УДК: 53.072 + 519.95

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОНТУРНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

В. Ю. Белашов[1], О. А. Харшиладзе[2]

[1]Казанский федеральный университет, 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18
E-mail: vybelashov@yahoo.com
[2]Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили,
Грузия, 380043, г. Тбилиси, ул. Университетская, 2
E-mail: oleg.kharshiladze@gmail.com

Аннотация. Рассматривается один из наиболее эффективных методов моделирования вихревых структур, описываемых 2-мерным уравнением переноса завихренности и уравнением Пуассона для функции тока, – метод контурной динамики (КД), базирующийся на представлении вихревого потока в виде вихревых областей конечной площади. Предлагается модификация метода КД, минимизирующая погрешности, возникающие при прямом его применении к описанию вихревых структур.

Ключевые слова: вихри; ВОКП; моделирование; гидродинамика; модифицированный метод контурной динамики; алгоритм

THE MODIFIED METHOD OF CONTOUR DYNAMICS FOR MODELING OF VORTICAL STRUCTURES

V. Yu. Belashov, O. A. Kharshiladze

Abstract. One of the most effective methods of modeling of the vortical structures described by the 2-dimensional equation of carry of a vortex and by the Poisson equation for a flow function, namely, the contour dynamics (CD) method which is based on representation of a vortical stream by the finite area vortical regions is considered. The modification of the CD method minimizing the errors arising at its direct application to the description of vortical structures is offered.

Keywords: vortices; FAVR; modeling; hydrodynamics; modified contour dynamics method; algorithm

Введение

При решении любой задачи неизбежно возникает вопрос об оптимальном методе её решения, выбор метода, при этом, определяется рядом факторов, среди которых необходимо отметить его временные характеристики, простоту (при соблюдении условия адекватности решаемой задаче), надежность и универсальность. Для задач, изучаемых в рамках теории вихревых движений, выбор методов численного решения зачастую ограничен набором известных схем, базирующихся на конечно-разностном представлении дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение жидкости, газа и плазмы. Однако такой подход не всегда приемлем в силу ограничений, которые накладываются на разностные сетки.

Существенный прогресс в области исследования вихревых явлений наметился в конце 60-х годов прошлого века, когда появились достаточно мощные компьютеры и родилась новая наука – вычислительная динамика жидкости [1, 2]. В предлагаемой работе рассматривается один из эффективных методов, построенный на представлении вихревых структур в виде вихревых областей конечной площади (ВОКП) [3], в связи с чем описание их динамики существенно упрощается. Для численного исследования предлагается использование алгоритма контурной динамики (КД) [4] и рассматривается его модификация, позволяющая моделировать не только отдельные вихревые структуры, но и исследовать динамику N-вихревых систем, состоящих из отдельных вихрей, в зависимости от их относительного положения, порядка симметрии, величины и знака завихренности.

Основные уравнения и методы моделирования вихревых явлений

В простейшем случае несжимаемой вязкой среды уравнениями, описывающими движение жидкости, являются уравнения Навье-Стокса:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -(1/\rho)\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v}, \qquad \nabla\mathbf{v} = 0,$$

где ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность среды, p – давление. Поскольку рассматривается вихревое движение, от этих уравнений, исключая давление и вычисляя ротор от обеих частей, мы переходим к уравнению переноса для завихренности и уравнению Пуассона для функции тока. В результате получаем нестационарное уравнение для завихренности среды: $\partial_t \zeta + (\mathbf{v}\nabla)\zeta = \nu\nabla^2\zeta$, где $\boldsymbol{\zeta}$ – завихренность, $\boldsymbol{\zeta} = [\nabla, \mathbf{v}]$, и уравнение Пуассона:

$$\Delta\psi = -\zeta\,. \tag{1}$$

Скорость в данном случае определяется как $\mathbf{v} = [\nabla, \psi]$, где ψ – функция тока. Таким образом, получается система уравнений, описывающая движение несжимаемой среды. В двумерном случае эта система имеет достаточно простую форму:

$$\partial_t \zeta + (\mathbf{v}\nabla)\zeta = \nu\nabla^2\zeta, \quad \Delta\psi = -\zeta, \quad \mathbf{v} = [\nabla, \psi\mathbf{e}_z],$$

где $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор нормали.

