Бахтиева Л.У., Тазюков Ф.Х.

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассмотрим задачу устойчивости оболочки, подвергающейся действию скручивающих пар $M_к = 2\pi R^2 hs$, где s – средняя величина касательного напряжения, R – радиус оболочки, h – толщина. Известные нам исследования этой проблемы [1, 155] характерны тем, что при построении математической модели не учитываются динамические процессы, происходящие во время хлопка, что приводит к расхождению между теоретическими результатами и экспериментальными данными.

В нелинейной постановке задача может быть решена с помощью энергетического метода Ритца [2, 561]. Так как волнообразование в данном случае происходит по винтовым линиям, идущим от одного торца оболочки к другому, выберем аппроксимирующую функцию прогиба в виде

$$w(x,y) = f_1 \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{n(y-kx)}{R} + f_2 \sin^2\frac{\pi x}{L}, \tag{1}$$

где n – волновое число, k – тангенс угла наклона гребня волны к образующей, L – длина образующей.

Подставим выражение (1) в уравнение неразрывности деформации

$$D\nabla^4 w - hL(w,\Phi) - \frac{h}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $L(w,\Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$;

$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – изгибная жесткость; E, ν – физические константы.

Интегрируя (2), найдем функцию усилий Φ и вычислим полную потенциальную энергию системы [2, 562], для которой получим формулу

$$\widehat{Э} = -\hat{s}b_1{\xi_1}^2 - b_2\hat{s}^2 + b_3{\xi_1}^2 + b_4{\xi_2}^2 + b_5{\xi_1}^4 + b_6\xi_2{\xi_1}^2 + b_7{\xi_1}^2{\xi_2}^2, \tag{3}$$

где $\widehat{Э} = Э\cdot\frac{Eh^3 L\pi}{R}$, $\hat{s} = \frac{sR}{Eh}$, $\xi_1 = \frac{f_1}{h}$, $\xi_2 = \frac{f_2}{h}$. Коэффициенты b_i выражаются через геометрические и физические константы оболочки, а также через параметры волнообразования n и k.

Метод Ритца приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial \hat{Э}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \hat{Э}}{\partial \xi_2} = 0. \tag{4}$$

Из первого уравнения (4) найдем безразмерное напряжение $\hat{s}$, а из второго – выражение для квадрата амплитуды ξ_1

$$\hat{s} = \frac{b_3 + 2b_5{\xi_1}^2 + b_6\xi_2 + b_7{\xi_2}^2}{b_1}, \quad {\xi_1}^2 = \frac{-2b_4\xi_2}{b_6 + 2b_7\xi_2},$$

откуда получаем $$\hat{s} = \frac{b_3 b_6 + (2b_3 b_7 + {b_6}^2 - 4b_4 b_5)\xi_2 + 3b_6 b_7 {\xi_2}^2 + 2{b_7}^2{\xi_2}^3}{b_1 b_6 + (2b_1 b_7 - 4b_2 b_5)\xi_2}. \tag{5}$$

Добавляя к (5) условие минимума напряжения $\frac{\partial \hat{s}}{\partial \xi_2} = 0$, приходим к кубическому уравнению относительно амплитуды ξ_2. Решая уравнение и подставляя найденные корни в формулу (5), находим с учетом минимума по параметрам волнообразования безразмерное значение критического напряжения $\hat{s}_k$. Результаты расчетов (статический подход) приведены в третьем столбце таблицы 1, во втором столбце приведены значения критической нагрузки и волновых параметров, вычисленные по формулам линейной теории [2, 559].

Предложим новую постановку рассматриваемой задачи с учетом динамических факторов. Чтобы получить уравнение движения оболочки, используем принцип Остроградского-Гамильтона

$$\delta \int_0^t L dt = 0, \tag{6}$$

где функция Лагранжа $L = K - Э$, K – кинетическая энергия, $Э$ – потенциальная энергия, для которой получено выражение (3), t – время.

Величину K найдем по формуле $K = \frac{\rho h}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy.$

С учетом выражения (2) и принятых ранее обозначений можно получить

$$\hat{K} = \frac{1}{4}\left(\frac{R}{V}\right)^2 \left({\dot{\xi}_1}^2 + \frac{3}{2}{\dot{\xi}_2}^2\right), \tag{7}$$

где $K = \hat{K}\,\frac{\pi L E h^3}{R}$, V – скорость звука в материале оболочки.

