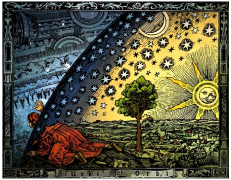
Математические модели теоретической физики

(математика и компьютерные науки)

Математические основы физики

(математика и информатика)

профессор Игнатьев Юрий Геннадиевич



Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VI-VII семестр, 2015 г.

Лекция XVI: Сферически - симметричные гравитационные поля

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf>*
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Лекция XVI: Сферически - симметричные гравитационные поля

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Лекция XVI: Сферически - симметричные гравитационные поля

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Единториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf>*
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Лекция XVI: Сферически - симметричные гравитационные поля

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf>*
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Лекция XVI: Сферически - симметричные гравитационные поля

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Лекция XVI: Сферически - симметричные гравитационные поля

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Лекция XVI: Сферически - симметричные гравитационные поля

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf>*
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf>*
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf>*
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

Содержание лекции

- Связь теории гравитации с теорией групп Ли
- Сферическая симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна
- Вычисление метрических величин в случае сферической симметрии
- Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии
- Решение Шварцшильда
- Движение частиц в поле Шварцшильда (на практике)

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука – 1966. – 496 с.
2. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М: Едиториал УРСС. – 2010. – 360 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
4. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
5. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>
6. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. (Lection14.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
7. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVI. (Lection15.pdf) -— *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:

$$x'^{i} = x^i + \xi^i \delta t \qquad (1)$$

- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:

$$\mathbf{X} = \xi^i \partial_i \qquad (2)$$

- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:

$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^d_{ab} \mathbf{X}_d, \quad (a, b, d = \overline{1, r}) \qquad (3)$$

постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, \Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, \Omega^i_k = \xi^l \nabla_l \Omega^i_k - \Omega^l_k \nabla_l \xi^i + \Omega^i_l \nabla_k \xi^l \qquad (4)$$

Аналогично обрабатываются и другие индексы.

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:
$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i \delta t \tag{1}$$
- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:
$$\mathbf{X} = \xi^i \partial_i \tag{2}$$
- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:
$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^d_{ab}\mathbf{X}_d, \quad (a, b, d = \overline{1, r}), \tag{3}$$
постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:
$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^i_k = \xi^l \nabla_l \Omega^i_k - \Omega^l_k \nabla_l \xi^i + \Omega^i_l \nabla_k \xi^l. \tag{4}$$
Аналогично обрабатываются и другие индексы.

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:
$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i \delta t \qquad (1)$$
- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:
$$\mathbf{X} = \xi^i \partial_i \qquad (2)$$
- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:
$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^d_{ab}\mathbf{X}_d \quad (a,b,d = \overline{1,r}), \qquad (3)$$
постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:
$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^i_k = \xi^l\nabla_l\Omega^i_k - \Omega^l_k\nabla_l\xi^i + \Omega^i_l\nabla_k\xi^l. \qquad (4)$$
Аналогично обрабатываются и другие индексы.

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:
$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i\delta t \qquad (1)$$
- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:
$$\mathbf{X} = \xi^i\partial_i \qquad (2)$$
- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:
$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^d_{ab}\mathbf{X}_d, \quad (a,b,d = \overline{1,r}), \qquad (3)$$
постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:
$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^i_k = \xi^l\nabla_l\Omega^i_k - \Omega^l_k\nabla_l\xi^i + \Omega^i_l\nabla_k\xi^l. \qquad (4)$$
Аналогично обрабатываются и другие индексы.

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:
$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i \delta t \qquad (1)$$
- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:
$$\mathbf{X} = \xi^i \partial_i \qquad (2)$$
- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:

  постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:

  Аналогично обрабатываются и другие индексы.

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:

$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i \delta t \qquad (1)$$

- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:

$$\mathbf{X} = \xi^i \partial_i \qquad (2)$$

- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:

$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^d_{ab}\mathbf{X}_d, \quad (a, b, d = \overline{1, r}), \qquad (3)$$

постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, \Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, \Omega^i_k = \xi^j \nabla_j \Omega^i_k - \Omega^j_k \nabla_j \xi^i + \Omega^i_j \nabla_k \xi^j. \qquad (4)$$

Аналогично обрабатываются и другие индексы.

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:
$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i \delta t \tag{1}$$
- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:
$$\mathbf{X} = \xi^i \partial_i \tag{2}$$
- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:
$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^d_{ab}\mathbf{X}_d, \quad (a, b, d = \overline{1, r}), \tag{3}$$
постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:

Аналогично обрабатываются и другие индексы.

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:
$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i \delta t \qquad (1)$$
- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:
$$\mathbf{X} = \xi^i \partial_i \qquad (2)$$
- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:
$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^d_{ab}\mathbf{X}_d, \quad (a, b, d = \overline{1, r}), \qquad (3)$$
постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:
$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^i_k = \xi^l \nabla_l \Omega^i_k - \Omega^l_k \nabla_l \xi^i + \Omega^i_l \nabla_k \xi^l. \qquad (4)$$
Аналогично обрабатываются и другие индексы.

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:
$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i \delta t \tag{1}$$
- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:
$$\mathbf{X} = \xi^i \partial_i \tag{2}$$
- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:
$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^d_{ab}\mathbf{X}_d, \quad (a, b, d = \overline{1, r}), \tag{3}$$
постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:
$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^i_k = \xi^j\nabla_j\Omega^i_k - \Omega^j_k\nabla_j\xi^i + \Omega^i_j\nabla_k\xi^j. \tag{4}$$
Аналогично обрабатываются и другие индексы.

Элементы теории групп Ли

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:
$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i \delta t \qquad (1)$$
- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:
$$\mathbf{X} = \xi^i \partial_i \qquad (2)$$
- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:
$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^d_{ab}\mathbf{X}_d, \quad (a, b, d = \overline{1, r}), \qquad (3)$$
постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:
$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^i_k = \xi^j \nabla_j \Omega^i_k - \Omega^j_k \nabla_j \xi^i + \Omega^i_j \nabla_k \xi^j. \qquad (4)$$
Аналогично обрабатываются и другие индексы.

- Всякая физическая теория тесно связана с симметриями пространства и времени. Тем более, это относится к теории гравитации, природа которой определяется свойствами пространства - времени. Рассмотрим бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование риманова пространства, соответствующее смещению его точек вдоль вектора ξ:
$$x'^{\,i} = x^i + \xi^i \delta t \qquad (1)$$
- Сопоставим этому смещению дифференциальный оператор:
$$\mathbf{X} = \xi^i \partial_i \qquad (2)$$
- Преобразования (1) образуют однопараметрическую группу преобразований G_1 (см. Л.П. Эйзенхарт), оператор $\mathbf{X}$ называется генератором группы.
- r – параметрической группы преобразований G_r соответствует r независимых генераторов группы $\mathbf{X}_a$, причем:
$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^d_{ab}\mathbf{X}_d, \quad (a, b, d = \overline{1, r}), \qquad (3)$$
постоянные C^d_{ab} называются структурными константами группы G_r.
- Пусть $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$ – некоторый объект. Произведем сдвиг точек пространства по закону (1) и вычислим разность $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x) = \Omega^{(i)}_{(k)}(x') - \Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, которая называется дифференциалом Ли объекта $\Omega^{(i)}_{(k)}(x)$, а величина $\delta\Omega^{(i)}_{(k)}(x)/\delta t$ - производной Ли и обозначается $\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^{(i)}_{(k)}$.
- Относительно тензорного объекта Ω^i_k производная Ли вычисляется с помощью ковариантных производных и наследует тензорные свойства объекта:
$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega^i_k = \xi^j\nabla_j\Omega^i_k - \Omega^j_k\nabla_j\xi^i + \Omega^i_j\nabla_k\xi^j. \qquad (4)$$
Аналогично обрабатываются и другие индексы.

- Если производная Ли от некоторого объекта равна нулю, это означает неизменность свойств объекта вдоль траектории группы:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega = 0 \Rightarrow \Omega(x^i(t)) = \mathrm{Const}, \text{ где } \frac{dx^i}{dt} = \xi^i. \qquad (5)$$

- Говорят, что риманово пространство допускает группу движений порядка r, G_r, если производные Ли от метрического тензора вдоль всех векторов $\underset{(a)}{\xi}$ равны нулю:

$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, g_{ik} = 0, \quad (a = \overline{1,r}). \qquad (6)$$

- Соотношения (6) эквивалентны следующим дифференциальным условиям на векторы $\underset{(a)}{\xi}$ (доказать самостоятельно):

$$\underset{a}{\xi}_{i,k} + \underset{a}{\xi}_{k,i} = 0. \qquad (7)$$

Уравнения (7) называются уравнениями Киллинга, а векторы $\underset{(a)}{\xi}$, удовлетворяющие этим уравнениям, – векторами Киллинга.

- Максимально допустимый порядок группы движения риманова пространства есть $r = \frac{n(n+1)}{2}$, причем в этом случае *максимальной подвижности* риманово пространство имеет постоянную кривизну K: $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, (см., например, Л.П. Эйзенхарт).
- Если выполнены условия (6), то выполняются аналогичные условия и на все метрические объекты (доказать самостоятельно):

$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, \Gamma^i_{jk} = 0; \ \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, R_{ijkl} = 0; \ \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, G_{ik} = 0 \Rightarrow \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, T_{ik} = 0. \qquad (8)$$

- Если производная Ли от некоторого объекта равна нулю, это означает неизменность свойств объекта вдоль траектории группы:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega = 0 \Rightarrow \Omega(x^i(t)) = \mathrm{Const},\ \text{где}\ \frac{dx^i}{dt} = \xi^i. \tag{5}$$

- Говорят, что риманово пространство допускает группу движений порядка r, G_r, если производные Ли от метрического тензора вдоль всех векторов $\underset{(a)}{\xi}$ равны нулю:

$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, g_{ik} = 0, \quad (a = \overline{1, r}). \tag{6}$$

- Соотношения (6) эквивалентны следующим дифференциальным условиям на векторы $\underset{(a)}{\xi}$ (доказать самостоятельно):

Уравнения (7) называются уравнениями Киллинга, а векторы $\underset{(a)}{\xi}$, удовлетворяющие этим уравнениям, – векторами Киллинга.

