МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 41, № 6 (1987)

О КОММУТАТИВНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ АЛГЕБРАХ РАНГА 2 НАД СОВЕРШЕННЫМ ПОЛЕМ

С. Н. Тронин

В настоящей заметке, которую можно рассматривать как продолжение [1], доказывается, что каждая конечно порожденная проективная коммутативно-ассоциативная алгебра степени трансцендентности 2 над совершенным полем изоморфна кольцу многочленов от двух переменных. Попутно уточняются некоторые другие результаты [1].

Пусть имеются категории $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и функторы D: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, U: $\mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, а также функторы «свободных объектов» $F_{\mathfrak{M}}$: Sets $\to \mathfrak{M}$, $F_{\mathfrak{N}}$: Sets $\to \mathfrak{N}$, причем можно считать, что $DF_{\mathfrak{M}} \cong F_{\mathfrak{N}}$, $UF_{\mathfrak{N}} \cong F_{\mathfrak{M}}$. Зафиксируем эти естественные изоморфизмы и рассмотрим морфизмы в категории $\mathfrak{M}$: π: $F_{\mathfrak{M}}(X) \to B$, ϑ: $B \to F_{\mathfrak{M}}(X)$ такие, что $\pi\vartheta = 1_B$. Теперь можно определить $\varphi(\pi, \vartheta)$: $B \to UD(B)$, $\psi(\pi, \vartheta)$: $UD(B) \to B$ как композиции:

$$B \xrightarrow{\vartheta} F_{\mathfrak{M}}(X) \xrightarrow{\cong} UDF_{\mathfrak{M}}(X) \xrightarrow{UD(\pi)} UD(B),$$

$$UD(B) \xrightarrow{UD(\vartheta)} UDF_{\mathfrak{M}}(X) \xrightarrow{\cong} F_{\mathfrak{M}}(X) \xrightarrow{\pi} B.$$

В [1] фактически был рассмотрен следующий случай: $\mathfrak{M}$ — категория пар $(B, \mathfrak{B})$, где B — коммутативная ассоциативная A-алгебра, $\mathfrak{B}$ — идеал аугментации, $B = A \oplus \mathfrak{B}$, и морфизмы — гомоморфизмы A-алгебр f: $(B, \mathfrak{B}) \to (C, \mathfrak{L})$ такие, что $f(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{L}$, $\mathfrak{N} = \text{mod-}A$, $D((B, \mathfrak{B})) = \mathfrak{B}/\mathfrak{B}^2$, $U(N) = (S_A(N), NS_A(N))$, $F_{\mathfrak{M}}$ и $F_{\mathfrak{N}}$ определяются очевидным образом. Имеется изоморфизм $UD((B, \mathfrak{B}) = S_A(\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^2) \cong S_A(\Omega^1_{B/A} \otimes_B A)$, зависящий только от выбора $\mathfrak{B} \subset B$, и можно переписать $\varphi(\pi, \vartheta)$ так, как это сделано, например, в [2]:

$$\varphi(\pi, \vartheta)\colon B \xrightarrow{\vartheta} F_{\mathfrak{M}}(X) = A[X] \cong$$

$$\cong S_{A[X]}(\Omega^1_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} B \otimes_B A) \xrightarrow{S(\bar{\pi}\otimes 1)} S_A(\Omega^1_{B/A} \otimes_B A) = B_0.$$

Аналогично записывается $\psi(\pi, \vartheta)$ (чтобы упростить запись, опущена информация об идеалах аугментации, которые предполагаются фиксированными). Здесь через $\bar{\pi}$ обозначен гомоморфизм B-модулей

$$\Omega^1_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} B \to \Omega^1_{B/A}, \quad \bar{\pi}(dh \otimes b) = d(\pi(h))\, b.$$

ЛЕММА. *Гомоморфизмы модулей дифференциалов*

$$\overline{\psi(\pi, \vartheta)}\colon \Omega^1_{B_0/A} \otimes_{B_0} B \to \Omega^1_{B/A},$$

$$\overline{\varphi(\pi, \vartheta)}\colon \Omega^1_{B/A} \otimes_B B_0 \to \Omega^1_{B_0/A}$$

являются мономорфизмами.

