И.С. Григорьева

МАТЕМАТИКА И ЖИЗНЬ, ИЛИ ПАРАДОКСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математика — точная наука. Но значит ли это, что все, что говорится на языке математики и логики — верно? Ведь одно дело правильно доказать теорему, а другое — применить математическую теорию для описания действительности.

Математики испокон века очень следят за строгостью и доказательностью своих утверждений. Именно поэтому люди верят тем высказываниям и исследованиям, которые используют математический аппарат.

> За сто семьдесят шесть лет Нижняя Миссисипи стала короче на двести сорок две мили. В среднем это составляет чуть больше, чем миля с третью за год. Отсюда следует, [...] что в нижнесилурийском периоде (он закончился как раз миллион лет назад, в ноябре юбилей) длина Нижней Миссисипи превышала один миллион триста тысяч миль. Точно так же отсюда следует, что через семьсот сорок два года длина Нижней Миссисипи будет равна одной миле с четвертью. Каир и Новый Орлеан сольются и будут процветать, управляемые одним мэром и одной компанией муниципальных советников. В науке действительно есть что-то захватывающее, такие далеко идущие и всеобъемлющие гипотезы способна она строить на основании скудных фактических данных.
>
> Марк Твен, «Жизнь на Миссисипи».

Конечно, это рассуждение рассчитано на улыбку. Каждый понимает, что выводы, сделанные автором, абсолютно нереалистичны. Понятна и причина ошибки: ниоткуда не следует, что скорость изменения длины постоянна в течение такого большого промежутка времени.

Однако сплошь и рядом ошибки в «математических» или «логических» рассуждениях совсем незаметны и хорошо маскируются под истину. Вот вам примеры.

Нестандартные текстовые задачи

Текстовая задача — это пример простейшей математической модели, с которым мы знакомимся в школе. Как правило, для их решения не нужны серьезные математические методы. Тем не менее, подобные задания вызывают большие затруднения у многих учеников. Их сложность именно в том, чтобы подобрать правильный метод к конкретной задаче. К сожалению, некоторые ученики предпочитают «метод тыка», применяя ту или иную «формулу», которая кажется им подходящей.

— Анна Петровна! Я достала прекрасное лекарство.
— От чего?
— Не знаю, но, говорят, очень помогает!

Задача 1 (старинная). Два одноногих человека купили пару ботинок за 25 руб. Когда хозяин узнал, что покупатели —

инвалиды, он велел приказчику вернуть им 5 руб., но тот отдал каждому по рублю, а 3 руб. оставил себе. Проведем подсчет: сначала каждый инвалид заплатил по 12,5 руб., а в итоге — по 11,5. Вместе они истратили 23 руб., плюс 3 руб., оставшиеся у приказчика, всего — 26 руб. Откуда взялся лишний рубль?

Решение. Сами вычисления проведены правильно. Значит, ошибка в том, что мы произвели *не те* вычисления. Действительно, что за сумма 26 руб.? По условию 25 руб. — это деньги, потраченные покупателями (на первом этапе покупки), 23 руб. — сумма, которую они потратили окончательно. Их должен получить хозяин магазина. Ну а 3 руб. — деньги, которые получил приказчик, по сути, *укравший* их. Значит, это деньги «с минусом».

Итак, правильное вычисление будет иметь такой вид: 23 руб. – 3 руб. = = 20 руб. — сумма, полученная от инвалидов хозяином магазина. Она совпадает с 25 руб. — 5 руб. — той же суммой, рассчитанной с точки зрения хозяина. Значит, хозяин в этой ситуации не пострадал, деньги были украдены у покупателей.

В этой задаче действия с числами были математически правильными, но бессмысленными, так как они не соответствуют связям реальных величин.

> Петя прыгал по лестнице через 1 ступеньку и сломал ногу. Сколько ног он сломает, если будет прыгать через 3 ступеньки?

Задача 2. На складе лежит 400 кг огурцов, которые на 99% состоят из воды. Через некоторое время огурцы подсохли, и теперь вода составляет только 98% их веса. Сколько стали весить эти огурцы?

Решение. Как решают эту задачу многие школьники? Они говорят: раз величина уменьшилась на один процент, вычтем этот процент из 400 кг. Получим 400 – 4 = 396 (кг). Но ведь «процент», «доля» — величины относительные. Всегда надо учитывать от чего они берутся.