- Максимально допустимый порядок группы движения риманова пространства есть $r = \frac{n(n+1)}{2}$, причем в этом случае *максимальной подвижности* риманово пространство имеет постоянную кривизну K: $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, (см., например, Л.П. Эйзенхарт).
- Если выполнены условия (6), то выполняются аналогичные условия и на все метрические объекты (доказать самостоятельно):

- Если производная Ли от некоторого объекта равна нулю, это означает неизменность свойств объекта вдоль траектории группы:

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\xi}\Omega = 0 \Rightarrow \Omega(x^i(t)) = \mathrm{Const}, \text{ где } \frac{dx^i}{dt} = \xi^i. \tag{5}$$

- Говорят, что риманово пространство допускает группу движений порядка r, G_r, если производные Ли от метрического тензора вдоль всех векторов $\underset{(a)}{\xi}$ равны нулю:

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\underset{a}{\xi}} g_{ik} = 0, \quad (a = \overline{1,r}). \tag{6}$$

- Соотношения (6) эквивалентны следующим дифференциальным условиям на векторы $\underset{(a)}{\xi}$ (доказать самостоятельно):

$$\underset{a}{\xi}_{i,k} + \underset{a}{\xi}_{k,i} = 0. \tag{7}$$

Уравнения (7) называются уравнениями Киллинга, а векторы $\underset{(a)}{\xi}$, удовлетворяющие этим уравнениям, – векторами Киллинга.
- Максимально допустимый порядок группы движения риманова пространства есть $r = \frac{n(n+1)}{2}$, причем в этом случае *максимальной подвижности* риманово пространство имеет постоянную кривизну K: $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, (см., например, Л.П. Эйзенхарт).
- Если выполнены условия (6), то выполняются аналогичные условия и на все метрические объекты (доказать самостоятельно):

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\underset{a}{\xi}} \Gamma^i_{jk} = 0; \ \mathop{\mathrm{L}}_{\underset{a}{\xi}} R_{ijkl} = 0; \ \mathop{\mathrm{L}}_{\underset{a}{\xi}} G_{ik} = 0 \Rightarrow \mathop{\mathrm{L}}_{\underset{a}{\xi}} T_{ik} = 0. \tag{8}$$

- Если производная Ли от некоторого объекта равна нулю, это означает неизменность свойств объекта вдоль траектории группы:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega = 0 \Rightarrow \Omega(x^i(t)) = \mathrm{Const},\ \text{где } \frac{dx^i}{dt} = \xi^i. \qquad (5)$$

- Говорят, что риманово пространство допускает группу движений порядка r, G_r, если производные Ли от метрического тензора вдоль всех векторов $\underset{(a)}{\xi}$ равны нулю:

$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, g_{ik} = 0, \quad (a = \overline{1, r}). \qquad (6)$$

- Соотношения (6) эквивалентны следующим дифференциальным условиям на векторы $\underset{(a)}{\xi}$ (доказать самостоятельно):

$$\underset{a}{\xi}_{i,k} + \underset{a}{\xi}_{k,i} = 0. \qquad (7)$$

Уравнения (7) называются уравнениями Киллинга, а векторы $\underset{(a)}{\xi}$, удовлетворяющие этим уравнениям, – векторами Киллинга.
- Максимально допустимый порядок группы движения риманова пространства есть $r = \frac{n(n+1)}{2}$, причем в этом случае *максимальной подвижности* риманово пространство имеет постоянную кривизну K: $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, (см., например, Л.П. Эйзенхарт).
- Если выполнены условия (6), то выполняются аналогичные условия и на все метрические объекты (доказать самостоятельно):

- Если производная Ли от некоторого объекта равна нулю, это означает неизменность свойств объекта вдоль траектории группы:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega = 0 \Rightarrow \Omega(x^i(t)) = \mathrm{Const}, \text{ где } \frac{dx^i}{dt} = \xi^i. \qquad (5)$$

- Говорят, что риманово пространство допускает группу движений порядка r, G_r, если производные Ли от метрического тензора вдоль всех векторов $\underset{(a)}{\xi}$ равны нулю:

$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, g_{ik} = 0, \quad (a = \overline{1, r}). \qquad (6)$$

- Соотношения (6) эквивалентны следующим дифференциальным условиям на векторы $\underset{(a)}{\xi}$ (доказать самостоятельно):

$$\underset{a}{\xi}{}_{i,k} + \underset{a}{\xi}{}_{k,i} = 0. \qquad (7)$$

  Уравнения (7) называются уравнениями Киллинга, а векторы $\underset{(a)}{\xi}$, удовлетворяющие этим уравнениям, – векторами Киллинга.

- Максимально допустимый порядок группы движения риманова пространства есть $r = \frac{n(n+1)}{2}$, причем в этом случае *максимальной подвижности* риманово пространство имеет постоянную кривизну K: $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, (см., например, Л.П. Эйзенхарт).

- Если выполнены условия (6), то выполняются аналогичные условия и на все метрические объекты (доказать самостоятельно):

Элементы теории групп Ли: группы движения риманова пространства

- Если производная Ли от некоторого объекта равна нулю, это означает неизменность свойств объекта вдоль траектории группы:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega = 0 \Rightarrow \Omega(x^i(t)) = \mathrm{Const}, \text{ где } \frac{dx^i}{dt} = \xi^i. \tag{5}$$

- Говорят, что риманово пространство допускает группу движений порядка r, G_r, если производные Ли от метрического тензора вдоль всех векторов $\underset{(a)}{\xi}$ равны нулю:

$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, g_{ik} = 0, \quad (a = \overline{1,r}). \tag{6}$$

- Соотношения (6) эквивалентны следующим дифференциальным условиям на векторы $\underset{(a)}{\xi}$ (доказать самостоятельно):

$$\underset{a}{\xi}{}_{i,k} + \underset{a}{\xi}{}_{k,i} = 0. \tag{7}$$

Уравнения (7) называются уравнениями Киллинга, а векторы $\underset{(a)}{\xi}$, удовлетворяющие этим уравнениям, – векторами Киллинга.
- Максимально допустимый порядок группы движения риманова пространства есть $r = \frac{n(n+1)}{2}$, причем в этом случае *максимальной подвижности* риманово пространство имеет постоянную кривизну K: $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, (см., например, Л.П. Эйзенхарт).
- Если выполнены условия (6), то выполняются аналогичные условия и на все метрические объекты (доказать самостоятельно):

- Если производная Ли от некоторого объекта равна нулю, это означает неизменность свойств объекта вдоль траектории группы:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega = 0 \Rightarrow \Omega(x^i(t)) = \mathrm{Const},\ \text{где}\ \frac{dx^i}{dt} = \xi^i. \qquad (5)$$

- Говорят, что риманово пространство допускает группу движений порядка r, G_r, если производные Ли от метрического тензора вдоль всех векторов $\underset{(a)}{\xi}$ равны нулю:

$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, g_{ik} = 0, \quad (a = \overline{1, r}). \qquad (6)$$

- Соотношения (6) эквивалентны следующим дифференциальным условиям на векторы $\underset{(a)}{\xi}$ (доказать самостоятельно):

$$\underset{a}{\xi}\,{}_{i,k} + \underset{a}{\xi}\,{}_{k,i} = 0. \qquad (7)$$

Уравнения (7) называются уравнениями Киллинга, а векторы $\underset{(a)}{\xi}$, удовлетворяющие этим уравнениям, – векторами Киллинга.

- Максимально допустимый порядок группы движения риманова пространства есть $r = \frac{n(n+1)}{2}$, причем в этом случае *максимальной подвижности* риманово пространство имеет постоянную кривизну K: $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, (см., например, Л.П. Эйзенхарт).
- Если выполнены условия (6), то выполняются аналогичные условия и на все метрические объекты (доказать самостоятельно):

$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,\Gamma^i_{jk} = 0;\ \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,R_{ijkl} = 0;\ \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,G_{ik} = 0 \Rightarrow \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,T_{ik} = 0. \qquad (8)$$

Элементы теории групп Ли: группы движения риманова пространства

- Если производная Ли от некоторого объекта равна нулю, это означает неизменность свойств объекта вдоль траектории группы:
$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega = 0 \Rightarrow \Omega(x^i(t)) = \mathrm{Const},\ \text{где}\ \frac{dx^i}{dt} = \xi^i. \qquad (5)$$
- Говорят, что риманово пространство допускает группу движений порядка r, G_r, если производные Ли от метрического тензора вдоль всех векторов $\underset{(a)}{\xi}$ равны нулю:
$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, g_{ik} = 0, \quad (a = \overline{1,r}). \qquad (6)$$
- Соотношения (6) эквивалентны следующим дифференциальным условиям на векторы $\underset{(a)}{\xi}$ (доказать самостоятельно):
$$\underset{a}{\xi}{}_{i,k} + \underset{a}{\xi}{}_{k,i} = 0. \qquad (7)$$
Уравнения (7) называются уравнениями Киллинга, а векторы $\underset{(a)}{\xi}$, удовлетворяющие этим уравнениям, – векторами Киллинга.
- Максимально допустимый порядок группы движения риманова пространства есть $r = \frac{n(n+1)}{2}$, причем в этом случае *максимальной подвижности* риманово пространство имеет постоянную кривизну K: $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, (см., например, Л.П. Эйзенхарт).
- Если выполнены условия (6), то выполняются аналогичные условия и на все метрические объекты (доказать самостоятельно):
$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,\Gamma^i_{jk} = 0;\ \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,R_{ijkl} = 0;\ \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,G_{ik} = 0 \Rightarrow \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,T_{ik} = 0. \qquad (8)$$

