

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

*Кафедра прикладной математики
и искусственного интеллекта*

Н.Б. ПЛЕЩИНСКИЙ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ
КООРДИНАТНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА ПРОВОДЯЩИХ ТОНКИХ ЭКРАНАХ

Казань – 2022

УДК 537.8
ББК 22.336

*Публикуется по решению
Ученого совета Института вычислительной математики
и информационных технологий,
протокол №8 от 31 марта 2022 года*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры мат. физики МГУ **А.С. Ильинский**,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики КФУ **Д.Н. Тумаков**

Плещинский Н.Б.

**Обобщенные решения координатных задач дифракции
электромагнитных волн на проводящих тонких экранах /**
Н.Б. Плещинский. – Казань: Казанский федеральный университет,
2022. – 106 с.

В монографии изложены методы решения ряда задач дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах и дано их теоретическое обоснование.

Для студентов, аспирантов и научных работников, занимающихся разработкой и обоснованием методов решения задач дифракции волн.

© Плещинский Н.Б., 2022

© Казанский университет, 2022

Введение

Задачи дифракции электромагнитных волн – один из основных разделов волновой электродинамики. Предполагается, что электромагнитная волна от удаленного источника набегаёт на диэлектрическое или проводящее тело. Требуется найти возникающее при этом рассеянное электромагнитное поле – уходящие от тела волны.

Математическая постановка задач дифракции сводится к следующему. Нужно найти решения уравнений Максвелла вне тела и внутри тела, если оно диэлектрическое, удовлетворяющие условиям сопряжения на границах раздела сред, граничным условиям на границах проводящих тел и условиям на бесконечности.

Условия сопряжения на границах раздела сред обычно ставятся как условия непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного векторов полного поля. На границах проводящих тел должны обращаться в нуль касательные составляющие электрического вектора. Форма условий на бесконечности зависит от конкретной ситуации.

Строгое обоснование методов решения задач дифракции на проводящих тонких экранах, особенно произвольной формы, возможно с привлечением теории псевдодифференциальных операторов [9]. Решения уравнений Максвелла нужно искать в специальных пространствах распределений.

В данной монографии рассматриваются только некоторые задачи дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах в предположении, что экран расположен в координатной плоскости декартовой системы координат. Эта плоскость может быть в общем случае границей раздела сред.

Мы используем метод частичных областей. Волноводная структура делится на две части плоскостью, в которой размещен экран.

В каждой такой части строится представление решений уравнений Максвелла (или уравнения Гельмгольца в двумерном случае), содержащее неизвестные элементы – функции или коэффициенты их разложения в ряд. Уравнения для определения этих элементов выводятся из граничных условий на экране и условий сопряжения на оставшейся части плоскости, разделяющей области.

Основная цель нашего исследования – разработка методов сведения координатных задач дифракции электромагнитных волн на проводящих экранах к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения полей в частичных областях. Это можно сделать достаточно просто, если не заботиться о математической строгости рассуждений. Также просто можно свести рассматриваемые задачи дифракции к интегральным уравнениям, если формально провести математические выкладки.

Для обоснования метода частичных областей в нашем случае потребовалось ввести специальные классы обобщенных решений уравнений электродинамики – отображений, которые значениям продольной пространственной переменной волноводной структуры ставят в соответствие обобщенную функцию. Стандартные пространства распределений не всегда пригодны для достижения поставленной цели. В качестве обобщенных функций рассматриваются линейные функционалы на множествах линейных комбинаций некоторых базисных функций, а точнее, последовательности значений функционалов на этих функциях. Выбор базисных функций зависит от геометрии волноводной структуры.

Монография написана в основном по работам автора, некоторые результаты публикуются впервые. В конце каждой главы даны ссылки на использованные источники.

PNB

1. ПОПЕРЕЧНЫЕ ПЕРЕГОРОДКИ В ВОЛНОВОДАХ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ

В первой главе монографии рассматриваются задачи дифракции электромагнитных волн на поперечных экранах в волноводах с металлическими стенками. На примере простой двумерной задачи дифракции на поперечной перегородке в плоском волноводе показано, как можно свести задачу дифракции к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) относительно коэффициентов разложения искомого поля по собственным волнам с помощью интегрально-сумматорных тождеств. Аналогичным методом сведения к БСЛАУ задача дифракции на экране в прямоугольном волноводе. Показано, как распространить разработанную технику на волноводы произвольного поперечного сечения с металлическими стенками.

Для обоснования метода сведения задач дифракции к БСЛАУ введены специальные классы обобщенных функций, которые представляют собой линейные функционалы, определенные на подходящем пространстве основных функций. Такие обобщенные функции отождествляются с последовательностями их значений на базисных основных функциях. Важные понятия и необходимые операции над ними введены по аналогии с классической теорией распределений. Решения уравнений с частными производными, описывающих электромагнитные волны, рассматриваются в цилиндрических областях как функции поперечной координаты, значениями которых являются обобщенные функции. Как следствие, условия задачи дифракции на поперечных экранах в закрытых волноводах формулируются на языке обобщенных функций непосредственно как БСЛАУ, состоящие из нескольких групп уравнений.

1.1. Поперечная перегородка в плоском волноводе

Задача дифракции электромагнитной волны на поперечной тонкой проводящей перегородке в плоском волноводе – одна из самых простых задач волноводной электродинамики.

Пусть в поперечном сечении $z = 0$ плоского волновода, ограниченного проводящими плоскостями $x = 0$, $x = a$ и заполненного однородной изотропной средой, размещена идеально проводящая бесконечно тонкая лента (рис. 1.1). На ленту (экран) набегают слева собственная волна волновода. Нужно найти волны, отраженные влево и прошедшие вправо.

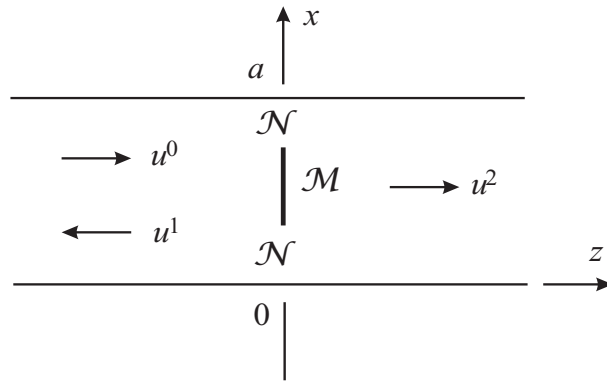


Рис. 1.1. Поперечная перегородка в плоском волноводе

Предположим, что электромагнитное поле гармонически зависит от времени ($e^{-i\omega t}$) и не зависит от координаты y . Как известно, в этом случае любое решение уравнений Максвелла является суммой решений двух различных поляризаций. В случае ТМ-поляризации поля ненулевые компоненты векторов **E** и **H**

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial x},$$

где потенциальная функция $u(x, z)$ – решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u(x, z) = 0, \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon.$$

Методом разделения переменных легко находится решение уравнения Гельмгольца в полосе $0 < x < a$ при граничных условиях $u(0, z) = 0$, $u(a, z) = 0$:

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot e^{-i\gamma_n z} + b_n \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot e^{i\gamma_n z} \right],$$

где $\gamma_n = \sqrt{k^2 - (\pi n/a)^2}$, a_n и b_n – некоторые постоянные. Если условиться, что $\operatorname{Re} \gamma_n > 0$ или $\operatorname{Im} \gamma_n > 0$, то элементарные волны с амплитудами a_n или переносят энергию в направлении оси z , или затухают в этом направлении (такие волны будем называть *положительно ориентированными*). Элементарные волны с амплитудами b_n или переносят энергию в противоположном направлении, или затухают в этом направлении (такие волны будем называть *отрицательно ориентированными*).

Пусть на перегородку набегает слева собственная волна волновода с потенциальной функцией

$$u^0(x, z) = a_l^0 \sin \frac{\pi l}{a} x \cdot e^{i\gamma_l z}.$$

Будем искать потенциальные функции волн, уходящих влево и вправо от сечения $z = 0$, в виде

$$u^1(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot e^{-i\gamma_n z}, \quad \text{и} \quad u^2(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot e^{i\gamma_n z}$$

(предполагается, что ряды сходятся и их суммы можно дифференцировать два раза).

Часть отрезка $[0, a]$ оси z , занятую экраном, обозначим через \mathcal{M} , а оставшуюся часть отрезка – через \mathcal{N} . На сечении волновода $z = 0$ должны выполняться граничные условия

$$u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = 0, \quad u^2(x, 0) = 0, \quad x \in \mathcal{M},$$

и условия сопряжения на \mathcal{N}

$$u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = u^2(x, 0), \quad \frac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0) + \frac{\partial u^1}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial u^2}{\partial z}(x, 0).$$

Из граничных условий следует, что первое условие сопряжения должно выполняться при $x \in [0, a]$. Тогда

$$a_l^0 + a_l = b_l, \quad a_n = b_n, \quad n \neq l.$$

Исключим неизвестные b_n и получим *парное сумматорное функциональное уравнение* (ПСФУ)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{a} x = -a_l^0 \sin \frac{\pi l}{a} x, \quad x \in \mathcal{M};$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n \sin \frac{\pi n}{a} x = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \quad n, k = 1, 2, \dots$$

Первое равенство – это первое граничное условие, второе равенство следует из второго условия сопряжения.

Обозначим

$$I_{nk} = \int_{\mathcal{M}} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi k}{a} x \cdot dx, \quad J_{nk} = \int_{\mathcal{N}} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi k}{a} x \cdot dx.$$

Эти интегралы легко вычислить; заметим, что $J_{nk} = \delta_{nk} a/2 - I_{nk}$, здесь и дальше δ_{nk} – символ Кронекера.

Имеет место *интегрально-сумматорное тождество* (ИСТ)

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n \sin \frac{\pi n}{a} t \right) \left(\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} \sin \frac{\pi m}{a} t \cdot \sin \frac{\pi m}{a} x \right) dt = \\ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{a} x, \quad x \in [0, a] \end{aligned} \quad (1.1)$$

(при условии, разумеется, что участвующие в нем ряды сходятся).

Из ИСТ следует, что на \mathcal{N}

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{a} x = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} \sin \frac{\pi m}{a} x \cdot I_{nm}, \quad x \in \mathcal{N}.$$

С другой стороны, сумма этого ряда Фурье известна на \mathcal{M} (первая часть ПСФУ). Перейдем к равенству коэффициентов Фурье и получим

$$-\frac{a}{2} a_k + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{nm} J_{mk} = a_l^0 I_{lk}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Приближенное решение этой бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) можно найти методом усечения, если оставить конечное число неизвестных и конечное число уравнений:

$$-\frac{a}{2} a_k + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^N a_n \gamma_n \sum_{m=1}^M \frac{1}{\gamma_m} I_{nm} J_{mk} = a_l^0 I_{lk}, \quad k = 1 \dots N.$$

Здесь есть два параметра усечения, натуральные числа N и M .

Вычислительный эксперимент показал, что имеет место сходимость последовательности приближенных решений БСЛАУ к точному решению при $N, M \rightarrow +\infty$. Установлено, что достаточным условием для сходимости является условие $M > N$ [18], но на практике может быть и $M = N$, и даже $M < N$.

Для обоснования перехода от задачи дифракции волны на перегородке в плоском волноводе к БСЛАУ нужно убедиться в том, что сходятся ряды Фурье в ПСФУ и в ИСТ. Дело в том, что ряды в представлениях решений уравнений Гельмгольца при $z < 0$ и $z > 0$ соответственно сходятся в силу того, что в суммах содержится только конечное число осциллирующих слагаемых, а все остальные стремятся к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$. Но возможен ли предельный переход при $z \rightarrow \pm 0$? В дальнейшем мы покажем, что этот вопрос снимается, если искать решения уравнения Гельмгольца в специальном классе обобщенных решений.

В случае ТЕ-поляризации поля

$$H_y = u, \quad E_x = \frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad E_z = \frac{-1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x},$$

где $u(x, z)$ – решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее на границе полосы $0 < x < a$ условиям $\frac{\partial u}{\partial x}(0, z) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(a, z) = 0$. Тогда

$$u(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n}{a} x \cdot e^{-i\gamma_n z} + b_n \cos \frac{\pi n}{a} x \cdot e^{i\gamma_n z} \right],$$

где постоянные распространения γ_n точно такие же, как в случае ТМ-поляризации.

Чтобы упростить формулы, нормируем базисные функции. Обозначим

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad c_n(x) = \sqrt{2/a} \cos \frac{\pi n}{a} x, \quad n \neq 0.$$

Пусть на перегородку набегают слева собственная волна волновода с потенциальной функцией

$$u^0(x, z) = a_l^0 c_l(x) \cdot e^{i\gamma_l z}, \quad l \neq 0.$$

Будем искать потенциальные функции волн, уходящих влево и вправо от сечения $z = 0$, в виде

$$u^1(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n c_n(x) \cdot e^{-i\gamma_n z} \quad \text{и} \quad u^2(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n c_n(x) \cdot e^{i\gamma_n z}.$$

Граничные условия

$$\frac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0) + \frac{\partial u^1}{\partial z}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^2}{\partial z}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathcal{M},$$

и условия сопряжения на \mathcal{N}

$$\frac{\partial u^0}{\partial z}(x, 0) + \frac{\partial u^1}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial u^2}{\partial z}(x, 0), \quad u^0(x, 0) + u^1(x, 0) = u^2(x, 0)$$

дают ПФУ ($a_l^0 - a_l = b_l$, $-a_n = b_n$, $n \neq l$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \gamma_n c_n(x) = a_l^0 \gamma_l c_l(x), \quad x \in \mathcal{M}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n c_n(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}$$

С помощью интегрально-сумматорного тождества ($x \in [0, a]$)

$$\int_0^a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n c_n(t) \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \gamma_m c_m(t) c_m(x) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \gamma_n c_n(x), \quad (1.3)$$

выводится БСЛАУ

$$a_k \gamma_k - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{m=0}^{+\infty} \gamma_m I_{nm} J_{mk} = a_l^0 \gamma_l I_{lk}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.4)$$

где

$$I_{nk} = \int_{\mathcal{M}} c_n(x) c_k(x) dx, \quad J_{nk} = \int_{\mathcal{N}} c_n(x) c_k(x) dx, \quad n, k = 0, 1, \dots$$

Вычислительный эксперимент показал, что при тех же значениях параметров усечения приближенное решение БСЛАУ (1.4) получается немного менее точное, чем в случае БСЛАУ (1.2).

Как определить, правильно ли найдено приближенное решение задачи дифракции? Можно проверить, выполнены ли следующие условия:

- 1) *внутренняя сходимость*: результаты вычислений должны быть стабильны при $M, N \rightarrow +\infty$;
- 2) *предельные случаи*: если лента занимает все сечение волновода или, наоборот, практически незаметна ... ;
- 3) *закон сохранения энергии*: сколько энергии пришло с набегающей на перегородку волной, столько в сумме должно уйти вправо и влево;
- 4) *условие на металле*: на ленте должна быть равны нулю касательные составляющие электрического вектора полного поля.

Именно последнее условие самое важно. Все остальные условия граничной задачи будут выполнены для любого набора чисел a_n (если сходится ряд в представлении решения).

Отметим, что интегрально-сумматорные тождества (1.1) и (1.2) представляют собой необходимые и достаточные условия разреше-

мости *переопределенных граничных задач* для уравнения Гельмгольца в полуполосе, поскольку они устанавливают связь для предельных значений его решений $u_0(x) = u(x, 0)$ и $u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0)$ на срезе полосы. Разумеется, при соответствующих граничных условиях при $x = 0$ и $x = a$. Для ориентированных решений функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ не могут быть заданы произвольно.

Ясно, что в сечении волновода может быть размещено несколько тонких проводящих лент и, следовательно, многообразие \mathcal{M} может состоять из нескольких непересекающихся отрезков. В этом случае становятся сложнее выражения интегралов I_{nk} и J_{nk} , но вид БСЛАУ задач дифракции не меняется.

1.2. Обобщенные функции на отрезке

Для обоснования техники, с помощью которой в предыдущем был осуществлен переход от граничной задачи дифракции к БСЛАУ, построим специальные классы обобщенных функций.

Функции

$$s_n(x) = \sqrt{2/a} \sin \frac{\pi n x}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

образуют ортонормированную систему функций на отрезке $[0, a]$. Выберем в качестве пространства основных функций линейное пространство $C_0^2[0, a]$ дважды дифференцируемых функций на этом отрезке, равных нулю на его концах. По теореме Стеклова любая такая функция разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям $s_n(x)$. Следовательно, функции $s_n(x)$ – базис пространства $C_0^2[0, a]$.

Обобщенные функции (далее – о.ф.) определим как линейные функционалы на пространстве основных функций $C_0^2[0, a]$. Каждый такой линейный функционал $f[\cdot]$ однозначно определяется набором чисел $f_n = f[s_n(\cdot)]$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому о.ф. отождествляются с последовательностями чисел f_n .

Интегрируемой на $[0, a]$ функции $f(\cdot)$ соответствует последовательность ее коэффициентов Фурье относительно системы функций $s_n(x)$:

$$f_n = \int_0^a f(x) s_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

О.ф. будем называть *регулярной*, если числа f_n – коэффициенты Фурье обычной функции, которая разлагается в ряд Фурье.

Представление о.ф. в виде формального ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n s_n(\cdot)$$

всего лишь дает список базисных основных функций и значений о.ф. на них. Если ряд сходится, то имеем регулярную обобщенную функцию.

Ясно, что множество о.ф. – линейное пространство с очевидными операциями сложения и умножения на число.

Обобщенные производные о.ф. определим следующим образом. Если $f(\cdot)$ – дважды дифференцируемая на $[0, a]$ функция и $f(0) = 0$, $f(a) = 0$, то

$$\int_0^a f''(x) s_n(x) dx = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \int_0^a f(x) s_n(x) dx.$$

Поэтому производной о.ф. $f[\cdot]$ *второго порядка* назовем такую о.ф. $g[\cdot]$, для которой

$$g[s_n(\cdot)] = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 f[s_n(\cdot)] \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Для наших целей этого достаточно. Производные четного порядка определяются по индукции, а вот производных нечетного порядка и нет вовсе.

Будем говорить, что последовательность о.ф. $f_j[\cdot]$ сходится при $j \rightarrow +\infty$ к о.ф. $f[\cdot]$, если для каждой основной функции $\varphi(\cdot)$ числовая последовательность $f_j[\varphi(\cdot)]$ сходится к числу $f[\varphi(\cdot)]$. При этом

достаточно рассматривать только функции $s_n(\cdot)$ среди всех основных функций из $C_0^2[0, a]$. Если задано параметрическое семейство о.ф. $f_\alpha[\cdot]$, α – параметр, то предельный переход по параметру определяется таким же способом.

Две о.ф. $f[\cdot]$ и $g[\cdot]$ равны, если $f[s_n(\cdot)] = g[s_n(\cdot)]$ при всех $n = 1, 2, \dots$ (или просто $f_n = g_n$, $n = 1, 2, \dots$). Но, как и в классической теории распределений, значения о.ф. в отдельных точках отрезка $[0, a]$ не определены.

Пусть отрезок $[0, a]$ состоит из двух частей \mathcal{M} и \mathcal{N} . В дальнейшем важную роль будут играть наборы наборов чисел

$$I_{nm} = \int_{\mathcal{M}} s_n(x) s_m(x) dx \quad \text{и} \quad J_{nm} = \int_{\mathcal{N}} s_n(x) s_m(x) dx, \quad n, m = 1, 2, \dots,$$

которые уже использовались раньше, только без нормировки базисных функций. Эти интегралы легко вычислить, они просто выражаются друг через друга: $J_{nm} = \delta_{nm} - I_{nm}$.

Будем говорить, что о.ф. $f[\cdot] = 0$ на \mathcal{N} , если

$$\sum_{m=1}^{+\infty} J_{nm} f_m = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

(более точно, если все эти ряды сходятся и их суммы равны нулю) или, что одно и то же,

$$f_n = \sum_{m=1}^{+\infty} I_{nm} f_m \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Поясним смысл такого определения. Если $f[\cdot]$ – регулярная о.ф. и $f(\cdot) = 0$ на \mathcal{N} , то

$$f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m \varphi_m(x), \quad \text{где} \quad f_m = \int_{\mathcal{M}} f(x) \varphi_m(x) dx.$$

Тогда

$$f_n = \int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} f_m \varphi_m(x) \right) s_n(x) dx = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m I_{mn}.$$

Аналогично определяется равенство двух о.ф. на \mathcal{N} или на \mathcal{M} .

Легко видеть, что если $f[\cdot] = g[\cdot]$ на \mathcal{N} и на \mathcal{M} , то $f_n = g_n$ $\forall n = 1, 2, \dots$

Наконец, будем говорить, что о.ф. $f[\cdot]$ принимает на \mathcal{M} такие же значения, как и обычная функция $g(\cdot)$, если

$$f_n = \int_{\mathcal{M}} g(x) s_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

или если $f_n = g_n$, где $g[\cdot]$ – регулярная о.ф., которая соответствует обычной функции $g(\cdot)$, доопределенной нулем до всего отрезка $[0, a]$.

Пространство обобщенных функций образуют также линейные функционалы на пространстве функций $C_1^2[0, a]$, которое состоит из дважды дифференцируемых на отрезке $[0, a]$ функций, первые производные которых обращаются в нуль на концах отрезка. Базис в пространстве $C_1^2[0, a]$ образуют функции $s_n(x)$, определенные в предыдущем пункте. В этом случае основные свойства о.ф. такие же, как и раньше.

1.3. Обобщенные решения задачи дифракции

Будем искать решения уравнения Гельмгольца в полосе $0 < x < a$ при $z < 0$ и при $z > 0$ как функции аргумента z , значениями которых являются обобщенные функции из пространств, построенных в п.1.2. Такие отображения $u^1\cdot$ и $u^2\cdot$ часто называют *абстрактными функциями* (а.ф.). Их *следы* (предельные значения) при $z \rightarrow 0$ будем обозначать $u_0^1[\cdot]$ и $u_0^2[\cdot]$. Предельный переход понимается в обобщенном смысле.

Для определенности рассмотрим случай ТМ-поляризации поля. При фиксированном z значения $u^1[\cdot](z)$ и $u^2[\cdot](z)$ на основной функции $s_n(\cdot)$ есть $u_n^1 = a_n e^{i\gamma_n z}$ и $u_n^2 = b_n e^{-i\gamma_n z}$. Перейдем к пределу при $z \rightarrow 0$ и получим $u_{0,n}^1 = a_n$ и $u_{0,n}^2 = b_n$. Таким образом, следы (обобщенные пределы) функций $u^1(x, z)$ и $u^2(x, z)$ на сечении $z = 0$

полосы $0 < x < a$ являются обобщенными функциями. Следы производных по z функций $u^1(x, z)$ и $u^2(x, z)$ на сечении $z = 0$ полосы также являются о.ф. со значениями

$$u_{1,n}^1 = -i\gamma_n a_n \quad \text{и} \quad u_{1,n}^2 = i\gamma_n b_n.$$

Задачу дифракции ТМ-поляризованной электромагнитной волны в плоском волноводе на поперечном экране поставим следующим образом. Пусть $u^0(x, z)$ – потенциальная функция волны от внешнего источника. Если эта волна состоит из конечного числа мод, то ее следы на сечении $z = 0$ являются обычными функциями.