Для правильного решения задачи надо не искать подходящую формулу, а разобраться в самом условии.

В этой задаче присутствуют две ситуации: до усыхания и после. Что их связывает? Количество огурцов изменилось и количество воды тоже. Неизменным осталось только сухое вещество огурцов. Вот для него и можно выводить соотношения. Имеем: вначале сухое вещество составляло 1% и весило 4 кг. После усыхания те же 4 кг составляют уже 2% от всей массы. Значит, эта масса равна 4 кг : 2% = 200 кг. Результат, конечно, поразительный, но верный!

Задача 3. Стадо из 10 коров может пастись на лугу 60 дней, пока не съест всю траву. Если бы в стаде было 15 коров, они бы могли пастись на этом лугу 20 дней. На сколько дней хватило бы этого луга, если бы в стаде было 20 коров?

Решение. На первый взгляд задача кажется очень простой: раз коров стало в 2 раза больше, то травы хватит на $\frac{60}{2} = 30$ дней. Непонятно только, зачем нам второе условие. Попробуем, однако, решить задачу исходя из него. 15 коров за 20 дней съедят 15 · 20 = 300 «короводнея». Значит, 20 коровам этой травы хватит на $\frac{300}{20} = 15$ дней. Ответ получился совершенно другим. Что же это значит? Что два условия задачи противоречат друг другу?

Действительно, судя по первому условию, на лугу было не 300, а $10 \cdot 60 = 600$ «корово-дней» травы. Откуда же взялись лишние 300 единиц? Заметим, что первое стадо паслось 60 дней, то есть на 40 дней больше, чем второе. Можно предположить, что за это время трава просто ... отросла!

Итак, в задаче есть «подвох»: не сказано явно, что трава на лугу растет. Но ведь это мы знаем и так. Решим теперь задачу с учетом этого факта.

Можно, конечно, ввести две неизвестные (число коров и скорость роста) и составить уравнения. Заметим, однако, что одну из величин мы уже почти вычислили. Действительно, «лишние» 300 единиц травы отросли за 40 дней, значит, в день отрастает $\frac{300}{40} = 7{,}5$ единиц. За 60 дней отросло $60 \cdot 7{,}5 = 450$ единиц. Значит, вначале на лугу было $600 - 450 = 150$ «корово-дней» корма.

Стадо из 20 коров за x дней съест $20x$ единиц травы, а возможности луга за это время составляют $150 + 7{,}5x$ единиц. Решая соответствующее уравнение, получаем, что $x = 12$ (дней).

Математика в литературе

В художественной литературе встречаются эпизоды, которые можно проверить математическим или логическим рассуждением.

Задача 4. В романе В. Корчагина «Тайна реки злых духов» героям надо обследовать реку (на лодках) вниз и вверх по течению от места стоянки. Они разделились на две группы и решают, кто куда пойдет. Молодой парень говорит: «Конечно, все хотят идти вниз по реке, это же гораздо легче». Прав ли он?

Р е ш е н и е. Не прав. Ведь каждой группе придется возвращаться на место стоянки, то есть пройти путь и вниз, и вверх по реке. Но зато люди, которые сначала пошли вверх, более трудный участок пути пройдут со свежими силами, а когда устанут, смогут легко вернуться назад. В романе так и вышло. Группа легкомысленного героя, спустившись вниз, попала в бурю и потеряла все продукты. В результате трудный путь назад им пришлось проделать еще и голодными!

Кстати, в школьных текстовых задачах «эффектом усталости» пренебрегают: не только поезда и машины, но и люди ходят в них с постоянной скоростью.

Иногда авторская идея требует не арифметической, а логической проверки.

Задача 5. В одном фантастическом рассказе описывалось «прекрасное будущее». К этому времени, по мысли автора, будут решены многие проблемы большого города, в частности, жилищная и транспортная. Жилья будет много и человек сможет, даже переезжая в другую местность, сразу найти квартиру по своему вкусу. Кроме того, все будут жить рядом с работой. Это значительно уменьшит передвижения в часы пик и разгрузит улицы от транспорта. Как вам кажется, это реалистичный прогноз?

Р е ш е н и е. Конечно, такая идиллия вызывает мало веры. Экономика должна быть весьма эффективной, чтобы создать такое богатство, а государство — сильным, чтобы не дать полученным средствам сконцентрироваться в руках немногих богатых и влиятельных людей. Однако чисто логически мы не можем доказать, что такое общество не может быть построено.