Доказательство. Хорошо известно, что если $\Omega^1_{B/A} = P$ (это — конечно порожденный проективный B-модуль), то

$$\Omega^1_{B_0/A} = (P \otimes_B A) \otimes_A B_0.$$

Так как все идемпотенты B содержатся в A, то, согласно [3, лемма 3.1 из гл. 9 и предложение 7.3 из гл. 3], ранги модулей, о которых идет речь в формулировке леммы, равны. Перейдем к пополнениям: B в $\mathfrak{B}$-адической фильтрации и B_0 в стандартной убывающей фильтрации симметрической алгебры. Рассмотрим соответствующие фильтрации и пополнения модулей. Из определения φ и ψ следует, что $D(\varphi(\pi, \vartheta))$ и $D(\psi(\pi, \vartheta))$ — естественные изоморфизмы $D(B)$ и $DUD(B)$. Отсюда вытекает, что пополнения $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ — сюръекции, а так как ранги равны, то и биекции. Ввиду отделимости фильтраций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ обязаны быть инъективными.

ТЕОРЕМА. *Если A — поле, то $\varphi(\pi, \vartheta)$ и $\psi(\pi, \vartheta)$ индуцируют сепарабельные расширения полей частных B и B_0.*

Доказательство. Обозначим поле частных B через $qt(B)$. Известно (см., например, [4]), что $\Omega^1_{B/A} \otimes \otimes_B qt(B) \cong \Omega^1_{qt(B)/A}$. Достаточно показать, что $\varphi(\pi, \vartheta)$

индуцирует изоморфизм $\Omega^1_{qt(B)/A} \otimes_{qt(B)} qt(B_0) \to \Omega^1_{qt(B_0)/A}$ и аналогичный факт относительно $\psi(\pi, \vartheta)$. Из естественного изоморфизма

$$\Omega^1_{qt(B)/A} \otimes_{qt(B)} qt(B_0) \cong \Omega^1_{B/A} \otimes_B B_0 \otimes_{B_0} qt(B_0)$$

получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^1_{B/A} \otimes_B B_0 & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \Omega^1_{B_0/A} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Omega^1_{B/A} \otimes_B B_0 \otimes_{B_0} qt(B_0) & \xrightarrow{\bar{\varphi} \otimes 1} & \Omega^1_{B_0/A} \otimes_{B_0} qt(B_0) \\
\cong\downarrow & & \cong\downarrow \\
\Omega^1_{qt(B)/A} \otimes_{qt(B)} qt(B_0) & \longrightarrow & \Omega^1_{qt(B_0)/A}
\end{array}$$

Вертикальные стрелки — мономорфизмы. Так как $qt(B_0)$ — плоский B_0-модуль, то интересующее нас отображение, согласно лемме,— инъективный гомоморфизм векторных пространств одинаковой размерности, следовательно, биекция. Подобным же образом проводятся рассуждения с $\psi(\pi, \vartheta)$. Сепарабельность вытекает, например, из [5, гл. 2, теорема 40].

Следствие. *Пусть A — совершенное поле, B — конечно порожденная проективная A-алгебра размерности Крулля 2. Тогда $B \cong A[X_1, X_2]$.*

Доказательство. Ранее это было доказано в предположении «стабильной свободности» B: $B[Y_1, \ldots, Y_m] \cong A[X_1, \ldots, X_{m+2}]$ (см. [6, 7, 8] и ряд других работ). Мы рассматриваем произвольный ретракт кольца многочленов. Рассуждения те же, что и в [1], где, не имея доказанной выше теоремы, пришлось брать поле нулевой характеристики. Применяется теорема 3 [7]. В ней требуется вложение B в $A[X_1, X_2]$, индуцирующее сепарабельное расширение полей частных,— это обеспечивает любой $\varphi(\pi, \vartheta)$. Далее, требуется регулярность B и факториальность $B \otimes_A \bar{A}$, где $\bar{A}$ — алгебраическое замыкание A. Регулярность доказана в [9, теорема 4.2, с. 289], факториальность самой алгебры B — в [10].