Нужно найти обобщенные решения уравнения Гельмгольца $u^1\cdot$ и $u^2\cdot$, удовлетворяющие граничным условиям и условиям сопряжения

$$u_0^0[\cdot] + u_0^1[\cdot] = 0, \quad u_0^0[\cdot] + u_0^2[\cdot] = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{M},$$

$$u_1^1[\cdot] = u_0^2[\cdot], \quad u_1^1[\cdot] = u_1^2[\cdot] \quad \text{на} \quad \mathcal{N}.$$

Здесь $u_0^0[\cdot]$ – о.ф., совпадающая с функцией $u_0^0(\cdot)$ на \mathcal{M} и равная нулю на \mathcal{N} .

Так как $u_0^1[\cdot] = u_0^2[\cdot]$ и на \mathcal{N} , и на \mathcal{M} , то, во-первых, $a_n = b_n \quad \forall n = 1, 2, \dots$. Во-вторых, $u_1^1[\cdot] = -u_1^2[\cdot]$. Следовательно, $u_1^1[\cdot] = u_1^2[\cdot] = 0$ на \mathcal{N} .

Итак, для определения неизвестных коэффициентов a_n имеем граничные условия на языке обобщенных функций:

$$u_0^1[\cdot] = -u_0^0[\cdot] \quad \text{на} \quad \mathcal{M}, \quad u_1^1[\cdot] = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{N}.$$

Эти условия имеют вид

$$a_k + u_{0,k}^0 = \sum_{m=1}^{+\infty} J_{km} a_m, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\gamma_m a_m = \sum_{n=1}^{+\infty} I_{mn} \gamma_n a_n, \quad m = 1, 2, \dots$$
(1.5)

Мы получили БСЛАУ для определения коэффициентов a_n , которая состоит из двух групп уравнений.

Есть два преобразования БСЛАУ (1.5), которые, как кажется, "вдвое" сокращают число уравнений. В правые части первой группы уравнений можно подставить выражения a_m , которые найдены из второй группы уравнений. Тогда имеем БСЛАУ

$$-a_k + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{mn} J_{km} = u_{0,k}^0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Фактически это то же самое, что и БСЛАУ (1.2), но только после нормировки базисных функций. Если же в правые части второй группы уравнений подставить выражения a_n , которые найдены из первой группы уравнений, то получим

$$\gamma_m a_m - \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n J_{nm} I_{mn} = \sum_{m=1}^{+\infty} J_{nm} u_{n,0}^0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Эта БСЛАУ похожа на БСЛАУ (1.4), но здесь как бы поменялись местами части \mathcal{M} и \mathcal{N} отрезка $[0, a]$.

Вычислительный эксперимент показал, что приближенные решения БСЛАУ (1.6) и (1.7), найденные методом усечения, очень похожи. При анализе результатов счета установлено, что в первом случае более точно выполнены условия на \mathcal{M} , а во втором случае более точно выполнены условия на \mathcal{N} . Дадим объяснение этому эффекту.

Пусть бесконечные матрицы A и B составлены из элементов I_{mn} и J_{mn} соответственно. Эти матрицы определяют линейные операторы в линейном пространстве числовых последовательностей.

Легко проверить, что

$$\sum_{m=1}^{+\infty} I_{nm} I_{mk} = I_{nk}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} J_{nm} J_{mk} = J_{nk}, \quad \forall n, k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, A и B – дополнительные друг к другу ортогональные проекторы, то есть $A^2 = A$, $B^2 = B$ и $A+B = I$ (I – единичный оператор), а также $AB = 0$, $BA = 0$.

Введем обозначения для бесконечных векторов: $u = (a_1, a_2, \dots)$ и $u^0 = (u_{0,1}^0, u_{0,2}^0, \dots)$. Пусть также C – диагональная матрица из элементов $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Тогда уравнения для определения u имеют вид

$$u = Bu - Au^0, \quad u = C^{-1}ACu. \quad (1.8)$$

Заметим, что операторы $C^{-1}AC$ и $C^{-1}BC$ также являются дополнительными друг к другу ортогональными проекторами.

Если правую часть второго уравнения (1.8) подставить в правую часть первого уравнения вместо u , то получим БСЛАУ (1.6) в операторной форме

$$u = BC^{-1}ACu - Au^0. \quad (1.9)$$

Ясно, что если u – решение уравнений (1.8), то u – решение уравнения (1.9). Пусть теперь u – решение уравнения (1.9). Применим оператор A и получим $Au = -Au^0$. Но если применим оператор B , то получим $Bu = BC^{-1}ACu$ вместо $u = C^{-1}ACu$.

Аналогично, если правую часть первого уравнения (1.8) подставить в правую часть второго уравнения вместо u , то

$$u = C^{-1}ACBu - C^{-1}ACu^0. \quad (1.10)$$

Полной эквивалентности исходным двум уравнениям опять нет.

Чтобы учесть всю информацию, содержащуюся в исходных уравнениях, потребуем, чтобы была минимальной невязка по всем этим уравнениям. Запишем это условие "в координатах":

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sum_{m=1}^{+\infty} I_{km} a_m + u_k^0 \right|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sum_{m=1}^{+\infty} J_{km} \gamma_m a_m \right|^2 \rightarrow \min.$$

Приравняем нулю производные по a_n и получим БСЛАУ

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} I_{km} I_{kn} + \sum_{k=1}^{+\infty} J_{km} \gamma_m J_{kn} \overline{\gamma_n} \right] a_m = - \sum_{k=1}^{+\infty} I_{kn} u_k^0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Приближенное решение этой БСЛАУ при таком же порядке усечения, что и в случае БСЛАУ (1.6) и (1.7), дает самый точный результат.

Возможно, точность вычислений можно увеличить, если брать разное количество уравнений из двух групп БСЛАУ (1.5) по аналогии с тем, как это делается в [13] при решении задачи о разветвлении плоского волновода.

1.4. Экран в прямоугольном волноводе

Пусть прямоугольный волновод с металлическими стенками имеет сечение $0 < x < a$, $0 < y < b$. Обозначим, как раньше,

$$s_n^a(x) = \sqrt{2/a} \sin \frac{\pi n x}{a}, \quad s_n^b(x) = \sqrt{2/b} \sin \frac{\pi n x}{b}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$c_0^a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad c_0^b(x) = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

$$c_n^a(x) = \sqrt{2/a} \cos \frac{\pi n x}{a}, \quad c_n^b(x) = \sqrt{2/b} \cos \frac{\pi n x}{b}, \quad n = 1, 2, \dots$$

и

$$\varphi_{mn}^{ss}(x, y) = s_m^a(x) s_n^b(y), \quad \varphi_{mn}^{cs}(x, y) = c_m^a(x) s_n^b(y),$$

$$\varphi_{mn}^{sc}(x, y) = s_m^a(x) c_n^b(y), \quad \varphi_{mn}^{cc}(x, y) = c_m^a(x) c_n^b(y).$$

Здесь и дальше в суммах индексы m и n изменяются так, чтобы у функций $s_m^a(x)$, $s_n^b(y)$ индексы были натуральными числами, а у функций $c_m^a(x)$, $c_n^b(y)$ допускаются нулевые значения индексов, но не одновременно.

Как известно, в прямоугольном волноводе любая волна представляет собой сумму волн различных поляризации. Любая неориентированная ТМ-волна имеет компоненты

$$E_z = \sum_{m,n} (a_{mn} e^{i\gamma_{mn}z} + b_{mn} e^{-i\gamma_{mn}z}) \varphi_{mn}^{ss}(x, y), \quad H_z = 0,$$

$$\begin{aligned}
E_x &= \sum_{m,n} \frac{i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} (a_{mn} e^{i\gamma_{mn}z} - b_{mn} e^{-i\gamma_{mn}z}) \varphi_{mn}^{cs}(x, y), \\
E_y &= \sum_{m,n} \frac{i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} (a_{mn} e^{i\gamma_{mn}z} - b_{mn} e^{-i\gamma_{mn}z}) \varphi_{mn}^{sc}(x, y), \\
H_x &= \sum_{m,n} \frac{-i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} (a_{mn} e^{i\gamma_{mn}z} + b_{mn} e^{-i\gamma_{mn}z}) \varphi_{mn}^{sc}(x, y), \\
H_y &= \sum_{m,n} \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} (a_{mn} e^{i\gamma_{mn}z} + b_{mn} e^{-i\gamma_{mn}z}) \varphi_{mn}^{cs}(x, y),
\end{aligned}$$

где $\delta_{mn}^2 = (\pi m/a)^2 + (\pi n/b)^2$ и a_{mn}, b_{mn} – некоторые постоянные. Компоненты неориентированной ТЕ-волны

$$\begin{aligned}
E_z &= 0, \quad H_z = \sum_{m,n} (c_{mn} e^{i\gamma_{mn}z} + d_{mn} e^{-i\gamma_{mn}z}) \varphi_{mn}^{cc}(x, y), \\
E_x &= \sum_{m,n} \frac{-i\omega\mu_0\mu}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} (c_{mn} e^{i\gamma_{mn}z} + d_{mn} e^{-i\gamma_{mn}z}) \varphi_{mn}^{cs}(x, y), \\
E_y &= \sum_{m,n} \frac{i\omega\mu_0\mu}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} (c_{mn} e^{i\gamma_{mn}z} + d_{mn} e^{-i\gamma_{mn}z}) \varphi_{mn}^{sc}(x, y), \\
H_x &= \sum_{m,n} \frac{-i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} (c_{mn} e^{i\gamma_{mn}z} - d_{mn} e^{-i\gamma_{mn}z}) \varphi_{mn}^{sc}(x, y), \\
H_y &= \sum_{m,n} \frac{-i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} (c_{mn} e^{i\gamma_{mn}z} - d_{mn} e^{-i\gamma_{mn}z}) \varphi_{mn}^{cs}(x, y).
\end{aligned}$$

Для волн положительной ориентации $b_{mn} = 0$ и для волн отрицательной ориентации $a_{mn} = 0$.

Рассмотрим задачу дифракции собственной волны прямоугольного волновода, набегающей на экран \mathcal{M} , размещенный в плоскости $z = 0$, из области $z < 0$ (рис. 1.2). Пусть эту волну образует пара волн различной поляризации. На экране \mathcal{M} должны быть равны нулю (с каждой стороны экрана) касательные составляющие вектора \mathbf{E} полного поля, то есть компоненты E_x и E_y . На экране и на его дополнении \mathcal{N} до полного сечения волновода должны быть непрерывны касательные составляющие вектора \mathbf{E} и касательные

составляющие вектора **Н**. Сформулируем эти условия на языке следов обобщенных решений.

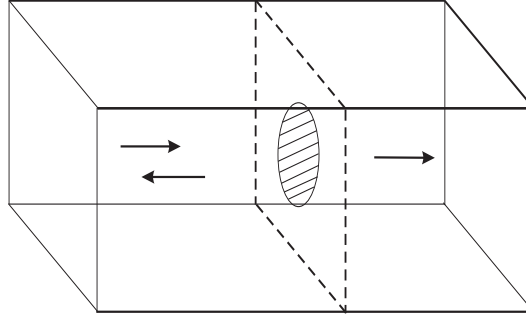


Рис. 1.2. Экран в прямоугольном волноводе

Нужно определить четыре пространства основных функций и, следовательно, четыре пространства обобщенных функций. Пусть пространства основных функций образуют линейные комбинации функций $\varphi_{mn}^{ss}(x, y)$, $\varphi_{mn}^{cs}(x, y)$, $\varphi_{mn}^{sc}(x, y)$ и $\varphi_{mn}^{cc}(x, y)$. Пространства обобщенных функций, которые мы будем обозначать SS , CS , SC и CC , образуют линейные функционалы на соответствующих пространствах основных функций. Значения функционала $f[\cdot] \in SS$ на функции $\varphi_{mn}^{ss}(\cdot)$, например, будем обозначать f_{mn}^{ss} .

Операции дифференцирования определим следующим образом. При дифференцировании о.ф. переходит из одного пространства в другое. Дифференцирование по x сводится к перевычислению значений о.ф. на основных функциях по правилу:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{mn}^{cs} &= \frac{\pi m}{a} f_{mn}^{ss}; & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{mn}^{ss} &= -\frac{\pi m}{a} f_{mn}^{ss}; \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{mn}^{cc} &= \frac{\pi m}{a} f_{mn}^{sc}; & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{mn}^{sc} &= -\frac{\pi m}{a} f_{mn}^{cc}. \end{aligned}$$

Аналогично выполняется дифференцирование по y .

Следовательно, обобщенные пределы при $z \rightarrow 0$ из области $z > 0$ касательных составляющих поля положительно ориентированной

волны состоят из двух слагаемых:

$$\begin{aligned}
(E_x)_{mn}^{cs} &= \frac{i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} a_{mn} + \frac{-i\omega\mu_0\mu}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} c_{mn}, \\
(E_y)_{mn}^{sc} &= \frac{i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} a_{mn} + \frac{i\omega\mu_0\mu}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} c_{mn}, \\
(H_x)_{mn}^{sc} &= \frac{-i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} a_{mn} + \frac{-i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} c_{mn}, \\
(H_y)_{mn}^{cs} &= \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} a_{mn} + \frac{-i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} c_{mn}.
\end{aligned}$$

Условия равенства нулю на частях прямоугольника $[0, a] \times [0, b]$ для обобщенной функции определим точно так же, как раньше в случае отрезка. Пусть для каждого из четырех пространств о.ф. (верхние индексы не пишем)

$$I_{mnpq} = \int_{\mathcal{M}} \varphi_{mn}(x, y) \varphi_{pq}(x, y) dx dy,$$

$$J_{mnpq} = \int_{\mathcal{N}} \varphi_{mn}(x, y) \varphi_{pq}(x, y) dx dy,$$

здесь $\varphi_{mn}(x, y)$ – базисные функции рассматриваемого пространства. По определению о.ф. $f[\cdot] = 0$ на \mathcal{N} , если (по аналогии с одномерным случаем)

$$\sum_{m,n} J_{mnpq} f_{mn} = 0 \quad \forall p, q \quad \text{или} \quad f_{pq} = \sum_{m,n} I_{mnpq} f_{mn} \quad \forall p, q.$$

Как и в случае задачи дифракции на экране в плоском волноводе, задача дифракции собственной волны прямоугольного волновода на поперечном тонком проводящем экране \mathcal{M} при $z = 0$ сводится к односторонней граничной задаче для области $z < 0$ (или для области $z > 0$). Условия этой задачи сформулируем на языке следов обобщенных решений:

$$E_{x,0}^0[\cdot] = -E_{x,0}^1[\cdot], \quad E_{y,0}^0[\cdot] = -E_{y,0}^1[\cdot] = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{M},$$

$$H_{x,0}^1[\cdot] = 0, \quad H_{y,0}^1[\cdot] = 0 \quad \text{на } \mathcal{N}.$$

Таким образом, имеем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} I_{mnpq}^{cs} \left[\frac{i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} a_{mn} - \frac{i\omega\mu_0\mu}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} c_{mn} \right] &= -(E_{x,0}^0)_{pq}^{cs} \quad \forall p, q, \\ \sum_{m,n} I_{mnpq}^{sc} \left[\frac{i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} a_{mn} + \frac{i\omega\mu_0\mu}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} c_{mn} \right] &= -(E_{y,0}^0)_{pq}^{sc} \quad \forall p, q, \\ \sum_{m,n} J_{mnpq}^{sc} \left[\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} a_{mn} + \frac{i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} c_{mn} \right] &= 0 \quad \forall p, q, \\ \sum_{m,n} J_{mnpq}^{cs} \left[\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi m}{a} a_{mn} - \frac{i\gamma_{mn}}{\delta_{mn}^2} \frac{\pi n}{b} c_{mn} \right] &= 0 \quad \forall p, q, \end{aligned} \tag{1.12}$$

состоящую из четырех групп уравнений относительно двух групп неизвестных коэффициентов. Ожидается, что при численных расчетах целесообразно искать минимум невязки по всем уравнениям, вошедшим в усеченную СЛАУ.

1.5. Собственные волны волновода произвольного сечения

Если граница волновода или резонатора не является координатной поверхностью, то искать собственные волны методом разделения переменных не получается. Мы покажем, как это можно сделать с помощью разложений искомым решений в ряды по двум системам функций, ортогональных на поперечном сечении волноводной структуры.

Будем искать ненулевые решения уравнений Максвелла для комплексных амплитуд в цилиндрической области, заполненной однородной изотропной средой

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x, & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\omega\mu_0\mu H_x, \\
\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y, & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i\omega\mu_0\mu H_y, \\
\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega\mu_0\mu H_z.
\end{aligned}$$

Пусть ось z является продольной ось цилиндрической области и граница поперечного сечения этой области ограничена кусочно гладким контуром, который описывается уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда касательная к контуру – это вектор $(x'(t), y'(t))$ и нормаль к контуру – это вектор $(-y'(t), x'(t))$ (в поперечной плоскости).

На металлических стенках волновода достаточно задать условие: касательные составляющие вектора E равны нулю. Но, как известно, нормальная составляющая вектора H также должна быть равна нулю. Удобно использовать все необходимые граничные условия для уравнений Максвелла в цилиндрической области:

$$E_z = 0, \quad x'(t) E_x + y'(t) E_y = 0, \quad -y'(t) H_x + x'(t) H_y = 0.$$

Будем использовать два набора собственных функций оператора Лапласа, удовлетворяющих разным граничным условиям и ортогональных на поперечном сечении цилиндрической области:

$$\begin{aligned}
\psi_m(x, y), \quad m = 0, 1, \dots & \quad | \quad \Delta \psi_m + \chi_m \psi_m = 0, \quad \psi_m|_C = 0, \\
\varphi_m(x, y), \quad m = 0, 1, \dots & \quad | \quad \Delta \varphi_m + \lambda_m \varphi_m = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_C = 0.
\end{aligned}$$

Покажем, что касательные составляющие электромагнитного поля в цилиндрической области имеют вид

$$H_z(x, y, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda_m \varphi_m(x, y) [a_m e^{-i\gamma_m z} + b_m e^{i\gamma_m z}],$$

$$E_z(x, y, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \chi_m \psi_m(x, y) [c_m e^{-i\delta_m z} + d_m e^{i\delta_m z}],$$

где $\gamma_m = \sqrt{k^2 - \lambda_m}$, $\delta_m = \sqrt{k^2 - \chi_m}$ и произвольные коэффициенты a_m , b_m и c_m , d_m определяют магнитное поле и электрическое поле соответственно.

Так как функция E_z должна обращаться в нуль на границе цилиндрической области, то будем искать ее в виде

$$E_z = \sum_m E_{z,m}(z) \chi_m \psi_m(x, y)$$

(здесь имеет смысл поставить множитель χ_m). Рассмотрим третье уравнение системы Максвелла. Предположим, что касательные компоненты вектора H имеют вид

$$H_y = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \sum_m E_{z,m}(z) \frac{\partial\psi_m}{\partial x}(x, y) + P(x, y, z),$$

$$H_x = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon \sum_m E_{z,m}(z) \frac{\partial\psi_m}{\partial y}(x, y) + Q(x, y, z).$$

Легко видеть, что функции P и Q должны удовлетворять условию $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Следовательно, $P = \frac{\partial R}{\partial y}$, $Q = \frac{\partial R}{\partial x}$, где $R(x, y, z)$ — некоторая дифференцируемая функция.

Тогда третье граничное условие сводится к равенству

$$\begin{aligned} & -y'(t) H_x + x'(t) H_y = \\ & i\omega\varepsilon_0\varepsilon \sum_m E_{z,m}(z) [y'(t) \frac{\partial\psi_m}{\partial y}(x, y) + x'(t) \frac{\partial\psi_m}{\partial x}(x, y)] - \\ & -y'(t) \frac{\partial R}{\partial x} + x'(t) \frac{\partial R}{\partial y}. \end{aligned}$$

Если $\psi_m(x(t), y(t)) = 0$ то $y'(t) \frac{\partial\psi_m}{\partial y}(x, y) + x'(t) \frac{\partial\psi_m}{\partial x}(x, y) = 0$. Последнее слагаемое есть $\frac{\partial R}{\partial \nu}$. Поэтому

$$R(x, y, z) = \sum_m R_m(z) \varphi_m(x, y)$$

и тогда

$$P(x, y, z) = \sum_m R_m(z) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(x, y), \quad Q(x, y, z) = \sum_m R_m(z) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}(x, y).$$

Из четвертого и пятого уравнений следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\omega\mu_0\mu H_x = \sum_m \frac{\partial \psi_m}{\partial y} (\chi_m - k^2) E_{z,m} - i\omega\mu_0\mu \sum_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} R_m, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\omega\mu_0\mu H_y = \sum_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x} (\chi_m - k^2) E_{z,m} + i\omega\mu_0\mu \sum_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} R_m. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в шестое уравнение (предварительно продифференцированное) и получим

$$\begin{aligned} i\omega\mu_0\mu \frac{\partial H_z}{\partial z} &= \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} = -i\omega\mu_0\mu \sum_m \left(\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} \right) R_m = \\ &= i\omega\mu_0\mu \sum_m \lambda_m \varphi_m R_m. \end{aligned}$$

Поэтому

$$H_z = \sum_m H_{z,m}(z) \lambda_m \varphi_m(x, y),$$

где функции $H_{z,m}$ должны удовлетворять условиями $H'_{z,m} = R_m$, и

$$\begin{aligned} E_y &= \sum_m \frac{\partial \psi_m}{\partial y} S_m(z) - i\omega\mu_0\mu \sum_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} H_{z,m}, \\ E_x &= \sum_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x} S_m(z) + i\omega\mu_0\mu \sum_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} H_{z,m}, \end{aligned}$$

где $S'_m = (\chi_m - k^2) E_{z,m}$.

Легко проверить, что второе граничное условие выполняется.

Действительно,

$$\begin{aligned} x'(t) E_x + y'(t) E_y &= \sum_m \left(x'(t) \frac{\partial \psi_m}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \right) S_m + \\ &+ i\omega\mu_0\mu \sum_m \left(-y'(t) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + x'(t) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right) H_{z,m}. \end{aligned}$$

Подставим сумматорные представления искомых функций в первое и второе уравнения системы Максвелла и получим

$$\sum_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} [(\lambda_m - k^2) H_{z,m} - R'_m] - i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \sum_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x} [E'_{z,m} - S_m] = 0,$$

$$- \sum_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} [(\lambda_m - k^2) H_{z,m} - R'_m] - i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \sum_m \frac{\partial \psi_m}{\partial y} [E'_{z,m} - S_m] = 0.$$

Отсюда следует, что $R'_m + (k^2 - \lambda_m) H_{z,m} = 0$ и $S_m = E'_{z,m}$. Нужно добавить сюда равенства $H'_{z,m} = R_m$ и $S'_m + (k^2 - \chi_m) E_{z,m} = 0$.