Из равенства (6) получаем систему уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{K}}{\partial \dot{\xi}_1}\right) - \frac{\partial \hat{K}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{Э}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{K}}{\partial \dot{\xi}_2}\right) - \frac{\partial \hat{K}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \hat{Э}}{\partial \xi_2} = 0, \tag{8}$$

а также условия

$$\xi_1(0) = \xi_{10}, \quad \xi_2(0) = \xi_{20}, \quad \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0) = 0, \quad \dot{\xi}_1(t_k) = \dot{\xi}_2(t_k) = 0, \tag{9}$$

где $t = t_k$ – момент потери устойчивости [3, 23; 4, 138].

Уравнения (8) с учетом выражений (3) и (7) примут вид

$$\frac{d^2\xi_1}{d\tau^2} + 4\xi_1\left(-\hat{s}b_1 + b_3 + b_6\xi_2 + 2b_5{\xi_1}^2 + b_7{\xi_2}^2\right) = 0,$$

$$\frac{d^2\xi_2}{d\tau^2} + \frac{4}{3}\left(2b_4\xi_2 + b_6{\xi_1}^2 + 2b_7{\xi_1}^2\xi_2\right) = 0, \quad \tau = tV/R. \tag{10}$$

Численное решение системы уравнений (10) показывает, что при нагрузках $\hat{s} < \hat{s}_k$ оболочка колеблется около исходного положения равновесия с малой амплитудой порядка ξ_{10}. При увеличении нагрузки до значения, равного $\hat{s}_k$, наблюдается резкое возрастание амплитуды прогиба, т.е. происходит потеря устойчивости движения по А.М. Ляпунову. Как показывают расчеты, величина критического напряжения $\hat{s}_k$ зависит от выбора начального значения ξ_{10}, что затрудняет количественный анализ результатов.

Предлагаемый ниже приближенный метод решения системы (10) позволяет получить величину $\hat{s}_k$ независимо от начального прогиба ξ_{10}.

Из статического аналога [3, 100] первого уравнения системы (10) найдем

$${\xi_1}^2 = \frac{\hat{s}b_1 - b_3 - b_6\xi_2 - b_7{\xi_2}^2}{2b_5}.$$

Подставляя найденное значение во второе уравнение системы, получим

$$\frac{d^2\xi_2}{d\tau^2} = A_0 + A_1\xi_2 + A_2{\xi_2}^2 + A_3{\xi_2}^3, \tag{11}$$

где коэффициенты A_k зависят от напряжения $\hat{s}$ и от параметров b_i.

Полагая $\xi_{20} = 0$, умножим уравнение (11) на $\frac{d\xi_2}{d\tau}$ и проинтегрируем обе части уравнения от 0 до τ_k

$$\dot{\xi}_2^{\,2}(\tau_k) - \dot{\xi}_2^{\,2}(0) = 2A_0\xi_2 + A_1\xi_2^{\,2} + 2A_2\frac{\xi_2^{\,3}}{3} + A_3\frac{\xi_2^{\,4}}{2}.$$

Согласно условиям (9) левая часть уравнения равна нулю. Получаем кубическое уравнение для функции $\xi_2(\hat{s})$. Добавляя к нему условия минимума напряжения по ξ_2 и по параметрам волнообразования n и k, найдем решение задачи. Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Геометрические параметры		Линейная теория			Нелинейная теория					
					Статический подход			Динамический подход		
L/R	*R/h*	$\hat{s}$	*n*	*k*	$\hat{s}$	*n*	*k*	$\hat{s}$	*n*	*k*
1	180	0.213	15	0.472	0.191	12	0.455	0.198	12	0.458
3	180	0.123	9	0.273	0.101	8	0.287	0.107	8	0.276
1	250	0.196	16	0.435	0.172	13	0.435	0.179	13	0.421
3	250	0.113	9	0.251	0.093	9	0.281	0.099	9	0.255
1	500	0.165	20	0.366	0.140	16	0.382	0.147	16	0.367
3	500	0.095	11	0.211	0.078	11	0.246	0.083	11	0.220

Таблица 1. Результаты расчетов для разных значений геометрических параметров

Таким образом, учет динамики хлопка приводит к результатам, лежащим между значениями, полученными с помощью линейных и нелинейных уравнений статики. В тех же диапазонах находятся экспериментальные данные [1, 162; 2, 564].

Литература

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978, 360 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967, 985 с.
3. Коноплев Ю.Г., Тазюков Ф.Х. Устойчивость упругих пластин и оболочек при нестационарных воздействиях. Казань: КГУ, 1994, 124 с.
4. Саченков А.В., Бахтиева Л.У. Об одном подходе к решению динамических задач устойчивости тонких оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек, вып.13, 1978, с.137-152.