- Если производная Ли от некоторого объекта равна нулю, это означает неизменность свойств объекта вдоль траектории группы:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\,\Omega = 0 \Rightarrow \Omega(x^i(t)) = \mathrm{Const}, \text{ где } \frac{dx^i}{dt} = \xi^i. \tag{5}$$

- Говорят, что риманово пространство допускает группу движений порядка r, G_r, если производные Ли от метрического тензора вдоль всех векторов $\underset{(a)}{\xi}$ равны нулю:

$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\, g_{ik} = 0, \quad (a = \overline{1,r}). \tag{6}$$

- Соотношения (6) эквивалентны следующим дифференциальным условиям на векторы $\underset{(a)}{\xi}$ (доказать самостоятельно):

$$\underset{a}{\xi}\,{}_{i,k} + \underset{a}{\xi}\,{}_{k,i} = 0. \tag{7}$$

Уравнения (7) называются уравнениями Киллинга, а векторы $\underset{(a)}{\xi}$, удовлетворяющие этим уравнениям, – векторами Киллинга.
- Максимально допустимый порядок группы движения риманова пространства есть $r = \frac{n(n+1)}{2}$, причем в этом случае *максимальной подвижности* риманово пространство имеет постоянную кривизну K: $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, (см., например, Л.П. Эйзенхарт).
- Если выполнены условия (6), то выполняются аналогичные условия и на все метрические объекты (доказать самостоятельно):

$$\underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,\Gamma^i_{jk} = 0;\ \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,R_{ijkl} = 0;\ \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,G_{ik} = 0 \Rightarrow \underset{\underset{a}{\xi}}{\mathrm{L}}\,T_{ik} = 0. \tag{8}$$

- Классификация полей тяготения по группам движений проведена А.З. Петровым и его учениками (см. А.З. Петров).
- Пусть гравитационное поле обладает сферической симметрией, т.е., соответствующее ему псевдориманово пространство V_4 допускает трехпараметрическую группу вращений G_3 на подпространстве V_3 – времениподобной гиперповерхности $V_3 \subset V_4$ (см. А.З. Петров, §61). Это означает, что существуют 3 пространственноподобных векторов Киллинга, которые в сферической системе координат (r, θ, φ, t) имеют вид

$$\underset{1}{\xi} = (0, \sin\varphi, \mathrm{ctg}\theta\cos\varphi, 0), \underset{2}{\xi} = (0, -\cos\varphi, \mathrm{ctg}\theta\sin\varphi, 0), \underset{3}{\xi} = (0, 0, -1, 0). \qquad (9)$$

- Можно непосредственно проинтегрировать уравнения Киллинга для этого случая. При этом необходимо учитывать, что мы всегда можем использовать допустимые преобразования координат, позволяющие упростить метрику. Так, например, подстановка третьего вектора (9) в уравнения Киллинга (7) сразу приводит к результату: $\partial_\varphi g_{ik} = 0$, т.е. метрический тензор не зависит от полярного угла φ. С помощью допустимых преобразований координат можно добиться $g_{\alpha 4} = 0$ (см. А.З. Петров). Таким образом, можно показать, что сферически - симметричная метрика V_4 может быть записана в виде (см., например, Дж. Синг, Л.Д. Ландау):

$$ds^2 = c^2 dt^2 e^{\nu} - dr^2 e^{\lambda} - r^2 d\Omega^2, \qquad (10)$$

где $\nu(r,t), \lambda(r,t)$ – произвольные функции, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ – метрика 2-мерной сферы единичного радиуса. Докажите, что метрика (10) и векторы (9) удовлетворяют уравнениям Киллинга.

- Классификация полей тяготения по группам движений проведена А.З. Петровым и его учениками (см. А.З. Петров).
- Пусть гравитационное поле обладает сферической симметрией, т.е., соответствующее ему псевдориманово пространство V_4 допускает трехпараметрическую группу вращений G_3 на подпространстве V_3 – времениподобной гиперповерхности $V_3 \subset V_4$ (см. А.З. Петров, §61). Это означает, что существуют 3 пространственноподобных векторов Киллинга, которые в сферической системе координат (r, θ, φ, t) имеют вид

$$\underset{1}{\xi} = (0, \sin\varphi, \mathrm{ctg}\theta\cos\varphi, 0), \underset{2}{\xi} = (0, -\cos\varphi, \mathrm{ctg}\theta\sin\varphi, 0), \underset{3}{\xi} = (0, 0, -1, 0). \qquad (9)$$

- Можно непосредственно проинтегрировать уравнения Киллинга для этого случая. При этом необходимо учитывать, что мы всегда можем использовать допустимые преобразования координат, позволяющие упростить метрику. Так, например, подстановка третьего вектора (9) в уравнения Киллинга (7) сразу приводит к результату: $\partial_\varphi g_{ik} = 0$, т.е. метрический тензор не зависит от полярного угла φ. С помощью допустимых преобразований координат можно добиться $g_{\alpha 4} = 0$ (см. А.З. Петров). Таким образом, можно показать, что сферически - симметричная метрика V_4 может быть записана в виде (см., например, Дж. Синг, Л.Д. Ландау):

$$ds^2 = c^2 dt^2 e^\nu - dr^2 e^\lambda - r^2 d\Omega^2, \qquad (10)$$

где $\nu(r, t), \lambda(r, t)$ – произвольные функции, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ – метрика 2-мерной сферы единичного радиуса. Докажите, что метрика (10) и векторы (9) удовлетворяют уравнениям Киллинга.

- Классификация полей тяготения по группам движений проведена А.З. Петровым и его учениками (см. А.З. Петров).
- Пусть гравитационное поле обладает сферической симметрией, т.е., соответствующее ему псевдориманово пространство V_4 допускает трехпараметрическую группу вращений G_3 на подпространстве V_3 – времениподобной гиперповерхности $V_3 \subset V_4$ (см. А.З. Петров, §61). Это означает, что существуют 3 пространственноподобных векторов Киллинга, которые в сферической системе координат (r, θ, φ, t) имеют вид

$$\underset{1}{\xi} = (0, \sin\varphi, \mathrm{ctg}\theta\cos\varphi, 0), \underset{2}{\xi} = (0, -\cos\varphi, \mathrm{ctg}\theta\sin\varphi, 0), \underset{3}{\xi} = (0, 0, -1, 0). \qquad (9)$$

- Можно непосредственно проинтегрировать уравнения Киллинга для этого случая. При этом необходимо учитывать, что мы всегда можем использовать допустимые преобразования координат, позволяющие упростить метрику. Так, например, подстановка третьего вектора (9) в уравнения Киллинга (7) сразу приводит к результату: $\partial_\varphi g_{ik} = 0$, т.е. метрический тензор не зависит от полярного угла φ. С помощью допустимых преобразований координат можно добиться $g_{\alpha 4} = 0$ (см. А.З. Петров). Таким образом, можно показать, что сферически - симметричная метрика V_4 может быть записана в виде (см., например, Дж. Синг, Л.Д. Ландау):

$$ds^2 = c^2 dt^2 e^\nu - dr^2 e^\lambda - r^2 d\Omega^2, \qquad (10)$$

где $\nu(r,t), \lambda(r,t)$ – произвольные функции, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ – метрика 2-мерной сферы единичного радиуса. Докажите, что метрика (10) и векторы (9) удовлетворяют уравнениям Киллинга.

- Классификация полей тяготения по группам движений проведена А.З. Петровым и его учениками (см. А.З. Петров).
- Пусть гравитационное поле обладает сферической симметрией, т.е., соответствующее ему псевдориманово пространство V_4 допускает трехпараметрическую группу вращений G_3 на подпространстве V_3 – времениподобной гиперповерхности $V_3 \subset V_4$ (см. А.З. Петров, §61). Это означает, что существуют 3 пространственноподобных векторов Киллинга, которые в сферической системе координат (r, θ, φ, t) имеют вид

$$\underset{1}{\xi} = (0, \sin\varphi, \mathrm{ctg}\theta\cos\varphi, 0), \underset{2}{\xi} = (0, -\cos\varphi, \mathrm{ctg}\theta\sin\varphi, 0), \underset{3}{\xi} = (0, 0, -1, 0). \qquad (9)$$

- Можно непосредственно проинтегрировать уравнения Киллинга для этого случая. При этом необходимо учитывать, что мы всегда можем использовать допустимые преобразования координат, позволяющие упростить метрику. Так, например, подстановка третьего вектора (9) в уравнения Киллинга (7) сразу приводит к результату: $\partial_\varphi g_{ik} = 0$, т.е. метрический тензор не зависит от полярного угла φ. С помощью допустимых преобразований координат можно добиться $g_{\alpha 4} = 0$ (см. А.З. Петров). Таким образом, можно показать, что сферически - симметричная метрика V_4 может быть записана в виде (см., например, Дж. Синг, Л.Д. Ландау):

$$ds^2 = c^2 dt^2 e^\nu - dr^2 e^\lambda - r^2 d\Omega^2, \qquad (10)$$

где $\nu(r,t), \lambda(r,t)$ – произвольные функции, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ – метрика 2-мерной сферы единичного радиуса. Докажите, что метрика (10) и векторы (9) удовлетворяют уравнениям Киллинга.