Больший интерес вызывает структура личных отношений в таком обществе. Сохранится ли в нем такое понятие, как семья? Если да, то смогут ли все члены семьи жить вместе?

По мысли автора все члены семьи работают вблизи своего дома. Но тогда им придется работать обязательно поблизости друг от друга! Это возможно в следующих случаях.

а) Члены одной семьи выбирают работу согласовано. Если один перевелся на новую работу на другой конец города, то и другие должны переехать вместе с ним и поменять место работы.

б) Человек выбирает семью после того, как выберет работу. В этом случае, поменяв работу, придется менять и супруга, находя его поблизости от жилья!

в) В семье работает только один человек.

Конечно, все эти варианты не исключены и в нынешней, далекой от совершенства жизни. Однако они воспринимаются как зло (быть может, иногда и необходимое). Автор же делает их правилом. Считать ли такое будущее прекрасным — вопрос по крайней мере спорный!

В предыдущих примерах авторы не говорили специально о математических проблемах. Однако некоторые литераторы делают это, хотя и не всегда удачно. Причем ошибки в рассуждениях допускают и талантливые авторы.

Вот что писал Н.В. Гоголь в своей статье «Об архитектуре нынешнего времени».

> Башни огромные, колоссальные необходимы в городе, не говоря уже о важности их назначения для христианских церквей. Кроме того, что они составляют вид и украшение, они нужны для сообщения городу резких примет, чтобы служить маяком, указывавшим бы путь всякому, не допуская сбиться с пути. Они еще более нужны в столицах для наблюдения над окрестностями. У нас обыкновенно ограничиваются высотою, дающею возможность обглядеть один только город. Между тем как для столицы необходимо видеть по крайней мере на полтораста верст во все стороны и для этого, может быть, один только или два этажа лишних — и все изменяется. Объем кругозора по мере возвышения распространяется необыкновенною прогрессией. Столица получает существенную выгоду, обозревая провинции и заранее предвидя все; здание, сделавшись немного выше обыкновенного, уже приобретает величие; художник выигрывает, будучи более настроен колоссальностию здания к вдохновению и сильнее чувствуя в себе напряжение.

Чисто архитектурная и художественная сторона этого предложения не вызывает возражений. Но вот математическая ее составляющая…

Задача 6. Подсчитайте высоту башни с обзором в 150 верст (160 км).

Р е ш е н и е. Если обзор не закрыт предметами и неровностями ландшафта, то расстояние до горизонта определяется закруглением Земли. На рисунке через R обозначен радиус Земли, а через h — искомая высота. По теореме Пифагора получаем $R^2 + l^2 = (R + h)^2$, откуда следует, что $l^2 = 2Rh + h^2$. Это уравнение можно решить относительно h как квадратное, но полученную функцию трудно исследовать.

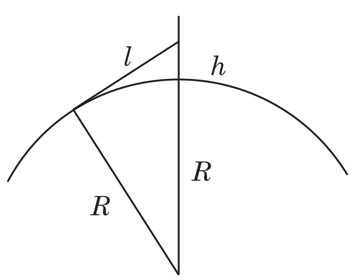

Рис. 1

Найдем приближенное решение. Заметим, что R примерно равно 6400 км, так что h мало по сравнению с R. Значит, слагаемое h^2 мало по сравнению с первым слагаемым и его можно отбросить. Получаем, что l примерно равно $\sqrt{2Rh}$. Это значит, что радиус обзора растет с ростом высоты довольно медленно: вряд ли эту функцию можно назвать «необыкновенною прогрессией». В частности, подставляя в соотношение $l = 160$ и $R = 6400$, получим, что $h \approx \frac{l^2}{2R} = 2$ км. Такой башни не построили и в наше время!

Еще пример: рассуждения Эдгара А. По из рассказа «Тайна Мари Роже»:

> Обычного читателя почти невозможно убедить, что при игре в кости двукратное выпадение шестерки делает почти невероятным выпадение ее в третий раз и дает все основания поставить против этого любую сумму. Заурядный интеллект не может этого воспринять, он не может усмотреть, каким образом два броска, принадлежащие уже прошлому, могут повлиять на бросок, существующий еще пока только в будущем. Возможность выпадения шестерки кажется точно такой же, как и в любом случае — то есть зависящей только от того, как именно будет брошена кость. И это представляется настолько очевидным, что всякое возражение обычно встречается насмешливой улыбкой, а отнюдь не выслушивается с почтительным вниманием. Суть скрытой тут ошибки — грубейшей ошибки — я не могу объяснить в пределах места, предоставленного мне здесь, а людям, искушенным в философии, никакого объяснения и не потребуется. Тут достаточно будет сказать, что она принадлежит к бесконечному ряду ошибок, которые возникают на пути Разума из-за его склонности искать истины в частностях.

