*Известия вузов. Математика* *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
*2016, №2, с. 10–17* *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*Л.И. ВАФИНА, И.Г. САЛЕХОВА*

# ЗАДАЧА ШВАРЦА В СЛУЧАЕ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА ИНТЕРВАЛОВ

*Аннотация.* Решена задача Шварца, когда граничным контуром является объединение счетного числа отрезков (расположенных в том числе периодически) с точкой сгущения на бесконечности. Решение задачи получено путем сведения к соответствующей задаче Римана в случае счетного множества контуров, в частности, периодического расположения контуров.

*Ключевые слова*: задача Шварца для плоскости, задача Римана, однопериодическое расположение отрезков, однопериодическая функция, двоякопериодическое расположение отрезков, эллиптическая функция, квазиэллиптическая функция.

*УДК*: 517.544

## Введение

Задача Шварца в случае конечного числа интервалов рассматривается в ([1], гл. IV, с. 360–363). В данной статье на основании результатов по решению задачи Римана в случае счетного множества контуров [2], [3] дано обобщение на случай счетного множества отрезков, в частности, на случай периодически расположенных отрезков и периодических данных [4], [5].

## 1. Структура решения задачи в случае счетного множества интервалов

1.1. *Постановка задачи.* Пусть $S$ обозначает плоскость, разрезанную вдоль отрезков $L_k = (a_k, b_k)$ $(k = 1, 2, \dots)$ действительной оси, причем $a_1 < b_1 < \dots < a_k < b_k < \cdots$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$. Обозначим $L = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} L_k$.

Требуется найти голоморфную в $S$ функцию

$$\Phi(z) = u(z) + iv(z)$$

по заданным граничным значениям вещественной части

$$\begin{aligned} u^+(t) &= f^+(t), \\ u^-(t) &= g^-(t), \end{aligned} \quad t \in L, \tag{1}$$

где $f^+(t) = f_k^+(t)$, $g^-(t) = g_k^-(t)$, $t \in \overline{L}_k$, удовлетворяют условию $f_k^+(t), g_k^-(t) \in H_{\lambda_k}(\overline{L}_k)$.

Можно записать структуру решения задачи в классах $h(b_k)$, $h(a_k)$, $h(a_k, b_k)$, $h_0$, $h(c_{k_n})$.

1.2. *Структура решения задачи в классе* $h(b_k)$. Под классом $h(b_k)$ будем понимать класс функций, почти ограниченных в окрестности концов $b_k$, а в остальных концах имеющих бесконечность порядка не выше единицы.

Поступили первый вариант 02.07.2014, окончательный вариант 23.03.2015.

Введем вспомогательные функции

$$\Omega(z) = \frac{\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)}{2}, \quad \Psi(z) = \frac{\Phi(z) - \overline{\Phi}(z)}{2},$$

где $\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}$, обладающие свойствами

$$\overline{\Omega}(z) = \Omega(z), \tag{2}$$

$$\overline{\Psi}(z) = -\Psi(z). \tag{3}$$

Учитывая, что

$$u^+(t) = \frac{\Phi^+(t) + \overline{\Phi^+}(t)}{2}, \quad u^-(t) = \frac{\Phi^-(t) + \overline{\Phi^-}(t)}{2},$$

получим, что граничные условия (1) сведутся к следующим:

$$\Omega^+(t) + \Omega^-(t) = 2f(t), \tag{4}$$

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = 2g(t), \qquad t \in L, \tag{5}$$

т. е. к задаче Римана (4) и задаче о скачке (5) в классе функций, удовлетворяющих соответственно условиям (2), (3), причем $2f(t) = f^+(t) + g^-(t)$, $2g(t) = f^+(t) - g^-(t)$.

Очевидно, решение задачи (1) запишется в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) + \Psi(z). \tag{6}$$

На основании результатов по решению задачи Римана в случае счетного множества гладких разомкнутых дуг [2] задача (5) имеет решение

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)} + P(z), \tag{7}$$

где последовательность целых чисел $\{n_k\}$ подобрана так, что ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов, $P(z)$ – целая функция, удовлетворяющая условию $\overline{P}(z) = -P(z)$.

Для решения задачи (4) построим каноническую функцию $X_b(z) \in h(b_k)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $X_b^+(t) + X_b^-(t) = 0$;
2. $X_b^+(t), X_b^-(t) \neq 0$, $t \in L$;
3. $X_b(z) \in h(b_k)$.