- Классификация полей тяготения по группам движений проведена А.З. Петровым и его учениками (см. А.З. Петров).
- Пусть гравитационное поле обладает сферической симметрией, т.е., соответствующее ему псевдориманово пространство V_4 допускает трехпараметрическую группу вращений G_3 на подпространстве V_3 – времениподобной гиперповерхности $V_3 \subset V_4$ (см. А.З. Петров, §61). Это означает, что существуют 3 пространственноподобных векторов Киллинга, которые в сферической системе координат (r, θ, φ, t) имеют вид

$$\underset{1}{\xi} = (0, \sin\varphi, \mathrm{ctg}\theta\cos\varphi, 0), \underset{2}{\xi} = (0, -\cos\varphi, \mathrm{ctg}\theta\sin\varphi, 0), \underset{3}{\xi} = (0, 0, -1, 0). \qquad (9)$$

- Можно непосредственно проинтегрировать уравнения Киллинга для этого случая. При этом необходимо учитывать, что мы всегда можем использовать допустимые преобразования координат, позволяющие упростить метрику. Так, например, подстановка третьего вектора (9) в уравнения Киллинга (7) сразу приводит к результату: $\partial_\varphi g_{ik} = 0$, т.е. метрический тензор не зависит от полярного угла φ. С помощью допустимых преобразований координат можно добиться $g_{\alpha 4} = 0$ (см. А.З. Петров). Таким образом, можно показать, что сферически - симметричная метрика V_4 может быть записана в виде (см., например, Дж. Синг, Л.Д. Ландау):

$$ds^2 = c^2 dt^2 \mathrm{e}^{\nu} - dr^2 e^{\lambda} - r^2 d\Omega^2, \qquad (10)$$

где $\nu(r,t), \lambda(r,t)$ – произвольные функции, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ – метрика 2-мерной сферы единичного радиуса. Докажите, что метрика (10) и векторы (9) удовлетворяют уравнениям Киллинга.

Вычисление метрических величин для сферической симметрии

- Вычисляя метрические величины относительно метрики (10), найдем (вычислить самостоятельно). Нетривиальные компоненты символов Кристоффеля 2-го рода (симметричные по нижним индексам символы Кристоффеля мы опускаем):

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda'; & \Gamma^1_{14} = \frac{1}{2}\dot\lambda; & \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}; \\ \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda}; & \Gamma^1_{44} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'; & \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \\ \Gamma^2_{23} = \mathrm{ctg}\theta; & \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta; & \\ \Gamma^4_{11} = \frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\dot\lambda & \Gamma^4_{14} = \frac{1}{2}\nu'; & \Gamma^4_{44} = \frac{1}{2}\dot\nu; \end{array} \qquad (11)$$

  где $\dot y \equiv \partial_t y;\ y' \equiv \partial_r y.$

- Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна (вычислить самостоятельно в Maple, не забывая о знаке), получим (см. Л.Д. Ландау) 4 нетривиальных уравнения Эйнштейна ($G^2_2 = G^3_3$):

$$\begin{array}{l} -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T^1_1; \quad -e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r} = \frac{8\pi G}{c^4}T^1_4; \\ -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot\lambda + \frac{\dot\lambda^2}{2} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T^2_2; \\ -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T^4_4. \end{array} \qquad (12)$$

- Вычисляя метрические величины относительно метрики (10), найдем (вычислить самостоятельно). Нетривиальные компоненты символов Кристоффеля 2-го рода (симметричные по нижним индексам символы Кристоффеля мы опускаем):

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda'; & \Gamma^1_{14} = \frac{1}{2}\dot{\lambda}; & \Gamma^1_{22} = -r\mathrm{e}^{-\lambda}; \\
\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\mathrm{e}^{-\lambda}; & \Gamma^1_{44} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'; & \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \\
\Gamma^2_{23} = \mathrm{ctg}\theta; & \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta; & \\
\Gamma^4_{11} = \frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\dot{\lambda} & \Gamma^4_{14} = \frac{1}{2}\nu'; & \Gamma^4_{44} = \frac{1}{2}\dot{\nu},
\end{array} \tag{11}$$

где $\dot{y} \equiv \partial_t y;\ y' \equiv \partial_r y$.

- Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна (вычислить самостоятельно в Maple, не забывая о знаке), получим (см. Л.Д. Ландау) 4 нетривиальных уравнения Эйнштейна ($G^2_2 = G^3_3$):

$$\begin{array}{l}
-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T^1_1; \qquad -e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} = \frac{8\pi G}{c^4}T^1_4; \\
-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T^2_2; \\
-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T^4_4.
\end{array} \tag{12}$$

- Вычисляя метрические величины относительно метрики (10), найдем (вычислить самостоятельно). Нетривиальные компоненты символов Кристоффеля 2-го рода (симметричные по нижним индексам символы Кристоффеля мы опускаем):

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda'; & \Gamma^1_{14} = \frac{1}{2}\dot{\lambda}; & \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}; \\ \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta \mathrm{e}^{-\lambda}; & \Gamma^1_{44} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'; & \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \\ \Gamma^2_{23} = \mathrm{ctg}\theta; & \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta; & \\ \Gamma^4_{11} = \frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\dot{\lambda} & \Gamma^4_{14} = \frac{1}{2}\nu'; & \Gamma^4_{44} = \frac{1}{2}\dot{\nu}, \end{array} \tag{11}$$

где $\dot{y} \equiv \partial_t y;\ y' \equiv \partial_r y$.

- Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна (вычислить самостоятельно в Maple, не забывая о знаке), получим (см. Л.Д. Ландау) 4 нетривиальных уравнения Эйнштейна ($G^2_2 = G^3_3$):

$$\begin{array}{l} -\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T^1_1; \quad -\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} = \frac{8\pi G}{c^4}T^1_4; \\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T^2_2; \\ -\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T^4_4. \end{array} \tag{12}$$

- Вычисляя метрические величины относительно метрики (10), найдем (вычислить самостоятельно). Нетривиальные компоненты символов Кристоффеля 2-го рода (симметричные по нижним индексам символы Кристоффеля мы опускаем):

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11}=\tfrac12\lambda'; && \Gamma^1_{14}=\tfrac12\dot\lambda; && \Gamma^1_{22}=-re^{-\lambda};\\
&\Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta e^{-\lambda}; && \Gamma^1_{44}=\tfrac12 e^{\nu-\lambda}\nu'; && \Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\tfrac{1}{r};\\
&\Gamma^2_{23}=\mathrm{ctg}\theta; && \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta; && \\
&\Gamma^4_{11}=\tfrac12 e^{\lambda-\nu}\dot\lambda && \Gamma^4_{14}=\tfrac12\nu'; && \Gamma^4_{44}=\tfrac12\dot\nu,
\end{aligned}\tag{11}$$

где $\dot y\equiv\partial_t y;\ y'\equiv\partial_r y.$

- Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна (вычислить самостоятельно в Maple, не забывая о знаке), получим (см. Л.Д. Ландау) 4 нетривиальных уравнения Эйнштейна ($G^2_2=G^3_3$):

$$\begin{aligned}
&-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=\frac{8\pi G}{c^4}T^1_1;\quad -e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r}=\frac{8\pi G}{c^4}T^1_4;\\
&-\frac12 e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}\right)+\frac12 e^{-\nu}\left(\ddot\lambda+\frac{\dot\lambda^2}{2}-\frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right)=\frac{8\pi G}{c^4}T^2_2;\\
&-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)+\frac{1}{r^2}=\frac{8\pi G}{c^4}T^4_4.
\end{aligned}\tag{12}$$

- Вычисляя метрические величины относительно метрики (10), найдем (вычислить самостоятельно). Нетривиальные компоненты символов Кристоффеля 2-го рода (симметричные по нижним индексам символы Кристоффеля мы опускаем):

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda'; & \Gamma^1_{14} = \frac{1}{2}\dot{\lambda}; & \Gamma^1_{22} = -r\mathrm{e}^{-\lambda}; \\ \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta \mathrm{e}^{-\lambda}; & \Gamma^1_{44} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'; & \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \\ \Gamma^2_{23} = \mathrm{ctg}\theta; & \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta; & \\ \Gamma^4_{11} = \frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\dot{\lambda} & \Gamma^4_{14} = \frac{1}{2}\nu'; & \Gamma^4_{44} = \frac{1}{2}\dot{\nu}, \end{array} \qquad (11)$$

где $\dot{y} \equiv \partial_t y;\ y' \equiv \partial_r y$.

- Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна (вычислить самостоятельно в Maple, не забывая о знаке), получим (см. Л.Д. Ландау) 4 нетривиальных уравнения Эйнштейна ($G^2_2 = G^3_3$):

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T^1_1; \quad -\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} = \frac{8\pi G}{c^4}T^1_4;$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^{\,2}}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T^2_2; \qquad (12)$$
$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T^4_4.$$

- Вычисляя ковариантную дивергенцию тензора Эйнштейна $\nabla_k G^k_i = 0$, мы получим с учетом (11) и (12):

$$\nabla_k G^k_1 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{ik} G^i_1 - \Gamma^i_{k1} G^k_i \equiv \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1 - \Gamma^2_{12} G^2_2 - \Gamma^3_{13} G^3_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{r} G^2_2 = \frac{2}{r} G^3_3 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1. \qquad (13)$$

- Таким образом, уравнения Эйнштейна $^2_2$ и $^3_3$ являются дифференциальными следствиями уравнений $^1_1, ^4_1, ^4_4$. В итоге мы имеем лишь 3 независимых уравнения Эйнштейна $^1_1, ^4_1, ^4_4$ на 2 функции метрические λ, ν и компоненты 3 соответствующие компоненты ТЭИ.
- Произведем преобразования в левой части четвертого уравнения (G^4_4) системы (12):

$$r^2 G^4_4 = e^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 \equiv (re^{-\lambda} - r)' = -\frac{8\pi G}{c^4} T^4_4 r^2. \qquad (14)$$

- Выберем систему координат квазигалилееву в центре, т.е., чтобы метрика была псевдоевклидовой в начале координат:

$$\lambda(0,t) = 0; \quad \nu(0,t) = 0. \qquad (15)$$

- Тогда, интегрируя (14) с условиями (15), найдем:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{r} \int_0^r T^4_4 r^2 dr. \qquad (16)$$

Интегрирование уравнений Эйнштейна для случая сферической симметрии

- Вычисляя ковариантную дивергенцию тензора Эйнштейна $\nabla_k G_i^k = 0$, мы получим с учетом (11) и (12):

$$\nabla_k G_1^k = \partial_1 G_1^1 + \partial_4 G_1^4 + \Gamma_{ik}^k G_1^i - \Gamma_{k1}^i G_i^k \equiv \partial_1 G_1^1 + \partial_4 G_1^4 + \Gamma_{1k}^k G_1^1 + \Gamma_{4k}^4 G_1^4 - \Gamma_{11}^1 G_1^1 - \Gamma_{12}^2 G_2^2 - \Gamma_{13}^3 G_3^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{r} G_2^2 = \frac{2}{r} G_3^3 = \partial_1 G_1^1 + \partial_4 G_1^4 + \Gamma_{1k}^k G_1^1 + \Gamma_{4k}^4 G_1^4 - \Gamma_{11}^1 G_1^1. \qquad (13)$$

- Таким образом, уравнения Эйнштейна $^2_2$ и $^3_3$ являются дифференциальными следствиями уравнений $^1_1, ^4_1, ^4_4$. В итоге мы имеем лишь 3 независимых уравнения Эйнштейна $^1_1, ^4_1, ^4_4$ на 2 функции метрические λ, ν и компоненты 3 соответствующие компоненты ТЭИ.
- Произведем преобразования в левой части четвертого уравнения (G_4^4) системы (12):

$$r^2 G_4^4 = e^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 \equiv (re^{-\lambda} - r)' = -\frac{8\pi G}{c^4} T_4^4 r^2. \qquad (14)$$

- Выберем систему координат квазигалилееву в центре, т.е., чтобы метрика была псевдоевклидовой в начале координат:

$$\lambda(0, t) = 0; \quad \nu(0, t) = 0. \qquad (15)$$

- Тогда, интегрируя (14) с условиями (15), найдем:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{r} \int_0^r T_4^4 r^2 dr. \qquad (16)$$

- Вычисляя ковариантную дивергенцию тензора Эйнштейна $\nabla_k G^k_i = 0$, мы получим с учетом (11) и (12):

$$\nabla_k G^k_1 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{ik} G^i_1 - \Gamma^i_{k1} G^k_i \equiv \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1 - \Gamma^2_{12} G^2_2 - \Gamma^3_{13} G^3_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{r} G^2_2 = \frac{2}{r} G^3_3 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1. \qquad (13)$$

- Таким образом, уравнения Эйнштейна $^2_2$ и $^3_3$ являются дифференциальными следствиями уравнений $^1_1, ^4_1, ^4_4$. В итоге мы имеем лишь 3 независимых уравнения Эйнштейна $^1_1, ^4_1, ^4_4$ на 2 функции метрические λ, ν и компоненты 3 соответствующие компоненты ТЭИ.
- Произведем преобразования в левой части четвертого уравнения (G^4_4) системы (12):

$$r^2 G^4_4 = e^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 \equiv (re^{-\lambda} - r)' = -\frac{8\pi G}{c^4} T^4_4 r^2. \qquad (14)$$

- Выберем систему координат квазигалилееву в центре, т.е., чтобы метрика была псевдоевклидовой в начале координат:
- Тогда, интегрируя (14) с условиями (15), найдем:

- Вычисляя ковариантную дивергенцию тензора Эйнштейна $\nabla_k G^k_i = 0$, мы получим с учетом (11) и (12):

$$\nabla_k G^k_1 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{ik} G^i_1 - \Gamma^i_{k1} G^k_i \equiv \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1 - \Gamma^2_{12} G^2_2 - \Gamma^3_{13} G^3_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{r} G^2_2 = \frac{2}{r} G^3_3 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1. \quad (13)$$

- Таким образом, уравнения Эйнштейна $\frac{2}{2}$ и $\frac{3}{3}$ являются дифференциальными следствиями уравнений $\frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{4}{4}$. В итоге мы имеем лишь 3 независимых уравнения Эйнштейна $\frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{4}{4}$ на 2 функции метрические λ, ν и компоненты 3 соответствующие компоненты ТЭИ.
- Произведем преобразования в левой части четвертого уравнения (G^4_4) системы (12):

$$r^2 G^4_4 = \mathrm{e}^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 \equiv \left(r\mathrm{e}^{-\lambda} - r\right)' = -\frac{8\pi G}{c^4} T^4_4 r^2. \quad (14)$$

- Выберем систему координат квазигалилееву в центре, т.е., чтобы метрика была псевдоевклидовой в начале координат:

$$\lambda(0,t) = 0; \quad \nu(0,t) = 0. \quad (15)$$

- Тогда, интегрируя (14) с условиями (15), найдем:

$$\boxed{\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4}\frac{1}{r}\int\limits_0^r T^4_4 r^2 dr} \quad (16)$$

- Вычисляя ковариантную дивергенцию тензора Эйнштейна $\nabla_k G^k_i = 0$, мы получим с учетом (11) и (12):

$$\nabla_k G^k_1 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{ik} G^i_1 - \Gamma^i_{k1} G^k_i \equiv \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1 - \Gamma^2_{12} G^2_2 - \Gamma^3_{13} G^3_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{r} G^2_2 = \frac{2}{r} G^3_3 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1. \qquad (13)$$

- Таким образом, уравнения Эйнштейна $^2_2$ и $^3_3$ являются дифференциальными следствиями уравнений $^1_1, ^4_1, ^4_4$. В итоге мы имеем лишь 3 независимых уравнения Эйнштейна $^1_1, ^4_1, ^4_4$ на 2 функции метрические λ, ν и компоненты 3 соответствующие компоненты ТЭИ.
- Произведем преобразования в левой части четвертого уравнения (G^4_4) системы (12):

$$r^2 G^4_4 = \mathrm{e}^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 \equiv \left(r\mathrm{e}^{-\lambda} - r\right)' = -\frac{8\pi G}{c^4} T^4_4 r^2. \qquad (14)$$

- Выберем систему координат квазигалилееву в центре, т.е., чтобы метрика была псевдоевклидовой в начале координат:

$$\lambda(0,t) = 0; \quad \nu(0,t) = 0. \qquad (15)$$

- Тогда, интегрируя (14) с условиями (15), найдем:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4}\frac{1}{r}\int_0^r \varepsilon r^2 dr. \qquad (16)$$

- Вычисляя ковариантную дивергенцию тензора Эйнштейна $\nabla_k G^k_i = 0$, мы получим с учетом (11) и (12):

$$\nabla_k G^k_1 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{ik} G^i_1 - \Gamma^i_{k1} G^k_i \equiv \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1 - \Gamma^2_{12} G^2_2 - \Gamma^3_{13} G^3_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{r} G^2_2 = \frac{2}{r} G^3_3 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1. \qquad (13)$$

- Таким образом, уравнения Эйнштейна ${}^2_2$ и ${}^3_3$ являются дифференциальными следствиями уравнений ${}^1_1, {}^4_1, {}^4_4$. В итоге мы имеем лишь 3 независимых уравнения Эйнштейна ${}^1_1, {}^4_1, {}^4_4$ на 2 функции метрические λ, ν и компоненты 3 соответствующие компоненты ТЭИ.
- Произведем преобразования в левой части четвертого уравнения (G^4_4) системы (12):

$$r^2 G^4_4 = \mathrm{e}^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 \equiv \left(r\mathrm{e}^{-\lambda} - r\right)' = -\frac{8\pi G}{c^4} T^4_4 r^2. \qquad (14)$$

- Выберем систему координат квазигалилееву в центре, т.е., чтобы метрика была псевдоевклидовой в начале координат:

$$\lambda(0,t) = 0; \quad \nu(0,t) = 0. \qquad (15)$$

- Тогда, интегрируя (14) с условиями (15), найдем:

Интегрирование уравнений Эйнштейна для случая сферической симметрии

- Вычисляя ковариантную дивергенцию тензора Эйнштейна $\nabla_k G^k_i = 0$, мы получим с учетом (11) и (12):

$$\nabla_k G^k_1 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{ik} G^i_1 - \Gamma^i_{k1} G^k_i \equiv \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1 - \Gamma^2_{12} G^2_2 - \Gamma^3_{13} G^3_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{r} G^2_2 = \frac{2}{r} G^3_3 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1. \tag{13}$$

