

Федеральное агентство научных организаций

Федеральный исследовательский центр

Институт прикладной физики РАН

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ' 2016

Нижний Новгород
ИПФ РАН
2017

УДК 534.222.2

ББК 22.312я4

Н49

Издано по решению редакционно-издательского совета
ФИЦ «Институт прикладной физики РАН»

Ответственные редакторы:

академик РАН *А. М. Сергеев*,

доктор физико-математических наук *А. В. Слюняев*

Организационно-финансовая поддержка:

- Федеральное агентство научных организаций;
- Министерство образования и науки Российской Федерации (мегагрант № 14.Z50.31.0007 «Лабораторные и численные исследования плазменных явлений в экстремальных астрофизических объектах», ведущий ученый Фукс Жулиан Соуля; № 14.Z50.31.0033 «Новые подходы к исследованиям климатических процессов и прогнозы экстремальных явлений», ведущий ученый Куртц Юрген Герберт Густав);
- Российский научный фонд (проект № 15-12-30021);
- Российский фонд фундаментальных исследований (проект № 16-02-20129);
- Научно-производственное предприятие «ГИКОМ».

Н49 **Нелинейные волны' 2016** / Федер. агентство науч. орг., Федер. исслед. центр Ин-т приклад. физики РАН ; отв. ред. А. М. Сергеев, А. В. Слюняев. — Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2017. — 320 с.

ISBN 978-5-8048-0119-0

В сборник включены статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на XVII школе по нелинейным волнам (Нижний Новгород, февраль — март 2016 г.). В работах обсуждаются разнообразные аспекты нелинейной науки — физика экстремальных световых полей, процессы в геофизике, в астрофизике и космологии, динамика вихрей в квантовых системах и гидродинамике, исследования нейросистем.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся изучением нелинейных явлений, а также на аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

УДК 534.222.2

ББК 22.312я4

ISBN 978-5-8048-0119-0

© ИПФ РАН, 2017

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ БАРОКЛИННЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ

А. В. Елисеев

Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, г. Москва
Казанский (Приволжский) федеральный университет

Введение

Бароклинная неустойчивость — основной механизм развития погодных возмущений в земной атмосфере. Она представляет собой наклонную конвекцию во вращающейся жидкости [1].

Физически бароклинный циклогенез можно описать следующим образом [2] (рис. 1). При приходе начальной циклонической (с завихренностью $\delta\zeta > 0$ — показана большой серой круговой стрелкой на рис. 1) аномалии в верхнюю тропосферу данного региона она передаётся в нижнюю тропосферу в случае выполнения условий бароклинной неустойчивости (малая серая круговая стрелка). Адвекция температуры (точнее, потенциальной температуры) приводит к возникновению индуцированной циклонической аномалии у земной поверхности (малая незаштрихованная круговая стрелка) к востоку от исходного циклона. Благодаря восходящим движениям эта аномалия передаётся в верхнюю тропосферу (большая незаштрихованная круговая стрелка), усиливая исходный циклон.

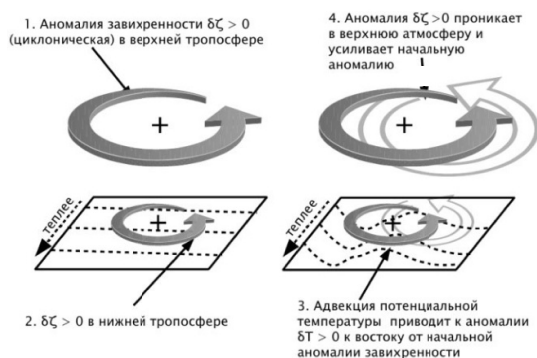


Рис. 1. Физическая схема развития бароклинной неустойчивости. Круговыми стрелками показано направление вращения в вихрях (серая стрелка — исходная аномалия, незаштрихованная стрелка — индуцированная аномалия). Пунктирными линиями показано распределение температуры на подстилающей поверхности, пунктирной стрелкой — направление её увеличения

Методы теоретического анализа бароклинной неустойчивости можно подразделить на две группы. К первой из них относится линейный метод анализа нормальных мод. Решения уравнения термогидромеханики для

любой векторной переменной $Y(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, а t — время, в этой группе методов ищутся в виде

$$Y = \text{Re} [\hat{Y} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-ct)}]. \quad (1)$$

Здесь i — мнимая единица, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор, $c = c_r + ic_i$ — комплексная фазовая скорость, $\hat{Y}(\mathbf{r}, t)$ — комплексная амплитуда, медленно меняющаяся в пространстве и времени:

$$\left| \frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial x} \right| \ll k_x, \quad \left| \frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial y} \right| \ll k_y, \quad \left| \frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial z} \right| \ll k_z, \quad \left| \frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial t} \right| \ll |c\mathbf{k}|. \quad (2)$$

При этом предполагается, что наиболее неустойчивая волна (т. е. волна с максимальным положительным $\text{Im } c_i |\mathbf{k}|$) определяет структуру развивающихся бароклиных возмущений. В приложениях метода нормальных мод уравнения, как правило, линеаризуются, что исключает исследование нелинейных процессов.