С этой целью построим функцию $\gamma(z)$, которая является решением задачи о скачке $\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = \ln G(t)$. Учитывая, что в нашем случае $G(t) \equiv -1$ и выбирая $\ln(-1) = \pi i$, получим

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\pi i d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{L_k} \left[ \frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} - \cdots - \frac{z^{n_k - 1}}{\tau^{n_k}} \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{L_k} \left[ \frac{1}{\tau - z} - \sum_{j=0}^{n_k - 1} \frac{z^j}{\tau^{j+1}} \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \ln \frac{1 - z/b_k}{1 - z/a_k} + \sum_{j=0}^{n_k - 1} \frac{z^j}{j b_k^j} - \sum_{j=0}^{n_k - 1} \frac{z^j}{j a_k^j} \right] = \ln \left( \prod_{k=1}^{\infty} E\left(z/b_k, n_k - 1\right) \Big/ \prod_{k=1}^{\infty} E\left(z/a_k, n_k - 1\right) \right)^{1/2},$$

где под $\ln\frac{1-z/b_k}{1-z/a_k}$ понимается однозначная ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль $L_k$ плоскости, $E(u,q)=(1-u)\exp\left(\sum\limits_{l=1}^{q}\frac{u^l}{l}\right)$ — первичный множитель Вейерштрасса.

Каноническая функция имеет вид

$$X_b(z)=\exp\gamma(z)=\left(\prod_{k=1}^{\infty}E\left(z/b_k,n_k-1\right)\Big/\prod_{k=1}^{\infty}E\left(z/a_k,n_k-1\right)\right)^{1/2}.$$

Тогда решение задачи (4), на основании [2], запишется в виде

$$\Omega(z)=X_b(z)P_1(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_b(z)z^{n_k}}{\pi i}\int_{L_k}\frac{f_k(\tau)d\tau}{\tau^{n_k}X_b^+(\tau)(\tau-z)}, \tag{8}$$

где $P_1(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условию $\overline{P_1}(z)=P_1(z)$.

Решение задачи (1) представится в виде (6), где $\Psi(z)$ и $\Omega(z)$ определяются соответственно формулами (7) и (8).

## 2. Решение задачи в случае однопериодического расположения интервалов

2.1. *Постановка задачи.* Пусть дан отрезок $L_0=(a_0,b_0)$ в полосе $0<\operatorname{Re}z\le 2\pi$. Обозначим $L=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}L_k$, где $L_k$ получены из $L_0$ преобразованиями однопериодической группы $z+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Требуется найти голоморфную функцию $\Phi(z)=u(z)+iv(z)$, ограниченную на бесконечности и удовлетворяющую условию (1), где функции $f^+(t)=f_k^+(t)$, $g^-(t)=g_k^-(t)$, $t\in\overline{L}_k$, удовлетворяют условиям $f_0^+(t)=f_k^+(t+2\pi k)$, $g_0^-(t)=g_k^-(t+2\pi k)$, $t\in\overline{L}_0$, $k\in\mathbb{Z}$, $f_0^+(t),g_0^-(t)\in H_\lambda(\overline{L}_0)$.

Поставленная задача равносильна задаче нахождения периодической с периодом $2\pi$ функции $\Phi(z)$ с линией скачков $L_0$ по условию

$$\begin{aligned}u^+(t)&=f_0^+(t),\\ u^-(t)&=g_0^-(t),\end{aligned}\quad t\in L_0,$$

где $f_0^+(t)$, $g_0^-(t)$ — заданные функции класса $H_\lambda(\overline{L}_0)$.

Решение задачи отыскивается в классе функций, ограниченных на верхнем и нижнем концах полосы периода.

2.2. *Решение задачи в классе $h(b_0)$.* На основании [5] решение задачи (5) запишется в виде

$$\Psi(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{z}{\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau(\tau-z)}+C=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}g_0(\tau)\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-z}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]d\tau+C, \tag{9}$$

где $C=iC_1$, $C_1\in\mathbb{R}$. Функция $\Psi(z)$ ограничена на концах полосы периода ([6], с. 201).

Каноническая функция задачи (4) будет иметь вид

$$X_b(z)=\exp\gamma(z)=\left(\sin\left(\frac{b_0-z}{2}\right)\sin\frac{a_0}{2}\Big/\left(\sin\left(\frac{a_0-z}{2}\right)\sin\frac{b_0}{2}\right)\right)^{1/2},$$

причем $X_b(z+2\pi)=X_b(z)$, $\overline{X}_b(z)=X_b(z)$. Функция $X_b(z)$ ограничена на концах полосы периода, так как при $z\to x\pm i\infty$ стремится к конечным пределам ([6], с. 201).

