§2. Общие линейные и евклидовы пространства

Говорят, что множество $\mathbf{X}$ является *линейным пространством над полем вещественных чисел*, или просто *вещественным линейным пространством*, если для любых элементов $x, y \in \mathbf{X}$ определена операция сложения, т. е. определен элемент

$$z = x + y \in \mathbf{X},$$

называемый *суммой* элементов x, y; для любого элемента $x \in \mathbf{X}$ и любого вещественного числа α определен элемент

$$\alpha x \in \mathbf{X},$$

называемый *произведением* α и x.

.

Предполагается, что для этих двух операций выполнены ***аксиомы линейного пространства***:

1) $x + y = y + x$ — ***коммутативность*** операции сложения;

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ — ***ассоциативность*** операции сложения;

.

3) существует единственный элемент $0 \in \mathbf{X}$ такой, что $x+0=x$ для любого элемента $x \in \mathbf{X}$; элемент 0 называют *нулевым элементом* пространства $\mathbf{X}$;

.

4) для любого элемента $x \in \mathbf{X}$ существует единственный элемент x' такой, что $x+x'=0$; элемент x' называют ***противоположным*** элементу x;

.

5) $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ — ***дистрибутивность*** по сложению векторов;

6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ — ***дистрибутивность*** по сложению скаляров;

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — ***ассоциативность*** по умножению скаляров;

8) $1x = x$ — ***нейтральность*** единичного скаляра.

.

Если при определении пространства **X** допускается умножение на комплексные числа, то **X** называется *линейным пространством над полем комплексных чисел*, или *комплексным линейным пространством*.

При этом предполагается, что выполняются аксиомы 1)–8).

.

Элементы линейного пространства **X** будем называть *векторами*, а само пространство — *векторным*.

В дальнейшем на протяжении всей книги буквам **X**, **Y**, **Z** будем обозначать линейные пространства. Если не оговорено противное, пространства будут предполагаться комплексными.

.

Приведем примеры линейных пространств.

Упражнение. Проверить, что вводимые ниже множества действительно являются линейными пространствами, т. е. для определенных на них операций сложения и умножения на число выполняются аксиомы 1)–8).

.

1) Множество всех векторов трехмерного евклидова пространства с введенными обычным образом операциями умножения вектора на число и сложения векторов.

.

2) Множество всех вещественных функций вещественного переменного, определенных на интервале (a, b) вещественной оси, является вещественным линейным пространством, если определить обычным образом понятие суммы двух функций и умножение функции на вещественное число.

.

3) Множество всех вещественных функций, определенных и непрерывных на замкнутом отрезке $[a, b]$ вещественной оси, является вещественным линейным пространством. Это пространство обозначают через

$$C[a, b].$$

При проверке того, что $C[a, b]$ — линейное пространство, надо иметь в виду, что сумма двух непрерывных функций есть непрерывная функция, при умножении функции на любое число непрерывность функции также сохраняется.

.

4) Множество всех функций из пространства $C[a,b]$, равных нулю в некоторой фиксированной точке c из отрезка $[a,b]$, — вещественное линейное пространство.

.

5) Множество всех полиномов с комплексными коэффициентами, на котором обычным образом определены операции сложения двух полиномов и умножения полинома на число, является комплексным линейным пространством.

.

6) Множество $\mathbf{Q}_n$ всех полиномов степени не выше n, где $n \geqslant 0$ есть фиксированное целое число, является комплексным линейным пространством. Здесь надо иметь в виду, что сумма полиномов есть полином, степень которого не превосходит максимальной степени слагаемых.

§4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Будем говорить, что система векторов

$$\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}, \quad m \geqslant 1,$$

$$a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^m \in \mathbf{X},$$

линейно зависима, если существуют числа

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m \in \mathbb{C},$$

среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m = 0.$$

.

<u>Пример.</u> Система векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

из пространства $\mathbb{R}^3$ линейно зависима, так как, положив

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 2,$$

получим

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4 = 4 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

.

Полезно отметить, что это не единственный набор коэффициентов $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$, при котором

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4 = 0,$$

так, например,

$$2a^1 + a^2 - a^3 = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 0.$$

.

Следующая линейная комбинация также обращается в нуль:

$$3a^2 + a^3 - 2a^4 = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 0.$$

.

Определению линейной зависимости векторов удобно придать матричную формулировку. Символом

$$\mathcal{A}_m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$$

обозначим упорядоченный набор векторов из пространства $\mathbf{X}$. Для $x \in \mathbb{C}^m$ положим

$$\mathcal{A}_m x = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m.$$

.

Можно сказать, что векторы a^1, $a^2, \ldots,$ a^m, ***линейно зависимы***, если существует

$$0 \neq x \in \mathbb{C}^m$$

такой, что

$$\mathcal{A}_m x = 0.$$

.

Говорят, что вектор $a \in \mathbf{X}$ *линейно выражается* через векторы

$$b^1, \ b^2, \ \ldots, \ b^p, \quad p \geqslant 1,$$

(является *линейной комбинацией* этих векторов), если существует вектор $x \in \mathbb{C}^p$ такой, что

$$a = x_1 b^1 + x_2 b^2 + \cdots + x_p b^p,$$

в матричной записи:

$$a = \mathcal{B}_p x.$$

.

Упражнения

1) Доказать, что система векторов линейно зависима, если она содержит линейно зависимую подсистему, в частности, если она содержит нулевой вектор.

.

2) Доказать, что для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ была линейно зависимой необходимо и достаточно, чтобы она содержала вектор a^k, который линейно выражается через остальные.

.

Говорят, что система векторов

$$\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$$

линейно выражается через систему векторов

$$\mathcal{B}_p = \{b^i\}_{i=1}^p,$$

если существует такая матрица $X(p \times m)$, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p \times m).$$

В более подробной записи это означает, что

$$a^k = \sum_{j=1}^{p} x_{jk} b^j, \quad k = 1, \ldots, m.$$

.

Свойство *транзитивности*: если система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$, а та, в свою очередь, — через систему векторов $\{c^i\}_{i=1}^q$, то система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{c^i\}_{i=1}^q$.

.

Действительно, по определению имеем

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p, m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{C}_q Y(q, p),$$

Подставляя в первое из этих равенств выражение для $\mathcal{B}_p$, получим

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{C}_q Z(q, m),$$

где

$$Z(q, m) = Y(q, p) X(p, m).$$

.

Системы векторов

$$\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m, \quad \mathcal{B}_p = \{b^i\}_{i=1}^p$$

называются ***эквивалентными***, если существуют матрицы X, Y такие, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p, m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{A}_m Y(m, p),$$

т. е. каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой системы.

.

<u>Упражнение</u>. Используя свойство транзитивности, показать, что если вектор $x \in \mathbf{X}$ линейно выражается через систему векторов $\{a^i\}_{i=1}^{m}$, то он линейно выражается и через эквивалентную систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^{p}$.