При использовании второй группы задача Коши решается при заданных начальных условиях для нелинейных уравнений термогидромеханики. Это позволяет анализировать не только линейные, но и нелинейные процессы бароклиной неустойчивости.

В нашей статье дан обзор основных результатов, полученных разными авторами к настоящему времени и касающихся обоих методов анализа бароклиной неустойчивости.

1. Линейная модель развития бароклиных возмущений

Теоретические модели развития бароклиных волн в атмосфере были впервые предложены в 1947 году Дж. Г. Чарни [3] и в 1949 году Ю. Т. Иди [4]. В обоих случаях рассматривались квазигеострофические возмущения (т. е. движения, в которых горизонтальный градиент давления уравновешивается силой Кориолиса [1, 2] и изменением скорости ветра) с зональным волновым числом $k_y = 0$. При этом также считалось, что скорость ветра \bar{u} , на фоне которой развиваются бароклиные волны, зависит от давления p (выбранного в качестве вертикальной координаты) линейно, с коэффициентом Λ . Существенное различие между моделями [3] и [4] состоит в том, что в первой работе движения рассматриваются на β -плоскости (т. е. в случае, когда параметр Кориолиса $f = 2\Omega \sin \varphi$, где Ω — угловая скорость вращения Земли, φ — географическая широта, представляется в линейном виде $f = f_0 + \beta y$ с постоянными f_0 и β ; $y = a\varphi$ — меридиональная координата, a — радиус Земли), тогда как во второй — на f -плоскости ($f \equiv f_0$).

В модели [4] для слоя атмосферы между изобарическими уровнями p_0 (поверхность) и $p_1 \ll p_0$ (тропопауза) уравнение для амплитуды Ψ синоптических возмущений функции тока имеет вид

$$ik_x[\bar{u}(p) - c] \left(-k_x^2 \Psi + n^2 \frac{d^2 \Psi}{dp^2} \right) = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями

$$ik_x[\bar{u}(p_j) - c] \frac{d\Psi}{dp} + ik_x \Lambda \Psi = 0 \quad \text{при } j = 0, 1. \quad (4)$$

Здесь $n^2 = p^2 / L_R^2$, радиус деформации Россби $L_R = (g H_0)^{1/2} / f_0 \sim 10^3$ км, g — ускорение свободного падения, H_0 — высота однородной атмосферы (экспоненциальный масштаб уменьшения плотности воздуха с высотой) и для простоты считается, что $n^2 = \text{const}$. Из условия сохранения энергии следует, что если есть решение с фазовой скоростью распространения волн c_1 , то должно быть решение с фазовой скоростью $c_2 = c_1^*$. Поэтому для доказательства наличия бароклиной неустойчивости достаточно показать, что есть решения с чисто комплексными c . После деления уравнения (3) на $(\bar{u}(p) - c)$ получается уравнение, в котором множитель в круглых скобках из (3) приравнивается к нулю. Бароклиная неустойчивость возникает при условии $\alpha < \alpha_c \approx 2,4$, где $\alpha = (k_x / n)(p_0 - p_1)$. Скорость роста этих возмущений $k_x \text{Im } c_i$ максимальна (что соответствует наиболее неустойчивой моде) при $\alpha \approx 1,75$. Такая модель в целом воспроизводит основные особенности бароклиных возмущений в земной атмосфере.

Для простейших оценок в выражении для n можно заменить p на $\frac{1}{2}(p_0 + p_1)$, а затем положить $p_1 = p_0 / 3$ (это упрощает выкладки, хотя и несколько противоречит исходному предположению $p_1 \ll p_0$). В таком случае длина волны, соответствующая максимально неустойчивой моде, оказывается равной $3,6L_R$ (несколько тысяч километров), скорость её роста

$$(k_x \text{Im } c_i)_{\max} \approx 0,31 (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) / L_R \quad (5)$$

(эта величина получила название показателя Иди), где $\bar{u}_1 = \bar{u}(p_1)$, $\bar{u}_2 = \bar{u}(p_2)$. Последнее при $u_1 - u_0 \sim 10$ м/с приводит к характерному времени развития возмущений $[(k_x \text{Im } c_i)_{\max}]^{-1} \sim 4$ сут. Эти оценки дают правильные по порядку значения для характерного горизонтального размера бароклиных волн в атмосфере и характерного временного интервала смены погоды.

Обобщение модели Иди [4] на более общий класс негеострофических движений проведено в статье [5].

2. Роль нелинейного взаимодействия между отдельными бароклиными волнами при циклогенезе

Пренебрежение корнями разности $\bar{u}(p) - c$ в уравнении (3) приводит к исчезновению у этого уравнения непрерывного спектра. При этом в его решениях остаётся только дискретный спектр счётной мощности [6]. Не-

смотря на то что о существовании этого спектра было известно ещё с начала XX века [7, 8], долгое время решениям из непрерывного спектра не придавалось значения, так как они растут пропорционально степенной функции от времени [9], т. е. значительно медленнее, чем экспоненциально растущие неустойчивые дискретные моды (см. раздел 1).