С помощью канонической функции задача (4) сводится к задаче о скачке в классе периодических функций, ограниченных на концах полосы периода, поэтому

$$\Omega(z)=\frac{X_b(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f_0(\tau)}{X_b^+(\tau)}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-z}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]d\tau+C_2X_b(z),\quad C_2\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Решение задачи (1) запишется по формуле (6), где $\Psi(z)$ и $\Omega(z)$ определяются соответственно формулами (9) и (10).

Аналогичным образом можно записать решение задачи в классе $h(a_0)$.

2.3. *Решение задачи в классе* $h(a_0,b_0)$. В силу [5] каноническую функцию задачи (4) возьмем в виде

$$X_{ab}(z)=X_b(z)\sin\left(\frac{a_0-z}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{\theta-z}{2}\right),\quad \text{где } \theta\notin\overline{L}_0,\quad \theta\in R.$$

Нетрудно показать, что соответствующая однородная задача не имеет отличных от нуля решений.

Единственное решение задачи (4) запишется в виде

$$\Omega(z)=\frac{X_{ab}(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f_0(\tau)}{X_{ab}^+(\tau)}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-z}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-\theta}{2}\right)\right]d\tau. \tag{11}$$

Решение задачи (1) запишется по формуле (6), где $\Psi(z)$ и $\Omega(z)$ определяются соответственно формулами (9) и (11).

2.4. *Решение задачи в классе* $h_0$. Под классом $h_0$ понимается класс функций, неограниченных во всех концах. Каноническая функция задачи (4) будет иметь вид

$$X_0(z)=X_b(z)\Big/\left(\sin\left(\frac{b_0-z}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-z}{2}\right)\right),\quad \theta\notin\overline{L}_0,\quad \theta\in R.$$

На основании [5] решение соответствующей однородной задачи запишется в виде

$$\Omega_0(z)=X_0(z)[\widetilde{c}_1(\cos z-\cos\theta)+\widetilde{c}_2(\sin z-\sin\theta)],\quad \widetilde{c}_1,\widetilde{c}_2\in\mathbb{R}. \tag{12}$$

Общее решение задачи (4) примет вид

$$\Omega(z)=\Omega_0(z)+\Omega_1(z), \tag{13}$$

где $\Omega_0(z)$ определяется формулой (12), а

$$\Omega_1(z)=\frac{X_b(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f_0(\tau)}{X_b^+(\tau)}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau-z}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]d\tau.$$

Решение задачи (1) запишется по формуле (6), где $\Psi(z)$ и $\Omega(z)$ определяются соответственно формулами (9) и (13).

## 3. Решение задачи в случае двоякопериодического расположения интервалов

3.1. *Постановка задачи.* Пусть отрезок $L_0=(a_0,b_0)$ лежит в $R$, где $R$ – прямоугольник с вершинами $\frac{-i\widetilde{\omega}_2}{2}$, $\omega_1-\frac{i\widetilde{\omega}_2}{2}$, $\omega_1+\frac{i\widetilde{\omega}_2}{2}$, $\frac{i\widetilde{\omega}_2}{2}$, $\omega_1,\widetilde{\omega}_2\in\mathbb{R}$, $\omega_2=i\widetilde{\omega}_2$, $\omega_1,\widetilde{\omega}_2>0$. Обозначим $L=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}L_k$, где $L_k$ получены из $L_0$ преобразованиями двоякопериодической группы $z+\omega$, $\omega=k_1\omega_1+k_2\omega_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

Требуется найти голоморфную функцию $\Phi(z)=u(z)+iv(z)$, ограниченную на бесконечности, удовлетворяющую условию (1), где функции $f^+(t)=f_k^+(t)$, $g^-(t)=g_k^-(t)$, $t\in\overline{L}_k$, удовлетворяют условиям $f_0^+(t)=f_k^+(t+\omega)$, $g_0^-(t)=g_k^-(t+\omega)$, $t\in\overline{L}_0$, $f_0^+(t),g_0^-(t)\in H_\lambda(\overline{L}_0)$.

Поставленная задача равносильна задаче нахождения двоякопериодической (эллиптической) функции, ограниченной в параллелограмме периодов [4] с линией скачков $L_0$ по краевому условию

$$u^+(t) = f_0^+(t), u^-(t) = g_0^+(t), \quad t \in L_0.$$

Решение задачи получено в классах $h(b_0)$, $h(a_0)$, $h_0$, $h(a_0, b_0)$.