В итоге мы имеем два уравнения

$$H''_{z,m} + (k^2 - \lambda_m) H_{z,m} = 0, \quad E''_{z,m} + (k^2 - \chi_m) E_{z,m} = 0.$$

Эти уравнения имеют фундаментальные системы решений $e^{\pm i\gamma_m z}$ и $e^{\pm i\delta_m z}$. Если мы условимся, что или $\text{Re } \gamma_m > 0$, $\text{Re } \delta_m > 0$, или $\text{Im } \gamma_m > 0$, $\text{Im } \delta_m > 0$, то для волн положительной ориентации нужно взять знак плюс в экспонентах, а для волн отрицательной ориентации – знак минус.

1.6. Экран в волноводе произвольного сечения

В случае волновода с металлическими стенками произвольного сечения имеет смысл изменить формулировки граничных условий и условий сопряжения на сечении волновода.

Определим два пространства о.ф. Φ и Ψ как множества линейных функционалов на линейных комбинациях функций $\varphi_m(x, y)$ и $\psi_m(x, y)$. Если затем ввести пространства для производных таких о.ф., то окажется, что компоненты поля E_x , E_y , H_x , H_y состоят из двух слагаемых, которым соответствуют о.ф. из разных пространств. Рассмотренный ранее случай прямоугольного волновода – исключительный.

Поэтому на сечении $z = 0$ зададим нестандартные условия: на границе раздела сред должны быть непрерывны компоненты H_z ,

E_z , $\partial H_z/\partial z$, $\partial E_z/\partial z$, а на экране должны быть равны нулю компоненты H_z и $\partial E_z/\partial z$.

Дело в том, что если на границе раздела сред компоненты E_x , E_y , H_x , H_y должны удовлетворять некоторым линейным условиям, то суммы и разности их производных должны удовлетворять аналогичным условиям. Но из уравнений Максвелла следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega\mu_0\mu H_z, & \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -\frac{\partial E_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} &= -\frac{\partial H_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Поэтому в дальнейшем будет достаточно использовать только два пространства о.ф.

Итак, обобщенные условия при $z = 0$ зададим для нулевых следов следующим образом:

$$\begin{aligned}\text{на } \mathcal{M} : H_{z,0}^+[\cdot] + H_{z,0}^0[\cdot] &= 0, & H_{z,0}^-[\cdot] + H_{z,0}^0[\cdot] &= 0, \\ \left(\frac{\partial E_z^+}{\partial z}\right)_0[\cdot] + \left(\frac{\partial E_z^0}{\partial z}\right)_0[\cdot] &= 0, & \left(\frac{\partial E_z^-}{\partial z}\right)_0[\cdot] + \left(\frac{\partial E_z^0}{\partial z}\right)_0[\cdot] &= 0, \\ \text{на } \mathcal{N} : H_{z,0}^+[\cdot] = H_{z,0}^-[\cdot], & \left(\frac{\partial E_z^+}{\partial z}\right)_0[\cdot] = \left(\frac{\partial E_z^-}{\partial z}\right)_0[\cdot], \\ E_{z,0}^+[\cdot] = E_{z,0}^-[\cdot], & \left(\frac{\partial H_z^+}{\partial z}\right)_0[\cdot] = \left(\frac{\partial H_z^-}{\partial z}\right)_0[\cdot].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$H_{z,0}^+[\cdot] = H_{z,0}^-[\cdot], \quad \left(\frac{\partial E_z^+}{\partial z}\right)_0[\cdot] = \left(\frac{\partial E_z^-}{\partial z}\right)_0[\cdot]$$

и на \mathcal{M} , и на \mathcal{N} . Тогда $a_m^+ = a_m^- = a_m$ и $b_m^+ = -b_m^- = b_m$, а также

$$\left(\frac{\partial H_z^+}{\partial z}\right)_0[\cdot] = -\left(\frac{\partial H_z^-}{\partial z}\right)_0[\cdot], \quad E_{z0}^+ = -E_{z0}^-.$$

Поэтому задача дифракции на экране свелась к односторонней граничной задаче

$$\text{на } \mathcal{M} : H_{z,0}^+[\cdot] = -H_{z,0}^0[\cdot], \quad \left(\frac{\partial E_z^+}{\partial z}\right)_0[\cdot] = -\left(\frac{\partial E_z^0}{\partial z}\right)_0[\cdot],$$

$$\text{на } \mathcal{N} : \left(\frac{\partial H_z^+}{\partial z}\right)_0[\cdot] = 0, \quad E_{z,0}^+[\cdot] = 0.$$

Пусть теперь

$$I_{mp}^\varphi = \int_{\mathcal{M}} \varphi_m(x, y) \varphi_p(x, y) dx dy,$$

$$J_{mp}^\varphi = \int_{\mathcal{N}} \varphi_m(x, y) \varphi_p(x, y) dx dy,$$

$$I_{mp}^\psi = \int_{\mathcal{M}} \psi_m(x, y) \psi_p(x, y) dx dy,$$

$$J_{mp}^\psi = \int_{\mathcal{N}} \psi_m(x, y) \psi_p(x, y) dx dy$$

(1.13)

(интегралы здесь двумерные, но функции φ и ψ нумеруются одним индексом). Тогда, как и раньше, о.ф. $f[\cdot] = 0$ на \mathcal{N} , если

$$\sum_m J_{mp} f_m = 0 \quad \forall p \quad \text{или} \quad f_p = \sum_m I_{mp} f_m \quad \forall p.$$

В итоге БСЛАУ задачи дифракции на экране имеет вид (сейчас множители λ_m и χ_m в представлениях в виде рядов для H_z и E_z отсутствуют)

$$\sum_{m=0}^{+\infty} I_{mp} a_m = -(H_{z,0}^0)_p, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} I_{mp} \delta_m b_m = -\left(\frac{\partial E_z^0}{\partial z}\right)_{0,p},$$

(1.14)

$$\sum_{m=0}^{+\infty} J_{mp} \gamma_m a_m = 0, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} J_{mp} b_m = 0, \quad p = 0, 1, \dots$$

Легко видеть, что для неизвестных a_m и b_m имеем независимые уравнения.

Алгоритм приближенного решения БСЛАУ (1.14) допускает распараллеливание. Наибольшие вычислительные затраты связаны с вычислением интегралов (1.13) и с вычислением значений функций $\varphi_m(x, y)$ и $\psi_m(x, y)$.

* * *

Задачи дифракции электромагнитных волн на координатных неоднородностях в волноводах относятся к ключевым задачам волноводной электродинамики [30], §4. Задача дифракции на поперечной перегородке в плоском волноводе обычно рассматривается как простой пример, иллюстрирующий сложную технику решения таких задач (см., например, [17], §3.6).

Тонкие перегородки, частично перекрывающие поперечное сечение волновода, часто называют диафрагмами. Одна из первых публикаций в этом направлении – статья Л.А Вайнштейна [4]. Свойства индуктивных и емкостных диафрагм в прямоугольном волноводе изучены методом задачи Римана-Гильберта в книге [29], часть II.

Метод переопределенной граничной задачи (или метод ИСТ) сведения задач дифракции на неоднородностях в плоском волноводе к БСЛАУ впервые был применен в работе [18], раздел 1.1 написан в основном по §8 учебного пособия [20]. Этот метод будет использоваться и в следующих главах. Теория обобщенных функций была построена под влиянием исследований В.С. Мокейчева, см., например, [14]. В разделах 1.2 и 1.3 изложены результаты статьи [25], а разделы 1.5 и 1.6 написаны по работе [22].

2. ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

Вторая глава посвящена задачам дифракции электромагнитных волн на тонких проводящих экранах в открытом пространстве. Такие задачи обычно сводятся к интегральным уравнениям, в общем случае сингулярным и гиперсингулярным, методами теории потенциала. Мы используем метод переопределенной граничной задачи, в основе которого лежит связь между следами ориентированных решений уравнения Гельмгольца или уравнений Максвелла в полуплоскости или в полупространстве. Эта связь порождает пары интегральных преобразований типа свертки и, как следствие, интегральные уравнения задач дифракции. Подробно рассмотрен двумерный случай, а затем и трехмерный.

Несложно получить необходимые и достаточные условия разрешимости переопределенных задач для уравнений с частными производными, если не обращать внимание на строгость математических преобразований. Возможны два подхода: или с помощью функций Грина задач Дирихле и Неймана, или с помощью интегрального преобразования Фурье по касательным переменным. Для обоснования метода преобразования Фурье выбраны естественные классы обобщенных решений уравнения Гельмгольца и уравнений Максвелла.

2.1. Дифракция электромагнитной волны на тонкой проводящей ленте

Пусть в плоскости $z = 0$ трехмерного пространства расположена бесконечно тонкая идеально проводящая лента (экран), параллельная оси y . На ленту набегают электромагнитная волна, возбуждаемая удаленным источником. Нужно найти электромагнитное поле, возникающее при ее дифракции.

Рассмотрим наиболее простой случай задачи дифракции на ленте, когда пространство заполнено однородной изотропной средой, а поле не зависит от координаты y (двумерное поле).

Обозначим через \mathcal{M} часть оси x , занятую лентой, и через \mathcal{N} – дополнение \mathcal{M} до всей оси (рис. 2.1).

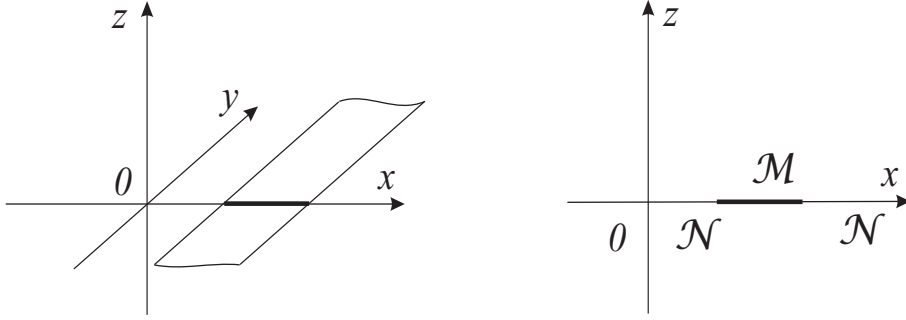


Рис. 2.1. Тонкая проводящая лента

Пусть электромагнитное поле параллельно поляризовано, то есть его ненулевые компоненты выражаются через потенциальную функцию $u(x, z)$ – решение уравнения Гельмгольца:

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Пусть электромагнитная волна от внешнего источника с потенциальной функцией $u^0(x, z)$ задана и при $z > 0$, и при $z < 0$. Будем искать отраженные вверх волны и прошедшие вниз волны, которым соответствуют потенциальные функции $u^+(x, z)$ и $u^-(x, z)$ соответственно. На \mathcal{M} должны быть выполнены граничные условия

$$u^0 + u^+ = 0, \quad u^0 + u^- = 0,$$

а на \mathcal{N} должны быть выполнены условия сопряжения

$$u^0 + u^+ = u^0 + u^-, \quad \frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial u^+}{\partial z} = \frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial u^-}{\partial z},$$

одинаковые слагаемые слева и справа взаимно уничтожаются.

Покажем, как с помощью простых (но не вполне строгих) рассуждений выводится интегральное уравнение задачи дифракции на ленте.

Уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u(x, z) = 0$$

имеет очевидные решения $u(x, z) = e^{\pm i\xi x \pm i\zeta z}$, где $\xi^2 + \zeta^2 = k^2$. Примем гипотезу: общее решение уравнения Гельмгольца является наложением элементарных волн с такими потенциальными функциями.

Пусть $\zeta = \gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ и значения $\gamma(\xi)$ вычисляются так, что или это неотрицательные вещественные числа, или мнимые числа с положительной мнимой частью ($\operatorname{Re} \gamma(\xi) \geq 0$ или $\operatorname{Im} \gamma(\xi) > 0$). При вещественных значениях $\gamma(\xi) > 0$ энергия переносится волной вдоль оси z (или в противоположном направлении) в зависимости от знака в экспоненте, при мнимых $\gamma(\xi)$ волны затухают. Если значения ξ пробегают всю числовую ось, то знак перед $i\xi x$ можно взять любой, нам удобнее поставить минус. Поэтому будем искать потенциальные функции в виде

$$u^+(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^+(\xi) e^{-i\xi x + i\gamma(\xi)z} d\xi, \quad z > 0,$$

и

$$u^-(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^-(\xi) e^{-i\xi x - i\gamma(\xi)z} d\xi, \quad z < 0,$$

тем самым условия на бесконечности учтены.

Напомним, что интегральное преобразование Фурье устанавливает соответствие между функциями $f(x)$ и $f(\xi)$:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Следы (предельные значения) функции $u(x, z)$ и ее производной по z при $z \rightarrow 0$ будем обозначать $u_0(x)$ и $u_1(x)$. При $z \rightarrow 0 + 0$ имеем

$$u_0^+(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^+(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad u_1^+(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) A^+(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Следовательно, $\sqrt{2\pi} A^+(\xi) = u_0^+(\xi)$, $\sqrt{2\pi} i\gamma(\xi) A^+(\xi) = u_1^+(\xi)$. При $z \rightarrow 0 - 0$ аналогично, но во второй формуле должен быть другой знак. Таким образом, имеет место следующее важное утверждение.

Функции $u_0^+(x)$ и $u_1^+(x)$ являются следами на прямой $z = 0$ потенциальной функции положительно ориентированной волны тогда и только тогда, когда

$$u_1^+(\xi) - i\gamma(\xi) u_0^+(\xi) = 0. \quad (2.1)$$

Функции $u_0^-(x)$ и $u_1^-(x)$ являются следами на прямой $z = 0$ потенциальной функции отрицательно ориентированной волны тогда и только тогда, когда

$$u_1^-(\xi) + i\gamma(\xi) u_0^-(\xi) = 0. \quad (2.2)$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными условиями разрешимости переопределенных граничных задач для уравнения Гельмгольца в верхней и в нижней полуплоскости: следы ориентированных решений на границе полуплоскости не могут быть заданы произвольно.

Легко получить следующее утверждение.

Задача дифракции электромагнитной волны на ленте эквивалентна односторонней граничной задаче с условиями

$$u_0^+(x) = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_1^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}. \quad (2.3)$$

Действительно, так как $u_0^+(x) = u_0^-(x)$ при всех x , то $u_0^+(\xi) = u_0^-(\xi)$. Тогда $u_1^+(\xi) = -u_1^-(\xi)$ и $u_1^+(x) = -u_1^-(x)$. Поэтому $u_1^+(x) = 0$ на \mathcal{N} .

Функция $u_1^+(x)$ равна нулю на \mathcal{N} , а на \mathcal{M} она пока неизвестна. Но

$$\begin{aligned} u_0^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)} u_1^+(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{M}} u_1^+(x_1) e^{ix_1\xi} dx_1 \right) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \int_{\mathcal{M}} u_1^+(x_1) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)} e^{-i\xi(x-x_1)} d\xi \right) dx_1 = \\ &= \int_{\mathcal{M}} u_1^+(x_1) \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|x-x_1|) \right) dx_1. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл вычислен как обратное преобразование Фурье с помощью формул 130 и 134 при $\lambda = 1/2$ из [2]. Итак, мы пришли к следующему заключению.

Задача дифракции электромагнитной волны на ленте в случае параллельной поляризации поля сводится к интегральному уравнению

$$\int_{\mathcal{M}} u_1^+(x_1) K_1(x_1, x) dx_1 = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad (2.4)$$

где

$$K_1(x_1, x) = -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|x-x_1|). \quad (2.5)$$

В случае, когда электромагнитные волны перпендикулярно поляризованы, рассуждения аналогичные. Отличие состоит в том, что теперь ненулевые компоненты поля

$$H_y = u, \quad E_x = \frac{1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad E_z = \frac{-1}{i\omega\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x},$$

потенциальная функция $u(x, z)$ – также решение уравнения Гельмгольца, и граничные условия имеют вид

$$u_1^0 + u_1^+ = 0, \quad u_1^0 + u_1^- = 0.$$

В этом случае условия односторонней граничной задачи такие:

$$u_1^+(x) = -u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_0^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Доказывается это просто. Так как $u_1^+(x) = u_1^-(x)$ при всех x , то $u_1^+(\xi) = u_1^-(\xi)$. Тогда $u_0^+(\xi) = -u_0^-(\xi)$ и $u_0^+(x) = -u_0^-(x)$. Поэтому $u_0^+(x) = 0$ на \mathcal{N} .

Из граничных условий на \mathcal{M} и \mathcal{N} следует утверждение.

Задача дифракции электромагнитной волны на ленте в случае перпендикулярной поляризации электромагнитного поля сводится к интегральному уравнению

$$\int_{\mathcal{M}} u_0^+(x_1) K_0(x_1, x) dx_1 = -u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad (2.6)$$

где

$$K_0(x_1, x) = \frac{i}{2} \frac{k}{|x - x_1|} H_1^{(1)}(k|x - x_1|). \quad (2.7)$$

Доказательство. Пусть $u_0^+(x)$ – искомая функция на \mathcal{M} (на \mathcal{N} эта функция равна нулю). Тогда

$$\begin{aligned} u_1^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) u_0^+(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{M}} u_0^+(x_1) e^{ix_1\xi} dx_1 \right) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \int_{\mathcal{M}} u_0^+(x_1) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\xi) e^{-i\xi(x-x_1)} d\xi \right) dx_1 = \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathcal{M}} u_0^+(x_1) \left(\frac{i}{2} \frac{k}{|x - x_1|} H_1^{(1)}(k|x - x_1|) \right) dx_1.$$

Внутренний интеграл и в этом случае вычисляется явно с помощью формул 130 и 134 при $\lambda = -1/2$ из [2].

В случае параллельной поляризации поля ядро (2.5) интегрального уравнения задачи дифракции имеет логарифмическую особенность, а в случае перпендикулярной поляризации ядро (2.7) является гиперсингулярным. Приближенное решение интегральных уравнений (2.4) и (2.6) может быть найдено методом Галеркина (при определенном соотношении ширины ленты и длины электромагнитной волны). В случае уравнения (2.4) используются полиномы Чебышева 1-го рода, а в случае уравнения (2.6) – полиномы Чебышева 2-го рода [9], [20], §6.

Если в плоскости $z = 0$ имеется несколько тонких проводящих лент, то все рассуждения остаются в силе. Отличие в том, что многообразии \mathcal{M} состоит из нескольких отрезков. Следовательно, становится более сложным алгоритм поиска приближенного решения интегральных уравнений (2.4) и (2.6).

2.2. Обобщенные решения уравнения Гельмгольца и интегральные уравнения типа свертки

Требует обоснования в первую очередь возможность использования преобразования Фурье. Дело в том, что след плоской волны $u^0(x, z) = e^{-ik \sin \theta^0 - ik \cos \theta^0}$, например, на прямой $z = 0$ не является функцией, обращающейся в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, нужно Действовать в пространстве обобщенных функций (распределений), для которых возможно использовать преобразование Фурье. Начнем с хорошо известного пространства распределений умеренного роста на бесконечности [5], §8.

Рассмотрим переопределенную граничную задачу для уравнения Гельмгольца в полуплоскости $y > 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u(x, y) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = u_1(x).$$

Будем искать ее решение как функцию аргумента y , значения которой являются распределениями умеренного роста на бесконечности. В дальнейшем потребуется выделить некоторое подмножество в пространстве таких распределений.

После преобразования Фурье $x \rightarrow \xi$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (k^2 - \xi^2) u(\xi, y) = 0,$$

его общее решение имеет вид

$$u(\xi, y) = A(\xi) e^{i\gamma(\xi)y} + B(\xi) e^{-i\gamma(\xi)y},$$

здесь $A(\xi)$, $B(\xi)$ – произвольные распределения умеренного роста, и $\gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}$. Пусть, как и в предыдущем пункте, значения этой функции или вещественные неотрицательные числа, или чисто мнимые числа с положительной мнимой частью, то есть

$$\gamma(\xi) = \{ |\xi| \leq k : \sqrt{k^2 - \xi^2}; \quad |\xi| > k : i\sqrt{\xi^2 - k^2}.$$

Зададим условие на бесконечности так: $B(\xi) = 0$. Смысл этого условия в том, что в решении могут присутствовать только гармоники, уносящие энергию на бесконечность или затухающие в этом направлении. Такие решения будем называть положительно ориентированными. Тогда

$$u(\xi, y) = A(\xi) e^{i\gamma(\xi)y}.$$

Отсюда следует уже известное утверждение.

Функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ являются следами положительно ориентированного решения уравнения Гельмгольца в верхней полуплоскости тогда и только тогда, когда их образы Фурье удовлетворяют условию

$$u_1(\xi) - i\gamma(\xi)u_0(\xi) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{i}{\gamma(\xi)}u_1(\xi) + u_0(\xi) = 0. \quad (2.8)$$

Но функции $\gamma(\xi)$, $1/\gamma(\xi)$, а также экспоненты в общем решении дифференциального уравнения, не являются мультипликаторами в пространстве распределений умеренного роста. Нужно ввести специальные пространства основных и обобщенных функций, чтобы обосновать проведенные выше рассуждения. Воспользуемся построениями книги [6], гл. III, §3, п. 8.

Пусть Ψ – пространство основных функций $\psi(s)$, непрерывных вместе с первой производной всюду на числовой прямой, кроме точек $\pm k$, в которых допускаются разрывы первого рода, и такие, что произведения $s^k\psi(s)$, $s^k\psi'(s)$ абсолютно интегрируемы на прямой $(-\infty, +\infty)$. Топология может быть задана тем же способом, как в случае пространств на с. 184 книги [6].

Пусть пространство $\Phi = F[\Psi]$ состоит из функций $\varphi(x)$, являющихся образами Фурье функций $\psi(s)$. Если $\psi(x) \in \Psi$, то имеем $F[F[\psi(x)]] = \psi(-x) \in \Psi$. Поэтому пространство образов Фурье функций из Φ совпадает с Ψ .

Будем рассматривать значения решения уравнения Гельмгольца при каждом z как линейные непрерывные функционалы на пространстве Φ (распределения). Распределение $f(\xi) = 0$ на любой из трех частей прямой, на которые ее делят точки $\pm k$, если равны нулю его значения на любой основной функции $\psi(s)$, равной нулю на двух других частях прямой. Для образов Фурье таких распределений корректно определена операция умножения на функции, которые вместе со своими производными имеют разрывы в точках $\pm k$.

Теперь нужно найти функции (распределения), образами Фурье которых являются функции $\gamma(\xi)$ и $1/\gamma(\xi)$. При преобразовании Фурье функция $1/\gamma(\xi)$ переходит в функцию Ханкеля первого рода нулевого порядка $\pi H_0^{(1)}(k|x|)$. Это следует из формул 130 и 134 из [2] при $\lambda = 1/2$. После еще одного преобразования получим $2\pi/\gamma(-x) = 2\pi/\gamma(x)$. Следовательно, $1/\gamma(\xi)$ является образом Фурье функции $\frac{1}{2} H_0^{(1)}(k|x|)$.