Моделирование процессов и явлений, описываемых этими уравнениями, осуществляется с применением специальных методов, к которым можно отнести: конечно-разностные схемы, метод «частиц в ячейке» (PIC-модель), метод «водяного мешка», дискретных вихрей, конечных элементов и ряд других [5, 6]. Однако все эти методы в их классической постановке обладают рядом недостатков, существенно снижающих эффективность моделирования динамики и взаимодействия вихревых структур [7, 8].

Рассматриваемый в работе метод КД является обобщением метода «водяного мешка», традиционно использующегося при изучении динамики плазмы, описываемой уравнением Власова [7]. Основная идея метода заключается в представлении исследуемой среды в виде функции распределения некоторой физической величины, задающей её конфигурацию. Например, для идеальной жидкости с локальным вихревым возмущением – это распределение завихрённости, которое будет представлять собой контур, внутри которого жидкость вращается с постоянной угловой скоростью. В этом случае для моделирования эволюции жидкости исчезает необходимость рассматривать всю область, занимаемую средой (что приходится делать при использовании конечно-разностных сеток) или площадь внутри вихря (как в методе дискретных вихрей), достаточно численно решать уравнения для границы вихревой области (или областей), что значительно экономит машинное время и память. Еще одно достоинство метода КД – это отсутствие искусственных дисперсии и диссипации, характерных для конечно-разностных схем.

Алгоритм метода контурной динамики

Основные положения метода описаны в работе [4], однако при его прямом использовании возникает ряд трудностей, поэтому для корректного применения к моделированию вихревых структур метод КД требует некоторой модификации. Исходными уравнениями в методе КД являются уравнение переноса вихря (для идеальной среды)

$$\partial_t \zeta + u\,\partial_x \zeta + v\,\partial_y \zeta = 0 \tag{2}$$

и уравнение Пуассона для функции тока (1). Систему уравнений (1), (2) необходимо также дополнить выражениями для компонент скорости: $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$.

Как было сказано, идея метода состоит в том, что рассматривается взаимодействие между границами областей, а завихренность каждой области является постоянной (но необязательно одинаковой для всех областей), благодаря чему размерность задачи снижается на единицу.

Области положительной завихренности соответствуют вращению конвективных жидких элементов против часовой стрелки, поэтому мы будем изучать правостороннюю координатную систему, где вектор $\boldsymbol{\zeta}$ направлен вдоль оси $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$.

Аналитическое решение уравнения Пуассона (1) для функции тока ψ имеет вид:

$$\psi(x, y) = -(2\pi)^{-1}\iint d\xi d\eta [\ln r]\zeta(\xi, \eta), \quad r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}, \tag{3}$$

где $\ln r$ – функция Грина уравнения (1). Значение скорости в любой точке потока можно получить дифференцированием интеграла (3): $\mathbf{u} = \nabla\times\mathbf{e}_z\psi = \mathbf{e}_x\partial_y\psi - \mathbf{e}_y\partial_x\psi$. При замене переменных $\partial_y \to -\partial_\eta$ и $\partial_x \to -\partial_\xi$, исходя из второй формулы (3), получим

$$\mathbf{u} = (2\pi)^{-1} \iint d\xi d\eta\, \zeta \left[\mathbf{e}_x \partial_\eta [\ln r] - \mathbf{e}_y \partial_\xi [\ln r]\right]. \tag{4}$$

