С. Н. Тронин УДК 512.71

О РЕТРАКЦИЯХ КОЛЕЦ МНОГОЧЛЕНОВ

Рассматриваются коммутативные и ассоциативные конечнопорожденные проективные алгебры над кольцом A. Проективность A-алгебры B означает, что существует конечное множество $X=\{X_1, \ldots, X_n\}$ и гомоморфизмы A-алгебр $\pi: A[X]\to B$, $\vartheta: B\to A[X]$ такие, что $\pi\vartheta=1$. Если взять $f_i=\vartheta\pi(X_i)$, то $f_i(f_1, \ldots, f_r)=f_i$ для всех i. Положим $f=\{f_1, \ldots, f_n\}$ и будем записывать эти и аналогичные соотношения в векторной форме, напр., $f(f)=f$. Пара (π, ϑ) определяется набором f с точностью до изоморфизма A-алгебр $B\simeq A[f]$. Пусть $\Omega_A^{(1)}(B)$ есть модуль A-дифференциалов B. Если K и R — две A-алгебры и $\tau: K\to R$ — гомоморфизм A-алгебр, то через $\bar{\tau}$ обозначим гомоморфизм правых R-модулей $\bar{\tau}: \Omega_A^{(1)}(K)\otimes_K R\to \Omega_A^{(1)}(R)$ такой, что $\bar{\tau}(dx\otimes 1)=d(\tau(x))$. Если $\pi\vartheta=1$, то определим $\underline{\vartheta}$ как композицию

$$\underline{\vartheta}: \Omega_A^{(1)}(B)\simeq \Omega_A^{(1)}(B)\otimes_B A[X]\otimes_{A[X]} B \xrightarrow{\bar{\vartheta}\otimes 1} \Omega_A^{(1)}(A[X])\otimes_{A[X]} B.$$

Тогда $\bar{\pi}\underline{\vartheta}=1$. Пусть $\Delta: A[X]\otimes_A A[X]\to A[X]\otimes_A A[X]$ — изоморфизм $A[X]$-алгебр, определяемый соответствиями $\Delta(X_i\otimes 1)=X_i\otimes 1+1\otimes X_i$, $\Delta(1\otimes X_i)=1\otimes X_i$.

Основные объекты, изучаемые в данной работе,— гомоморфизмы $\Phi(\pi, \vartheta)$, $\Psi(\pi, \vartheta)$, $\varphi(\pi, \vartheta)$, $\psi(\pi, \vartheta)$, которые строятся следующим образом. $\Phi(\pi, \vartheta)$ есть композиция

$$B\otimes_A B \xrightarrow{\vartheta\otimes\vartheta} A[X]\otimes_A A[X] \xrightarrow{\Delta} A[X]\otimes_A A[X] \xrightarrow{1\otimes\pi} A[X]\otimes_A B\simeq$$

$$\simeq S_B(\Omega_A^{(1)}(A[X])\otimes_{A[X]} B) \xrightarrow{S(\bar{\pi})} S_B(\Omega_A^{(1)}(B)).$$

$\Psi(\pi, \vartheta)$ есть композиция

$$S_B(\Omega_A^{(1)}(B)) \xrightarrow{S(\underline{\vartheta})} S_B(\Omega_A^{(1)}(A[X])\otimes_{A[X]} B)\simeq A[X]\otimes_A B \xrightarrow{1\otimes\vartheta}$$

$$\xrightarrow{1\otimes\vartheta} A[X]\otimes_A A[X] \xrightarrow{\Delta^{-1}} A[X]\otimes_A A[X] \xrightarrow{\pi\otimes\pi} B\otimes_A B.$$

Для каждой пары (π, ϑ) можно выбрать (π', ϑ'), $\pi': A[X]\to B$, $\vartheta': B\to A[X]$ такие, что $\pi'\vartheta'=1$, $\Phi(\pi, \vartheta)=\Phi(\pi', \vartheta')$, $\Psi(\pi, \vartheta)=\Psi(\pi', \vartheta')$ и $\mathrm{Ker}(\pi')\subset(X)$. В дальнейшем будем предполагать, что для самого гомоморфизма π $\mathrm{Ker}(\pi)\subset(X)$. Это равносильно тому, что $f(0)=0$ или что $\pi((X))=\mathfrak{P}$ — идеал в B, причем $B=A\oplus\mathfrak{P}$. Таким образом, возникает структура B-алгебры на $A\simeq B/\mathfrak{P}$. Проведя замену основного кольца, определим $\varphi=\varphi(\pi, \vartheta)=\Phi(\pi, \vartheta)\otimes 1: B\to S_A(\Omega_A^{(1)}(B)\otimes_B A)$, $\psi=\psi(\pi, \vartheta)=\Psi(\pi, \vartheta)\otimes 1: S_A(\Omega_A^{(1)}(B)\otimes_B A)\to B$.