Во втором равенстве (2.8) первое слагаемое слева является произведением образов Фурье распределений $\frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|x|)$ и $u_1(x)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x_1) \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|x - x_1|) dx_1 + u_0(x) = 0. \quad (2.9)$$

Аналогично, если при преобразовании Фурье функция $\gamma(x)$ переходит в $\pi k H_1^{(1)}(k|x|)/|x|$ (формулы 130 и 134 из [2] при $\lambda = -1/2$), то после еще одного преобразования получим $2\pi \gamma(x)$. Поэтому функция $\gamma(x)$ является образом Фурье функции $\frac{k}{2|x|} H_1^{(1)}(k|x|)$. В формуле (2.8) множитель $\gamma(\xi) u_0(\xi)$ является образом Фурье свертки распределений. Тогда

$$u_1(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_1) \frac{ik}{2|x - x_1|} H_1^{(1)}(k|x - x_1|) dx_1 = 0. \quad (2.10)$$

Напомним, что в теории распределений часто принято записывать свертку распределений как интеграл от произведения функций, но эта конструкция не всегда является интегралом в классическом смысле.

Формулы (2.9), (2.10) также можно получить методом функции Грина. Как известно, фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в R^2 имеют вид (см., например, [5], с. 206)

$$\mathcal{E}_2(z) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|z|), \quad \overline{\mathcal{E}_2}(z) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|z|)$$

(здесь $z = (x, y)$ – точка плоскости). Первое из них удовлетворяет условию на бесконечности. Тогда функции Грина задачи Дирихле и задачи Неймана для полуплоскости

$$G_0(z, z_1) = -\mathcal{E}_2(z - z_1) + \mathcal{E}_2(z - \bar{z}_1), \quad G_1(z, z_1) = -\mathcal{E}_2(z - z_1) - \mathcal{E}_2(z - \bar{z}_1),$$

и решения задачи Дирихле и задачи Неймана имеют вид

$$u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_1) \frac{\partial G_0}{\partial y_1}(x_1, 0, x, y) dx_1,$$

$$u_1(x, y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x_1) G_1(x_1, 0, x, y) dx_1.$$

После двух предельных переходов

$$G_1(x_1, 0, x, 0) = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|x - x_1|).$$

Далее, так как после дифференцирования по y_1 и предельного перехода при $y_1 \rightarrow 0$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_1}(x_1, 0, x, y) = \frac{ik y}{2\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}} H_1^{(1)}(k\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}),$$

то после дифференцирования по y и предельного перехода при $y \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial y \partial y_1}(x_1, 0, x, 0) = -\frac{ik}{2|x - x_1|} H_1^{(1)}(k|x - x_1|).$$

Таким образом, мы еще раз пришли к формулам (2.9) и (2.10).

Интегральные уравнения (2.4) и (2.6) легко получить из формул (2.10) и (2.11).

Рассмотрим переопределенную граничную задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = u_1(x)$$

в верхней полуплоскости. В этом случае условие разрешимости имеет вид

$$u_1(\xi) + |\xi| u_0(\xi) = 0.$$

Отсюда однозначно определяется первый след, но нулевой след находится с точностью до произвольной постоянной. Также должно выполняться условие $u_1(0) = 0$, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x) dx = 0.$$

Условие разрешимости переопределенной граничной задачи перепишем следующим образом: $u_1(\xi) + i \operatorname{sgn} \xi \cdot (-i\xi u_0(\xi)) = 0$. Второе слагаемое слева представляет собой произведение образов Фурье распределений $\frac{1}{\pi} \frac{1}{x}$ и $u'_0(x)$, то есть образ Фурье их свертки. От образов Фурье перейдем к прообразам и получим

$$u_1(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'_0(x_1) dx_1}{x - x_1} = 0. \quad (2.11)$$

Но условие разрешимости можно также записать в виде $-i \operatorname{sgn} \xi \cdot u_1(\xi) + u'_0(\xi) = 0$. Тогда

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_1(x_1) dx_1}{x - x_1} + u'_0(x) = 0. \quad (2.12)$$

Для обоснования этих формул можно использовать непосредственно пространства распределений, построенные в книге [6], гл. III, §3, п. 8. Отметим, что формулы (2.11) и (2.12) представляют собой прямое и обратное преобразование Гильберта.

2.3. Уравнение Гельмгольца в трехмерном полупространстве

Условия разрешимости переопределенной граничной задачи для уравнения Гельмгольца в $R_+^3 = \{(x, y, z) \mid z > 0\}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0,$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) = u_1(x, y)$$

также можно получить одним из двух способов – или методом интегрального преобразования Фурье по касательным переменным, или с помощью функций Грина задач Дирихле и Неймана.

Применим преобразование Фурье $x \rightarrow \xi$, $y \rightarrow \eta$ и получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (k^2 - \xi^2 - \eta^2) u = 0.$$

Пусть

$$\gamma(\xi, \eta) = \{\xi^2 + \eta^2 \leq k^2 : \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}; \quad \xi^2 + \eta^2 > k^2 : i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k^2}.$$

Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(\xi, \eta, z) = A(\xi, \eta) e^{i\gamma(\xi, \eta)z} + B(\xi, \eta) e^{-i\gamma(\xi, \eta)z}.$$

При $B(\xi, \eta) = 0$ имеем положительно ориентированное решение, а при $A(\xi, \eta) = 0$ – отрицательно ориентированное решение.

Ориентированное решение уравнения Гельмгольца в полупространстве однозначно определяется по нулевому следу $u_0(x, y)$ или по первому следу $u_1(x, y)$. Следовательно, как и в двумерном случае, справедливо следующее утверждение.

Функции $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$ являются следами на плоскости $z = 0$ положительно ориентированного решения уравнения Гельмгольца

в верхнем полупространстве тогда и только тогда, когда их образы Фурье удовлетворяют условию

$$\begin{aligned}
 u_1(\xi, \eta) - i\gamma(\xi, \eta) u_0(\xi, \eta) &= 0 \\
 \text{или} & \\
 \frac{i}{\gamma(\xi, \eta)} u_1(\xi, \eta) + u_0(\xi, \eta) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Для обоснования формул (2.13) нужно, как и в двумерном случае, построить специальные пространства основных и обобщенных функций. Пусть пространство Ψ состоит из основных функций, зависящих от двух переменных. Эти функции и их производные допускают разрывы первого рода на окружности $\xi^2 + \eta^2 = k^2$. Как и в двумерном случае, пространство Φ состоит из образов Фурье функций из Ψ , а пространство образов Фурье функций из Φ совпадает с пространством Ψ .

Найдем ядра интегральных преобразований типа свертки, порожденных равенствами (2.13). Вычислим обратное преобразование Фурье функции $1/\gamma(\xi, \eta)$. Используем хорошо известную связь между интегральным преобразованием Фурье и интегральным преобразованием Ханкеля (см., например, [7], с. 78). В интеграле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) e^{-i\xi x - i\eta y} d\xi d\eta$$

выполним замену переменных $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Получим

$$2\pi \int_0^{+\infty} f(\rho) J_0(\rho r) \rho d\rho,$$

здесь использовалась известная формула

$$\int_0^{2\pi} e^{iz \cos \alpha} d\alpha = 2\pi J_0(z).$$

В нашем случае

$$f(\rho) = \left\{ \begin{array}{l} 0 < \rho < k : \frac{1}{\sqrt{k^2 - \rho^2}}; \\ \rho > k : \frac{1}{i\sqrt{\rho^2 - k^2}}. \end{array} \right.$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} f(\rho) J_0(\rho r) \rho d\rho = \\ & = \int_0^k \frac{1}{\sqrt{k^2 - \rho^2}} J_0(\rho r) \rho d\rho + \int_k^{+\infty} \frac{1}{i\sqrt{\rho^2 - k^2}} J_0(\rho r) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Из формул 11.26 и 11.27 при $\nu = 0$, $\mu = 1/2$ книги [7] следует, что

$$\int_0^k \frac{\rho}{\sqrt{k^2 - \rho^2}} J_0(\rho r) d\rho = \frac{\sin kr}{r}, \quad \int_k^{+\infty} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - k^2}} J_0(\rho r) d\rho = \frac{\cos kr}{r}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\xi, \eta)} e^{-i\xi x - i\eta y} d\xi d\eta = -\frac{i}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.14)$$

Тогда из второго условия (2.13) следует, что

$$u_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x_1, y_1) \frac{e^{ik\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}}}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} dx_1 dy_1. \quad (2.15)$$

2.4. Уравнения Максвелла в полупространстве

Рассмотрим уравнения Максвелла для комплексных амплитуд электрического и магнитного векторов $\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}$, $\text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}$ в полупространстве $R_+^3 = \{z > 0\}$ (зависимость от времени выбрана в виде $e^{-i\omega t}$).

После преобразования Фурье по касательным переменным $x \rightarrow \xi$, $y \rightarrow \eta$ имеем уравнения в координатах

$$-i\eta H_z - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon E_x, \quad -i\eta E_z - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + i\xi H_z = -i\omega\varepsilon E_y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + i\xi E_z = i\omega\mu H_y,$$

$$-i\xi H_y + i\eta H_x = -i\omega\varepsilon E_z, \quad -i\xi E_y + i\eta E_x = i\omega\mu H_z.$$

Исключим ведомые неизвестные (см. [24])

$$E_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon} (i\xi H_y - i\eta H_x), \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu} (-i\xi E_y + i\eta E_x).$$

Тогда ведущие неизвестные должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\eta^2 - k^2}{i\omega\mu} E_x - \frac{\xi\eta}{i\omega\mu} E_y, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\xi\eta}{i\omega\mu} E_x + \frac{k^2 - \xi^2}{i\omega\mu} E_y,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{k^2 - \eta^2}{i\omega\varepsilon} H_x + \frac{\xi\eta}{i\omega\varepsilon} H_y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{-\xi\eta}{i\omega\varepsilon} H_x + \frac{\xi^2 - k^2}{i\omega\varepsilon} H_y$$

или в векторной форме

$$(\mathbf{E}^\tau)' = \frac{-1}{i\omega\varepsilon} \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{H}^\tau, \quad (\mathbf{H}^\tau)' = \frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{E}^\tau,$$

где $\mathbf{E}^\tau = (E_x, E_y)$, $\mathbf{H}^\tau = (H_x, H_y)$ и

$$\mathbf{P}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi\eta & k^2 - \xi^2 \\ \eta^2 - k^2 & -\xi\eta \end{pmatrix}.$$

Самое важное свойство этой матрицы $\mathbf{P}^2(\xi, \eta) = -k^2(k^2 - \xi^2 - \eta^2) \mathbf{I}$, \mathbf{I} – единичная матрица.

Пусть, как и в случае уравнения Гельмгольца,

$$\gamma(\xi, \eta) = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Тогда положительно ориентированное решение уравнений Максвелла имеет вид

$$\mathbf{E}(\xi, \eta, z) = e^{i\gamma(\xi, \eta)z} \mathbf{a}(\xi, \eta),$$

$$\mathbf{H}(\xi, \eta, z) = \frac{-1}{\omega\mu\gamma(\xi, \eta)} e^{i\gamma(\xi, \eta)z} \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{a}(\xi, \eta).$$

Переопределенная граничная задача для уравнений Максвелла в полупространстве состоит в следующем: найти в R_+^3 положительно ориентированное решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$\mathbf{E}^\tau(x, y, z_0) = \mathbf{e}(x, y), \quad \mathbf{H}^\tau(x, y, z_0) = \mathbf{h}(x, y).$$

Ясно, что вектор-функция $\mathbf{a}(\xi, \eta)$ однозначно определяется по одной из граничных функций $\mathbf{e}(x, y)$ или $\mathbf{h}(x, y)$. Тогда легко вычислить вторую функцию. Следовательно, имеет место утверждение.

Вектор-функции $\mathbf{e}(x, y)$, $\mathbf{h}(x, y)$ являются следами на плоскости $z = 0$ положительно ориентированного решения уравнений Максвелла в полупространстве $z > 0$ тогда и только тогда, когда их образы Фурье удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{e}(\xi, \eta) + \omega\mu\gamma(\xi, \eta) \mathbf{h}(\xi, \eta) &= 0 \\ \text{или} & \\ \omega\varepsilon\gamma(\xi, \eta) \mathbf{e}(\xi, \eta) - \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{h}(\xi, \eta) &= 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Очевидно, что элементы матрицы $\mathbf{P}(\xi, \eta)$ являются мультипликаторами в пространстве распределений умеренного роста. Чтобы мультипликатором была также функция $\gamma(\xi, \eta)$, нужно, как и в случае трехмерного уравнения Гельмгольца, сузить пространство таких распределений. Пространство основных функций Ψ должно состоять из функций двух переменных, которые вместе со своими производными допускают разрывы первого рода на окружности $\xi^2 + \eta^2 = k^2$. Тогда, как и раньше, если пространство Φ состоит из образов Фурье функций из Ψ , то пространство образов Фурье функций из Φ совпадает с пространством Ψ .

Перейдем теперь в уравнениях (2.16) к прообразам Фурье и получим пару матричных операторов типа свертки. Если

$$\mathbf{e}(\xi, \eta) = \frac{1}{\omega\varepsilon\gamma(\xi, \eta)} \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{h}(\xi, \eta),$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}(\xi, \eta) e^{-i\xi x - i\eta y} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega\varepsilon\gamma(\xi, \eta)} \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{h}(\xi, \eta) e^{-i\xi x - i\eta y} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\omega\varepsilon\gamma(\xi, \eta)} \mathbf{P}(\xi, \eta) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(x_1, y_1) e^{ix_1\xi + iy_1\eta} dx_1 dy_1 \right) e^{-i\xi x - i\eta y} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Правая часть этого равенства фактически представляет собой псевдодифференциальный оператор.

Обозначим

$$\mathbf{Q}(x - x_1, y - y_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\xi, \eta)} \mathbf{P}(\xi, \eta) e^{-i(x-x_1)\xi - i(y-y_1)\eta} d\xi d\eta. \quad (2.17)$$

Тогда

$$\mathbf{e}(x, y) = \frac{1}{\omega\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}(x - x_1, y - y_1) \mathbf{h}(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \quad (2.18)$$

Вторая форма условия разрешимости переопределенной задачи дает аналогичное равенство

$$\mathbf{h}(x, y) = -\frac{1}{\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}(x - x_1, y - y_1) \mathbf{e}(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \quad (2.19)$$

Таким образом, связь между касательными составляющими электрического и магнитного вектора в переопределенной граничной задаче для уравнений Максвелла порождает пару взаимно обратных векторных интегральных преобразований типа свертки. В правых частях формул (2.18) и (2.19) стоят гиперсингулярные интегралы, они представляют собой свертки обобщенных функций.

Элементы матрицы $\mathbf{Q}(x - x_1, y - y_1)$ можно записать в явном виде. Преобраз функции $1/\gamma(\xi, \eta)$ был вычислен раньше, формула (2.14). Умножение этой функции на полиномы $k^2 - \xi^2$, $\xi\eta$ и $\eta^2 - k^2$ сводится к дифференцированию функции e^{ikr}/r .

Формулы (2.18) и (2.19) можно получить также методом функции Грина. Функции Грина для уравнений Максвелла в полупространстве выражаются через фундаментальное решение уравнений Максвелла, а это фундаментальное решение может быть получено с помощью фундаментального решения трехмерного уравнения Гельмгольца (см., например, [8], гл. 2).

2.5. Уравнения Максвелла в анизотропных средах

Метод интегрального преобразования Фурье по касательным переменным можно применить при исследовании переопределенной граничной задачи для уравнений Максвелла в анизотропном полупространстве. Укажем несколько частных случаев анизотропии, когда условия разрешимости переопределенной задачи можно выписать в явном виде.

Пусть тензор диэлектрической проницаемости среды

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(рассматривается случай анизотропии по переменным x и y), а магнитная проницаемость $\hat{\mu} = \mu$ — скаляр. Запишем уравнения Макс-

велла для комплексных амплитуд электромагнитного поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}$$

в координатах

$$-i\eta H_z - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon(\varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y), \quad -i\eta E_z - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + i\xi H_z = -i\omega\varepsilon(\varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y), \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + i\xi E_z = i\omega\mu H_y,$$

$$-i\xi H_y + i\eta H_x = -i\omega\varepsilon E_z, \quad -i\xi E_y + i\eta E_x = i\omega\mu H_z$$

и применим интегральное преобразование Фурье по переменным $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$. Исключим компоненты E_z , H_z и получим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{-\xi\eta}{i\omega\varepsilon} H_x + \frac{\xi^2 - k^2}{i\omega\varepsilon} H_y,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{k^2 - \eta^2}{i\omega\varepsilon} H_x + \frac{\xi\eta}{i\omega\varepsilon} H_y,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\xi\eta + k^2\varepsilon_{yx}}{i\omega\mu} E_x + \frac{k^2\varepsilon_{yy} - \xi^2}{i\omega\mu} E_y,$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\eta^2 - k^2\varepsilon_{xx}}{i\omega\mu} E_x - \frac{\xi\eta + k^2\varepsilon_{xy}}{i\omega\mu} E_y$$

(2.20)

или в векторной форме

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{H}, \quad \mathbf{H}' = \frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{P} \mathbf{E} - i\omega\varepsilon \mathbf{Q} \mathbf{E},$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi\eta & k^2 - \xi^2 \\ \eta^2 - k^2 & -\xi\eta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - 1 \\ 1 - \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}.$$

В изотропной среде $\mathbf{Q} = 0$.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы уравнений (2.20) являются корнями полинома четвертой степени вида $\lambda^4 + p\lambda^2 + q$, где

$$p = k^2(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx})\xi\eta - (1 + \varepsilon_{xx})\xi^2 - (1 + \varepsilon_{yy})\eta^2,$$

$$q = (\xi^2 + \eta^2 - k^2) s, \quad s = k^2(\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}) + (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx})\xi\eta + \varepsilon_{xx}\xi^2 + \varepsilon_{yy}\eta^2.$$

Корни этого полинома образуют пары, в каждой паре по два корня разных знаков.

Выделим частные случаи анизотропии, когда можно получить выражения собственных значений наиболее простого вида. Пусть

$$a = r(\xi^2 + \eta^2 - k^2), \quad r \neq 0,$$

$$b = \frac{s}{r} = \frac{1}{r} [k^2(\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}) + (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx})\xi\eta + \varepsilon_{xx}\xi^2 + \varepsilon_{yy}\eta^2].$$

Тогда $ab = q$, а равенство $a + b = -p$ будет выполнено, если

$$r + \frac{1}{r}(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx}) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}, \quad \frac{1}{r}(\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx},$$

$$r + \frac{1}{r}\varepsilon_{xx} = 1 + \varepsilon_{xx}, \quad r + \frac{1}{r}\varepsilon_{yy} = 1 + \varepsilon_{yy}.$$

При $r = 1$ остается только одно уравнение $(\varepsilon_{xx} - 1)(\varepsilon_{yy} - 1) = \varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx}$. Тогда при $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$ имеем *первый вариант одноосевой анизотропии*: или $\varepsilon_{xx} = \alpha$ – любое число, $\varepsilon_{yy} = 1$, или $\varepsilon_{xx} = 1$, $\varepsilon_{yy} = \beta$ – любое число.

При $\varepsilon_{xx} \neq 1$, $\varepsilon_{yy} \neq 1$ анизотропная среда является *двуосевой*, так как и $\varepsilon_{xy} \neq 0$, и $\varepsilon_{yx} \neq 0$. Эти величины могут быть как вещественными, так и мнимыми с разными знаками. Во втором случае матрица $\hat{\varepsilon}$ является эрмитовой, а среда называется *гиротропной* [16], с. 529 (см. также [13], задачи 2.11, 2.12).

Если же $r \neq 1$, то $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = r$ и тогда $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$. Это второй вариант одноосевой анизотропии.

Пусть $\varepsilon_{xx} = \alpha$, $\varepsilon_{yy} = 1$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$. Полином $\lambda^4 + p\lambda^2 + q$ имеет корни $\pm i\gamma_1$, $\pm i\gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \gamma_1(\xi, \eta) = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}, \quad \gamma_2 = \gamma_2(\xi, \eta) = \sqrt{\alpha k^2 - \alpha \xi^2 - \eta^2}.$$

Условимся, что у этих чисел или вещественные части неотрицательные, или мнимые части положительные.

Собственным значениям $\pm i\gamma_1$ соответствуют собственные векторы $(0, \pm \omega \mu \gamma_1, \xi^2 - k^2, \xi \eta)$ и собственным значениям $\pm i\gamma_2$ соответствуют векторы $(k^2 - \xi^2, -\xi \eta, 0, \pm \omega \varepsilon \gamma_2)$.

Следовательно, общее решение системы уравнений (2.20) имеет вид

$$E_x = c e^{i\gamma_2 z} (k^2 - \xi^2) + d e^{-i\gamma_2 z} (k^2 - \xi^2),$$

$$E_y = a e^{i\gamma_1 z} \omega \mu \gamma_1 - b e^{-i\gamma_1 z} \omega \mu \gamma_1 - c e^{i\gamma_2 z} \xi \eta - d e^{-i\gamma_2 z} \xi \eta,$$

$$H_x = a e^{i\gamma_1 z} (\xi^2 - k^2) + b e^{-i\gamma_1 z} (\xi^2 - k^2),$$

$$H_y = a e^{i\gamma_1 z} \xi \eta + b e^{-i\gamma_1 z} \xi \eta + c e^{i\gamma_2 z} \omega \varepsilon \gamma_2 - d e^{-i\gamma_2 z} \omega \varepsilon \gamma_2,$$

здесь $a = a(\xi, \eta)$, $b = b(\xi, \eta)$, $c = c(\xi, \eta)$, $d = d(\xi, \eta)$ – некоторые функции. У решений положительной ориентации $b(\xi, \eta) = 0$, $d(\xi, \eta) = 0$, а функции $a(\xi, \eta)$, $c(\xi, \eta)$ определяются по следам на плоскости $z = 0$ электрического и магнитного векторов $\mathbf{e}(x, y)$, $\mathbf{h}(x, y)$, а точнее по образам Фурье их компонент $e_x(\xi, \eta)$, $e_y(\xi, \eta)$, $h_x(\xi, \eta)$, $h_y(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) (k^2 - \xi^2) &= e_x(\xi, \eta), & a(\xi, \eta) \omega \mu \gamma_1 - c(\xi, \eta) \xi \eta &= e_y(\xi, \eta), \\ a(\xi, \eta) (\xi^2 - k^2) &= h_x(\xi, \eta), & a(\xi, \eta) \xi \eta + c(\xi, \eta) \omega \varepsilon \gamma_2 &= h_y(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Исключим коэффициенты a , c и получим следующее утверждение.