Для динамической системы с вектором состояния $Y \in \mathbf{H}_Y$ и эволюционным оператором A

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \quad Y \in \mathbf{H}_Y, \quad (6)$$

справедлива спектральная теорема, согласно которой, если оператор $A(t)$ является нормальным (т. е. линейным, ограниченным в гильбертовом пространстве, а также перестановочным со своим сопряжённым), то он имеет дискретный счётный спектр $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ (при конечно-разностной аппроксимации этого оператора спектр всегда имеет конечную мощность), а в пространстве \mathbf{H}_Y можно построить ортонормированный базис $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$ из собственных векторов этого оператора [10].

Из определения собственных векторов оператора

$$A(t) \Phi_j(t) = \lambda_j \Phi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

с учётом (6) следует, что для всех j справедливо $\Phi_j(t) = \Phi_j(0)e^{\lambda_j t}$, т. е. собственные векторы дифференциального линейного оператора являются его нормальными модами.

Однако гидротермодинамический оператор (уравнения Навье — Стокса + термодинамическое уравнение + уравнение неразрывности) в трёхмерном евклидовом пространстве в общем случае не является нормальным. Строго говоря, он даже не является линейным. Как следствие, полного базиса из его собственных векторов построить невозможно. Собственные векторы его дискретного спектра могут быть подвергнуты процедуре ортогонализации, но полученный при этом набор векторов не будет полон в пространстве решений гидротермодинамического оператора. Система собственных векторов этого оператора может быть сделана полной в \mathbf{H}_Y добавлением собственных векторов из непрерывного спектра [6], однако мощность такого набора уже несчётна, и векторы из этого набора не могут быть сделаны взаимно ортогональными. Физически это выражается в том, что при нарастании бароклиных возмущений в земной атмосфере возникает взаимодействие между отдельными модами решения, влияющее на развитие этих возмущений.

Пионерские работы, в которых рассматривалось такое взаимодействие, были выполнены Дж. Фэррелом [11, 12]. В частности, в статье [11] было продемонстрировано, что межмодовое взаимодействие для классической задачи Иди (раздел 1) способно приводить к тому, что скорость нарастания со временем для мод, формально не являющихся наиболее неустойчивыми, может превышать скорость роста наиболее неустойчивой

моды. В целом наиболее неустойчивая бароклидная мода доминирует в первые часы развития бароклидной неустойчивости, а затем — начиная с временного горизонта, равного примерно 1 неделе (следует иметь в виду, что, как отмечено в разделе 1, одна неделя — характерная длительность существования бароклидных образований). Для наиболее интересных с точки зрения погодных явлений временных горизонтов (от нескольких часов до нескольких суток) её влияние оказывается не столь значимым по сравнению с модой, приток энергии к которой обеспечивается нелинейным межволновым взаимодействием. Более того, нелинейное взаимодействие между отдельными бароклидными волнами способно приводить к нарастанию даже волн, формально не являющихся неустойчивыми [12].

Диагностика важности такого взаимодействия может быть проведена с использованием подхода, предложенного в работе [13] и развитого в исследовании [14] (рис. 2). Он основан на анализе симметрии функций распределения вероятности (ФРВ) для погодных аномалий переменных. При этом для переменной Y выделяются среднее значение \bar{Y} и погодная аномалия $Y' = Y - \bar{Y}$. В связи с особенностями формирования погодных аномалий на разных временных масштабах ряд $Y'(t)$ можно затем подвергнуть фильтрации. В работе [14] таким образом выделены два интервала временных масштабов: синоптическая изменчивость (СИ) — 2—7 сут. (характерная для погодных процессов, см. выше) и низкочастотная изменчивость (НИ) — 9—30 сут. (которая часто связана с формированием блокирующих антициклонов в атмосфере — см., например, [15, 16]). В качестве характеристики близости ФРВ к симметричной удобно использовать асимметрию

$$S_Y = \frac{\overline{Y'^3}}{\sigma^3}, \quad (8)$$

где σ — стандартное отклонение ряда $Y'(t)$. В случае линейной динамики развития бароклидных возмущений можно ожидать симметричную ФРВ (рис. 2). Справедливо даже более сильное утверждение — в этом случае ФРВ должна быть нормальной. Поэтому любое статистически значимое отклонение S_Y от нуля можно рассматривать как проявление эффективной нелинейности динамики.

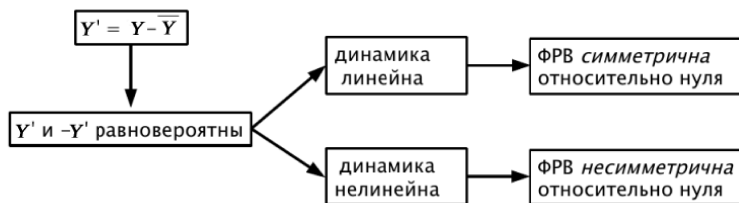


Рис. 2. Схема диагностики вклада нелинейных межволновых взаимодействий, основанная на оценке характеристик ФРВ для погодной переменной Y [18, 19]

