = \prod\limits_{i=1}^{n} |x_i|^{\gamma_i}$. Рассматривается преобразование Фурье-Бесселя, введенное в [1] и в более общем виде в [2], следующим образом: $\mathcal{F}_B[\Phi](\xi){=}\widehat{\Phi}(\xi){=}\int\limits_{\mathbb{R}_N} \Lambda^{+}_{\gamma}(x',\xi')\ \Phi(x)\,(x')^{\gamma}\,dx$,

$\mathcal{F}_B^{-1}[\Phi](x) = C(\gamma)\mathcal{F}_{\mathcal{B}}[\Phi](-x)$, $C(\gamma) = \frac{(2\pi)^{n-N}}{2^{2(\nu+1)}\ \Gamma^2(\nu+1)}$, $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$ — соответствующий мультииндекс.

Псевдодифференциальным оператором Киприянова-Катрахова называется оператор вида

$$Au(x) = C\int\limits_{\mathbb{R}_N} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\Lambda(x,\xi)(\xi')^{\gamma}dx, \qquad (1)$$

где символ $a(x,\xi)$ такой, что $|(D_B)_{\xi}(D_B)_x a(x,\xi)|{\leqslant}C_{\alpha,\beta,K}(1{+}|\xi|)^{m-|\alpha|}$, число m — порядок оператора A. Множество символов обозначим $\Xi^m(\Omega)$. Через $\Xi^m_0(\Omega)$ мы будем обозначать подкласс символов, равных нулю вне некоторого компактного подмножества, в области Ω.

Используя соответствующий вариант теоремы Пэли-Винера, получен следующий результат.

Теорема. *Оператор A, определенный формулой (1), с символом a из класса $\Xi^m_0(\mathbb{R}^n)$ переводит $C^{\infty}_{ev+,0}(\mathbb{R}^n)$ в $C^{\infty}_0(\mathbb{R}^n)$. Этот оператор ограничен как оператор из H_s в H_{s-m} при любом вещественном s.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов. Математ. сборн., 104, № 1, — 1977.

2. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов. Дифференц. Уравнен. — 2011, Т. 47. № 5. — С. 681 — 695.

О. В. Скоромник
(Полоцкий государственный университет, Беларусь)
skoromnik@gmail.com

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ–КЛИФФОРДА В ЯДРЕ ПО ПИРАМИДАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Рассматривается интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right) f(\mathbf{t})d\mathbf{t} = g(\mathbf{x})\ ,\ \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}),$$

где $A = \|a_{jk}\|$ $(a_{jk}\in \mathbf{R}^1)$ – матрица порядка $n\times n$ $(n\in\mathbf{N})$ с определителем $|A|\neq 0$; $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{t} = (t_1,...,t_n)\in\mathbf{R}^n$; $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\,t_k$; $(\mathbf{x})^{\alpha} = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbf{R}_+^n$; $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_n)$;
$\sigma = (\sigma_1,...,\sigma_n)\in\mathbf{R}^n$; $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{x},...,\mathbf{a_n}\cdot\mathbf{x})$, $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x})^{\alpha} = (\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{x})^{\alpha_1}\cdots(\mathbf{a_n}\cdot\mathbf{x})^{\alpha_n}$;
$A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n : A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq 0,\ \ \mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r\geq 0\}$ – пирамида ; $\mathbf{x}\geq\mathbf{t}$ означает $x_1\geq t_1,...,x_n\geq t_n$, $r\in\mathbf{R}^1$; $\bar{J}_{\alpha}(\mathbf{x})$ – функция вида:
$\bar{J}_{\alpha}(\mathbf{x}) = \prod\limits_{j=1}^{n} \bar{J}_{\alpha_j}(x_j)$, где $\bar{J}_{\alpha_j}(x_j)$ $(j=1,...,n)$ – функции Бесселя–Клиффорда [1].

Исследуется задача разрешимости рассматриваемого уравнения в пространстве

$$\mathbf{L}_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \int\limits_{\mathbf{A_{c,r}}(\mathbf{b})} |\mathbf{f}(\mathbf{t})|\mathbf{dt}<\infty\}$$

и дается формула его решения в замкнутой форме. Настоящая работа продолжает исследования, опубликованные ранее в [2]–[4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

2. *Килбас А. А., Скоромник О. В.* Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области. // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. - Минск, 2009. - Т. 17, № 1. С. 71–78.

3. *Килбас А. А., Скоромник О. В.* Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области. // Доклады академии наук (Российская Академия наук).2009. Т. 429. № 4. С. 442–446.

4.*Скоромник О. В., Шлапаков С. А.* Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области. // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2014. № 1. С. 12–18.