Функции $e_x(x, y)$, $e_y(x, y)$, $h_x(x, y)$, $h_y(x, y)$ являются следами положительно ориентированного решения системы уравнений Максвелла в верхнем полупространстве при $e_{xx} = \alpha$, $e_{yy} = 1$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$ тогда и только тогда, когда их образы Фурье удовлетворяют условиям

$$\omega\mu\gamma_1 h_x + \xi\eta e_x + (k^2 - \xi^2) e_y = 0, \quad -\omega\varepsilon\gamma_2 e_x + \xi\eta h_x + (k^2 - \xi^2) h_y = 0.$$

Чтобы обосновать полученные выше формулы, нужно уточнить, в каком классе рассматриваются искомые функции. В общем решении уравнений (2.20) коэффициенты a , b , c , d должны быть распределениями умеренного роста на бесконечности. Но для них корректно определена операция умножения только на бесконечно дифференцируемые функции, а функции $e^{\gamma_j z}$ и γ_j не принадлежат этому классу. Поэтому нужно сузить класс распределений медленного роста так, чтобы операция умножения стала корректной. Поступим точно так же, как раньше в изотропном случае.

Плоскость ξ, η разделяется на части окружностью $k^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0$ и эллипсом $\alpha k^2 - \alpha \xi^2 - \eta^2 = 0$. Пусть в пространстве Ψ основных функций содержатся функции двух переменных, непрерывные вместе с первыми производными в каждой части плоскости, допускающие разрывы первого рода на окружности и эллипсе и имеющие медленный рост на бесконечности. Пусть пространство $\Phi = F[\Psi]$ состоит из функций, являющихся образами Фурье функций из Ψ . Тогда пространство образов Фурье функций из Φ совпадает с Ψ . Таким образом, при каждом фиксированном z все компоненты искомого поля должны быть линейными непрерывными функционалами на пространстве Φ .

В дальнейшем в каждом конкретном случае нужно рассматривать основные функции, допускающие разрывы первого рода на соответствующих ситуации окружностях или эллипсах.

Если $e_{xx} = 1$, $e_{yy} = \beta$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$, то можно не повторять предыдущие рассуждения. Достаточно переставить x - и y -компоненты электрического и магнитного векторов и вместо α написать β . В этом случае

$$\gamma_1 = \gamma_1(\xi, \eta) = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}, \quad \gamma_2 = \gamma_2(\xi, \eta) = \sqrt{\beta k^2 - \xi^2 - \beta \eta^2}.$$

Собственным значениям $\pm i\gamma_1$ соответствуют собственные векторы $(\mp \omega \mu \gamma_1, 0, \xi \eta, \eta^2 - k^2)$ и собственным значениям $\pm i\gamma_2$ соответствуют собственные векторы $(-\xi \eta, k^2 - \eta^2, \mp \omega \varepsilon \gamma_2, 0)$. Тогда положительно ориентированное решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$E_x = -a e^{i\gamma_1 z} \omega \mu \gamma_1 - c e^{i\gamma_2 z} \xi \eta, \quad E_y = c e^{i\gamma_2 z} (k^2 - \eta^2),$$

$$H_x = a e^{i\gamma_1 z} \xi \eta - c e^{i\gamma_2 z} \omega \varepsilon \gamma_2, \quad H_y = a e^{i\gamma_1 z} (\eta^2 - k^2).$$

Следы этих компонент поля при $z = 0$

$$e_x = -a \omega \mu \gamma_1 - c \xi \eta, \quad e_y = c (k^2 - \eta^2),$$

$$h_x = a \xi \eta - c \omega \varepsilon \gamma_2, \quad h_y = a (\eta^2 - k^2).$$

Поэтому имеет место утверждение, аналогичное полученному выше.

Функции $e_x(x, y)$, $e_y(x, y)$, $h_x(x, y)$, $h_y(x, y)$ являются следами положительно ориентированного решения системы уравнений Максвелла в верхнем полупространстве при $e_{xx} = 1$, $e_{yy} = \beta$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$ тогда и только тогда, когда их образы Фурье удовлетворяют условиям

$$-\omega \mu \gamma_1 h_y + (k^2 - \eta^2) e_x + \xi \eta e_y = 0, \quad \omega \varepsilon \gamma_2 e_y + (k^2 - \eta^2) h_x + \xi \eta h_y = 0.$$

Рассмотрим второй вариант одноосевой анизотропии. Пусть $e_{xx} = e_{yy} = r \neq 1$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$. Тогда

$$\gamma_1 = \gamma_1(\xi, \eta) = \sqrt{rk^2 - r\xi^2 - r\eta^2}, \quad \gamma_2 = \gamma_2(\xi, \eta) = \sqrt{rk^2 - \xi^2 - \eta^2}$$

и собственным значениям $\pm i\gamma_1$ соответствуют собственные векторы $(\mp\xi\gamma_1, \mp\eta\gamma_1, \omega\varepsilon r\eta, -\omega\varepsilon r\xi)$ и собственным значениям $\pm i\gamma_2$ соответствуют собственные векторы $(\omega\mu\eta, -\omega\mu\xi, \pm\xi\gamma_2, \pm\eta\gamma_2)$. Положительно ориентированное решение системы дифференциальных уравнений (*) имеет вид

$$E_x = -a e^{i\gamma_1 z} \xi \gamma_1 + c e^{i\gamma_2 z} \omega \mu \eta, \quad E_y = -c e^{i\gamma_2 z} \eta \gamma_1 - c e^{i\gamma_2 z} \omega \mu \xi,$$

$$H_x = a e^{i\gamma_1 z} \omega \varepsilon r \eta + c e^{i\gamma_2 z} \xi \gamma_2, \quad H_y = -a e^{i\gamma_1 z} \omega \varepsilon r \xi + c e^{i\gamma_2 z} \eta \gamma_2.$$

Условия разрешимости переопределенной граничной задачи дает следующее утверждение.

Функции $e_x(x, y)$, $e_y(x, y)$, $h_x(x, y)$, $h_y(x, y)$ являются следами положительно ориентированного решения системы уравнений Максвелла в верхнем полупространстве при $e_{xx} = e_{yy} = r \neq 1$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$ тогда и только тогда, когда их образы Фурье удовлетворяют условиям

$$\omega \varepsilon r (\xi e_x + \eta e_y) + \gamma_1 (\eta h_x - \xi h_y) = 0, \quad \gamma_2 (\eta e_x - \xi e_y) - \omega \mu (\xi h_x + \eta h_y) = 0.$$

* * *

Задачи дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах достаточно хорошо изучены в теоретическом плане. Одно из наиболее фундаментальных исследований в этой области – монография А.С. Ильинского и Ю.Г. Смирнова [9]. В этой книге подробно рассмотрены вопросы существования и единственности

решений граничных задач для уравнений Максвелла и уравнения Гельмгольца. Современная математическая теория дифракции волн на системе экранов изложена в монографии Ю.Г. Смирнова и А.А. Цупака [27].

Для численного решения интегральных уравнений, к которым приводятся задачи дифракции, широко используется метод Галеркина. В двумерных задачах и, соответственно, для одномерных интегральных уравнений подходящими базисными функциями являются полиномы Чебышева (с весом) [11], гл. IV, поскольку они являются собственными функциями главных частей интегральных операторов. Техника преобразования интегрального уравнения с ядром в виде функции Ханкеля подробно показана в [20], §6. В трехмерном случае (для двумерных интегральных уравнений) используются специальные базисные функции.

Раздел 2.1 написан в соответствии с §6 учебного пособия [20]. В дальнейшем, для строгого обоснования метода, как уже было указано, были использованы аналоги специальных классов обобщенных функций в духе книги [6]. В разделе 2.4 использованы некоторые результаты работ [19], [23] и [24], в которых исследованы различные классы переопределенных граничных задач для уравнений с частными производными. В разделе 2.5 продолжены исследования переопределенных задач для уравнений Максвелла в анизотропных средах, начатые в работе [3].

3. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ОТКРЫТОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В предыдущей главе было показано, как сводятся к интегральным уравнениям типа свертки некоторые координатные задачи дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. Интегральные уравнения можно превратить в БСЛАУ, если искать их решения в виде разложений в ряды по подходящим системам функций. Метод Галеркина, широко используемый при приближенном решении интегральных уравнений задач дифракции, дает системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются при усечении таких БСЛАУ.

В этой главе мы рассмотрим технику сведения координатных задач дифракции на проводящих тонких экранах в открытом пространстве непосредственно к БСЛАУ. Для этого построена теория обобщенных функций на числовой прямой (и в дальнейшем на плоскости), которые рассматриваются как последовательности значений линейных функционалов на множестве линейных комбинаций базисных функций. В качестве таких функций удобно взять функции Эрмита, поскольку они являются собственными функциями интегрального преобразования Фурье. Следовательно, как и в случае задач дифракции на перегородках в волноводах (глава 1), граничные условия для уравнения Гельмгольца или для уравнений Максвелла могут быть сформулированы как сумматорные уравнения, составляющие итоговую БСЛАУ.

3.1. Полиномы Эрмита и функции Эрмита

Полиномы Эрмита проще всего определить следующим образом:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_{m+1}(x) = 2x H_m(x) - 2m H_{m-1}(x), \quad m = 3, 4, \dots$$

Можно также сделать это с помощью формулы

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x^2}), \quad m = 0, 1, \dots$$

Как известно, полиномы Эрмита являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения $y'' - 2x y' + 2m y = 0$.

Из свойств полиномов Эрмита выделим два: они ортогональны с весом на всей числовой оси, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) H_m(x) dx = \{k \neq m : 0; k = m : h_m\}, \quad h_m = 2^m m! \sqrt{\pi},$$

и их производные вычисляются по рекуррентной формуле $H'_m(x) = 2m H_{m-1}(x)$.

Функции Эрмита определяются так:

$$h_m(x) = e^{-x^2/2} H_m(x), \quad m = 0, 1, \dots$$

Эти функции также имеют ряд замечательных свойств. Прежде всего, они ортогональны:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_k(x) h_m(x) dx = \{k \neq m : 0; k = m : h_m\}.$$

Здесь и дальше будем придерживаться соглашения: h_m со скобками – это функции Эрмита, а h_m без скобок – квадраты их норм.

Производные функций Эрмита, как и полиномов Эрмита, вычисляются по рекуррентным формулам. Условимся, что $h_m(x) \equiv 0$ при $m < 0$. Тогда при любом $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} h'_m(x) &= m h_{m-1}(x) - 1/2 h_{m+1}(x), \\ x h_m(x) &= m h_{m-1}(x) + 1/2 h_{m+1}(x), \end{aligned}$$

далее,

$$h_m''(x) = m(m-1)h_{m-2}(x) - (m+1/2)h_m(x) + 1/4h_{m+2}(x),$$

$$x^2h_m(x) = m(m-1)h_{m-2}(x) + (m+1/2)h_m(x) + 1/4h_{m+2}(x), \dots$$

Отсюда, заметим, легко получить также известное дифференциальное уравнение $h_m''(x) + (2m+1-x^2)h_m(x) = 0$.

В частном случае, при $m=0$ и $m=1$ имеем

$$h_0'(x) = -1/2h_1(x), \quad xh_0(x) = 1/2h_1(x),$$

$$h_1'(x) = h_0(x) - 1/2h_2(x), \quad xh_1(x) = h_0(x) + 1/2h_2(x),$$

$$h_0''(x) = -1/2h_0(x) + 1/4h_2(x), \quad h_1''(x) = -3/2h_1(x) + 1/4h_3(x),$$

$$x^2h_0(x) = 1/2h_0(x) + 1/4h_2(x), \quad x^2h_1(x) = 3/2h_1(x) + 1/4h_3(x).$$

Наконец, функции Эрмита являются собственными функциями интегрального преобразования Фурье \mathcal{F} :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h_m(x) e^{ix\xi} dx = i^m h_m(\xi)$$

или коротко: $(\mathcal{F}h_m)(\xi) = i^m h_m(\xi)$.

Если функции Эрмита пронормировать, то некоторые формулы станут не очень красивыми. Поэтому одновременно с функциями $h_m(x)$ удобно использовать функции $\tilde{h}_m(x) = h_m(x)/h_m$ (их также будем называть функциями Эрмита). Легко видеть, что Функции $h_m(x)$ и $\tilde{h}_m(x)$ образуют биортонормированные системы функций на числовой оси.

При дифференцировании функций $\tilde{h}_m(x)$ и умножении их на степени x получаются также простые формулы:

$$\tilde{h}_0'(x) = -\tilde{h}_1(x),$$

$$\tilde{h}_m'(x) = 1/2\tilde{h}_{m-1}(x) - (m+1)\tilde{h}_{m+1}(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

$$x\tilde{h}_0(x) = \tilde{h}_1(x),$$

$$x\tilde{h}_m(x) = \frac{1}{2}\tilde{h}_{m-1}(x) + (m+1)\tilde{h}_{m+1}(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\tilde{h}_0''(x) = -\frac{1}{2}\tilde{h}_0(x) + 2\tilde{h}_2(x), \quad \tilde{h}_1''(x) = -\frac{3}{2}\tilde{h}_1(x) + 6\tilde{h}_3(x),$$

$$\tilde{h}_m''(x) = \frac{1}{4}\tilde{h}_{m-2}(x) - (m + \frac{1}{2})\tilde{h}_m(x) + (m+1)(m+2)\tilde{h}_{m+2}(x),$$

$$m = 2, 3, \dots$$

$$x^2\tilde{h}_0(x) = \frac{1}{2}\tilde{h}_0(x) + 2\tilde{h}_2(x), \quad x^2\tilde{h}_1(x) = \frac{3}{2}\tilde{h}_1(x) + 6\tilde{h}_3(x),$$

$$x^2\tilde{h}_m(x) = \frac{1}{4}\tilde{h}_{m-2}(x) + (m + \frac{1}{2})\tilde{h}_m(x) + (m+1)(m+2)\tilde{h}_{m+2}(x),$$

$$m = 2, 3, \dots$$

и так далее. Здесь также $\tilde{h}_m(x) \equiv 0$ при $m < 0$.

3.2. Обобщенные функции на числовой оси

В качестве *обобщенных функций* (о.ф.) будем рассматривать *линейные функционалы* на множестве линейных комбинаций функций Эрмита $h_m(\cdot)$. Любую такую о.ф. $f[\cdot]$ можно отождествить с набором (последовательностью) ее значений f_0, f_1, \dots на функциях $h_0(\cdot), h_1(\cdot), \dots$

Здесь, как и раньше, мы используем универсальный формальный параметр ("джокер") \cdot – "точка". Подразумевается, что аргумент функций Эрмита – вещественная переменная (пишем (\cdot)), а аргумент обобщенных функций – функция (пишем $[\cdot]$).

Функции Эрмита являются функциями, быстро убывающими на бесконечности. Множество их линейных комбинаций – подпространство пространства быстро убывающих функций. Поэтому линейное пространство о.ф. содержит в себе пространство умеренных распределений Шварца.

Интегрируемой функции $f(\cdot)$ ставится в соответствие функционал

$$f[\cdot] : h_m(\cdot) \mapsto f_m = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \tilde{h}_m(x) dx, \quad m = 0, 1, \dots$$

(здесь x – переменная интегрирования "в локальном блоке"). Его значения на функциях Эрмита – коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$ по функциям Эрмита $h_m(\cdot)$. Если ряд Фурье с коэффициентами f_m сходится и его сумма равна функции $f(\cdot)$ (при всех значениях аргумента или с некоторыми исключениями), то есть функция $f(\cdot)$ разлагается в ряд Фурье по функциям Эрмита, то соответствующую ей о.ф. будем называть *регулярной*. Если нужно уточнить, что о.ф. получена из обычной функции, напомним $f[x]$.

Условия, при которых функция разлагается в ряд по функциям Эрмита, можно найти в книге [12], с. 100).

В общем случае запись

$$f(\cdot) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_m h_m(\cdot)$$

будем рассматривать *формально*, это только указание, что соответствующий функционал принимает значения f_m на функциях $h_m(\cdot)$. Если же ряд по функциям Эрмита сходится, то имеем обычное равенство функций.

Легко видеть, что множество о.ф. – линейное пространство с очевидными операциями сложения и умножения на число.

Линейные операции над о.ф. определим по аналогии с операциями над распределениями.

Умножение о.ф. на обычную функцию (именно на функцию, а не на числа – значения этой функции) определим следующим образом:

$$a(\cdot) f[\cdot] : h_m(\cdot) \mapsto f[a(\cdot) h_m(\cdot)],$$

если $a(\cdot) h_m(\cdot)$ – линейная комбинация функций Эрмита. Следовательно, умножать на полиномы легко и просто.

Например, так как $x h_m(x) = m h_{m-1}(x) + 1/2 h_{m+1}(x)$ и $x^2 h_m(x) = m(m-1) h_{m-2}(x) + (m+1/2) h_m(x) + 1/4 h_{m+2}(x)$, то $(x f)_m = m f_{m-1} + 1/2 f_{m+1}$ и $(x^2 f)_m = m(m-1) f_{m-2} + (m+1/2) f_m + 1/4 f_{m+2}$ (вместо $a(x) = x$ или $a(x) = x^2$ пишем x или x^2).

В более общем случае пусть

$$a(x) h_m(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} h_n(x), \quad m = 0, 1, \dots,$$

$$a_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) h_m(x) \tilde{h}_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда по определению

$$a(\cdot) f[\cdot] : h_m(\cdot) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} f_n$$

(если только все эти ряды сходятся). Ясно, что если суммы получаются конечными, то такое определение совпадает с предыдущим определением.

Умножение на функцию "ассоциативно и коммутативно" в том смысле, что

$$(a(\cdot)b(\cdot)) f[\cdot] = a(\cdot)(b(\cdot) f[\cdot]) \quad \text{и} \quad b(\cdot)a(\cdot) f[\cdot] = a(\cdot)b(\cdot) f[\cdot].$$

Определим *первую производную* о.ф. $f[\cdot]$ как о.ф. $f'[\cdot]$ со значениями

$$(f')_m = -1/2 f_{m-1} + (m+1) f_{m+1}.$$

Почему так? А потому, что для обычной дифференцируемой функции

$$(f')_m = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \tilde{h}_m(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \tilde{h}'_m(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [1/2 \tilde{h}_{m-1}(x) - (m+1) \tilde{h}_{m+1}(x)] dx = \\
&= -1/2 f_{m-1} + (m+1) f_{m+1}.
\end{aligned}$$

В формулах при $m = 0$ и $m = 1$ нужно положить $\tilde{h}_m(x) \equiv 0$ при $m < 0$.

Вторая производная о.ф. $f[\cdot]$ – линейный функционал со значениями

$$(f'')_m = 1/4 f_{m-2} - (m + 1/2) f_m + (m+1)(m+2) f_{m+2}.$$

Легко видеть также, что вторая производная о.ф. есть производная от первой производной. Любая следующая производная вычисляется как производная от предыдущей производной.

Образ Фурье \mathcal{F} о.ф. – также линейный функционал, значения которого $(\mathcal{F}f)_m = i^m f_m$. Такое определение совпадает с принятым в теории распределений:

$$\mathcal{F}f[\cdot] : h_m(\cdot) \mapsto f[\mathcal{F}h_m(\cdot)] = i^m f[h_m(\cdot)].$$

Найдем образ Фурье первой производной о.ф. :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f')_m &= i^m (f')_m = i^m [-1/2 f_{m-1} + (m+1) f_{m+1}] = \\
&= -1/2 i^m f_{m-1} + (m+1) i^m f_{m+1} = \\
&= -1/2 i (\mathcal{F}f)_{m-1} - (m+1) i (\mathcal{F}f)_{m+1} = (-i\xi (\mathcal{F}f))_m.
\end{aligned}$$

Аналогично, образ Фурье второй производной о.ф. :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f'')_m &= i^m (f'')_m = \\
&= i^m [1/4 f_{m-2} - (m + 1/2) f_m + (m+1)(m+2) f_{m+2}] = \\
&= -1/4 i^{m-2} f_{m-2} - (m + 1/2) i^m f_m - (m+1)(m+2) i^{m+2} f_{m+2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1/4 (\mathcal{F}f)_{m-2} - (m + 1/2) (\mathcal{F}f)_m - (m + 1)(m + 2) (\mathcal{F}f)_{m+2} = \\
&= (-\xi^2 (\mathcal{F}f))_m.
\end{aligned}$$

здесь в качестве множителей при $\mathcal{F}f$ мы ставим степени ξ , чтобы подчеркнуть, что второй сомножитель – именно образ Фурье. Такое соглашение часто используется. Например, в книге [5], с. 164, есть две формулы: $\partial^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f]$ (здесь стоит x потому, что в интеграле Фурье интегрирование идет по x) и $F[\partial^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f]$ (здесь стоит ξ потому, что в интеграле Фурье ξ – параметр).

Последовательность о.ф. $f_j[\cdot]$ *сходится* к о.ф. $f[\cdot]$ при $j \rightarrow +\infty$, если $f_{j,m} = (f_j)_m \rightarrow f_m$ при $j \rightarrow +\infty \quad \forall m = 0, 1, \dots$. Параметр, выделяющий о.ф. в параметрическом семействе, не обязательно должен быть целочисленным. Например, последовательность о.ф. $f_z[\cdot]$ сходится к о.ф. $f_0[\cdot]$ при $z \rightarrow 0$, если $(f_z)_m \rightarrow (f_0)_m$ при $z \rightarrow 0$ для всех $m = 0, 1, \dots$.

Ясно, что значения о.ф. в отдельных точках числовой оси не определены. Но по определению о.ф. $f[\cdot]$ и $g[\cdot]$ равны, если $f_m = g_m \quad \forall m$.

Пусть теперь числовая ось x состоит из двух частей: \mathcal{M} и \mathcal{N} . Будем говорить, что $f[\cdot] = 0$ на \mathcal{M} или на \mathcal{N} , если

$$\sum_{m=0}^{+\infty} I_{mn} f_m = 0 \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{или} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} J_{mn} f_m = 0 \quad n = 0, 1, \dots,$$

здесь

$$I_{mn} = \int_{\mathcal{M}} h_m(x) \tilde{h}_n(x) dx, \quad J_{mn} = \int_{\mathcal{N}} h_m(x) \tilde{h}_n(x) dx.$$

Легко видеть, что $J_{mn} = \delta_{mn} - I_{mn}$. Поэтому $f[\cdot] = 0$ на \mathcal{M} или на \mathcal{N} тогда и только тогда, когда

$$f_n = \sum_{m=0}^{+\infty} J_{mn} f_m, \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{или} \quad f_n = \sum_{m=0}^{+\infty} I_{mn} f_m, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если же о.ф. $f[\cdot]$ совпадает с обычной функцией $g(\cdot)$ на \mathcal{M} , то

$$\sum_{m=0}^{+\infty} I_{mn} f_m = \int_{\mathcal{M}} g(x) \tilde{h}_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

3.3. Абстрактные функции. Уравнение Гельмгольца

Пусть z – число, принадлежащее некоторому промежутку вещественной оси. Отображения $z \mapsto$ о.ф. будем называть абстрактными функциями (а.ф.). Тогда а.ф. $u(z)[\cdot]$ отождествляется с последовательностью функций $u_m(z)$, их значения при фиксированном z – это значения о.ф. на $h_m(\cdot)$.

