12. Разложение функций в степенной ряд (Ряд Тейлора)

На предыдущем занятии мы рассматривали область сходимости степенного ряда, то есть область, в которой мы имеем возможность написать

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = f(x).$$

Обратная задача представления некоторой заданной функции $f(x)$ в виде числового ряда во многом решается разложением в ряд Тейлора

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2}(x-b)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n \qquad (*)$$

Разложения некоторых элементарных функций были получены на лекциях и приведены в задачнике Демидовича (Раздел V. § 5.)

Следует иметь в виду теорему единственности разложения в степенной ряд, гласящую, что если нам удалось разложить $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ по степеням $x-b$ в некоторой окрестности точки b, то это и будет разложением в ряд Тейлора $(*)$: $a_0 = f(b)$, $a_1 = f'(b)$, $\dots$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(b)}{n!}, \dots$

Непосредственное применение формулы $(*)$ сопряжено с достаточно серьезными техническими трудностями: необходимо найти общую формулу для производной n-ного порядка и оценить остаток в формуле Тейлора. Поэтому часто задачу сводят к известным разложениям.

Пример 1.

Формулу $1+x+x^2+\dots = \dfrac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ суммы членов геометрической прогрессии можно рассматривать как разложение функции $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ по степеням x.

Подставляя $-x^2$ вместо x, получаем разложение $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots$, справедливое в области $|-x^2| < 1$, то есть опять же при $-1 < x < 1$.

Равенство можно умножать на одно и то же число, поэтому
$\dfrac{x^2}{1-x} = x^2(1+x+x^2+\dots) = x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ при $-1 < x < 1$.

Пример 2 (№2841).

Напомним, что $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Воспользуемся известным разложением:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty). \qquad (1)$$

Подставив в (1) $-x$ вместо x, получаем:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{2}$$

Вычтя почленно выражения в (2) из выражений в (1) и поделив пополам, получим:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Отметим, что полученное разложение по степеням x функции $f(x) = \operatorname{sh} x$ очень похоже на разложение $\sin x$, только в нём нет чередования знаков.

Пример 3. Разложим по степеням x функцию $f(x) = x^2 \ln(1 + 8x^3)$.
Используем известное разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x \leq 1).$$

Подставляем $t = 8x^3$:

$$\ln(1+8x^3) = \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(8x^3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 8^n}{n} x^{3n}$$

(-1 < 8x^3 $\leq 1 \iff -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$).
Окончательно:

$$x^2 \ln(1+8x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 8^n}{n} x^{3n+2} \qquad (-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}).$$

Пример 4. Разложим функцию $f(x) = \cos x$ по степеням $x + \frac{\pi}{4}$:

$$\cos x = \cos\Big(\big(x + \frac{\pi}{4}\big) - \frac{\pi}{4}\Big) = \cos\frac{\pi}{4} \cos\big(x + \frac{\pi}{4}\big) + \sin\frac{\pi}{4} \sin\big(x + \frac{\pi}{4}\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{(x + \frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{(x + \frac{\pi}{4})^4}{4!} - \dots\Big) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big(x + \frac{\pi}{4}\big) - \frac{(x + \frac{\pi}{4})^3}{4!} + \dots\Big) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{2}\, n!} \Big(x + \frac{\pi}{4}\Big)^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$