Интегрируя (4) по частям, найдем [8]: $\mathbf{u} = (2\pi)^{-1} \mathbf{e}_z \times \iint d\xi d\eta\, [\ln r] \nabla_\xi \zeta$, где $\nabla_\xi = \mathbf{e}_x \partial_\xi + \mathbf{e}_y \partial_\eta$ и $\nabla_x = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y$. Интеграл содержит две части, описывающие: 1) область внутри контура, где $\nabla_\xi \zeta = 0$, которая не влияет на скорость, и 2) тонкую полосу на границе контура, где $\nabla_\xi \zeta \neq 0$, которая даёт единственный конечный вклад в изменение скоростей вихрей. Далее, вводя на контуре локализованную ортогональную координатную систему с осями *s* и *q*, после несложных преобразований (подробно – см. в [7, 8]) получим:

$$\mathbf{u} = (2\pi)^{-1} \sum_{j=1}^{N_C} [\zeta]_j \oint_j [\ln r] \left[\mathbf{e}_x d\xi_j + \mathbf{e}_y d\eta_j\right],$$

где $[\zeta]_j$ – значение $[\zeta]$, связанное с контуром *j*, а $[\zeta] = \zeta_0 - \zeta_1$ (квадратные скобки означают скачок функции; ζ_0 – завихренность вне контура, а ζ_1 – завихренность внутри контура, где по всей его площади она – константа). Таким образом, области постоянной завихренности заменяются распределением источников с логарифмическими силами вдоль *j*-х контуров, окруженных конечным числом N_C вихревых областей в поле завихренности. Пространственная и временная дискретизация записанных выше уравнений подробно рассмотрена в [7, 8].

Сделаем важное замечание. Для того чтобы описанный выше метод КД давал устойчивые решения, его необходимо модифицировать, поскольку, во-первых, схема с перешагиванием дает ощутимую погрешность на достаточно больших временных интервалах, а, во-вторых, как показывают эксперименты, эволюция ВОКП приводит к «разбеганию» узлов контура, и при этом нарушается главное условие – контур должен быть кусочно-непрерывным, т.е. должен как можно более точно аппроксимировать непрерывную линию. Первая проблема может быть решена с помощью методики, предложенной в [7]. Для устранения погрешности в методе с перешагиванием следует синхронизировать значения переменных на двух временных слоях. При этом предполагается, что на некотором временном слое известны координаты и скорости всех узлов контура. Тогда асинхронная компонента может быть отфильтрована с помощью усредненных переменных для момента времени $p+1/2$, причем *p* должно быть четным. Эти переменные находятся тривиально: $\mathbf{x}^{p+1/2} = (\mathbf{x}^{p+1} + \mathbf{x}^p)/2$, $\mathbf{u}^{p+1/2} = (\mathbf{u}^{p+1} + \mathbf{u}^p)/2$, и, задавая приращение за время τ/2: $\mathbf{x}^{p+1} = \mathbf{x}^{p+1/2} + (\tau/2)\mathbf{u}^{p+1/2}$, $\mathbf{x}^p = \mathbf{x}^{p+1/2} - (\tau/2)\mathbf{u}^{p+1/2}$, вычисляем новое положение системы контуров.

Вторая трудность может быть преодолена введением дополнительных узлов в местах «разрыва» контура, когда $h_n \geq 2h_{\max}$ – для сохранения точности вычислений в области «разрыва» между уже имеющимися точками *A* и *B* вводится точка *C* с координатами $x_C = (x_A + x_B)/2$, $y_C = (y_A + y_B)/2$. При этом, если используется схема с перешагиванием, дополнительные узлы необходимо добавить и на двух предыдущих временных слоях. Здесь же следует отметить, что возможна и обратная ситуация – при сильном сближении двух узлов один из них можно исключить из расчетов, в этом случае точность вычислений не изменится.

Еще одним способом оптимизации является «подправление» контуров, описанное в [7]. С течением времени линии одного и того же контура или линии, принадлежащие разным контурам, могут сблизиться друг с другом настолько, что становятся одной кривой, которую приходится проходить дважды. Исключив этот участок, мы не изменяем состояния системы [7, 8].

Итак, задавая начальную конфигурацию ВОКП, мы можем исследовать их временную эволюцию. Детальная схема расчета в соответствии с алгоритмом модифицированного метода КД, а также его диагностика подробно рассмотрены в работах [7, 8], где показано, что данный метод может успешно использоваться для исследования эволюции вихревых структур. В [8, 9] приведены результаты моделирования *N*-вихревых систем различных конфигураций.