Свойства а.ф. по аргументу z определяются через свойства функций $u_m(z)$. Например, если все функции $u_m(z)$ дифференцируемы, то и абстрактную функцию $u(z)[\cdot]$ назовем дифференцируемой по z . Тогда $u'(z)[\cdot]$ – тоже а.ф. со значениями $u'_m(z)$ на $h_m(\cdot)$.

Как решать диф. уравнения, в которых участвуют производные а.ф. по z ? Если $u'(z)[\cdot] = 0[\cdot]$, что равносильно $u'_m(z) = 0$, $m = 0, 1, \dots$, то $u_m(z) = c_m$ или $u(z)[\cdot] = c[\cdot]$, где $c[\cdot]$ – произвольная о.ф.

Если задано линейное однородное уравнение порядка n , коэффициенты которого не зависят от z (то есть являются функциями от x , а умножение на функции от x выполняется по правилу умножения о.ф. на обычную функцию), то рассуждаем следующим образом (используем метод Эйлера). Строим характеристический полином от λ , находим его корни ... Если $\lambda(x)$ – простой корень характеристического полинома, то $e^{\lambda(x)z}$ – частное решение диф. уравнения, его можно умножить на произвольную о.ф. (точнее, на него, как на обычную функцию от x , умножить произвольную о.ф.). Тогда в общем решении уравнения есть слагаемое $e^{\lambda(x)z} c[\cdot]$...

Например, уравнение $u'(z)[\cdot] - a(x)u(z)[\cdot] = 0$ имеет решение $u(z)[\cdot] = e^{a(x)z} c[\cdot]$.

Будем искать а.ф. $u(z)[\cdot]$, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u(x, z) = 0.$$

Уравнение Гельмгольца в обобщенном смысле понимается как бесконечная система уравнений

$$u_m''(z) + k^2 u_m(z) + \frac{1}{4} u_{m-2}(z) - (m + \frac{1}{2}) u_m(z) + \\ + (m + 1)(m + 2) u_{m+2}(z) = 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

Умножим эти уравнения на i^m , что равносильно преобразованию Фурье по поперечной переменной x . Перед $u_m(z)$ появится множитель i^m , а перед $u_{m-2}(z)$ и $u_{m+2}(z)$ множители $-i^m$. Для $(\mathcal{F}u)_m(z) = i^m u_m(z)$ имеем уравнения ($m = 0, 1, \dots$)

$$(\mathcal{F}u)_m''(z) + k^2 (\mathcal{F}u)_m(z) - \frac{1}{4} (\mathcal{F}u)_{m-2}(z) - (m + \frac{1}{2}) (\mathcal{F}u)_m(z) - \\ - (m + 1)(m + 2) (\mathcal{F}u)_{m+2}(z) = 0.$$

Что, как и следовало ожидать, равносильно уравнению

$$(\mathcal{F}u)''(z)[\xi] + (k^2 - \xi^2) (\mathcal{F}u)(z)[\xi] = 0,$$

общее решение которого

$$(\mathcal{F}u)(z)[\xi] = e^{i\gamma(\xi)z} a[\xi] + e^{-i\gamma(\xi)z} b[\xi].$$

Здесь мы пишем ξ вместо "точки" для того, чтобы подсказать, что эта формула записана для образов Фурье о.ф., при преобразовании Фурье переменная x перешла в переменную ξ .

На языке формальных рядов

$$a[\xi] = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m h_m(\xi), \quad b[\xi] = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m h_m(\xi)$$

и тогда

$$e^{i\gamma(\xi)z} a[\xi] + e^{-i\gamma(\xi)z} b[\xi] = \sum_{m=0}^{+\infty} [a_m e^{i\gamma(\xi)z} + b_m e^{-i\gamma(\xi)z}] h_m(\xi).$$

Также формально (обратное преобразование Фурье записано как интеграл)

$$u(z)[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\gamma(\xi)z} a[\xi] + e^{-i\gamma(\xi)z} b[\xi]) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Но если $a[\xi]$, $b[\xi]$ – регулярные о.ф., то то

$$u(x, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a_m e^{i\gamma(\xi)z} + b_m e^{-i\gamma(\xi)z}) h_m(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Будем называть решения уравнения Гельмгольца *положительно ориентированными* при $b[\cdot] = 0$ и *отрицательно ориентированными* при $a[\cdot] = 0$.

Условимся для образов Фурье о.ф. не ставить символ преобразования Фурье, будем указывать в квадратных скобках соответствующую переменную: пишем $g[\xi]$ вместо $\mathcal{F}g[\cdot]$. Тогда для положительно ориентированных решений уравнения Гельмгольца

$$u_0[\xi] = u(0)[\xi] = a[\xi], \quad u_1[\xi] = u'(0)[\xi] = i\gamma(\xi) a[\xi]$$

и условие

$$u_1[\xi] - i\gamma(\xi) u_0[\xi] = 0$$

является необходимым и достаточным условием того, что о.ф. $u_0[\cdot]$ и $u_1[\cdot]$ являются следами на прямой $z = 0$ положительно ориентированного решения уравнения Гельмгольца (при $z > 0$).

Аналогично, условие

$$u_1[\xi] + i\gamma(\xi) u_0[\xi] = 0$$

является необходимым и достаточным условием того, что о.ф. $u_0[\cdot]$ и $u_1[\cdot]$ являются следами на прямой $z = 0$ отрицательно ориентированного решения уравнения Гельмгольца (при $z < 0$).

Заметим, что значения решений уравнения Гельмгольца при $z > 0$ и при $z < 0$ будут регулярными о.ф. В рамках теории о.ф. всегда существуют их следы ("нулевой" и "первый") на прямой $z = 0$, которые в общем случае регулярными быть не обязаны.

Кроме того, предел при $z \rightarrow 0$ образа Фурье а.ф. и образ Фурье ее предела при $z \rightarrow 0$ – одно и то же.

3.4. Дифракция электромагнитной волны на тонкой проводящей ленте

Вернемся к двумерной задаче дифракции параллельно поляризованной электромагнитной волны на тонкой проводящей бесконечной ленте (раздел 2.1). Напомним, что нужно найти решения уравнения Гельмгольца при $z > 0$ и при $z < 0$, удовлетворяющие условиям на бесконечности и граничным условиям при $z = 0$.

Будем искать обобщенные решения уравнения Гельмгольца $u^1(z)[\cdot]$ и $u^2(z)[\cdot]$ при $z > 0$ и $z < 0$ соответственно как абстрактные функции, то есть отображения, ставящие каждому значению переменной z обобщенную функцию – последовательность значений линейного функционала на множестве линейных комбинаций функций Эрмита.

Пусть $u^0(x, z)$ – потенциальная функция волны от внешнего источника, ее нулевой след $u_0^0(x) = u^0(x, 0)$ на оси x – обычная функция. Обозначим, как и раньше, через \mathcal{M} часть оси x , соответствующую ленте, и через \mathcal{N} – дополнение \mathcal{M} до всей оси. Граничные условия и условия сопряжения в задаче дифракции такие:

$$\begin{aligned} u_0^0[\cdot] + u_0^1[\cdot] &= 0, & u_0^0[\cdot] + u_0^2[\cdot] &= 0 & \text{на } \mathcal{M}, \\ u_0^1[\cdot] &= u_0^2[\cdot], & u_1^1[\cdot] &= u_1^2[\cdot] & \text{на } \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Задача дифракции сводится к односторонней граничной задаче

$$u_0^1[\cdot] = -u_0^0(\cdot) \quad \text{на } \mathcal{M}; \quad u_1^1[\cdot] = 0 \quad \text{на } \mathcal{N}.$$

Это доказывается точно такими же рассуждениями, что и в разделе 2.1. Действительно, $u_0^1[x] = u_0^2[x]$ на всей оси. Следовательно, $u_0^1[\xi] = u_0^2[\xi]$, $u_1^1[\xi] = -u_1^2[\xi]$ и $u_0^1[x] = -u_0^2[x]$. Но тогда $u_0^1[x] = u_0^2[x] = 0$ на \mathcal{N} .

Следовательно, на языке обобщенных функций условия граничной задачи имеют вид

$$\sum_{m=0}^{+\infty} I_{mn} u_{0m} = -u_{0n}^0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} J_{mn} u_{1m} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.2)$$

здесь u_{0m} и u_{1m} – значения функционалов $u_0^1[\cdot]$ и $u_1^1[\cdot]$ на базисных функциях Эрмита, эти же значения являются коэффициентами Фурье следов на оси x решения уравнения Гельмгольца при $z > 0$. Как и в разделе 3.1, интегралы

$$I_{mn} = \int_{\mathcal{M}} h_m(x) \tilde{h}_n(x) dx, \quad J_{mn} = \int_{\mathcal{N}} h_m(x) \tilde{h}_n(x) dx = \delta_{mn} - I_{mn}.$$

Если волна от удаленного источника плоская,

$$u^0(x, z) = e^{-i\kappa \sin \theta^0 \cdot x - i\kappa \cos \theta^0 \cdot z},$$

то имеем

$$u_{0n}^0 = \int_{\mathcal{M}} u_0^0(x) \tilde{h}_n(x) dx = \int_{\mathcal{M}} e^{-i\kappa \sin \theta^0 \cdot x} \tilde{h}_n(x) dx.$$

Добавим к уравнениям (3.1) и (3.2) связь между следами искомого решения уравнения Гельмгольца, записанную в образах Фурье: $u_1^1[\xi] - i\gamma(\xi) u_0^1[\xi] = 0$, то есть

$$(\mathcal{F}u_1)_m - i \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_{mn} (\mathcal{F}u_0)_n = 0,$$

$$\gamma_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\xi) h_m(\xi) \tilde{h}_n(\xi) d\xi, \quad \gamma(\xi) = \sqrt{\kappa^2 - \xi^2}.$$

Так как $(\mathcal{F}u_1)_m = i^m u_{1m}$, $(\mathcal{F}u_0)_n = i^n u_{0n}$, то

$$u_{1n} + \sum_{m=0}^{+\infty} i^{m-n-1} \gamma_{nm} u_{0m} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

Итак, условия задачи дифракции представляют собой БСЛАУ, состоящую из трех групп уравнений (3.1), (3.2), (3.3).

Если же условия разрешимости переопределенной задачи записать в виде $u_0^1[\xi] + \frac{i}{\gamma(\xi)} u_1^1[\xi] = 0$, то вместо (3.3) будем иметь

$$u_{0n} + \sum_{m=0}^{+\infty} i^{m-n+1} \gamma'_{mn} u_{1m} = 0, \quad \gamma'_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\xi)} h_m(\xi) \tilde{h}_n(\xi) d\xi. \quad (3.4)$$

Как и в случае задачи дифракции электромагнитной волны на перегородке в плоском волноводе, можно в итоговой БСЛАУ оставить только одну группу неизвестных: для этого нужно из равенства (3.3) выразить u_{1n} через u_{0m} и подставить результат в (3.2) или из равенства (3.4) выразить u_{0n} через u_{1m} и подставить в (3.1). Получится следующее:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} i^{m-n-1} \gamma_{mn} J_{nk} \right) u_{0m} = 0, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} I_{mk} u_{0m} = -u_{0k}^0, \quad k = 0, 1, \dots$$

или

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} i^{m-n+1} \gamma'_{mn} I_{nk} \right) u_{1m} = u_{0k}^0, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} J_{mk} u_{1m} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Формальный вывод БСЛАУ задачи дифракции на ленте можно провести следующим образом. Будем искать нулевой и первый следы в виде

$$u_0^1(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{0m} h_m(x), \quad u_1^1(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} h_m(x).$$

Условия односторонней граничной задачи

$$u_0^1(x) = -u_0^0(x) \quad \text{на } \mathcal{M}; \quad u_1^1(x) = 0 \quad \text{на } \mathcal{N},$$

умножим на $\tilde{h}_n(x)$ и проинтегрируем по соответствующему участку оси x . Получим формулы (3.1) и (3.2).

В условие разрешимости переопределенной задачи подставим образы Фурье следов решения уравнения Гельмгольца (в суммах появляются множители i^m), умножим обе части условия также на $\tilde{h}_n(x)$ и проинтегрируем по всей оси x . Тогда получим формулу (3.3) (или (3.4)).

Отметим еще один интересный факт: формулы (3.3) и (3.4) можно рассматривать как взаимно обратную пару БСЛАУ: если

$$\sum_{m=0}^{+\infty} i^{m-n+1} \gamma_{mn} u_{0m} = u_{1n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

то

$$\sum_{m=0}^{+\infty} i^{m-n-1} \gamma'_{mn} u_{1m} = u_{0n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

и наоборот.

3.5. Интегральные уравнения 4-го рода

Сейчас мы вернемся к интегральным уравнениям задачи дифракции электромагнитной волны на тонкой проводящей ленте (раздел 2.1) и установим связь между решениями этих уравнений и разложениями следов решения уравнения Гельмгольца в ряды по функциям Эрмита.

В случае параллельной поляризации поля задача дифракции на ленте была сведена к интегральному уравнению 1-го рода (2.4):

$$\int_{\mathcal{M}} u_1^+(x_1) K_1(x_1, x) dx_1 = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}$$

с логарифмической особенностью в ядре (2.5)

$$K_1(x_1, x) = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\xi)} e^{ix_1\xi} e^{-i\xi x} d\xi.$$

Рассуждения могут быть такими: сначала выразим нулевой след через первый

$$\begin{aligned} u_0^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^+(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{i\gamma(\xi)} u_1^+(\xi) \right) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\xi)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^+(x_1) e^{ix_1\xi} dx_1 \right) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^+(x_1) K_1(x_1, x) dx_1, \end{aligned}$$

а потом воспользуемся тем, что $u_1^+(x) = 0$ на \mathcal{N} и $u_0^+(x) = -u_0^0(x)$ на \mathcal{M} . Таким образом, если первый след $u_1^+(x)$ решения уравнения Гельмгольца является неизвестным объектом, то для определения этой функции имеем уравнение, состоящее из двух частей: одна задана на \mathcal{M} , другая – на \mathcal{N} .

Интегральное уравнение вида

$$a(x) \varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1) K(x_1, x) dx_1 = f(x), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

будем называть *интегральным уравнением 4-го рода*, если $K(t, x) = 0$ при x , принадлежащих некоторому подмножеству $(-\infty, +\infty)$.

Пусть, как в нашем случае, $(-\infty, +\infty) = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$, $K(t, x) = 0$ и $a(x) \neq 0$ при $x \in \mathcal{N}$. Тогда функция $\varphi(x)$ сразу находится на \mathcal{N} и уравнение 4-го рода превращается в уравнение вида

$$a(x) \varphi(x) + \int_{\mathcal{M}} \varphi(x_1) K(x_1, x) dx_1 = g(x), \quad x \in \mathcal{M}.$$

В его правую часть переносится уже известный интеграл по \mathcal{N} от функции $\varphi(x)$. Обратная процедура также возможна: интегральное уравнение на \mathcal{M} легко распространить на \mathcal{N} , если доопределить искомую функцию заданными значениями на \mathcal{N} .

Таким образом, от задачи дифракции мы перешли к интегральному уравнению 4-го рода

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^1(x_1) K_1(x_1, x) dx_1 = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad u_1^1(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Будем искать его решение в виде разложения в ряд по функциям Эрмита

$$u_1(x_1) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} h_m(x_1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x_1) K(x_1, x) dx_1 = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\xi)} e^{-i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h_m(x_1) e^{i\xi x_1} dx_1 \right) d\xi = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\xi)} e^{-i\xi x} \sqrt{2\pi} i^m h_m(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Примем во внимание разложение

$$e^{-i\xi x} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} i^{-k} \tilde{h}_k(\xi) h_k(x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x_1) K(x_1, x) dx_1 = \\ &= - \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} \sum_{k=0}^{+\infty} i^{m-k+1} h_k(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\xi)} h_m(\xi) \tilde{h}_k(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Обозначим, как и раньше,

$$\gamma'_{mk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\xi)} h_m(\xi) \tilde{h}_k(\xi) d\xi.$$

Итак,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} \sum_{k=0}^{+\infty} i^{m-k+1} \gamma'_{mk} h_k(x) = u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}.$$

После проектирования на $\tilde{h}_n(x)$ имеем БСЛАУ

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} \sum_{k=0}^{+\infty} i^{m-k+1} \gamma'_{mk} I_{kn} = u_{0n}^0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

$$u_{1n} - \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} I_{mn}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Здесь, также как и раньше,

$$I_{kn} = \int_{\mathcal{M}} h_k(x) \tilde{h}_n(x) dx, \quad u_{0n}^0 = \int_{\mathcal{M}} u_0^0(x) \tilde{h}_n(x) dx.$$

Аналогичные рассуждения можно провести в случае перпендикулярной поляризации электромагнитного поля.

3.6. Усечение БСЛАУ

Рассмотрим некоторые особенности практической реализации алгоритма численного решения БСЛАУ, к которым приводится задача дифракции электромагнитной волны на ленте.

Для приближенного вычисления интегралов удобно использовать квадратурную формулу типа Гаусса ([15], дополнение В):

$$I_{mn} = \frac{1}{h_n} \int_{\mathcal{M}} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx \approx \frac{1}{h_n} \sum_{j=1}^J \lambda_j H_m(x_j) H_n(x_j),$$

$$u_{0n}^0 \approx \frac{\sqrt{2}}{h_n} \sum_{j=1}^J \lambda_j e^{-i\kappa \sin \theta \cdot (\sqrt{2}x_j)} H_n(\sqrt{2}x_j),$$

в этих суммах участвуют только слагаемые, в которых $x_j \in \mathcal{M}$, и

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{h_n} \sum_{j=1}^J \lambda_j \gamma(x_j) H_m(x_j) H_n(x_j).$$

Здесь x_j – нули полиномов Эрмита и λ_j – числа Кристоффеля. Важно следить за тем, чтобы не все точки x_j попали в множество \mathcal{M} – интегралы I_{mn} и J_{mn} не равны друг другу.

Усечение БСЛАУ (3.1), (3.2), (3.3) в общем случае проведем так. Оставим M_0 неизвестных u_{0m} , M_1 неизвестных u_{1m} , а также N_0 уравнений в первой части БСЛАУ, N_1 уравнений во второй части БСЛАУ и M_1 уравнений в третьей части БСЛАУ:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M_0-1} I_{mn} u_{0m} &= -u_{0n}^0, \quad n = 0 \dots N_0 - 1, \\ \sum_{m=0}^{M_1-1} J_{mn} u_{1m} &= 0, \quad n = 0 \dots N_1 - 1, \\ u_{1n} + \sum_{m=0}^{M_0-1} i^{m-n-1} \gamma_{mn} u_{0m} &= 0, \quad n = 0 \dots M_1 - 1. \end{aligned}$$

Эту СЛАУ можно компактно записать в виде

$$\sum_{m=0}^P a_{nm} u_m = b_n, \quad n = 0 \dots Q,$$

где $P = M_0 + M_1 - 1$, $Q = N_0 + N_1 + M_1 - 1$. В этой СЛАУ в качестве неизвестных u_m рассматривается полный набор исходных неизвестных: $u_{00}, \dots, u_{0,M_0-1}, u_{10}, \dots, u_{1,M_1-1}$. Элементы матрицы коэффициентов и вектора правых частей такие:

при $n = 0 \dots N_0 - 1$

$$m = 0 \dots M_0 - 1 : a_{nm} = I_{mn}; \quad m = 0 \dots M_1 - 1 : a_{n,m+M_0} = 0;$$

$$b_n = -u_{0n}^0;$$

при $n = 0 \dots N_1 - 1$

$$m = 0 \dots M_0 - 1 : a_{n+N_0,m} = 0; \quad m = 0 \dots M_1 - 1 : a_{n+N_0,m+M_0} = J_{nm};$$

$$b_{n+N_0} = 0;$$

при $n = 0 \dots M_1 - 1$

$$m = 0 \dots M_0 - 1 : a_{n+N_0+N_1,m} = i^{m-n-1} \gamma_{mn};$$

$$m = 0 \dots M_1 - 1 : a_{n+N_0+N_1,m+M_0} = 0, \quad \text{но } a_{n+N_0+N_1,n+M_0} = 1;$$

$$b_{n+N_0+N_1} = 0.$$

Так как число уравнений может быть больше числа неизвестных (например, если $M_0 = M_1 = N_0 = N_1 = M$), то будем искать минимум невязки по всем уравнениям СЛАУ. Тогда получим СЛАУ с квадратной матрицей

$$\sum_{m=0}^P \left(\sum_{n=0}^Q a_{nk}^* a_{nm} \right) u_m = \sum_{n=0}^Q a_{nk}^* b_n, \quad k = 0 \dots P. \quad (3.6)$$

Можно исключить неизвестные u_{1m} и сократить вдвое размерность итоговой СЛАУ. Пусть $M_0 = M_1 = N_0 = N_1 = M$. Тогда имеем

$$\sum_{m=0}^{M-1} I_{mn} u_{0m} = -u_{0n}^0, \quad n = 0 \dots M - 1, \quad (3.7)$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} J_{mk} u_{1m} = 0, \quad k = 0 \dots M - 1.$$

Подставим во вторую группу уравнений

$$u_{1m} = \sum_{n=0}^{M-1} i^{n-m+1} \gamma_{nm} u_{0n}$$

и получим

$$\sum_{m=0}^{M-1} J_{mk} \left(\sum_{n=0}^{M-1} i^{n-m+1} \gamma_{nm} u_{0n} \right) = 0, \quad k = 0 \dots M - 1$$

или

$$\sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{k=0}^{M-1} i^{m-k+1} J_{kn} \gamma_{mk} \right) u_{0m} = 0, \quad n = 0 \dots M - 1. \quad (3.8)$$

Итак, мы получили двойную СЛАУ (2.7), (3.8). Запишем ее в виде

$$\sum_{m=0}^{M-1} a_{nm} u_{0m} = b_n, \quad n = 0 \dots 2M - 1.$$

Здесь при $n = 0 \dots M - 1$

$$m = 0 \dots M - 1 : \quad a_{nm} = I_{mn}, \quad a_{n+M,m} = \sum_{k=0}^{M-1} i^{m-k+1} J_{kn} \gamma_{mk};$$

$$b_n = -u_{0n}^0, \quad b_{n+M} = 0.$$

Условие минимума невязки по всем уравнениям СЛАУ дает новую СЛАУ

$$\sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{2M-1} a_{nk}^* a_{nm} \right) u_m = \sum_{n=0}^{2M-1} a_{nk}^* b_n, \quad k = 0 \dots M - 1. \quad (3.9)$$

Другие варианты БСЛАУ рассматриваются аналогично.

3.7. Дифракция электромагнитной волны на прямоугольной пластине

Обсудим кратко, насколько усложняется алгоритм решения задачи дифракции электромагнитной волны на экране в трехмерном случае.

Пусть на проводящий тонкий экран \mathcal{M} , расположенный в плоскости $z = 0$, набегают электромагнитная волна. Нужно найти поле, возникающее при ее дифракции.