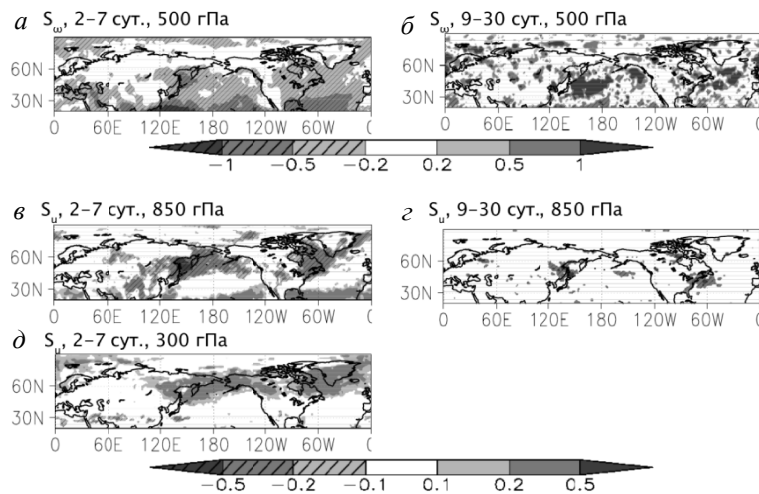


Рис. 3. Асимметрия выборочной функции распределения вероятности в октябре — марте для вертикальной скорости, определенной через производную от давления по времени, $\omega = dp/dt$, в изобарических координатах на изобарическом уровне 500 гПа (*a, б*) и для зональной скорости на изобарических уровнях 850 гПа (*в, г*) и 300 гПа (*д*). Рисунки представлены для интервалов временных масштабов 2—7 сут. (*a, в, д*) и 9—30 сут. (*б, г*). Поля сглажены 9-точечным квадратным пространственным фильтром. Отмечены лишь узлы расчётной сетки с $|s| > 2$ ($s = S_Y/\sigma_{S,G}$, оценка стандартного отклонения гауссова процесса $\sigma_{S,G} = (6/N_{eff})^{1/2}$, эффективная длина ряда $N_{eff} = N(1 - r_1)$, N — исходная длина ряда, r_1 — коэффициент автокорреляции этого ряда с единичным лагом)

В работе [14] с использованием данных реанализа JRA-55 (http://jra.kishou.go.jp/JRA-55/index_en.html) этот метод применён для анализа асимметрии функций распределения вероятности ряда атмосферных переменных, характеризующих состояние тропосферы Северного полушария в 1976—2014 годах. Статистически значимые отклонения от симметричного распределения вероятности наиболее сильно проявляются в регионах наиболее частого формирования атмосферных погодных возмущений — над западными частями океанов средних широт и ниже по потоку в атмосфере (рис. 3). В интервале СИ для всей толщи свободной тропосферы выявляется отрицательная асимметрия вертикальной скорости в изобарических координатах, что согласуется с общим доминированием циклонических аномалий в этом интервале временных масштабов. В интервале НИ асимметрия этой переменной во всей свободной тропосфере положительна, что указывает на доминирование антициклонических аномалий на этих временных масштабах. Для зональной скорости, температуры и геопотенциала знак асимметрии ФРВ при изменчивости с временными масштабами 2—7 сут. различен для верхней и нижней свободной тропосферы.

3. Взаимодействие бароклиных волн с основным потоком

Источником энергии бароклиных волн является фоновая (практически зональная) циркуляция [1, 2]. Частично энергия бароклиных вихрей передаётся фоновому потоку на стадии диссипации этих вихрей [17—19]. По имени автора работы [17] энергетический цикл бароклиных волн назван циклом Лоренца.

Оценка составляющих цикла Лоренца бароклиных вихрей по современным данным реанализа NCEP2 и ERA-40 была выполнена в исследовании [20] (рис. 4). Источником общей циркуляции атмосферы служит различие радиационного нагрева между тропиками и высокими широтами, которое порождает потенциальную энергию основного потока P_M . Этот поток, однако, неустойчив относительно бароклиных возмущений, что приводит к формированию вихревой потенциальной энергии P_E (небольшой вклад в неё также обусловлен генерацией потенциальной вихревой энергии $G(P_E)$). Так как развитие вихрей связано с движением в атмосфере, то при этом одновременно формируется и вихревая кинетическая энергия K_E , которая затрачивается в основном при диссипации вихрей (связанной с трением о поверхность и радиационной релаксацией). Однако около