3.2. *Решение задачи в классе* $h(b_0)$. На основании [5] частное решение задачи (5) запишется в виде

$$\Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^2}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau^2(\tau - z)}. \tag{14}$$

Если отыскивать двоякопериодические решения задачи (5) с периодами $\omega_1$ и $\omega_2$ и учесть, что условие

$$\int_{L_0} g_0(\tau)d\tau = 0 \tag{15}$$

является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи, то, суммируя (14), получим

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g_0(\tau)[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]d\tau,$$

где $\zeta(u)$ — дзета-функция Вейерштрасса, причем

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}' \left( \frac{1}{u-\omega} + \frac{u}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right), \quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0.$$

Общее решение задачи примет вид

$$\Psi(z) = \Psi_1(z) + C, \quad C = iC_1, C_1 \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Остановимся на задаче (4). На основании вышеизложенного

$$\gamma(z) = \frac{1}{2} \int_{L_0} [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]d\tau = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)},$$

где сигма-функция Вейерштрасса имеет вид

$$\sigma(u) = u \prod_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}' \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}\right), \quad k_1 + k_2 \neq 0,$$

причем $\zeta(u) = \sigma'(u)/\sigma(u)$.

Возьмем в качестве канонической функции

$$X_b(z) = \exp \gamma(z) = \left[ \frac{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)} \right]^{1/2},$$

причем $\overline{X}_b(z) = X_b(z)$. Функция $X_b(z)$ является квазиэллиптической ([7], c. 7), т. е.

$$X_b(z + \omega_k) = X_b(z) \exp(-\alpha\eta_k), \quad k = 1, 2, \eta_k = 2\zeta\left(\frac{\omega_k}{2}\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \pi i \, d\tau = \frac{1}{2}(b_0 - a_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Рассмотрим функцию $F_1(z) = \Omega_0(z)/X_b(z)$, где $\Omega_0(z)$ — решение соответствующей однородной задачи. Функция $F_1(z)$ является квазиэллиптической функцией с условием

$$F_1(z + \omega_k) = F_1(z) \exp(\alpha\eta_k). \tag{18}$$

Таким образом, получим задачу построения квазиэллиптической голоморфной функции, удовлетворяющей условию (18). Известно ([7], с. 10), что критерием существования такой функции является равенство $\alpha = \widetilde{\omega}$, где $\widetilde{\omega} = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$. В нашем случае $\alpha$, определяемое формулой (17), не может быть равным периоду.

Таким образом, соответствующая однородная задача не имеет нетривиальных решений.

Для построения решений неоднородной задачи (4) будем использовать квазипериодический аналог ядра Коши ([7], с. 17) $A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau-z-\alpha)}{\sigma(-\alpha)\sigma(\tau-z)}$, причем $A(\tau, z+\omega_k) = A(\tau, z)\exp(\alpha\eta_k)$.

Таким образом, функция

$$\Omega(z) = \frac{X_b(z)}{\pi i}\int_{L_0} A(\tau, z)\frac{f_0(\tau)d\tau}{X_b^+(\tau)} \tag{19}$$

будет единственным решением задачи (4).

Решение задачи (1) при выполнении условия (15) запишется по формуле (6), где $\Psi(z)$ и $\Omega(z)$ определяются соответственно формулами (16) и (19).

Решение задачи (1) в классе $h(a_0)$ также запишется по формуле (6), где $\Psi(z)$ определяется формулой (16), а

$$\Omega(z) = \frac{X_a(z)}{\pi i}\int_{L_0} A_1(\tau, z)\frac{f_0(\tau)d\tau}{X_a^+(\tau)}, \quad X_a(z) = \left[\frac{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)}{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}\right]^{1/2}, \quad A_1(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z + \alpha)}{\sigma(\alpha)\sigma(\tau - z)}.$$

3.3. *Решение задачи в классе* $h_0$. Каноническую функцию задачи (4) возьмем в виде

$$X_0(z) = \left[\frac{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)}\right]^{1/2}\frac{\sigma(z-\theta)}{\sigma(z-b_0)}, \quad \theta \notin \overline{L}_0, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

причем $X_0(z+\omega_k) = X_0(z)\exp(-\eta_k\beta)$, $\beta = \theta + \alpha - b_0$, а точку $\theta$ выберем так, что число $\beta$ не совпадает с периодом.

Рассмотрим функцию $F_2(z) = \Omega_0(z)/X_0(z)$, которая является квазиэллиптической функцией с условием $F_2(z+\omega_k) = F_2(z)\exp(\eta_k\beta)$. Кроме того, функция $F_2(z)$ имеет в точке $\theta$ полюс первого порядка. На основании известных свойств квазиэллиптических функций ([7], с. 8) функция $F_2(z)$ имеет вид

$$F_2(z) = C\frac{\sigma(z+\alpha-b_0)}{\sigma(z-\theta)}.$$

Таким образом,

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \frac{X_0(z)}{\pi i}\int_{L_0} A_2(\tau, z)\frac{f_0(\tau)d\tau}{X_0^+(\tau)}, \tag{20}$$

где $\Omega_0(z) = CX_0(z)\frac{\sigma(z+\alpha-b_0)}{\sigma(z-\theta)}$, $A_2(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau-z-\beta)}{\sigma(-\beta)\sigma(\tau-z)}$, $C \in \mathbb{R}$.