Обозначим через \mathcal{N} дополнение экрана до всей плоскости $z = 0$. Пусть $\mathbf{e}^0(x, y)$ – след на этой плоскости касательной составляющей

электрического вектора волны от внешнего источника. В трехмерном случае касательные составляющие электрического и магнитного векторов – двумерные векторы: $\mathbf{e}(x, y) = (e_x(x, y), e_y(x, y))$, $\mathbf{h}(x, y) = (h_x(x, y), h_y(x, y))$.

Пусть пространство заполнено однородной изотропной средой и внешнее поле задано и при $z > 0$, и при $z < 0$. Для касательных составляющих электрического и магнитного векторов имеем при $z = 0$ граничные условия

$$\mathbf{e}^0(x, y) + \mathbf{e}^+(x, y) = 0, \quad \mathbf{e}^0(x, y) + \mathbf{e}^-(x, y) = 0 \quad \text{на } \mathcal{M},$$

и условия сопряжения

$$\mathbf{e}^+(x, y) = \mathbf{e}^-(x, y), \quad \mathbf{h}^+(x, y) = \mathbf{h}^-(x, y) \quad \text{на } \mathcal{N}.$$

В разделе 2.4 было показано, что вектор-функции $\mathbf{e}^\pm(x, y)$, $\mathbf{h}^\pm(x, y)$ являются следами ориентированных решений уравнений Максвелла в верхнем и нижнем полупространствах соответственно тогда и только тогда, когда их образы Фурье удовлетворяют условиям

$$\omega \varepsilon_0 \varepsilon \gamma(\xi, \eta) \mathbf{e}^+(\xi, \eta) - \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{h}^+(\xi, \eta) = 0, \quad (3.10)$$

$$\omega \varepsilon_0 \varepsilon \gamma(\xi, \eta) \mathbf{e}^-(\xi, \eta) + \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{h}^-(\xi, \eta) = 0, \quad (3.11)$$

где

$$\mathbf{P}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi\eta & k^2 - \xi^2 \\ \eta^2 - k^2 & -\xi\eta \end{pmatrix}, \quad \gamma(\xi, \eta) = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Точно такими же рассуждениями, как и в двумерной задаче, доказывается, что трехмерная задача дифракции волны на проводящем тонком экране \mathcal{M} сводится к односторонней задаче в полупространстве $z > 0$ с граничными условиями

$$\mathbf{e}^+(x, y) = -\mathbf{e}^0(x, y) \quad \text{на } \mathcal{M}; \quad \mathbf{h}^+(x, y) = 0 \quad \text{на } \mathcal{N}. \quad (3.12).$$

Сюда нужно добавить связь (3.10) между следами положительно ориентированного решения уравнений Максвелла (в образах Фурье).

Распространим метод сведения задачи (3.10), (3.12) к БСЛАУ с помощью обобщенных функции специального класса. Обобщенные функции в данном случае – это линейные функционалы на линейных комбинациях двумерных функций Эрмита $h_m(x) h_n(y)$. О.ф. $f[\cdot, \cdot]$ отождествляется с набором чисел

$$f_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) h_m(x) h_n(y) dx dy.$$

Линейные операции над обобщенными функциями вводятся по аналогии с одномерным случаем. Также по аналогии формулируется условие того, что о.ф. равна нулю на некотором многообразии. Следовательно, условия (3.12) заменяются на

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} I_{pqmn} e_{mn} = - \sum_{m,n=0}^{+\infty} I_{pqmn} e_{mn}^0, \quad p, q = 0, 1, \dots, \quad (3.13)$$

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} J_{pqmn} h_{mn} = 0, \quad p, q = 0, 1, \dots, \quad (3.14)$$

где

$$I_{pqmn} = \int \int_{\mathcal{M}} h_p(x) h_q(y) h_m(x) h_n(y) dx dy,$$

$$J_{pqmn} = \delta_{pm} \delta_{qn} h_m h_n - I_{pqmn}.$$

При умножение о.ф. $f(\xi, \eta)[\cdot, \cdot]$ на функцию $\gamma(\xi, \eta)$ (как и на любую другую функцию) образуется о.ф., значениями которой на базисной функции $h_p(\xi) h_q(\eta)$ является (если ряд сходится)

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} \frac{1}{h_m h_n} \gamma_{pqmn} f_{mn},$$

где

$$\gamma_{pqmn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\xi, \eta) h_p(\xi) h_q(\eta) h_m(\xi) h_n(\eta) d\xi d\eta.$$

Умножать на полиномы (в том числе на элементы матрицы $P(\xi, \eta)$) еще проще. Например,

$$\begin{aligned} \xi \eta f(\xi, \eta)[\cdot, \cdot] : h_p(\xi) h_q(\eta) &\mapsto \\ p(f_{p-1, q-1} + 1/2 f_{p-1, q+1}) + 1/2 (q f_{p+1, q-1} + 1/2 f_{p+1, q+1}), \\ (\kappa^2 - \xi^2) f(\xi, \eta)[\cdot, \cdot] : h_p(\xi) h_q(\eta) &\mapsto \\ \kappa^2 f_{pq} - [p(p-1) f_{p-2, q} + (p+1/2) f_{pq} + 1/4 f_{p+2, q}]. \end{aligned}$$

Следовательно, к двум группам уравнений итоговой БСЛАУ (3.13) и (3.14) добавляется третья группа

$$\omega \varepsilon_0 \varepsilon \sum_{m, n=0}^{+\infty} i^{m+n} \gamma_{pqmn} e_{mn} - \sum_{m, n=0}^{+\infty} i^{m+n} \mathbf{P}_{pqmn} h_{mn} = 0, \quad p, q = 0, 1, \dots, \quad (3.15)$$

где матрицы

$$\mathbf{P}_{pqmn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_p(\xi) h_q(\eta) h_m(\xi) h_n(\eta) P(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Уравнения (3.13)–(3.15) можно получить формально, если равенства (3.12) и (3.10) умножить на $h_p(\cdot)h_q(\cdot)$ и проинтегрировать по всей плоскости.

* * *

В разделе 3.1 собраны известные свойства полиномов и функций Эрмита (см. [11], §63; [1], 10.13)), которые нужны при построении теории обобщенных функций на прямой. Следующие разделы написаны в основном по результатам работы [26].

4. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ТОНКОМ ПРОВОДЯЩЕМ ДИСКЕ

Четвертая глава посвящена еще одной ключевой задаче электродинамики – задаче дифракции электромагнитной волны на круглом диске. Предлагается при сведении этой задачи к БСЛАУ перейти к цилиндрическим координатам и использовать специальные базисные функции, построенные на основе функций Лагерра. Для обоснования такого перехода построена теория обобщенных функций на полуоси. В качестве обобщенных функций рассматриваются линейные функционалы на множестве линейных комбинаций базисных функций. Метод приближенного решения интегрального уравнения 4-го рода задачи дифракции на диске основан на разложении искомой функции в ряд.

4.1. Уравнения Максвелла в цилиндрических координатах

При исследовании задачи дифракции электромагнитной волны на диске удобно перейти к цилиндрическим координатам (r, α, z) . Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд электрического и магнитного векторов в скалярной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_r, & \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} &= i\omega \mu_0 \mu H_r, \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_\alpha, & \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= i\omega \mu_0 \mu H_\alpha, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r H_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_z, & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} &= i\omega \mu_0 \mu H_z. \end{aligned}$$

При $r = 0$ эта система уравнений теряет смысл.

В однородной изотропной среде все искомые величины являются 2π -периодическими функциями переменной α , поэтому будем ис-

каты их в виде разложений в ряды Фурье вида

$$A(r, \alpha, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(r, z) e^{in\alpha}$$

(предполагая, что все ряды сходятся и их суммы можно дифференцировать). Коэффициенты Фурье искомым функций с номером n должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{in}{r} H_{z,n} - \frac{\partial H_{\alpha,n}}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_{r,n}, & \frac{in}{r} E_{z,n} - \frac{\partial E_{\alpha,n}}{\partial z} &= i\omega\mu_0\mu H_{r,n}, \\ \frac{\partial H_{r,n}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z,n}}{\partial r} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_{\alpha,n}, & \frac{\partial E_{r,n}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z,n}}{\partial r} &= i\omega\mu_0\mu H_{\alpha,n}, \\ \frac{\partial H_{\alpha,n}}{\partial r} + \frac{1}{r} H_{\alpha,n} - \frac{in}{r} H_{r,n} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_{z,n}, \\ \frac{\partial E_{\alpha,n}}{\partial r} + \frac{1}{r} E_{\alpha,n} - \frac{in}{r} E_{r,n} &= i\omega\mu_0\mu H_{z,n}. \end{aligned}$$

Пусть электромагнитное поле не зависит от координаты α (осесимметричное поле). В этом случае остаются только уравнения при $n = 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_{\alpha,n}}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_{r,n}, & -\frac{\partial E_{\alpha,n}}{\partial z} &= i\omega\mu_0\mu H_{r,n}, \\ \frac{\partial H_{r,n}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z,n}}{\partial r} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_{\alpha,n}, & \frac{\partial E_{r,n}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z,n}}{\partial r} &= i\omega\mu_0\mu H_{\alpha,n}, \\ \frac{\partial H_{\alpha,n}}{\partial r} + \frac{1}{r} H_{\alpha,n} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_{z,n}, & \frac{\partial E_{\alpha,n}}{\partial r} + \frac{1}{r} E_{\alpha,n} &= i\omega\mu_0\mu H_{z,n}. \end{aligned}$$

Легко выделить две поляризации поля – перпендикулярную и параллельную (по отношению к координате α). В первом случае

$$E_r = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad E_z = \frac{-1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u \right), \quad H_\alpha = u,$$

потенциальная функция u – решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) u = 0. \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon.$$

Во втором случае

$$E_\alpha = u, \quad H_r = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u \right).$$

Методом разделения переменных можно найти частные решения уравнения Гельмгольца вида

$$u = Z_1(\xi r) e^{\pm i\gamma(\xi)z}, \quad \gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2},$$

где $Z_1(\cdot)$ – одна из цилиндрических функций 1-го порядка. Из них только функция Бесселя дает решения, ограниченные при $r \rightarrow 0$.

При исследовании уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах удобно использовать интегральное преобразование Ханкеля

$$(\mathcal{H}_\nu f)(\rho) = \int_0^{+\infty} f(r) J_\nu(r\rho) r dr, \quad (\mathcal{H}_\nu^{-1}g)(r) = \int_0^{+\infty} g(\rho) J_\nu(\rho r) \rho d\rho.$$

Самое важное для нас его свойство (формула коммутации):

$$\mathcal{H}_\nu \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} \right) f = -\rho^2 \mathcal{H}_\nu f.$$

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) u = 0.$$

в четверти плоскости $r > 0$, $z > 0$. Применим преобразование \mathcal{H}_1 к этому уравнению и получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (k^2 - \rho^2) u = 0.$$

Пусть $\gamma(\rho) = \sqrt{k^2 - \rho^2}$. Условимся, что значения этой функции или неотрицательные вещественные числа, или мнимые числа с положительной мнимой частью. Тогда

$$u(\rho, z) = a(\rho) e^{i\gamma(\rho)z} + b(\rho) e^{-i\gamma(\rho)z}$$

и

$$u(r, z) = \int_0^{+\infty} [a(\rho) e^{i\gamma(\rho)z} + b(\rho) e^{-i\gamma(\rho)z}] J_1(\rho r) \rho d\rho.$$

Первое слагаемое определяет волны положительной ориентации, а второе – волны отрицательной ориентации (по отношению к оси z).

Волны положительной ориентации, например, переносят энергию только в направлении оси z или затухают в этом направлении. Чтобы убедиться в этом, вычислим среднее значение вектора Пойнтинга $\overline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]$ (* – знак комплексного сопряжения). В случае параллельной поляризации поля

$$[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]_z = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} u \frac{\partial u^*}{\partial z}$$

и

$$[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]_r = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu} u \left(\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r} u^* \right),$$

$$[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]_\alpha = 0.$$

Пусть $u = Z_1(\rho r) e^{i\gamma(\rho)z}$. Тогда

$$\overline{\mathbf{P}}_z = \frac{1}{2\omega\mu_0\mu} |Z_1(\rho r)|^2 e^{-2\text{Im } \gamma(\rho)z} \text{Re } \gamma(\rho).$$

Следовательно, только при вещественных значениях $\gamma(\rho)$ энергия переносится в направлении оси z . Далее,

$$u \left(\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r} u^* \right) = Z_1(\rho r) \left(\frac{\partial Z_1^*}{\partial r}(\rho r) + \frac{1}{r} Z_1^*(\rho r) \right) e^{-2\text{Im } \gamma(\rho)z}.$$

Тогда $\overline{\mathbf{P}}_r = 0$ при $Z_1(\cdot) = J_1(\cdot)$. Таким образом, при $u = J_1(\rho r) e^{i\gamma(\rho)z}$ имеем электромагнитные волны, переносящие энергию при вещественных $\gamma(\rho)$ только в направлении оси z . Если $u = J_1(\rho r) e^{-i\gamma(\rho)z}$, то энергия переносится в противоположном направлении.

Заметим, что $J_1(\cdot) = \frac{1}{2}[H_1^{(1)}(\cdot) + H_1^{(2)}(\cdot)]$. Поэтому волну, в потенциальной функции которой участвует функция Бесселя, можно

рассматривать как наложение двух волн, у которых r -компоненты вектора Пойнтинга имеют разные знаки. Так как для функции Ханкеля первого рода

$$\begin{aligned} & (J_1(\rho r) + iY_1(\rho r)) (J_1'(\rho r) - iY_1'(\rho r)) = \\ & = J_1(\rho r) J_1'(\rho r) + Y_1(\rho r) Y_1'(\rho r) + i (J_1'(\rho r) Y_1(\rho r) - J_1(\rho r) Y_1'(\rho r)), \end{aligned}$$

то только мнимая часть этого выражения определяет поток энергии в направлении оси r . Как известно, вронскиан

$$J_1'(\rho r) Y_1(\rho r) - J_1(\rho r) Y_1'(\rho r) = \frac{2}{\pi \rho r}.$$

Электромагнитные волны с функциями Ханкеля в потенциальных функциях появляются в случае, когда имеются источники поля на оси z .

Итак, в случае положительно ориентированного решения в области $z > 0$ при $z \rightarrow 0 + 0$ имеем

$$\begin{aligned} u_0(r) = u(r, 0) &= \int_0^{+\infty} a(\rho) J_1(\rho r) \rho d\rho, \\ u_1(r) = \frac{\partial u}{\partial z}(r, 0) &= \int_0^{+\infty} a(\rho) i\gamma(\rho) J_1(\rho r) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Эти функции будем называть следами решения уравнения Гельмгольца. Следовательно,

$$u_1(\rho) - i\gamma(\rho) u_0(\rho) = 0. \quad (4.1)$$

Данное равенство представляет собой необходимое и достаточное условие разрешимости переопределенной граничной задачи, в которой при $z = 0$ заданы одновременно два следа положительно ориентированного решения уравнения Гельмгольца.

Аналогично, для отрицательно ориентированного решения при $z < 0$ связь между следами при $z \rightarrow 0 - 0$ имеет вид

$$u_1(\rho) + i\gamma(\rho) u_0(\rho) = 0. \quad (4.2)$$

4.2. Полиномы Лагерра и функции Лагерра

Полиномы Лагерра обычно определяются следующим образом (при $\lambda > -1$):

$$\begin{aligned} L_0^{(\lambda)}(x) &= 1, & L_1^{(\lambda)}(x) &= -x + \lambda + 1, \\ L_2^{(\lambda)}(x) &= x^2 - 2(\lambda + 2)x + (\lambda + 1)(\lambda + 2), \dots \end{aligned}$$

или

$$L_n^{(\lambda)}(x) = x^{-\lambda} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\lambda+n} e^{-x}), \quad n = 0, 1, \dots$$

Полиномы Лагерра являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$xy'' + (\lambda + 1 - x)y' + ny = 0$$

и имеют ряд замечательных свойств. Одно из самых важных – они ортогональны на полуоси с весом

$$\int_0^{+\infty} x^\lambda e^{-x} L_m^{(\lambda)}(x) L_n^{(\lambda)}(x) dx = \begin{cases} m \neq n : 0; \\ m = n : n! \Gamma(\lambda + n + 1). \end{cases}$$

Напомним, что $\Gamma(\lambda + n + 1) = (\lambda + n)!$ при целом λ . Кроме того, имеет место равенство

$$x^{\lambda/2} e^{-x/2} L_n^{(\lambda)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} J_\lambda(\sqrt{xy}) y^{\lambda/2} e^{-y/2} L_n^{(\lambda)}(y) dy,$$

которое часто рассматривают как интегральное уравнение, которому удовлетворяют полиномы Лагерра.

Рекуррентные формулы устанавливают связи между полиномами Лагерра разных степеней. Наиболее важными для нас являются следующие две:

$$L_{n+1}^{(\lambda)}(x) + (x - \lambda - 2n - 1) L_n^{(\lambda)}(x) + n(\lambda + n) L_{n-1}^{(\lambda)}(x) = 0,$$

$$x L_n^{(\lambda)'}(x) - n L_n^{(\lambda)}(x) + n(\lambda + n) L_{n-1}^{(\lambda)}(x) = 0$$

или

$$x L_n^{(\lambda)}(x) = -n(\lambda + n) L_{n-1}^{(\lambda)}(x) + (\lambda + 2n + 1) L_n^{(\lambda)}(x) - L_{n+1}^{(\lambda)}(x),$$

$$x L_n^{(\lambda)'}(x) = -n(\lambda + n) L_{n-1}^{(\lambda)}(x) + n L_n^{(\lambda)}(x).$$

Первая формула позволяет находить значения полинома через значения полиномов меньшей степени, с помощью второй формулы вычисляются производные полиномов Лагерра.

Заметим, что в справочнике [1], п. 12.10, полиномы Лагерра определены немного иначе, там они отличаются множителем $n!$. Поэтому рекуррентные формулы в этой книге также не такие.

Функции Лагерра

$$l_n^{(\lambda)}(x) = x^{\lambda/2} e^{-x/2} L_n^{(\lambda)}(x)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$xy'' + y' + \left(-\frac{x}{4} + \frac{\lambda + 1}{2} + n - \frac{\lambda^2}{4x}\right)y = 0.$$

Интегральное уравнение для функций Лагерра имеет вид

$$l_n^{(\lambda)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} J_\lambda(\sqrt{xy}) l_n^{(\lambda)}(y) dy$$

или, после замены переменных $x = t^2$, $y = \tau^2$,

$$l_n^{(\lambda)}(t^2) = (-1)^n \int_0^{+\infty} J_\lambda(\tau t) l_n^{(\lambda)}(\tau^2) \tau d\tau.$$

Обозначим

$$\varphi_n(x) = l_n^{(\lambda)}(x^2) = x^\lambda e^{-x^2/2} L_n^{(\lambda)}(x^2),$$

верхний индекс (λ) (λ – натуральное число) в дальнейшем указывать не будем. Условие ортогональности для новых функций имеет вид

$$\int_0^{+\infty} \varphi_m(x) \varphi_n(x) x dx = \delta_{mn} l_n, \quad l_n = \frac{1}{2} n!(n + \lambda)!$$

(δ_{mn} – символ Кронекера). Если функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по функциям $\varphi_n(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \varphi_n(x),$$

то

$$f_n = \frac{1}{l_n} \int_0^{+\infty} f(x) \varphi_n(x) x dx.$$

Умножение функций $\varphi_n(x)$ на степени x и дифференцирование этих функций не всегда дает их линейные комбинации. В дальнейшем будут нужны две формулы. Из первой рекуррентной формулы для полиномов Лагерра следует, что

$$x^2 \varphi_n(x) = -n(n + \lambda) \varphi_{n-1}(x) + (2n + 1 + \lambda) \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x). \quad (4.3)$$

Еще одна формула показывает, как на функции $\varphi_n(x)$ действует линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} : \varphi_n(x) \mapsto \varphi_n''(x) + \frac{1}{x} \varphi_n'(x) - \frac{\lambda^2}{x^2} \varphi_n(x). \quad (4.4)$$

Тождество

$$(\mathcal{L}\varphi_n)(x) = -n(n + \lambda) \varphi_{n-1}(x) - (2n + 1 + \lambda) \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) \quad (4.5)$$

выводится следующим образом. Легко видеть, что

$$\varphi_n'(x) = 2x l_n'(x^2), \quad \varphi_n''(x) = 2 l_n'(x^2) + 4x^2 l_n''(x^2).$$

Из дифференциального уравнения для функций Лагерра следует, что

$$4x^2 l_n'''(x^2) + 4l_n'(x^2) = (x^2 - 2(\lambda + 1) - 4n + \frac{\lambda^2}{x^2}) l_n(x^2).$$

Тогда

$$(\mathcal{L}\varphi_n)(x) = x^2 \varphi_n(x) - 2(2n + 1 + \lambda) \varphi_n(x).$$

Первое слагаемое справа уже было вычислено выше (4.3).

Линейные комбинации функций $\varphi_n(x)$ появляются и в некоторых других случаях. Например,

$$x \varphi_n'(x) = -n(n + \lambda) \varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x) + \varphi_{n+1}(x)$$

или

$$x \varphi_n'(x) + \varphi_n(x) = -n(n + \lambda) \varphi_{n-1}(x) + \varphi_{n+1}(x).$$

Интегральное уравнение для функций Лагерра можно понимать так: функции $\varphi_n(x)$ являются собственными функциями интегрального преобразования Ханкеля, то есть

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(y) J_\lambda(yx) y dy = (-1)^n \varphi_n(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.6)$$

Если применить преобразование Ханкеля к выражению $(\mathcal{L}\varphi_n)(x)$, то получим

$$\begin{aligned} (-1)^n [n(n + \lambda) \varphi_{n-1}(x) + (2n + 1 + \lambda) \varphi_n(x) + \varphi_{n+1}(x)] = \\ = (-1)^n (-x^2) \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Иными словами, применение оператора \mathcal{L} к функции $\varphi_n(x)$ равносильно умножению ее образа Ханкеля на $-x^2$.

В дальнейшем будем использовать полиномы и функции Лагерра только при $\lambda = 1$.

4.3. Осесимметричная задача дифракции на диске

Будем искать электромагнитное поле, возникающее при падении волны от внешнего источника на тонкий проводящий диск, размещенный в плоскости $z = 0$. Ограничимся осесимметричным случаем. Пусть в полуплоскости (r, z) , $r > 0$ тонкому проводящему диску соответствует участок \mathcal{M} полуоси r , остальную часть полуоси обозначим через \mathcal{N} .