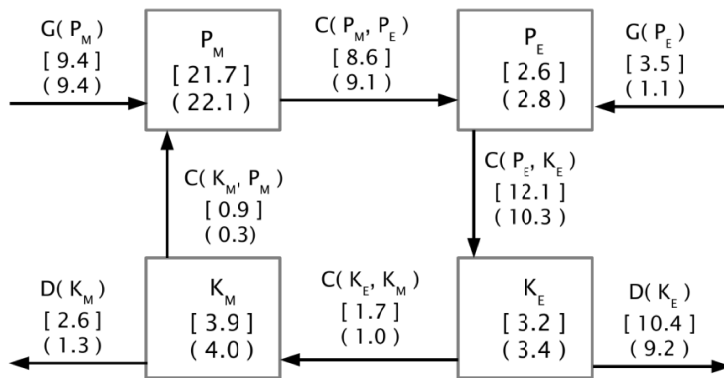


Рис. 4. Компоненты цикла Лоренца земной атмосферы по данным реанализа NCEP2 (<http://www.esrl.noaa.gov/psd/data/gridded/data.ncep.reanalysis2.html>) — числа в квадратных скобках и ERA-40 (<http://apps.ecmwf.int/datasets/data/era40-daily/levtype=pl/>) — числа в круглых скобках соответственно [9]: P_M — потенциальная энергия основного потока, P_E — потенциальная энергия вихрей, K_M — кинетическая энергия основного потока, K_E — кинетическая энергия вихрей, $G(Y)$ — генерация Y , $C(Y, Z)$ — преобразование энергии из Y в Z (стрелками указано направление этого преобразования), $D(Y)$ — диссипация Y ($Y, Z = P_M, P_E, K_M, K_E$). Энергия выражена в 10^{20} Дж, преобразования энергии — в 10^{14} Вт

1/10 интенсивности преобразования P_E в K_E затем переходит в кинетическую энергию основного потока K_M . Большая часть кинетической энергии основного потока затрачивается на диссипацию, но некоторая часть этой энергии переходит в потенциальную энергию основного потока P_M .

Общая теория взаимодействия волн с зональным потоком изложена в статье [21], где в квазигеострофическом приближении на f -плоскости получены уравнения, связывающие зонально осреднённые значения атмосферных переменных (обозначенных ниже чертой сверху) с характеристиками вихревого воздействия (обозначенных штрихами):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f_0 \bar{v} = -\frac{\partial(\overline{uv'})}{\partial y} + \bar{X}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{N^2 H_0}{R} \bar{w} = -\frac{\partial(\overline{v'T'})}{\partial y} + \bar{J}, \quad (10)$$

где u , v и w — зональная, меридиональная и вертикальная компоненты скорости, T — температура, N — частота Брента — Вайсяля, вычисляемая по полям давления и температуры и служащая одной из характеристик устойчивости атмосферы [1, 2] (в [21] для простоты предположено, что $N = \text{const}$), X — интенсивность трения о поверхность, J — сумма всех неадиабатических источников изменения температуры. В связи с формулами (9) и (10) в работе [21] введено понятие остаточной среднезональной циркуляции

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{R}{\rho_0 H_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0}{N^2} \overline{v'T'} \right), \quad (11)$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} - \frac{R}{H_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{N^2} \overline{v'T'} \right). \quad (12)$$

Здесь ρ_0 — плотность атмосферы в основном состоянии, подчиняющаяся гидростатическому закону (экспоненциальному уменьшению с ростом высоты с вертикальным масштабом H_0). Подставляя (11), (12) в (9), (10), можно получить элегантные уравнения для изменения характеристик основного (фонового) течения атмосферы:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f_0 \bar{v}^* = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{P} + \bar{X}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{N^2 H_0}{R} \bar{w}^* = \bar{J}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{w}^*) = 0. \quad (15)$$

В этих уравнениях вихревое воздействие на основное течение описывается так называемым потоком Элиассена — Пальма $\mathbf{P} = (P_y, P_z)$:

$$P_y = -\rho_0 \overline{u'v'}, \quad P_z = \rho_0 f_0 L_R \overline{v'T'}. \quad (16)$$

По приведённым в книге [2] данным, величина $\nabla \cdot \mathbf{P}$ максимальна в средних широтах.

4. Модель формирования блокирующих образований в атмосфере как следствия мультистабильности погодных режимов в атмосфере

Нелинейные взаимодействия бароклинных волн со средним потоком способны приводить к множественным положениям равновесия атмосферы. Такие примеры приведены в статье [15], где построена модель формирования блокирующего антициклона в результате быстрого перехода атмосферы из одного равновесного состояния в другое.

Эта модель является частным случаем модели взаимодействия баротропной волны, вызванной возмущением циркуляции из-за топографии, и среднего потока. Блокирующие антициклоны развиваются вследствие бароклинной неустойчивости зонального потока, однако становятся баротропными по мере своего развития. Как следствие, для анализа данной задачи можно использовать линейризованное баротропное геострофическое уравнение возмущения завихренности ζ' , которое для такой топографической волны имеет вид [2]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \zeta' + \beta v' + r \zeta' = -\frac{f_0}{H_0} \bar{u} \frac{\partial h_T}{\partial x}, \quad (17)$$

где v' — возмущение меридиональной скорости, соответствующее возмущению завихренности, r — коэффициент линейной диссипации, h_T — высота топографии. Зональная компонента скорости ветра среднего потока подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -D(\bar{u}) - \kappa(\bar{u} - U_e), \quad (18)$$

где вихревое воздействие описывается первым слагаемым, а радиационная релаксация под влиянием «радиационно-равновесного» ветра U_e — вторым. Для баротропных возмущений, вызванных топографией, можно получить

$$D(\bar{u}) = -\overline{v' \zeta'} - \frac{f_0}{H_0} \overline{v' h_T}. \quad (19)$$

