Несобственные интегралы

<u>Опр1.</u> Выражение вида $\int_a^b f(x)dx$ изв интегралом от ф-у f с особенностью в тчк b (a), если

1) b - конечная точка: ф-у f интегрируема на $[a, b']$, при $b' \in (a, b)$; f - не ограничена в окрестности точки b

(1) a - конечная тчк $(a < b)$, f - интегрируема на $\forall [a'; b]$, где $a < a' < b$ и не ограничена в окрестности тчк a.)

2) $b = +\infty$; ф-у f инт-ма на $[a, b']$ при $\forall b' > a$

(2). $a = -\infty$; f интегрируема на $\forall [a'; b]$, $a' < b$)

<u>Опр2.</u> Если $\int_a^b f(x)dx$ имеет особенность в тк b (согласно опр. точки с особенностью в тк b N1) и если $\exists \lim\limits_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)dx$, то этот предел изв несобственным интегралом от f на $[a, b]$ и записывается в виде:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b} f(x)dx,$$ при этом говорят,

что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ - сходится (существует). В противном случае говорят, что он расходится не существует.

<u>Опр3</u> Если $\int_a^b f(x)dx$ имеет особенность в тк b (согласно Опр 1 пункт 2)) и если сущ предел

$\lim\limits_{b'\to\infty} \int_a^{b'} f(x)dx$, то этот предел наз несобственным интегралом от ~~ф~~ ф-ции f на $[a, +\infty)$ и записывается в виде $\int_a^{b} f(x)dx = \lim\limits_{b'\to\infty} \int_a^{b'} f(x)dx$, при этом говорят, что интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится (существует), в противном случае – расходится не существует.

Аналогично определяются интегралы с особенностью в ~~тк~~ a.

(Зм. сформулируйте точку a – получите доп. баллы (ответ на почту)!)

Теорема 1 (Критерий Коши). Пусть задан $\int_a^b f(x)dx$ с единственной особенностью в тк b.

Для существования данного интеграла необходимо и достаточно выполнение следующего условия: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_0 < b \ \forall b', b''$ таких что $(b_0 < b' < b'' < b)$:

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Д-во: Рассмотрим ф-цию $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a < x < b$, ~~тогда~~ Существование $\int_a^b f(t)dt$

эквивалентно существованию $\lim_{x\to b-0} F(x)$ (по опред) (3)
что, в свою очередь, эквивалентно выполнению условия Коши: $\forall \varepsilon>0\ \exists b_0<b,\ \forall b', b''\ (b_0<b'<b''<b)$

$: |F(b'')-F(b')|<\varepsilon$. Так как $F(b'')-F(b')=$

$= \int_{b'}^{b''} f(t)dt$, то теорема доказана

Т-ма 2. Если интегралы $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b \varphi(x)dx$ сх-ся (особенность в точке b), то сх-ся также интеграл $\int_a^b (Af(x)+B\varphi(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b \varphi(x)dx$, здесь A и B - const.

Д-во

$$\int_a^b (Af(x)+B\varphi(x))dx = \lim_{b_0\to b}\int_a^{b_0}(Af+B\varphi)dx =$$

$$= A\lim_{b_0\to b}\int_a^{b_0} f\,dx + B\lim_{b_0\to b}\int_a^{b_0}\varphi\,dx =$$

$$= A\int_a^b f\,dx + B\int_a^b \varphi\,dx$$

Т-ма 3. Абсолютно сх-ся интег-л сх-ся.

Д-во: $\int_a^b |f|dx$ - сх-ся $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists b_0\in(a,b)\ \forall b', b''$
$(b_0<b'<b''<b)$: $\int_{b'}^{b''}|f(x)|dx<\varepsilon$.

Отсюда, т.к. $\left|\int_{b'}^{b''}|f(x)|dx\right| \geqslant \left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| \Rightarrow$

$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$; получили, что

для $\int_a^b f(x)\,dx$ выполняется условие критерия

Коши, а значит, он сх-ся.

<u>Замечание</u>. Для абсолютно сх-ся инт-ла $\int_a^b f(x)dx$ справедливо неравенство: $\left|\int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f| dx$.

После перехода к пределу при $b' \to b$ получим нужное неравенство.

Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Пусть $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)dx$ имеет единств. особенность в т.к b. Тогда ф-у $F(b') = \int_a^{b'} f(x)dx$ $(a < b' < b)$ от b' не убывает, и, следовательно, если $F(b') \leq M$ $\forall b' \in (a, b)$, то $\exists$ интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)dx \leq M$$

Если же $F(b')$ не ограничена, то интеграл расходится. (5)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f(x)dx = +\infty$$

При этом пишут (только в случае $f(x)\geq 0$ на $[a, b]$):

$$\int_a^b f(x)dx < \infty, \text{ если инт-л сх-ся}$$

$$\int_a^b f(x)dx = +\infty, \text{ если ин-л расх-ся}$$

Т-ма 1. Пусть интегралы $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b \varphi(x)dx$ имеют ед. особенность в т. b и на $[a, b]$ спр-во неравенство $0\leq f(x) \leq \varphi(x)$. Тогда из сх-ти

$\int_a^b \varphi(x)dx \Rightarrow$ сх-ть $\int_a^b f(x)dx$ и справедливо неравенство $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$, а из расх-ти $\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$ расх-ть $\int_a^b \varphi(x)dx$.

Д-во: Из неравенства $f(x)\leq\varphi(x) \Rightarrow \forall b' \in (a, b)$.

$$\int_a^{b'} f(x)dx \leq \int_a^{b'} \varphi(x)dx.$$

Если теперь $\int_a^b \varphi(x)dx$ сх-ся, то $\int_a^{b'} f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$, а так как $\int\limits_a^{b'} f(x)dx$ при возрастании b' не убывает, то $\lim\limits_{b'\to b}\int\limits_a^{b'} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Если же $\int\limits_a^b f(x)dx$ рас-ся, т.е. $\lim\limits_{b'\to b}\int\limits_a^{b'} f(x)dx = +\infty$,

$\lim\limits_{b'\to b}\int\limits_a^{b'} \varphi(x) = +\infty$

Т-ма 2. Пусть интегр-лы $\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ имеют единств особенность в тчк b; $f(x), \varphi(x) > 0$ на $[a, b)$ и $\exists$ предел $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0$ (1),

тогда эти интегралы одновременно сх-ся или одновременно расходятся.

Д-во: Из (1) $\Rightarrow$, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists c \in [a, b]$ т, что

$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < A + \varepsilon \ (c < x < b)$.

Отсюда т.к. $\varphi(x) > 0 \Rightarrow (A-\varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (A+\varepsilon)\varphi(x)$, $(c < x < b)$ (2)

Из сх-ти $\int\limits_a^b \varphi(x)dx \Rightarrow$ сх-ть $\int\limits_c^b \varphi(x)dx \Rightarrow$ сх-ть $\int\limits_c^b (A+\varepsilon)\varphi(x)dx \Rightarrow$ (по теореме 1) $\Rightarrow$ сх-ть $\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow$ сх-ть $\int\limits_a^b f(x)dx$. Далее, пусть сх-ся $\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow \int\limits_c^b f(x)dx$ - сх-ся $\Rightarrow \int\limits_c^b (A-\varepsilon)\varphi(x)dx$ - сх-ся $\Rightarrow \int\limits_c^b \varphi(x)dx$ - сх-ся $\Rightarrow \int\limits_a^b \varphi(x)dx$ - сх-ся.

Главное значение несобственного интеграла

Опр. Пусть функ $f(x)$ определена на прямой $-\infty<x<\infty$ и интегрируема на каждом сегменте, принадлежащей этой прямой. Будем говорить, что функ $f(x)$ интегрируема по Коши, если $\exists$ предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$

Этот предел изв главным значением несобственного интеграла от функ $f(x)$ (в смысле Коши) и обозначается

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$$

Утверждение. Пусть функ $f(x)$ интегрируема на каждом сегменте прямой $-\infty<x<+\infty$. Если эта функ $f(x)$ нечетна, то она интегрируема по Коши {в смысле V.p} и главное значение интеграла от нее равняется нулю.

Если функ $f(x)$ четна, то она интегрируема по Коши {V.p} тогда и только тогда, когда сх-ся несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$.

Опр. Пусть функ $f(x)$ определена на сегменте $[a,b]$, кроме может быть, точки $a<c<b$, и интегрируема на $\forall$ сегменте, принадлежащим

либо $[a, c]$, либо $(c, b]$. Будем говорить, что ф-цу $f(x)$ интегрируема по Коши, если ∃ предел

$$\lim_{\alpha \to +0} \left(\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha}^{b} f(x)dx \right) = V.p. \int_a^b f(x)dx, \alpha > 0$$

изв главным значением интеграла в смысле Коши

Пр.

$f(x) = \frac{1}{x-c}$, ~~[illegible]~~ не интегрируема на $[a, b]$, при $a < c < b$, т.е. $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ расх-ся при $a < c < b$, Но

$$V.p. \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{d \to +0} \left(\int_a^{c-d} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+d}^{b} \frac{dx}{x-c} \right) = \ln \frac{b-c}{c-a}$$