Стоит отметить, что в работе [7] при доказательстве теоремы о сокращении фактически также был использован гомоморфизм вида $\varphi(\pi, \vartheta)$. Это следует из того, что, как можно показать, любой гомоморфизм φ': $B \to B_0$ такой, что $D(\varphi')$ — естественный изоморфизм, представим в виде $\varphi' = \varphi(\pi, \vartheta)$ для некоторых π: $A[X] \to B$, ϑ: $B \to A[X]$,

$\pi\vartheta = 1$. Аналогичный факт выполняется для $\psi'\colon B_0 \to B$. Доказательство ввиду его длины будет опубликовано в другой работе (см. также [11]).

Предложение 1 [1] справедливо в гораздо более общей ситуации, например, для линейных мультиоператорных алгебр или для модулей над кольцами вида $R = A \oplus \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ — идеал и $\mathfrak{R}$-адическая фильтрация отделима. Следствием является то, что ретракты пополнений свободных алгебр изоморфны с помощью любых $\varphi(\pi, \vartheta)$ или $\psi(\pi, \vartheta)$ пополнениям свободных алгебр (точнее — пополнениям аналогов симметрических алгебр проективных модулей, существующих в любом однородном многообразии). В частности, вновь получается доказанный другим способом в [12] результат о свободности проективных алгебр в нильпотентных многообразиях. Заметим еще, что в следствии 1 [1, с. 649] условие $\mathrm{Ker}(\pi) \subset ((X))$ является излишним. Это непосредственно вытекает из следствия В [13], результаты и доказательства которой, в сущности, не требуют предположения коммутативности.

Что касается остальных результатов [1], то предложение 2 обобщено в [2, предложение 2], и, наконец, можно указать простые примеры $\varphi(\pi, \vartheta)$ и $\psi(\pi, \vartheta)$, не биективных одновременно. Вот один из них. Пусть $B = A[X]$ — кольцо многочленов от одного переменного. Определим

$$\pi\colon A[Y_1, Y_2] \to B, \quad \vartheta\colon B \to A[Y_1, Y_2],$$
$$\pi(Y_1) = X, \ \ \pi(Y_2) = aX^2, \ \ \vartheta(X) = Y_1 + Y_2^2 - a^2Y_1^4.$$

После отождествления B_0 с $A[X]$ имеем $\varphi(\pi, \vartheta)(X) = X - a^2X^4$, $\psi(\pi, \vartheta)(X) = X$. Если $a^2 \neq 0$, то $\varphi(\pi, \vartheta)$ — не биекция, тогда как $\psi(\pi, \vartheta)$ — изоморфизм.

Казанский государственный
университет им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
29.12.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тронин С. Н. Об одной конструкции в теории проективных алгебр // Математические заметки, 1984, т. 35, вып. 5. С. 647—652.

[2] Тронин С. Н. О ретракциях колец многочленов // Изв. вузов. Математика. 1985. № 2. С. 84—85.

[3] Басс Х. Алгебраическая K-теория. М.: Мир, 1973.

[4] Nakai Y. High order derivations I // Osaka J. Math. 1970. V. 7, № 1. P. 1—27.

[5] Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. М.: ИЛ, 1963. Т. 1.

[6] F u j i t a T. On Zariski problem // Proc. Japan Acad. 1979. A 55, № 3. P. 106—110.
[7] R u s s e l P. On Affine-Ruled rational surfaces // Math. Ann. 1981. V. 255, № 3. P. 287—302.
[8] K a m b a y a s h i T. On Fujita's strong cancellation theorem for the affine plane // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1 A Math. 1980. V. 27, № 3. P. 535—548.
[9] C o n n e l l E. H. A K-theory for the category of projective algebras // J. Pure Appl. Algebra. 1974. V. 5, № 2. P. 281—292.
[10] А р т а м о н о в В. А. Орбиты группы $GL\,(r,\, k\,[x_1, \ldots, x_n])$ // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1974. Т. 38, № 3. С. 484—494.
[11] Т р о н и н С. Н. О ретракциях свободных алгебр // Тезисы сообщений XVIII Всесоюзной алгебраической конференции / Кишинев, 1985.
[12] А р т а м о н о в В. А. Нильпотентность, проективность, свобода // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1971, № 5. С. 50—53.
[13] E a k i n P., S a t h a y e A. R-endomorphisms of $R\,[[X]]$ are essentially continuous // Pacific J. Math. 1976. V. 66, № 1. P. 83—87.