Если топография имеет вид линейного гребня с синусоидальной формой отдельных гор одинаковой высоты h_0 , ширины $2\pi / l$, с расстоянием между ними $2\pi / k$:

$$h_T(x, y) = \text{Re} [h_0 e^{ikx}] \cos(ly), \quad (20)$$

то

$$D(\bar{u}) = -\frac{f_0}{H_0} \overline{v' h_T} = \left(\frac{rK^2 f_0^2}{2\bar{u}H_0^2}\right) \frac{h_0^2 \cos(ly)}{[(K^2 - K_S^2)^2 + \varepsilon^2]}. \quad (21)$$

Здесь $\varepsilon = rK^2(k\bar{u})^{-1}$, $K^2 = k^2 + l^2$, $K_S^2 = \beta/\bar{u}$. Решение системы (18), (21) имеет три положения равновесия, одно из которых неустойчиво (и не имеет физического смысла), а два устойчивы. Одно из устойчивых положений

равновесия соответствует обычному западному переносу в тропосфере средних широт, а второе (с малым значением \bar{u}) — блокированному потоку.

Анализ блокирующих антициклонов в терминах «скрытых долгоживущих состояний» (в ряде случаев соответствующих отдельным состояниям равновесия динамической системы) был проведён в исследовании [22]. При этом выяснилось, что пространственная структура и временная динамика одного из таких «скрытых долгоживущих состояний» хорошо соответствует блокированию в атмосфере.

5. Режимы циркуляции

Результаты, полученные в работе [15], были эвристически обобщены Г. Н. Палмером в виде представлений о режимах циркуляции [23]. Согласно ему, вероятность ряда состояний атмосферы заметно превышает вероятность других её состояний [23]. При этом время пребывания атмосферы в состояниях первого типа также заметно превышает время её пребывания в состояниях второго типа. Первые состояния названы режимами циркуляции, а вторые интерпретируются как переходные между режимами циркуляции. Режимы циркуляции связываются с движениями на (возможно, несвязном) аттракторе. В свою очередь, любое изменение погодной статистики (в том числе климатические изменения) могут быть интерпретированы как изменение вероятности нахождения системы в режимах циркуляции, т. е. как изменение структуры погодного аттрактора.

Для системы (6) решение можно записать через пропагатор \mathfrak{L} :

$$Y(t) = \mathfrak{L}(t)Y(0). \quad (22)$$

Если на систему дополнительно действует внешнее (неавтономное) воздействие $f(t)$

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t) + f(t), \quad (23)$$

то (22) превращается в

$$Y(t) = \mathfrak{L}(t)Y(0) + \int_0^t \mathfrak{L}(t)\mathfrak{L}^{-1}(s)f(s) ds. \quad (24)$$

Если f не зависит от времени, то (24) можно записать в виде

$$Y(t) = \mathfrak{L}(t)Y(0) + \mathbf{I}(t)f, \quad (25)$$

где

$$\mathbf{I}(t) = \int_0^t \mathfrak{L}(t)\mathfrak{L}^{-1}(s) ds. \quad (26)$$

Для линеаризованной системы (23) пропагатор (в этом случае он называется тангенциальным пропагатором)

$$\mathfrak{L} = e^{tF} \quad (F = dA/dt) \quad (27)$$

не зависит от времени и имеет вид квадратной матрицы. Если дополнительно к этому f также не зависит от времени (т. е. справедливо (25)), то сингулярное разложение имеет вид

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*, \quad (28)$$

где \mathbf{U} и \mathbf{V} — матрицы, состоящие из так называемых левых и правых сингулярных векторов \mathbf{u}_j и \mathbf{v}_j соответственно, $j = 1, 2, \dots, M$, $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$, M — размерность \mathbf{F} . Без ограничения общности можно считать, что

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_M. \quad (29)$$

Согласно определению правых и левых сингулярных векторов, при всех $j = 1, 2, \dots, M$ справедливо

$$(\mathbf{I}\mathbf{I})\mathbf{v}_j = \sigma_j^2 \mathbf{v}_j, \quad (30)$$

$$(\mathbf{I}\mathbf{I}^*)\mathbf{u}_j = \sigma_j^2 \mathbf{u}_j. \quad (31)$$

Так как \mathbf{F} в общем случае не является нормальной (раздел 2), то в общем случае $\mathbf{u}_j \neq \mathbf{v}_j$. Однако поскольку оператор $\mathbf{I}\mathbf{I}^* = \mathbf{I}^*\mathbf{I}$, очевидно, является нормальным, то каждый из наборов $\{\mathbf{u}_j\}$ и $\{\mathbf{v}_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, M$) может быть выбран в качестве ортонормального базиса в пространстве решений (23). Тогда каждый вектор любого из этих наборов соответствует определённому режиму циркуляции. Более того, можно показать, что левые сингулярные векторы служат приближениями для ляпуновских векторов системы (23). В таком случае можно ожидать, что наиболее быстрый ляпуновский масштаб времени соответствует времени перехода между режимами циркуляции. Так как временной масштаб последнего перехода равен нескольким суткам, то такое соответствие может быть справедливо только в моделях, в которых более быстрые процессы (например, мезомасштабные синоптические) отфильтрованы. Примером таких фильтрованных уравнений являются квазигеострофические.