Предложение 1. $\Phi(\pi, \vartheta)$, $\Psi(\pi, \vartheta)$ — *мономорфизмы B-алгебр, согласованные с фильтрациями (на B берется фильтрация степенями идеала, порожденного всеми $x\otimes 1-1\otimes x$). При этом соответствующие гомоморфизмы ассоциированных градуированных алгебр* $\mathrm{gr}(\Phi)$ *и* $\mathrm{gr}(\Psi)$ *являются взаимно обратными биекциями. Аналогичными свойствами обладают* $\varphi(\pi, \vartheta)$ *и* $\psi(\pi, \vartheta)$, *причем здесь на B берется $\mathfrak{P}$-адическая фильтрация.*

Основной задачей теории проективных алгебр является выяснение условий, при которых $B\simeq S_A(P)$. Модуль P обязан быть изоморфным модулю $\Omega_A^{(1)}(B)\otimes_B A$, поэтому $\varphi(\pi, \vartheta)$ и $\psi(\pi, \vartheta)$ можно считать „первым приближением" к изоморфизму алгебр. Заметим, что $\Phi(\pi, \vartheta)=\varphi(\pi^*, \vartheta^*)$, а $\Psi(\pi, \vartheta)=\psi(\pi^*, \vartheta^*)$ для некоторых гомоморфизмов B-алгебр $\pi^*: B[X]\to B\otimes_A B$, $\vartheta^*: B\otimes_A B\to B[X]$, $\pi^*\vartheta^*=1$, которые однозначно строятся по (π, ϑ). Кроме того, если λ — автоморфизм B, а γ — автоморфизм $A[X]$, то переход от (π, ϑ) к $(\lambda\pi, \vartheta\lambda^{-1})$ или к $(\pi\gamma, \gamma^{-1}\vartheta)$ не влияет на свойство φ или ψ быть биекцией. Взятие φ и ψ перестановочно с заменой колец, и в случае необходимости можно считать, что f имеет следующий стандартный вид: $f_1=X_1+q_1, \ldots, f_m=X_m+q_m$, и полиномы $q_1, \ldots, q_m, f_{m+1}, \ldots, f_n$ принадлежат квадрату идеала (X).

Предложение 2. $\varphi(\pi, \vartheta)$ *и* $\psi(\pi, \vartheta)$ — *взаимно обратные биекции тогда и только тогда, когда $q_1, \ldots, q_m$ не содержат одночленов от $X_1, \ldots, X_m$. В частности, если $f^{(k)}=\{f_1^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)}\}$ — однородное слагаемое f степени k (стандартный вид уже не обязателен), то это так, если f имеет одну из следующих форм:*

(1) $f=f^{(1)}+f^{(k)}$, $k>1$;

(2) $f=f^{(1)}+f^{(2)}+f^{(k)}$, $k>4$;

(3) $f=f^{(1)}+f^{(k)}+f^{(k+1)}+\ldots+f^{(2k-1)}$, $k>2$.

Определим π_0 и ϑ_0 как композиции

$$\pi_0 : A[X] \simeq S_A(\Omega_A^{(1)}(A[X]) \otimes_{A[X]} B \otimes_B A) \xrightarrow{S(\bar\pi \otimes 1)} S_A(\Omega_A^{(1)}(B) \otimes_B A),$$

$$\vartheta_0 : S_A(\Omega_A^{(1)}(B) \otimes_B A) \xrightarrow{S(\bar\vartheta \otimes 1)} S_A(\Omega_A^{(1)}(A[X]) \otimes_{A[X]} B \otimes_B A) \simeq A[X].$$

Тогда $\pi_0 \vartheta_0 = 1$, $\varphi(\pi, \vartheta) = \pi_0 \vartheta$, $\psi(\pi, \vartheta) = \pi\vartheta_0$. Переход от (π, ϑ) к (π_0, ϑ_0) обозначим через $(\pi, \vartheta)_0$.

Предложение 3. (1) *$\varphi(\pi, \vartheta)$ — биекция тогда и только тогда, когда существует $\pi' : A[X] \to B$, $\pi'\vartheta = 1$, такой, что $(\pi', \vartheta)_0 = (\pi, \vartheta)_0$ и $\varphi(\pi, \vartheta)\pi' = \pi_0$;*

(2) *$\psi(\pi, \vartheta)$—биекция тогда и только тогда, когда существует $\pi'' : A[X] \to S_A(\Omega_A^{(1)}(B) \otimes_B A)$, $\pi''\vartheta_0 = 1$, такой, что $(\pi'', \vartheta_0)_0 = (\pi_0, \vartheta_0)_0 = (\pi_0, \vartheta_0)$ и $\psi(\pi, \vartheta)\pi'' = \pi$.*