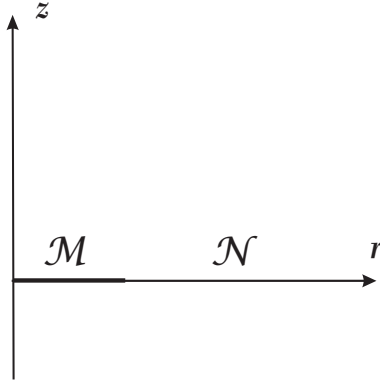


Рис. 4.1. Тонкий проводящий диск (в полуплоскости $\alpha = \text{const}$)

Пусть волна от внешнего источника с потенциальной функцией $u^0(r, z)$ задана при $z > 0$ и при $z < 0$. В случае параллельной поляризации поля условия сопряжения и граничные условия при $z = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_0^+(r) &= u_0^-(r), & u_1^+(r) &= u_1^-(r) & \text{на } \mathcal{N}, \\ u_0^0(r) + u_0^+(r) &= 0, & u_0^0(r) + u_0^-(r) &= 0 & \text{на } \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Легко показать, что задача дифракции сводится к граничной задаче для уравнения Гельмгольца в верхней половине полуплоскости с условиями

$$u_0^+(r) = -u_0^0(r) \quad \text{на } \mathcal{M}, \quad u_1^+(r) = 0 \quad \text{на } \mathcal{N}. \quad (4.7)$$

Действительно, из условий при $z = 0$ следует, что $u_0^+(r) = u_0^-(r)$ при всех $r > 0$. Тогда после преобразования Ханкеля $u_0^+(\rho) = u_0^-(\rho)$.

Из условий разрешимости (4.1), (4.2) переопределенных задач следует, что $u_1^+(\rho) = -u_1^-(\rho)$ и $u_1^+(r) = -u_1^-(r)$. Поэтому на \mathcal{N} должно быть $u_1^\pm(r) = 0$.

Теперь с помощью простых рассуждений, как и в ранее рассмотренных задачах, можно свести задачу дифракции к интегральному уравнению 1-го рода на \mathcal{M} . Так как

$$u_0^+(r) = \int_0^{+\infty} u_0^+(\rho) J_1(\rho r) \rho d\rho = \int_0^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\rho)} u_1^+(\rho) J_1(\rho r) \rho d\rho$$

и

$$u_1^+(\rho) = \int_0^{+\infty} u_1^+(r_1) J_1(r_1 \rho) r_1 dr_1 = \int_{\mathcal{M}} u_1^+(r_1) J_1(r_1 \rho) r_1 dr_1,$$

то функция $u_1^+(x)$ на \mathcal{M} должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\int_{\mathcal{M}} u_1^+(r_1) K(r_1, r) dr_1 = -u_0^0(r), \quad r \in \mathcal{M}, \quad (4.8)$$

где

$$K(r_1, r) = r_1 \int_0^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\rho)} J_1(r_1 \rho) J_1(\rho r) \rho d\rho. \quad (4.9)$$

При дополнительном условии $u_1(r) = 0$ на \mathcal{N} такое уравнение на полуоси представляет собой интегральное уравнение 4-го рода.

Перейдем от интегрального уравнения задачи дифракции параллельно поляризованной электромагнитной волны на диске к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Имеет место разложение

$$J_1(r\rho) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{l_k} \varphi_k(r) \varphi_k(\rho). \quad (4.10)$$

Получить это очень легко. Представим функцию $J_1(r\rho)$ в виде ряда по функциям $\varphi_m(\rho)$. Тогда коэффициенты разложения в ряд

$$a_n(r) = \frac{1}{l_n} \int_0^{+\infty} \varphi_n(\rho) J_1(r\rho) \rho d\rho = \frac{1}{l_n} (-1)^n \varphi_n(r).$$

Существенно, что в задаче дифракции $u_1(r) = 0$ на \mathcal{M} . Поэтому можно считать, что в интегральном уравнении интеграл берется по полуоси $(0, +\infty)$.

Будем искать

$$u_1(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} \varphi_m(r).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} u_1(r_1) K(r_1, r) r_1 dr_1 = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} \int_0^{+\infty} \frac{-i}{\gamma(\rho)} J_1(\rho r) \left(\int_0^{+\infty} \varphi_m(r_1) J_1(r_1 \rho) r_1 dr_1 \right) \rho d\rho = \\ &= -i \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\rho)} J_1(\rho r) (-1)^m \varphi_m(\rho) \rho d\rho. \end{aligned}$$

В силу представления ядра интегрального уравнения

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\rho)} J_1(\rho r) \varphi_m(\rho) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\rho)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{l_k} \varphi_k(r) \varphi_k(\rho) \right) \varphi_m(\rho) \rho d\rho = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{l_k} \varphi_k(r) \gamma'_{mk}. \end{aligned}$$

Спроектируем равенство

$$i \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} (-1)^m \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{l_k} \varphi_k(r) \gamma'_{mk} = u_0^0(r), \quad r \in \mathcal{M},$$

на функции $\varphi_n(r)$ и получим

$$i \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} (-1)^m \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{l_k} \gamma'_{mk} I_{kn} = u_n^0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сюда нужно добавить уравнения

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} J_{mn} = 0,$$

которые следуют из условия $u_1(r) = 0$ на \mathcal{N} .

Приближенные значения интегралов удобно искать с помощью формулы Гаусса

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j),$$

здесь λ_j – числа Кристоффеля, x_j – нули полинома $L_n(x)$.

Если интеграл берется по части полуоси, то в сумме остаются только те слагаемые, в которых x_j принадлежит промежутку интегрирования. Нужно позаботиться о том, чтобы узлов квадратурной формулы хватило и на множество \mathcal{M} , и на множество \mathcal{N} .

Так как

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_m(r) \varphi_n(r) r dr &= \int_{\alpha}^{\beta} e^{-r^2} L_m(r^2) L_n(r^2) r^3 dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha^2}^{\beta^2} e^{-x} x L_m(x) L_n(x) dx, \end{aligned}$$

то при $\mathcal{M} = (\alpha, \beta)$

$$I_{nm} \approx \frac{1}{2} \sum_j \lambda_j f(x_j), \quad f(x) = x L_m(x) L_n(x).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \gamma_{nm} &= \int_0^{+\infty} \gamma(\rho) \varphi_m(\rho) \varphi_n(\rho) \rho d\rho \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j), \\ f(x) &= x \sqrt{k^2 - x} L_m(x) L_n(x). \end{aligned}$$

Интегралы

$$\int_{\mathcal{M}} u_0^0(r) \varphi_n(r) r dr = \int_{\alpha}^{\beta} u_0^0(r) e^{-r^2/2} r L_n(r^2) r dr =$$

$$= \int_{\alpha^2/2}^{\beta^2/2} u_0^0(\sqrt{2x}) e^{-x} \sqrt{2x} L_n(2x) dx$$

вычисляются также по формуле Гаусса (после замены переменной интегрирования $x = r^2/2$).

4.4. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим другие варианты БСЛАУ, к которым приводится задача дифракции электромагнитной волны на тонком проводящем диске.

Как было показано выше, задача дифракции свелась к трем условиям для следов решения уравнения Гельмгольца (формулы (4.7) и (4.1)). Еще раз выпишем эти условия:

$$u_0(r) = -u_0^0(r) \quad \text{на } \mathcal{M}, \quad (4.11)$$

$$u_1(r) = 0 \quad \text{на } \mathcal{N}, \quad (4.12)$$

$$u_1(\rho) - i\gamma(\rho) u_0(\rho) = 0 \quad (\text{в образах Ханкеля}). \quad (4.13)$$

Будем искать одновременно нулевой и первый след в виде разложений в ряды Фурье по функциям $\varphi_m(\cdot)$

$$u_0(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{0m} \varphi_m(r), \quad u_1(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} \varphi_m(r).$$

Тогда

$$u_0(\rho) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{0m} (-1)^m \varphi_m(\rho), \quad u_1(\rho) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{1k} (-1)^k \varphi_k(\rho).$$

Спроектируем равенства (4.11) и (4.12) на функции $\varphi_n(r)$, то есть умножим на $\varphi_n(r) r dr$ и проинтегрируем по соответствующему участку полуоси (по \mathcal{M} или по \mathcal{N}). Получим

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_{0m} I_{nm} = -u_n^0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.14)$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} J_{nm} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.15)$$

здесь

$$I_{nm} = \int_{\mathcal{M}} \varphi_m(r) \varphi_n(r) r dr, \quad u_n^0 = \int_{\mathcal{M}} u_0^0(r) \varphi_n(r) r dr,$$

$$J_{nm} = \int_{\mathcal{N}} \varphi_m(r) \varphi_n(r) r dr = \delta_{nm} l_n - I_{nm}.$$

Спроектируем равенства (4.13) на $\varphi_n(\rho)$, то есть умножим на $\varphi_n(\rho) \rho d\rho$ и проинтегрируем от 0 до $+\infty$ (это – *первый вариант* возможных рассуждений). Сначала запишем равенство

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{1k} (-1)^k \varphi_k(\rho) - i\gamma(\rho) \sum_{m=0}^{+\infty} u_{0m} (-1)^m \varphi_m(\rho) = 0,$$

и потом

$$l_n u_{1n} (-1)^n - i \sum_{m=0}^{+\infty} u_{0m} (-1)^m \gamma_{nm} = 0, \quad (4.16)$$

где

$$\gamma_{nm} = \int_0^{+\infty} \gamma(\rho) \varphi_m(\rho) \varphi_n(\rho) \rho d\rho.$$

Приближенное решение БСЛАУ (4.14)–(4.16) будем искать методом усечения. После усечения имеем СЛАУ

$$\sum_{m=0}^{M_0-1} I_{nm} u_{0m} = -u_n^0, \quad n = 0 \dots N_0 - 1, \quad (4.17)$$

$$\sum_{m=0}^{M_1-1} J_{nm} u_{1m} = 0, \quad n = 0 \dots N_1 - 1, \quad (4.18)$$

$$l_n u_{1n} + i \sum_{m=0}^{M_0-1} (-1)^{m-n+1} \gamma_{nm} u_{0m} = 0, \quad n = 0 \dots M_1 - 1. \quad (4.19)$$

Эти три группы уравнений объединим в одну систему уравнений вида

$$\sum_{m=0}^{P-1} a_{nm} u_m = b_n, \quad n = 0 \dots Q-1, \quad P = M_0 + M_1, \quad Q = N_0 + N_1 + M_1.$$

Так как уравнений больше, чем неизвестных, запишем условие минимума невязки

$$\sum_{m=0}^{P-1} \left(\sum_{n=0}^{Q-1} a_{nk}^* a_{nm} \right) u_m = \sum_{n=0}^{Q-1} a_{nk}^* b_n, \quad k = 0 \dots P-1,$$

(здесь * – знак комплексного сопряжения).

Можно сократить количество неизвестных. Выразим неизвестные u_{1m} из равенств (4.19) и подставим в (4.18). Получим уравнения

$$\sum_{m=0}^{M_0-1} \left(\sum_{k=0}^{M_1-1} \frac{1}{l_k} (-1)^{m-k} J_{nk} \gamma_{km} \right) u_{0m} = 0. \quad (4.20)$$

Тогда условие минимума невязки по всем уравнениям новой СЛАУ имеет вид

$$\sum_{m=0}^{M_0-1} a_{nm} u_{0m} = b_n, \quad n = 0 \dots N_0 + N_1 - 1,$$

($P = M_0$, $Q = N_0 + N_1$), где

$$a_{nm} = I_{nm}, \quad b_n = -u_n^0 \quad \text{при } n = 0 \dots N_0 - 1,$$

$$a_{n+N_0,m} = \sum_{k=0}^{M_1-1} \frac{1}{l_k} (-1)^{m-k} J_{nk} \gamma_{km}, \quad b_{n+N_0} = 0 \quad \text{при } n = 0 \dots N_1 - 1.$$

Второй вариант БСЛАУ задачи дифракции строится следующим образом. Перепишем (4.13) так:

$$u_0(\rho) + \frac{i}{\gamma(\rho)} u_1(\rho) = 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{0k} (-1)^k \varphi_k(\rho) + \frac{i}{\gamma(\rho)} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} (-1)^m \varphi_m(\rho) = 0,$$

и после проектирования на $\varphi_n(\rho)$ получим

$$l_n u_{0n} (-1)^n + i \sum_{m=0}^{+\infty} u_{1m} (-1)^m \gamma'_{nm} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\gamma'_{nm} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\rho)} \varphi_m(\rho) \varphi_n(\rho) \rho d\rho.$$

После усечения имеем

$$l_n u_{0n} + i \sum_{m=0}^{M_1-1} (-1)^{m-n} \gamma'_{nm} u_{1m} = 0, \quad n = 0 \dots M_0 - 1. \quad (4.21)$$

Итак, есть выбор: или решаем СЛАУ, состоящую из трех групп уравнений (4.17)–(4.19) относительно двух групп неизвестных ($Q = N_0 + N_1 + M_0$), или решаем СЛАУ (4.17), (4.20) относительно неизвестных u_{0m} , или решаем СЛАУ, которая получается после исключения неизвестных u_{0m} – это уравнения (4.18) и то, что следует из (4.21) и (4.17):

$$\sum_{m=0}^{M_1-1} \left(\sum_{k=0}^{M_0-1} \frac{1}{l_k} (-1)^{m-k+1} I_{nk} \gamma'_{km} \right) u_{1m} = i u_n^0, \quad n = 0 \dots N_0 - 1. \quad (4.22)$$

Пока не ясно, какой из вариантов БСЛАУ имеет преимущество на практике.

4.5. Обобщенные функции на полуоси и абстрактные функции

Для обоснования изложенных выше рассуждений, построим теорию специальных обобщенных функций – линейных функционалов на множестве линейных комбинаций функций $\varphi_n(x)$. Как и в случае функций Эрмита, будем обозначать через f_n значения о.ф. $f[\cdot]$ на функциях $\varphi_n(\cdot)$. Напомним, что $\lambda = 1$.

Кроме функций $\varphi_n(\cdot)$ будем использовать биортогональные с ними функции $\tilde{\varphi}_n(\cdot) = \varphi_n(\cdot)/l_n$,

$$\int_0^{+\infty} \varphi_m(x) \tilde{\varphi}_n(x) x dx = \delta_{mn}.$$

Тогда интегрируемой на полуоси функции $f(\cdot)$ ставится в соответствие функционал

$$f[\cdot] : \varphi_n(\cdot) \mapsto f_n = \int_0^{+\infty} f(x) \tilde{\varphi}_n(x) x dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

Определим некоторые линейные операции над о.ф. По стандартной схеме это возможно тогда, когда аналогичная операция над основными функциями $\varphi_n(\cdot)$ дает их линейную комбинацию.

Легко видеть, что при преобразовании Ханкеля значения f_n преобразуются в $(-1)^n f_n$ в силу формулы (4.6).

Правило умножения о.ф. на x^2 такое:

$$x^2 f[\cdot] : \varphi_n(\cdot) \mapsto -n(n+1) f_{n-1} + 2(n+1) f_n - f_{n+1}.$$

Но самая важная операция – действие оператора \mathcal{L} (4.4) на обобщенные функции:

$$\mathcal{L} f[\cdot] = f''[\cdot] + \frac{1}{x} f'[\cdot] - \frac{1}{x^2} f[\cdot] \mapsto -n(n+1) f_{n-1} - 2(n+1) f_n - f_{n+1}.$$

Почему именно так? Потому, что имеет место формула

$$\int_0^{+\infty} (\mathcal{L} f)(x) \varphi_n(x) x dx = \int_0^{+\infty} f(x) (\mathcal{L} \varphi_n)(x) x dx.$$

Она выводится с помощью интегрирования по частям. Действительно, пусть

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} [f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x)] \varphi_n(x) x dx.$$

Так как

$$\int_0^{+\infty} f''(x) \varphi_n(x) x dx = - \int_0^{+\infty} f'(x) (\varphi_n(x) x)' dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(x) (\varphi_n(x) x)'' dx,$$

$$\int_0^{+\infty} f'(x) \varphi_n(x) x dx = - \int_0^{+\infty} f(x) (\varphi_n(x) x)' dx,$$

то

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{+\infty} f(x) [(\varphi_n(x) x)'' - \varphi_n'(x) - \frac{\varphi_n(x)}{x}] dx = \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) [\varphi_n''(x) + \frac{1}{x} \varphi_n'(x) - \frac{1}{x^2} \varphi_n(x)] x dx. \end{aligned}$$

Выражение $(\mathcal{L} \varphi_n)(x)$ было вычислено раньше, формула (4.5).

Для выражений $x f[\cdot]$ и $f'[\cdot]$ хороших формул (как в случае функций Эрмита) нет, но нетрудно получить, что

$$x f'[\cdot] + f[\cdot] : \varphi_n(\cdot) \mapsto +n(n+1) f_{n-1} - f_{n+1}.$$

Для обычных функций

$$\int_0^{+\infty} [x f'(x) + f(x)] \varphi_n(x) x dx = - \int_0^{+\infty} f(x) [x \varphi_n'(x) + \varphi_n(x)] x dx.$$

Будем называть *абстрактными функциями* отображения $z \in (0, +\infty) \rightarrow \text{o.ф.}$

Если искать решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0$$

как а.ф., то для ее значений на функции $\varphi_n(\cdot)$ имеем

$$-n(n+1) u_{n-1}(z) - 2(n+1) u_n(z) - u_{n+1}(z) + u_n''(z) + k^2 u_n(z) = 0.$$

Применим преобразование Ханкеля и получим (функции $u_n(z)$ нужно умножить всего лишь на $(-1)^n$)

$$n(n+1) u_{n-1}(z) - 2(n+1) u_n(z) + u_{n+1}(z) + u_n''(z) + k^2 u_n(z) = 0.$$

Сравним это выражение с о.ф. $\xi^2 f[\cdot]$. Легко видеть, что для образа Ханкеля по переменной $x \rightarrow \xi$, который обозначим $v(\xi, z)$, имеем, как и ожидалось, уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (k^2 - \xi^2) v = 0.$$

* * *

Задачам дифракции на круглом диске и на круглом отверстии в акустическом (скалярном) и в электромагнитном (векторном) случаях посвящен §3 главы IV монографии [28]. В разделе а) обсуждается их строгое решение; в разделе б) – приближенное решение для случая больших длин волн; в разделе в) – приближенное решение для малых длин волн.

Классическое решение задачи дифракции на диске получено методом разделения переменных в виде ряда по сфероидальным функциям [10]. Предварительно нужно перейти в уравнении Гельмгольца к вырожденным эллиптическим координатам. Тогда полуплоскость с разрезом преобразуется в полуполосу. Установлено, что этот ряд сходится при всех значениях параметра $\varepsilon = \kappa a$, κ – волновое число, a – радиус диска ($\kappa = 2\pi\lambda$, λ – длина волны). Количество членов ряда, которые нужно учитывать, зависит от ε . Но вычисление собственных значений сфероидальных функций и коэффициентов разложения их по полиномам Лежандра – достаточно сложная задача.

Свойства полиномов Лагерра и функций Лагерра изложены по книге [11], §61. Теория обобщенных функций на полуоси публикуется впервые.

Литература

- [1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
- [2] Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
- [3] Бурганов А.Ф., Плещинский Н.Б. О структуре решений системы уравнений Максвелла в анизотропных полупространствах // Исследования по прикладной математике и информатике. Вып 27. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2011. – С.59-64.
- [4] Вайнштейн Л.А. Диафрагмы в волноводах. – ЖТФ, **25** (1955), 841-846.
- [5] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
- [6] Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 308 с.
- [7] Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
- [8] Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 316 с.
- [9] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

- [10] Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. – М.: Наука, 1976. – 320с.
- [11] Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высш. школа, 1965. – 272 с.
- [12] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.-Л.: ГИФМЛ, 1963. – 358 с.
- [13] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. - М.: Мир, 1974. - 328 с.
- [14] Мокейчев В.С., Мокейчев А.В. Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. I. // Изв.вузов. Математика. – 1999. – № 1. – С. 25-35.
- [15] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978. – 320 с.
- [16] Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1978. – 544 с.
- [17] Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. – М.: ИЛ, 1962. – 280 с.
- [18] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций // Препринт 2000-1. Казанское матем. об-во. - Казань, 2000. – 50 с.
- [19] Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б. Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн // Ученые записки Казанского гос. ун-та. – 2005. – Т.147, кн. 3. – С.4-32.

- [20] Плещинский Н.Б. Модели и методы волноводной электродинамики: учебное пособие. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. – 104 с.
- [21] Pleshchinskii N.B. The over-determined boundary value problems for the Maxwell equations set in the orthogonal coordinates and some applications for the electromagnetic wave diffraction problems // Proceedings of PIERS 2013 in Stockholm, Sweden, Aug. 12-15, 2013. – P.421-425.
- [22] Pleshchinskii N.B. On boundary value problems for Maxwell set of equations in cylindrical domain // SOP Transactions on Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 1, No. 2. – P. 117-125.
- [23] Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. Over-determined boundary value problems for PDE and their application in the wave propagation theory // Applicable Analysis. – 2014. – Vol. 93. – Iss. 11. – P. 2350-2359.
- [24] Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. On mixed boundary value problems for set of partial differential equations with constant coefficients in semi-spaces // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39, No. 8. – P. 1090-1098.
- [25] Pleshchinskii N.B. On generalized solutions of problems of electromagnetic wave diffraction by screens in the closed cylindrical waveguides // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol.40, Is.2. – P.201-209.
- [26] Pleshchinskii N.B. On generalized solutions of the problems of electromagnetic wave diffraction in the open space // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. Vol. 42, No. 6. – P.1391-1401.

- [27] Смирнов Ю.Г., Цупак А.А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. – М.: РУСАЙНС, 2016. – 226 с.
- [28] Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль Л. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964. – 428 с.
- [29] Шестопапов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. - Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. - 400 с.
- [30] Шестопапов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 296 с.

Содержание

Введение	3
1. ПОПЕРЕЧНЫЕ ПЕРЕГОРОДКИ В ВОЛНОВОДАХ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ	5
1.1. Поперечная перегородка в плоском волноводе	6
1.2. Обобщенные функции на отрезке	12
1.3. Обобщенные решения задачи дифракции	15
1.4. Экран в прямоугольном волноводе	19
1.5. Собственные волны волновода произвольного сечения	23
1.6. Экран в волноводе произвольного сечения	27
2. ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ	31
2.1. Дифракция электромагнитной волны на тонкой проводящей ленте	31
2.2. Обобщенные решения уравнения Гельмгольца и интегральные уравнения типа свертки	37
2.3. Уравнение Гельмгольца в трехмерном полупространстве	43
2.4. Уравнения Максвелла в полупространстве	45
2.5. Уравнения Максвелла в анизотропных средах	49
3. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ОТКРЫТОМ ПРОСТРАНСТВЕ .57	
3.1. Полиномы Эрмита и функции Эрмита	57
3.2. Обобщенные функции на числовой прямой	60
3.3. Абстрактные функции. Уравнение Гельмгольца	65

3.4. Дифракция электромагнитной волны на тонкой проводящей ленте	68
3.5. Интегральные уравнения 4-го рода	71
3.6. Усечение БСЛАУ	74
3.7. Дифракция электромагнитной волны на прямоугольной пластине	77
4. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ	
НА ТОНКОМ ПРОВОДЯЩЕМ ДИСКЕ	81
4.1. Уравнения Максвелла в цилиндрических координатах	81
4.2. Полиномы Лагерра и функции Лагерра	86
4.3. Осесимметричная задача дифракции на диске	90
4.4. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений ..	94
4.5. Обобщенные функции на полуоси и абстрактные функции ..	97
Литература	101