- Таким образом, уравнения Эйнштейна $^2_2$ и $^3_3$ являются дифференциальными следствиями уравнений $^1_1, ^4_1, ^4_4$. В итоге мы имеем лишь 3 независимых уравнения Эйнштейна $^1_1, ^4_1, ^4_4$ на 2 функции метрические λ, ν и компоненты 3 соответствующие компоненты ТЭИ.
- Произведем преобразования в левой части четвертого уравнения (G^4_4) системы (12):

$$r^2 G^4_4 = \mathrm{e}^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 \equiv \left(r\mathrm{e}^{-\lambda} - r\right)' = -\frac{8\pi G}{c^4} T^4_4 r^2. \tag{14}$$

- Выберем систему координат квазигалилееву в центре, т.е., чтобы метрика была псевдоевклидовой в начале координат:

$$\lambda(0,t) = 0; \quad \nu(0,t) = 0. \tag{15}$$

- Тогда, интегрируя (14) с условиями (15), найдем:

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{r} \int\limits_0^r T^4_4 r^2 dr. \tag{16}$$

Интегрирование уравнений Эйнштейна для случая сферической симметрии

- Вычисляя ковариантную дивергенцию тензора Эйнштейна $\nabla_k G^k_i = 0$, мы получим с учетом (11) и (12):

$$\nabla_k G^k_1 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{ik} G^i_1 - \Gamma^i_{k1} G^k_i \equiv \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1 - \Gamma^2_{12} G^2_2 - \Gamma^3_{13} G^3_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{r} G^2_2 = \frac{2}{r} G^3_3 = \partial_1 G^1_1 + \partial_4 G^4_1 + \Gamma^k_{1k} G^1_1 + \Gamma^4_{4k} G^4_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1. \qquad (13)$$

- Таким образом, уравнения Эйнштейна $^2_2$ и $^3_3$ являются дифференциальными следствиями уравнений $^1_1, ^4_1, ^4_4$. В итоге мы имеем лишь 3 независимых уравнения Эйнштейна $^1_1, ^4_1, ^4_4$ на 2 функции метрические λ, ν и компоненты 3 соответствующие компоненты ТЭИ.
- Произведем преобразования в левой части четвертого уравнения (G^4_4) системы (12):

$$r^2 G^4_4 = \mathrm{e}^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 \equiv \left(r\mathrm{e}^{-\lambda} - r\right)' = -\frac{8\pi G}{c^4} T^4_4 r^2. \qquad (14)$$

- Выберем систему координат квазигалилееву в центре, т.е., чтобы метрика была псевдоевклидовой в начале координат:

$$\lambda(0,t) = 0; \quad \nu(0,t) = 0. \qquad (15)$$

- Тогда, интегрируя (14) с условиями (15), найдем:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{r} \int\limits_0^r T^4_4 r^2 dr. \qquad (16)$$

- Вычисляя ковариантную дивергенцию тензора Эйнштейна $\nabla_k G_i^k = 0$, мы получим с учетом (11) и (12):

$$\nabla_k G_1^k = \partial_1 G_1^1 + \partial_4 G_1^4 + \Gamma_{ik}^k G_1^i - \Gamma_{k1}^i G_i^k \equiv \partial_1 G_1^1 + \partial_4 G_1^4 + \Gamma_{1k}^k G_1^1 + \Gamma_{4k}^4 G_1^4 - \Gamma_{11}^1 G_1^1 - \Gamma_{12}^2 G_2^2 - \Gamma_{13}^3 G_3^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{r} G_2^2 = \frac{2}{r} G_3^3 = \partial_1 G_1^1 + \partial_4 G_1^4 + \Gamma_{1k}^k G_1^1 + \Gamma_{4k}^4 G_1^4 - \Gamma_{11}^1 G_1^1. \qquad (13)$$

- Таким образом, уравнения Эйнштейна $\frac{2}{2}$ и $\frac{3}{3}$ являются дифференциальными следствиями уравнений $\frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{4}{4}$. В итоге мы имеем лишь 3 независимых уравнения Эйнштейна $\frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{4}{4}$ на 2 функции метрические λ, ν и компоненты 3 соответствующие компоненты ТЭИ.
- Произведем преобразования в левой части четвертого уравнения (G_4^4) системы (12):

$$r^2 G_4^4 = \mathrm{e}^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1 \equiv \left(r\mathrm{e}^{-\lambda} - r\right)' = -\frac{8\pi G}{c^4} T_4^4 r^2. \qquad (14)$$

- Выберем систему координат квазигалилееву в центре, т.е., чтобы метрика была псевдоевклидовой в начале координат:

$$\lambda(0,t) = 0; \quad \nu(0,t) = 0. \qquad (15)$$

- Тогда, интегрируя (14) с условиями (15), найдем:

$$\boxed{e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{r} \int\limits_0^r T_4^4 r^2 dr. \qquad (16)}$$

- Полагая найденной функцию $\lambda(r,t)$, интегрируя первое уравнение из системы (12) относительно ν с учетом условий (15), найдем:

$$\nu = \int\limits_0^r \left(\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{\lambda}-1) - \frac{8\pi G}{c^4}T_1^1 r\mathrm{e}^{\lambda}\right) dr. \qquad (17)$$

- Для дальнейшего интегрирования уравнений необходимо определить компоненты T_1^1 и T_4^4 тензора энергии - импульса материи. Не конкретизируя пока материальную среду, заметим, что у нас имеется еще одно дифференциальное следствие уравнений Эйнштейна (12):

$$\nabla_k T_4^k = 0 \Rightarrow \partial_t T_4^4 + \partial_r T_4^1 + \frac{\nu'+\lambda'}{2}T_4^1 + \frac{2}{r}T_4^1 + \frac{\dot\lambda}{2}(T_4^4 - T_1^1) = 0. \qquad (18)$$

Фактически (18) представляет закон сохранения энергии-импульса.

- Рассмотрим теперь в качестве материи идеальную жидкость:

$$T_k^i = (\varepsilon + P)u^i u_k - \delta_k^i P; \qquad u^i = (u, 0, 0, u^4); (u,u) = 1, \qquad (19)$$

$$\Rightarrow u^4 = \mathrm{e}^{-\nu/2}\sqrt{1+\mathrm{e}^{\lambda}u^2}; \qquad (u \equiv u^1).$$

$$T_1^1 = -P - \mathrm{e}^{-\lambda}u^2(\varepsilon + p); \quad T_4^1 = ue^{\nu/2}\sqrt{1+e^{\lambda}u^2}(\varepsilon + P); \qquad (20)$$

$$T_4^4 = \varepsilon(1+u^2e^{\lambda}) - Pu^2e^{\lambda}. \qquad (21)$$

- Подставляя компоненты (19) в закон сохранения энергии (18) при заданном уравнении $P = P(\varepsilon)$ мы получим уравнение на функции ε и u. Из второго уравнения системы (12) найдем скорость $u(r,t)$. Таким образом, (18)) станет замкнутым дифференциальным уравнением в частных производных относительно плотности энергии $\varepsilon(r,t)$.

Интегрирование уравнений Эйнштейна для случая сферической симметрии

- Полагая найденной функцию $\lambda(r,t)$, интегрируя первое уравнение из системы (12) относительно ν с учетом условий (15), найдем:

$$\nu = \int\limits_0^r \left(\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{\lambda}-1) - \frac{8\pi G}{c^4}T_1^1 r\mathrm{e}^{\lambda}\right) dr. \quad (17)$$

- Для дальнейшего интегрирования уравнений необходимо определить компоненты T_1^1 и T_4^4 тензора энергии - импульса материи. Не конкретизируя пока материальную среду, заметим, что у нас имеется еще одно дифференциальное следствие уравнений Эйнштейна (12):

$$\nabla_k T_4^k = 0 \Rightarrow \partial_t T_4^4 + \partial_r T_4^1 + \frac{\nu' + \lambda'}{2}T_4^1 + \frac{2}{r}T_4^1 + \frac{\dot{\lambda}}{2}(T_4^4 - T_1^1) = 0. \quad (18)$$

Фактически (18) представляет закон сохранения энергии-импульса.

- Рассмотрим теперь в качестве материи идеальную жидкость:

$$T_k^i = (\varepsilon + P)u^i u_k - \delta_k^i P; \qquad u^i = (u,0,0,u^4); (u,u) = 1, \quad (19)$$

$$\Rightarrow u^4 = \mathrm{e}^{-\nu/2}\sqrt{1+\mathrm{e}^{\lambda}u^2}; \qquad (u \equiv u^1).$$

$$T_1^1 = -P - \mathrm{e}^{-\lambda}u^2(\varepsilon + p); \quad T_4^1 = ue^{\nu/2}\sqrt{1+e^{\lambda}u^2}(\varepsilon + P); \quad (20)$$

$$T_4^4 = \varepsilon(1+u^2e^{\lambda}) - Pu^2e^{\lambda}. \quad (21)$$

- Подставляя компоненты (19) в закон сохранения энергии (18) при заданном уравнении $P = P(\varepsilon)$ мы получим уравнение на функции ε и u. Из второго уравнения системы (12) найдем скорость $u(r,t)$. Таким образом, (18)) станет замкнутым дифференциальным уравнением в частных производных относительно плотности энергии $\varepsilon(r,t)$.