Будем говорить, что пара (π, ϑ) имеет φ-тип, если выполняется одно из эквивалентных свойств: $\psi(\pi, \vartheta)\pi_0 = \pi$ или $\varphi(\pi, \vartheta)\pi = \pi_0$, и что пара (π, ϑ) имеет ψ-тип, если выполняется одно из эквивалентных свойств: $\vartheta_0 \varphi(\pi, \vartheta) = \vartheta$ или $\vartheta\psi(\pi, \vartheta) = \vartheta_0$. Пара (π', ϑ) из утверждения (1) предложения 3 имеет φ-тип, а пара (π'', ϑ_0) из утверждения (2) имеет ψ-тип. Если (π, ϑ) имеет φ-тип или ψ-тип, то $\varphi(\pi, \vartheta)$ и $\psi(\pi, \vartheta)$ — взаимно обратные биекции.

Обозначим через $\Delta^1(f)(X)$ матрицу Якоби системы полиномов f. Мы предполагаем здесь, что $\partial f_i / \partial X_j$ расположен в j-й строке и i-м столбце. Пусть μ есть изоморфизм B-модулей, $\mu : \Omega_A^{(1)}(A[X]) \otimes_{A[X]} B \to \Omega_A^{(1)}(A[X]) \otimes_{A[X]} B \otimes_B A \otimes_A B$, переводящий $dX_i \otimes 1$ в $dX_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$, а ν есть изоморфизм $A[X]$-модулей, $\nu : \Omega_A^{(1)}(A[X]) \otimes_{A[X]} A \otimes_A A[X] \to \Omega_A^{(1)}(A[X])$, переводящий $dX_i \otimes 1 \otimes 1$ в dX_i. С этого места будем предполагать, что A не имеет кручения как абелева группа.

Предложение 4. *Любое из перечисленных ниже свойств равносильно тому, что (π, ϑ) имеет φ-тип.*

(1) *Существует изоморфизм $\mu_0 : \Omega_A^{(1)}(B) \to \Omega_A^{(1)}(B) \otimes_B A \otimes_A B$ такой, что $\mu_0 \bar\pi = (\bar\pi \otimes 1 \otimes 1)\mu$.*

(2) $\Delta^1(f)(X) = \Delta^1(f)(X)\Delta^1(f)(0)$.

(3) $\Delta^1(f)(f) = \Delta^1(f)(f)\Delta^1(f)(0)$.

(4) $\Delta^1(f)(0) = \Delta^1(f)(0)\Delta^1(f)(f)$.

(5) $\Delta^1(f)(f^{(1)}) = \Delta^1(f)(f^{(1)})\Delta^1(f)(0)$.

(6) $\Delta^1(f)(0) = \Delta^1(f)(0)\Delta^1(f)(f^{(1)})$.

В частности, свойство (π, ϑ) иметь φ-тип не зависит от выбора ϑ для данного π.

Предложение 5. *Любое из перечисленных ниже свойств равносильно тому, что (π, ϑ) имеет ψ-тип.*

(1) *Существует изоморфизм $\nu_0 : \Omega_A^{(1)}(B) \otimes_B A \otimes_A A[X] \to \Omega_A^{(1)}(B) \otimes_B A[X]$ такой, что $\bar\vartheta \nu_0 = \nu(\bar\vartheta \otimes 1 \otimes 1)$.*

(2) $\Delta^1(f)(x) = \Delta^1(f)(0)\Delta^1(f)(x)$.

(3) $\Delta^1(f)(0) = \Delta^1(f)(x)\Delta^1(f)(0)$.

В частности, свойство (π, ϑ) иметь ψ-тип не зависит от выбора π для данного ϑ.

Кроме того, φ и ψ взаимно обратны при выполнении любого из условий: $\Delta^1(f)(0) = \Delta^1(f)(0)\Delta^1(f)(x)$ или $\Delta^1(f)(0) = \Delta^1(f)(f^{(1)})\Delta^1(f)(0)$. В [1] имеется пример, который показывает, что предложения 4 и 5 не имеют места для колец простой характеристики. Там же на с. 498 приведено рассуждение, из которого фактически следует, что при $X = \{X_1\}$ φ и ψ всегда биективны и взаимно обратны. Результаты данной работы обобщают результаты [2], [3], а также статьи автора [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Costa D. L. Retracts of polynomial rings.— J. Algebra, 1977, v. 44, № 2, p. 492—502.
2. Тронин С. Н. О некоторых достаточных условиях изоморфности проективных алгебр симметрическим.— V Всесоюзн. симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщ. Новосибирск, 1982, с. 132—133.
3. Тронин С. Н. Несколько результатов из теории проективных алгебр.— XVII Всесоюзн. алгебраическ. конф. Тезисы сообщ. Минск, 1983, ч. 1, с. 191—192.
4. Тронин С. Н. О системах образующих проективных алгебр.— Изв. вузов. Матем., 1984, № 5, с. 63—72.

г. Казань

Поступила
06.04.1984