Согласно флуктуационно-диссипативной теореме [24], отклик системы на внешнее воздействие определяется автокорреляционной матрицей невозмущённой системы (6). Это согласуется с приведёнными выше соотношениями в случае, когда элементы автокорреляционной матрицы с наибольшими лагами соответствуют максимальным σ_j .

В работе [23] также показано, что аномалия с пространственной структурой \mathbf{Y}_0 наиболее эффективно возбуждается воздействием вида

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}(\mathbf{U}^*\mathbf{Y}_0). \quad (32)$$

Так как структура \mathbf{f}_0 при этом определяется в основном структурой сингулярных векторов с наибольшими σ_j , то отклик \mathbf{Y}_0 , в свою очередь, оказывается не очень чувствителен к географической структуре \mathbf{f}_0 . Последнее частично объясняет успех линейных моделей для анализа бароклинической неустойчивости.

Указанный подход в статье [25] был использован при анализе режимов циркуляции для данных геопотенциала на изобарическом уровне 500 мбар реанализа NCEP/NCAR (<http://www.esrl.noaa.gov/psd/data/gridded/data.ncep.reanalysis.html>) за 1949—1994 годы. Фильтрация быстрых возмущений

циркуляции была осуществлена разложением поля геопотенциала по эмпирическим ортогональным функциям с представлением состояния в виде двух основных векторов этого разложения. При этом ФРВ синоптических аномалий оказалась мультимодальной с 4 максимумами, причём в разные временные интервалы относительная роль этих максимумов (мод) оказалась различной. Работа [25] была подвергнута критике с точки зрения статистической значимости полученных максимумов ФРВ [26, 27]. Тем не менее такой подход может оказаться полезным при анализе климатических изменений.

Выводы

Методы теоретического анализа бароклиной неустойчивости — основного механизма развития погодных возмущений в земной атмосфере [1, 2] — можно разделить на две группы. К первой относится линейный метод анализа нормальных мод, в котором решения уравнений термогидромеханики ищутся в виде линейных бегущих волн без учёта взаимодействия между ними и при этом предполагается, что наиболее неустойчивая волна определяет структуру развивающихся бароклиных возмущений. Вторая группа методов получила название немодального анализа и представляет собой решение задачи Коши при заданных начальных условиях для нелинейных уравнений термогидромеханики. Это позволяет анализировать не только линейные, но и нелинейные процессы.

Классическими примерами приложения метода нормальных мод являются работы [3, 4]. При ряде дополнительных предположений в этих работах развиты теоретические модели бароклиных возмущений, которые в целом адекватно описывают физические особенности циклогенеза в земной атмосфере.

Однако тот факт, что гидродинамический оператор не является нормальным, указывает на важность межмодового взаимодействия при развитии бароклиной неустойчивости. В исследовании [11] было продемонстрировано, что межмодовое взаимодействие для классической задачи Иди [4] способно приводить к тому, что скорость нарастания со временем для мод, формально не являющихся наиболее неустойчивыми, может превышать скорость роста наиболее неустойчивой моды. Нелинейное взаимодействие между отдельными бароклиными волнами способно приводить к нарастанию даже волн, формально не являющихся неустойчивыми [12]. По данным реанализа получается, что взаимодействие между бароклиными модами наиболее значимо в регионах частого формирования атмосферных погодных возмущений — над западными частями океанов средних широт и ниже по потоку в атмосфере [13, 14].

Существенно нелинейным является взаимодействие бароклиных волн с основным (фоновым) потоком в атмосфере. Источником энергии бароклиных волн служит потенциальная энергия основного потока, ко-

торая переходит в потенциальную и кинетическую энергию бароклиных вихрей [1, 2, 17—19]. Вихревая кинетическая энергия в основном затрачивается на диссипацию вихрей, но часть её затем переходит в кинетическую и потенциальную энергию основного потока.

Нелинейное взаимодействие бароклиных волн с основным потоком может приводить к множественным положениям равновесия атмосферы. Например, в работе [15] построена модель формирования блокирующего антициклона благодаря быстрому переходу атмосферы из одного равновесного состояния в другое.

Результаты исследования [15] могут быть обобщены на понятие режимов циркуляции [23]. Такими режимами называются состояния атмосферы, вероятность реализации которых (и время пребывания в которых) заметно превышает вероятность реализации других состояний. Состояния второго типа интерпретируются как переходные между режимами циркуляции. Режимы циркуляции связываются с движениями на аттракторе. В свою очередь, любое изменение погодной статистики (в том числе климатические изменения) могут быть интерпретированы как взаимное изменение вероятности режимов циркуляции, т. е. как изменение структуры погодного аттрактора.

Автор выражает искреннюю благодарность М. В. Курганскому за полезные обсуждения при подготовке рукописи.