Интегрирование уравнений Эйнштейна для случая сферической симметрии

- Полагая найденной функцию $\lambda(r,t)$, интегрируя первое уравнение из системы (12) относительно ν с учетом условий (15), найдем:

$$\boxed{\nu = \int\limits_0^r \left(\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{\lambda} - 1) - \frac{8\pi G}{c^4} T^1_1 r \mathrm{e}^{\lambda} \right) dr. \qquad (17)}$$

- Для дальнейшего интегрирования уравнений необходимо определить компоненты T^1_1 и T^4_4 тензора энергии - импульса материи. Не конкретизируя пока материальную среду, заметим, что у нас имеется еще одно дифференциальное следствие уравнений Эйнштейна (12):

$$\nabla_k T^k_4 = 0 \Rightarrow \partial_t T^4_4 + \partial_r T^1_4 + \frac{\nu' + \lambda'}{2} T^1_4 + \frac{2}{r} T^1_4 + \frac{\dot{\lambda}}{2}(T^4_4 - T^1_1) = 0. \qquad (18)$$

Фактически (18) представляет закон сохранения энергии-импульса.

- Рассмотрим теперь в качестве материи идеальную жидкость:

$$T^i_k = (\varepsilon + P) u^i u_k - \delta^i_k P; \qquad u^i = (u, 0, 0, u^4); (u,u) = 1, \qquad (19)$$

$$\Rightarrow u^4 = \mathrm{e}^{-\nu/2}\sqrt{1 + \mathrm{e}^{\lambda} u^2}; \qquad (u \equiv u^1).$$

$$T^1_1 = -P - \mathrm{e}^{-\lambda} u^2 (\varepsilon + p); \quad T^1_4 = u e^{\nu/2}\sqrt{1 + e^{\lambda} u^2}(\varepsilon + P); \qquad (20)$$

$$T^4_4 = \varepsilon(1 + u^2 e^{\lambda}) - P u^2 e^{\lambda}. \qquad (21)$$

- Подставляя компоненты (19) в закон сохранения энергии (18) при заданном уравнении $P = P(\varepsilon)$ мы получим уравнение на функции ε и u. Из второго уравнения системы (12) найдем скорость $u(r,t)$. Таким образом, (18)) станет замкнутым дифференциальным уравнением в частных производных относительно плотности энергии $\varepsilon(r,t)$.

- Полагая найденной функцию $\lambda(r,t)$, интегрируя первое уравнение из системы (12) относительно ν с учетом условий (15), найдем:

$$\nu = \int\limits_0^r \left(\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{\lambda} - 1) - \frac{8\pi G}{c^4} T_1^1 r \mathrm{e}^{\lambda}\right) dr. \qquad (17)$$

- Для дальнейшего интегрирования уравнений необходимо определить компоненты T_1^1 и T_4^4 тензора энергии - импульса материи. Не конкретизируя пока материальную среду, заметим, что у нас имеется еще одно дифференциальное следствие уравнений Эйнштейна (12):

$$\nabla_k T_4^k = 0 \Rightarrow \partial_t T_4^4 + \partial_r T_4^1 + \frac{\nu' + \lambda'}{2} T_4^1 + \frac{2}{r} T_4^1 + \frac{\dot{\lambda}}{2}(T_4^4 - T_1^1) = 0. \qquad (18)$$

Фактически (18) представляет закон сохранения энергии-импульса.

- Рассмотрим теперь в качестве материи идеальную жидкость:

$$T_k^i = (\varepsilon + P)u^i u_k - \delta_k^i P; \qquad u^i = (u, 0, 0, u^4); (u, u) = 1, \qquad (19)$$

$$\Rightarrow u^4 = \mathrm{e}^{-\nu/2}\sqrt{1 + \mathrm{e}^{\lambda} u^2}; \qquad (u \equiv u^1).$$

$$T_1^1 = -P - \mathrm{e}^{-\lambda} u^2 (\varepsilon + p); \quad T_4^1 = u e^{\nu/2}\sqrt{1 + e^{\lambda} u^2}(\varepsilon + P); \qquad (20)$$

$$T_4^4 = \varepsilon(1 + u^2 e^{\lambda}) - P u^2 e^{\lambda}. \qquad (21)$$

- Подставляя компоненты (19) в закон сохранения энергии (18) при заданном уравнении $P = P(\varepsilon)$ мы получим уравнение на функции ε и u. Из второго уравнения системы (12) найдем скорость $u(r,t)$. Таким образом, (18)) станет замкнутым дифференциальным уравнением в частных производных относительно плотности энергии $\varepsilon(r,t)$.

- Полагая найденной функцию $\lambda(r,t)$, интегрируя первое уравнение из системы (12) относительно ν с учетом условий (15), найдем:

$$\nu = \int\limits_0^r \left(\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{\lambda}-1) - \frac{8\pi G}{c^4}T^1_1 r\mathrm{e}^{\lambda}\right)dr. \qquad (17)$$

- Для дальнейшего интегрирования уравнений необходимо определить компоненты T^1_1 и T^4_4 тензора энергии - импульса материи. Не конкретизируя пока материальную среду, заметим, что у нас имеется еще одно дифференциальное следствие уравнений Эйнштейна (12):

$$\nabla_k T^k_4 = 0 \Rightarrow \partial_t T^4_4 + \partial_r T^1_4 + \frac{\nu'+\lambda'}{2}T^1_4 + \frac{2}{r}T^1_4 + \frac{\dot\lambda}{2}(T^4_4 - T^1_1) = 0. \qquad (18)$$

Фактически (18) представляет закон сохранения энергии-импульса.
- Рассмотрим теперь в качестве материи идеальную жидкость:

$$T^i_k = (\varepsilon+P)u^i u_k - \delta^i_k P; \qquad u^i = (u,0,0,u^4); (u,u) = 1, \qquad (19)$$

$$\Rightarrow u^4 = \mathrm{e}^{-\nu/2}\sqrt{1+\mathrm{e}^{\lambda}u^2}; \qquad (u \equiv u^1).$$

$$T^1_1 = -P - \mathrm{e}^{-\lambda}u^2(\varepsilon+p); \quad T^1_4 = ue^{\nu/2}\sqrt{1+e^{\lambda}u^2}(\varepsilon+P); \qquad (20)$$

$$T^4_4 = \varepsilon(1+u^2e^{\lambda}) - Pu^2e^{\lambda}. \qquad (21)$$

- Подставляя компоненты (19) в закон сохранения энергии (18) при заданном уравнении $P = P(\varepsilon)$ мы получим уравнение на функции ε и u. Из второго уравнения системы (12) найдем скорость $u(r,t)$. Таким образом, (18)) станет замкнутым дифференциальным уравнением в частных производных относительно плотности энергии $\varepsilon(r,t)$.

- Рассмотрим статический случай $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$. Тогда из второго уравнения системы (12) сразу получим $T_4^1 = 0 \Rightarrow u = 0$. Тогда из (19) получим $T_1^1 = -P$, $T_4^4 = \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что закон сохранения энергии (18) тождественно удовлетворяется.
- Вводя в (16) функцию полной массы шара радиуса r:

$$\boxed{M(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon(r) r^2 dr,} \tag{22}$$

получим для (16):

$$\boxed{e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{rc^4}} \tag{23}$$

- Функция $M(r)$ определяется с помощью интеграла от плотности энергии $\varepsilon(r)$. Для нахождения плотности энергии можно использовать следствие уравнений Эйнштейна $\nabla_k T_1^k = 0$, которое для статического случая принимает вид (вычислить самостоятельно):

$$\frac{1}{2}\nu'(\varepsilon + P(\varepsilon)) + P' = 0 \Rightarrow \int \frac{dP}{\varepsilon + P} = -\frac{1}{2}\nu + \mathrm{Const.} \tag{24}$$

При заданном уравнении состояния $P = P(\varepsilon)$ уравнение (24) всегда интегрируется.

- Рассмотрим статический случай $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$. Тогда из второго уравнения системы (12) сразу получим $T^1_4 = 0 \Rightarrow u = 0$. Тогда из (19) получим $T^1_1 = -P$, $T^4_4 = \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что закон сохранения энергии (18) тождественно удовлетворяется.
- Вводя в (16) функцию полной массы шара радиуса r:

$$M(r) = 4\pi \int\limits_0^r \varepsilon(r) r^2 dr, \tag{22}$$

получим для (16):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{rc^4} \tag{23}$$

- Функция $M(r)$ определяется с помощью интеграла от плотности энергии $\varepsilon(r)$. Для нахождения плотности энергии можно использовать следствие уравнений Эйнштейна $\nabla_k T^k_1 = 0$, которое для статического случая принимает вид (вычислить самостоятельно):

$$\frac{1}{2}\nu'(\varepsilon + P(\varepsilon)) + P' = 0 \Rightarrow \int \frac{dP}{\varepsilon + P} = -\frac{1}{2}\nu + \mathrm{Const}. \tag{24}$$

При заданном уравнении состояния $P = P(\varepsilon)$ уравнение (24) всегда интегрируется.

Статическое решение для случая сферической симметрии

- Рассмотрим статический случай $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$. Тогда из второго уравнения системы (12) сразу получим $T^1_4 = 0 \Rightarrow u = 0$. Тогда из (19) получим $T^1_1 = -P$, $T^4_4 = \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что закон сохранения энергии (18) тождественно удовлетворяется.
- Вводя в (16) функцию полной массы шара радиуса r:

$$M(r) = 4\pi \int\limits_0^r \varepsilon(r) r^2 dr, \tag{22}$$

получим для (16):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{rc^4} \tag{23}$$

- Функция $M(r)$ определяется с помощью интеграла от плотности энергии $\varepsilon(r)$. Для нахождения плотности энергии можно использовать следствие уравнений Эйнштейна $\nabla_k T^k_1 = 0$, которое для статического случая принимает вид (вычислить самостоятельно):

$$\frac{1}{2}\nu'(\varepsilon + P(\varepsilon)) + P' = 0 \Rightarrow \int \frac{dP}{\varepsilon + P} = -\frac{1}{2}\nu + \mathrm{Const}. \tag{24}$$

При заданном уравнении состояния $P = P(\varepsilon)$ уравнение (24) всегда интегрируется.