Это рассуждение, конечно, совершенно неверно. Игральная кость действительно не обладает никакой памятью, и вероятность выпадения того или иного числа очков не зависит от предыдущих бросков. Тем не менее, совет автора кажется правдоподобным: трудно представить себе, что шестерка будет выпадать подряд при нескольких бросках.

В этом заключается один из парадоксов теории вероятностей. Как известно, понятие «вероятность» возникло как абстрактный аналог понятия «частота». Мы ожидаем, что при бросании кости *в среднем* шестерка будет выпадать в $\frac{1}{6}$ доле случаев. Однако это верно только при очень большом числе бросков. Пусть, например, мы сделали 6000 бросков, причем каждая цифра выпала примерно по 1000 раз. Если после этого выпадет серия из 10 шестерок, количество шестерок изменится только на 1%. При еще большем числе бросаний такая серия практически не будет влиять на подсчет частоты.

Почему же интуитивно кажется, что третья шестерка подряд — маловероятное событие? Потому что здесь решается совсем другая задача: оценить вероятность цепочки (6; 6; 6). Она равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$, то есть примерно полпроцента (кстати, не так уж и мало!).

Заметим, что вероятность любой другой тройки цифр точно такая же. То есть вероятность получить набор (6; 6; 1) так же мала. Однако вряд ли автор «поставит любую сумму против» выпадения единички после двух шестерок!

Эдгар По путает две вероятности: абсолютную и условную. Хотя вероятность трех шестерок подряд действительно мала, но *при условии*, что две шестерки *уже выпали*, она существенно возрастает и становится равной $\frac{1}{6}$.

В связи с этой задачей можно задаться еще и таким вопросом: а какова вообще длина цепочки повторяющихся цифр при бросании кости? Разумеется, эта величина переменная и можно найти только ее среднее значение.

Задача 7. Будем бросать игральную кость и записывать выпавшие очки. Полученную последовательность разобьем на отрезки одинаковых цифр и подсчитаем длины таких цепочек. Как часто будут встречаться цепочки той или иной длины?

Решение. Как может получиться, например, цепочка длиной 3? После первой выпавшей цифры (назовем ее a) должна два раза выпасть цифра a, а потом — не a. Вероятность этого события равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{216}$. Ясно, что и для произвольной длины цепочки n вероятность равна. Приближенные значения вероятностей приведены в таблице:

n	1	2	3	4	5	6
p	0,8333	0,1389	0,0231	0,0039	0,0006	0,0001

Итак, «тройки» будут занимать примерно 2,3% от всех цепочек, что совсем не так уж мало. Вероятность того, что подряд выпадут не менее 3 одинаковых цифр, равна $1-\frac{5}{6}-\frac{5}{36}=\frac{1}{36}$.

Кстати, если вместо игральной кости взять монетку и подбрасывать ее, то цепочки будут длиннее. Действительно, было бы неестественно, если бы орлы и решки строго чередовались! Ясно, что они достаточно часто будут повторяться и по 2, и по 3 раза. Средняя длина цепочки из орлов или решек равна 2.

В рассуждениях Э. По меня удивили две вещи. Во-первых, что он отстаивает неверное суждение, ссылаясь на некоторые туманные философские идеи. А во-вторых, то, что *верное* рассуждение он приписывает «обычному читателю». Между тем опыт показывает, что непрофессионалы часто рассуждают именно как Э. По и не верят, что после двух выпавших шестерок может появиться еще и третья. Как говорит народная мудрость «снаряд в одну воронку второй раз не падает».

> — И, главное, не бойтесь вы этой статистики! В среднем не раскрывается один парашют из тысячи, а вас тут всего-то двести человек.

Предоставляю читателю самому судить, не было ли высказывание великого писателя (кстати, серьезно интересовавшегося математикой) просто шуткой, мистификацией.