Литература

1. Курганский, М. В. Введение в крупномасштабную динамику атмосферы : (адиабатические инварианты и их применение) / М. В. Курганский. — СПб : Гидрометеоздат, 1993. — 168 с.
2. Holton, J. R. An Introduction to Dynamic Meteorology / J. R. Holton. — Cambridge : Academic Press, 2004. — 535 с.
3. Charney, J. G. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current // J. Meteorol. — 1947. — V. 4, № 5. — P. 135—162.
4. Eady, E. T. Long waves and cyclone waves // Tellus. — 1949. — V. 1, № 3. — P. 33—52.
5. Калашиник, М. В. О резонансном и квазирезонансном возбуждении бароклиных волн в модели Иди // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. — 2015. — Т. 51, № 6. — С. 648—657.
6. Педлоски, Дж. Геофизическая гидродинамика : в 2 т. / Дж. Педлоски. — Т. 2. — М. : Мир, 1984. — 416 с.
7. Orr, W. M. F. Stability or instability of the steady-motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. Part I : A perfect liquid // Proc. Roy. Irish Acad. A. — 1907—1909. — V. 27. — P. 9—68.
8. Orr, W. M. F. Stability or instability of the steady-motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. Part II : A viscous liquid // Proc. Roy. Irish Acad. A. — 1907—1909. — V. 27. — P. 69—138.

9. *Burger, A.* Instability associated with the continuous spectrum in a baroclinic flow // *J. Atmos. Sci.* — 1966. — V. 23, № 3. — P. 272—277.
10. *Рихтмайер, Р.* Принципы современной математической физики : в 2 т. / Р. Рихтмайер. — Т. 1. — М. : Мир, 1982. — 486 с.
11. *Farrell, B. F.* The initial growth of disturbances in a baroclinic flow // *J. Atmos. Sci.* — 1982. — V. 39, № 8. — P. 1663—1686.
12. *Farrell, B. F.* Transient growth of damped baroclinic waves flow // *J. Atmos. Sci.* — 1982. — V. 42, № 24. — P. 2718—2727.
13. *Petoukhov, V.* On statistics of the free-troposphere synoptic component: an evaluation of skewnesses and mixed third-order moments contribution to the synoptic dynamics and fluxes of heat and humidity / V. Petoukhov, A. V. Eliseev, R. Klein, H. Oesterle // *Tellus A.* — 2008. — V. 60, № 1. — P. 11—31.
14. *Логинов, С. В.* Негауссовость вариаций атмосферных переменных на временных масштабах от 2 до 30 суток / С. В. Логинов, А. В. Елисеев, И. И. Мохов // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* — 2017. — [в печати].
15. *Charney, J. G.* Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking / J. G. Charney, J. G. DeVore // *J. Atmos. Sci.* — 1979. — V. 36, № 7. — P. 1205—1216.
16. *Mokhov, I. I.* Changes in atmospheric blocking characteristics within Euro-Atlantic region and Northern Hemisphere as a whole in the 21st century from model simulations using RCP anthropogenic scenarios / I. I. Mokhov, A. V. Timazhev, A. R. Lupo // *Glob. Planet. Change.* — 2014. — V. 122. — P. 265—270.
17. *Lorenz, E. N.* Available potential energy and the maintenance of the general circulation // *Tellus.* — 1955. — V. 7, № 2. — P. 157—167.
18. *Williams, R. T.* Nonlinear, non-geostrophic effects in a baroclinic atmosphere // *J. Atmos. Sci.* — 1965. — V. 22, № 4. — P. 388—401.
19. *Simmons, A. J.* The life cycles of some nonlinear baroclinic waves / A. J. Simmons, B. J. Hoskins // *J. Atmos. Sci.* — 1978. — V. 35, № 3. — P. 414—432.
20. *Li, L.* Lorenz energy cycle of the global atmosphere based on reanalysis datasets / L. Li, A. P. Ingersoll, X. Jiang, D. Feldman, Y. L. Yung // *Geophys. Res. Lett.* — 2007. — V. 34, № 16. — P. L16813.
21. *Andrews, D. G.* Planetary waves in horizontal and vertical shear : The generalized Eliassen-palm relation and the mean zonal acceleration / D. G. Andrews, M. E. McIntyre // *J. Atmos. Sci.* — 1976. — V. 33, № 11. — P. 2031—2048.
22. *Horenko, I.* Metastable decomposition of high-dimensional meteorological data with gaps / I. Horenko, S. I. Dolaptchiev, A. V. Eliseev, I. I. Mokhov, R. Klein // *J. Atmos. Sci.* — 2008. — V. 65, № 11. — P. 3479—3496.
23. *Palmer, T. N.* A nonlinear dynamical perspective on climate prediction // *J. Climate.* — 1999. — V. 12, № 2. — P. 575—591.
24. *Leith, C. E.* Climate response and fluctuation dissipation // *J. Atmos. Sci.* — 1975. — V. 32, № 10. — P. 2022—2026.
25. *Corti, S.* Signature of recent estimate change in frequencies of natural atmospheric circulation regimes / S. Corti, F. Molteni, T. N. Palmer // *Nature.* — 1999. — V. 398, № 6730. — P. 799—802.
26. *Hsu, C. J.* Climate change in recurrent regimes and modes of northern hemisphere atmospheric variability / C. J. Hsu, F. Zwiers // *J. Geophys. Res. : Atmos.* — 2001. — V. 106, № D17. — P. 20145—20159.
27. *Stephenson, D. B.* On the existence of multiple climate regimes / D. B. Stephenson, A. Hannachi, A. O'Neill // *Q. J. Roy. Met. Soc.* — 2004. — V. 130, № 597. — P. 583—605.