Заключение

Итак, мы показали, что при изучении вихревых явлений наиболее предпочтительным является метод КД, обладающий отсутствием искусственных диффузии и диссипации. Представление среды в виде отдельных ВОКП исключает, при этом, необходимость рассматривать всё пространство, а также вычислять значения скоростей и завихренностей внутри вихревых областей, что существенно ускоряет процесс моделирования. Для устранения погрешностей, связанных с «разрывом» контуров и погрешностью метода «с перешагиванием», нами предложена специальная модификации стандартного алгоритма метода КД. Она позволяет эффективно изучать эволюцию и динамику взаимодействия N-вихревых систем различных пространственных конфигураций, состоящих из ВОКП, в зависимости от пространственного расположения, порядка симметрии, величины и знака завихренности отдельных ВОКП.

В класс вихревых структур, которые можно исследовать методом КД можно включить также вихревые пелены [10, 11], которые возникают, например, при изучении устойчиво стратифицированной среды со сдвигом скорости, описываемой уравнениями Буссинеска.

Получаемые в численных экспериментах с помощью модифицированного метода КД результаты, наряду с их очевидной значимостью для интерпретации эффектов турбулентности в газах и жидкостях (в частности, вихревых движений в атмосфере Земли с учетом кориолисовых сил), могут быть полезны при описании турбулентных процессов в плазме (например, при описании плазмы моделью кулоновски взаимодействующих квазичастиц и заряженных "нитей", а также при изучении динамики альфвеновских вихрей в космической плазме [9, 11-13]).

Благодарности

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Работа была поддержана Национальным научным фондом Грузии им. Шота Руставели (SRNF) (грант № FR17 252).

Список литературы

1. Роуч П.Дж. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
2. Вычислительные методы в гидродинамике / Под. ред. Б. Олдер. – М.: Мир, 1967. – 384 с.
3. Дим Г., Забуски Н. Стационарные *V*-состояния, их взаимодействие, возврат и разрушение // Солитоны в действии: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – С. 289-304.
4. Zabusky N.J, Hughes, M.N., Roberts K.V. Contour Dynamics for the Euler Equations in Two Dimensions // J. Comput. Phys. – 1979. – V. 135. – P. 220-226.
5. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. – М.: Мир, 1975. – 392 с.
6. Березин Ю.А., Федорчук Н.П. Моделирование нестационарных плазменных процессов. – Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1993. – 357 с.
7. Белашов В.Ю., Сингатулин Р.М. Алгоритм метода контурной динамики и моделирование вихревых структур. Казань: КГЭУ, 2003, 39 с. – Деп. ВИНИТИ 11.02.2003 г., № 272-В2003.
8. Белашов В.Ю., Харшиладзе О.А. Модифицированный метод контурной динамики и моделирование вихревых структур // Ученые записки КГУ. – 2019. – № 1 (в печати).
9. Belashov V.Yu., Belashova E.S., Kharshiladze O.A. Nonlinear Wave Structures of the Soliton and Vortex Types in Complex Continuous Media: Theory, Simulation, Applications // Lecture Notes of TICMI. Vol. 18 / Ed. G. Jaiani. – Tbilisi: Tbilisi University Press, 2018. – 90 p.
10. Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей. – М.: Научный мир, 2000. – 376 с.
11. Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A. Numerical modeling of interaction of vortex structures in fluids and plasmas // VIII Annual Meeting of the Georgian Mechanical Union. Book of Abstracts. 25.09-29.09.2017, Tbilisi. – Tbilisi: Tbilisi University Press. – 2017. – P. 31-32.
12. Pokhotelov O.A., Stenflo L., Shukla P.K. Nonlinear Structures in the Earth's Magnetosphere and Atmosphere // Plasma Physics Reports. – 1996. – V. 22. No. 10. – P. 852-863.
13. Belashov V.Yu. Interaction of *N*-vortex structures in a continuum, including atmosphere, hydrosphere and plasma // Advances in Space Research. – 2017. – V. 60. – P. 1878-1890.