Решение задачи (1) запишется по формуле (6), где $\Psi(z)$ и $\Omega(z)$ определяются соответственно формулами (16) и (20).

3.4. *Решение задачи в классе* $h(a_0, b_0)$. Каноническую функцию задачи (4) возьмем в виде

$$X_{ab}(z) = \left[\frac{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)}\right]^{1/2}\frac{\sigma(z-a_0)}{\sigma(z-\theta_1)}, \quad \theta_1 \in \mathbb{R}.$$

Функция $X_{ab}(z)$ удовлетворяет условию $X_{0ab}(z+\omega_k) = X_{ab}(z)\exp(-\beta_1\eta_k)$, $\beta_1 = \alpha - \theta_1 + a_0$, а точку $\theta_1$ выберем так, что число $\beta_1$ не совпадает с периодом. Нетрудно показать, что соответствующая однородная задача не имеет решений.

Для решения неоднородной задачи возьмем $\theta_1 = a_0 + \alpha$, тогда $\beta_1 = 0$ и $X_{ab}(z + \omega_k) = X_{ab}(z)$, $k = 1, 2$. Имея $X_{ab}(z)$, перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Omega^+(t)}{X^+_{ab}(t)} - \frac{\Omega^-(t)}{X^-_{ab}(t)} = \frac{f_0(t)}{X^+_{ab}(t)}, \quad t \in L_0.$$

На основании известных результатов [5] имеем, что необходимым условием разрешимости задачи является равенство $\int\limits_{L_0} \frac{f_0(\tau)d\tau}{X^+_{ab}(\tau)} = 0$.

Решение задачи (4) запишется в виде

$$\Omega(z) = \frac{X_{ab}(z)}{\pi i} \int_{L_0} \frac{f_0(\tau)}{X_{ab}(\tau)} [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - \theta_1)] d\tau. \tag{21}$$

Функция, дающая решение задачи (1), запишется по формуле (6), где $\Psi(z)$ и $\Omega(z)$ определяются соответственно формулами (16) и (21).

## Литература


[1] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике* (Физматгиз, М., 1962).

[2] Салехова И.Г. *Задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг*, в сб. “Теория функций комплексного переменного и краевые задачи” (Чебоксары, Изд-во ЧГУ, 1974) вып. 2, с. 131–140.

[3] Салехова И.Г. *Однородная задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг*, Изв. вузов. Матем., №6, 124–135 (1975).

[4] Аксентьева Е.П., Салехова И.Г. *Задача Римана в случае двоякопериодического расположения дуг*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **150** (4), 66–79 (2008).

[5] Салехова И.Г., Яхина М.М. *Смешанная задача для плоскости с прямолинейными разрезами*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **155** (2), 66–79 (2013).

[6] Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1977).

[7] Аксентьева Е.П. *Функции Вейерштрасса в краевых задачах.* Методическая разработка к специальному курсу (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1994).



*Л.И. Вафина*

*магистрант 2-го года обучения, кафедра дифференциальных уравнений,*
*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*
*ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

`e-mail:` ms_gucci@mail.ru

*И.Г. Салехова*

*доцент, кафедра дифференциальных уравнений,*
*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*
*ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

`e-mail:` Ilysia.Salekhova@kpfu.ru

*L.I. Vafina and I.G. Salekhova*


**The Schwarz problem in the case of denumerable set of intervals**


*Abstract.* We solve a Schwarz problem for a plane domain whose boundary is a union of denumerable set of segments (including those arranged periodically) with an accumulation point at infinity. The problem is solved by the reduction to the corresponding Riemann problem in the case of a denumerable set of contours, including those arranged periodically.

*Keywords*: Schwarz problem for a plane, Riemann problem, singly periodic arrangement of segments, singly periodic function, doubly periodic arrangement of segments, elliptic function, quasi-elliptic function.

*L.I. Vafina*

*Undergraduate, Chair of Differential Equations,*
*Kazan (Volga Region) Federal University,*
*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: ms_gucci@mail.ru

*I.G. Salekhova*

*Associate Professor, Chair of Differential Equations,*
*Kazan (Volga Region) Federal University,*
*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: Ilysia.Salekhova@kpfu.ru