Статическое решение для случая сферической симметрии

- Рассмотрим статический случай $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$. Тогда из второго уравнения системы (12) сразу получим $T_4^1 = 0 \Rightarrow u = 0$. Тогда из (19) получим $T_1^1 = -P$, $T_4^4 = \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что закон сохранения энергии (18) тождественно удовлетворяется.
- Вводя в (16) функцию полной массы шара радиуса r:

$$M(r) = 4\pi \int\limits_0^r \varepsilon(r) r^2 dr, \tag{22}$$

получим для (16):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{rc^4} \tag{23}$$

- Функция $M(r)$ определяется с помощью интеграла от плотности энергии $\varepsilon(r)$. Для нахождения плотности энергии можно использовать следствие уравнений Эйнштейна $\nabla_k T_1^k = 0$, которое для статического случая принимает вид (вычислить самостоятельно):

$$\frac{1}{2}\nu'(\varepsilon + P(\varepsilon)) + P' = 0 \Rightarrow \int \frac{dP}{\varepsilon + P} = -\frac{1}{2}\nu + \mathrm{Const.} \tag{24}$$

При заданном уравнении состояния $P = P(\varepsilon)$ уравнение (24) всегда интегрируется.

Статическое решение для случая сферической симметрии

- Рассмотрим статический случай $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$. Тогда из второго уравнения системы (12) сразу получим $T^1_4 = 0 \Rightarrow u = 0$. Тогда из (19) получим $T^1_1 = -P$, $T^4_4 = \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что закон сохранения энергии (18) тождественно удовлетворяется.
- Вводя в (16) функцию полной массы шара радиуса r:

$$M(r) = 4\pi \int\limits_0^r \varepsilon(r) r^2 dr, \qquad (22)$$

получим для (16):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{rc^4} \qquad (23)$$

- Функция $M(r)$ определяется с помощью интеграла от плотности энергии $\varepsilon(r)$. Для нахождения плотности энергии можно использовать следствие уравнений Эйнштейна $\nabla_k T^k_1 = 0$, которое для статического случая принимает вид (вычислить самостоятельно):

$$\frac{1}{2}\nu'(\varepsilon + P(\varepsilon)) + P' = 0 \Rightarrow \int \frac{dP}{\varepsilon + P} = -\frac{1}{2}\nu + \mathrm{Const}. \qquad (24)$$

При заданном уравнении состояния $P = P(\varepsilon)$ уравнение (24) всегда интегрируется.

- Рассмотрим статический случай $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$. Тогда из второго уравнения системы (12) сразу получим $T_4^1 = 0 \Rightarrow u = 0$. Тогда из (19) получим $T_1^1 = -P$, $T_4^4 = \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что закон сохранения энергии (18) тождественно удовлетворяется.
- Вводя в (16) функцию полной массы шара радиуса r:

$$M(r) = 4\pi \int\limits_0^r \varepsilon(r) r^2 dr, \tag{22}$$

получим для (16):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{rc^4} \tag{23}$$

- Функция $M(r)$ определяется с помощью интеграла от плотности энергии $\varepsilon(r)$. Для нахождения плотности энергии можно использовать следствие уравнений Эйнштейна $\nabla_k T_1^k = 0$, которое для статического случая принимает вид (вычислить самостоятельно):

$$\frac{1}{2}\nu'(\varepsilon + P(\varepsilon)) + P' = 0 \Rightarrow \int \frac{dP}{\varepsilon + P} = -\frac{1}{2}\nu + \mathrm{Const}. \tag{24}$$

При заданном уравнении состояния $P = P(\varepsilon)$ уравнение (24) всегда интегрируется.

- Рассмотрим решение уравнений в пустоте вне шара радиуса R и полной массы $M(R) \equiv M_0$, которое можно получить из решения (23), полагая $M = M(r), r \leq R$ и $M(r) = M_0, r > R$ (т.е., $\varepsilon = 0, r > R$):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2r_g}{r}, \quad (r > R); \tag{25}$$

$$r_g \equiv \frac{M_0 G}{c^4}. \tag{26}$$

- Тогда с учетом $T^1_1(r) = 0, r > R$ получим для решения (17)[1]

$$\nu(r) = \nu(R) + \int\limits_R^r \left(\frac{1}{r - 2r_g} - \frac{1}{r}\right) dr$$

$$e^{\nu} = \frac{1}{1 - \frac{2r_g}{r}}; \Rightarrow e^{\lambda} = 1 - \frac{2r_g}{r}. \tag{27}$$

- Таким образом, в пустоте получаем решение Шварцшильда:

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2\left(1 - \frac{2r_g}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2}$$

- Легко увидеть, что при $r_g/r \to 0$ решение Шварцшильда переходит в полученное ранее решение линейных уравнений Эйнштейна.

[1] *Поскольку м ищем решение в пустоте, интеграл (17) вычисляем в пределах $[R, r]$.*

Решение Шваршильда

- Рассмотрим решение уравнений в пустоте вне шара радиуса R и полной массы $M(R) \equiv M_0$, которое можно получить из решения (23), полагая $M = M(r), r \leq R$ и $M(r) = M_0, r > R$ (т.е., $\varepsilon = 0, r > R$):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2r_g}{r}, \quad (r > R); \tag{25}$$

$$r_g \equiv \frac{M_0 G}{c^4}. \tag{26}$$

- Тогда с учетом $T_1^1(r) = 0, r > R$ получим для решения (17)[1]

$$\nu(r) = \nu(R) + \int\limits_R^r \left(\frac{1}{r - 2r_g} - \frac{1}{r} \right) dr$$

$$e^{\nu} = \frac{1}{1 - \frac{2r_g}{r}}; \Rightarrow e^{\lambda} = 1 - \frac{2r_g}{r}. \tag{27}$$

- Таким образом, в пустоте получаем решение Шварцшильда:

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2 \quad (28)}$$

- Легко увидеть, что при $r_g/r \to 0$ решение Шварцшильда переходит в полученное ранее решение линейных уравнений Эйнштейна.

[1] *Поскольку м ищем решение в пустоте, интеграл (17) вычисляем в пределах $[R, r]$.*

- Рассмотрим решение уравнений в пустоте вне шара радиуса R и полной массы $M(R) \equiv M_0$, которое можно получить из решения (23), полагая $M = M(r), r \leq R$ и $M(r) = M_0, r > R$ (т.е., $\varepsilon = 0, r > R$):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2r_g}{r}, \quad (r > R); \tag{25}$$

$$r_g \equiv \frac{M_0 G}{c^4}. \tag{26}$$

- Тогда с учетом $T_1^1(r) = 0, r > R$ получим для решения (17)[1]

$$\nu(r) = \nu(R) + \int\limits_R^r \left(\frac{1}{r - 2r_g} - \frac{1}{r}\right) dr$$

$$e^{\nu} = \frac{1}{1 - \frac{2r_g}{r}}; \Rightarrow e^{\lambda} = 1 - \frac{2r_g}{r}. \tag{27}$$

- Таким образом, в пустоте получаем решение Шварцшильда:

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2.} \tag{28}$$

- Легко увидеть, что при $r_g/r \to 0$ решение Шварцшильда переходит в полученное ранее решение линейных уравнений Эйнштейна.

[1] *Поскольку м ищем решение в пустоте, интеграл (17) вычисляем в пределах* $[R, r]$.

- Рассмотрим решение уравнений в пустоте вне шара радиуса R и полной массы $M(R) \equiv M_0$, которое можно получить из решения (23), полагая $M = M(r), r \leq R$ и $M(r) = M_0, r > R$ (т.е., $\varepsilon = 0, r > R$):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2r_g}{r}, \quad (r > R); \tag{25}$$

$$r_g \equiv \frac{M_0 G}{c^4}. \tag{26}$$

- Тогда с учетом $T_1^1(r) = 0, r > R$ получим для решения (17)[1]

$$\nu(r) = \nu(R) + \int\limits_R^r \left(\frac{1}{r - 2r_g} - \frac{1}{r}\right) dr$$

$$e^{\nu} = \frac{1}{1 - \frac{2r_g}{r}}; \Rightarrow e^{\lambda} = 1 - \frac{2r_g}{r}. \tag{27}$$

- Таким образом, в пустоте получаем решение Шварцшильда:

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2. \tag{28}$$

- Легко увидеть, что при $r_g/r \to 0$ решение Шварцшильда переходит в полученное ранее решение линейных уравнений Эйнштейна.

[1] *Поскольку м ищем решение в пустоте, интеграл (17) вычисляем в пределах* $[R, r]$.

- Рассмотрим решение уравнений в пустоте вне шара радиуса R и полной массы $M(R) \equiv M_0$, которое можно получить из решения (23), полагая $M = M(r), r \leq R$ и $M(r) = M_0, r > R$ (т.е., $\varepsilon = 0, r > R$):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2r_g}{r}, \quad (r > R); \tag{25}$$

$$r_g \equiv \frac{M_0 G}{c^4}. \tag{26}$$

- Тогда с учетом $T_1^1(r) = 0, r > R$ получим для решения (17)[1]

$$\nu(r) = \nu(R) + \int\limits_R^r \left(\frac{1}{r - 2r_g} - \frac{1}{r}\right) dr$$

$$e^{\nu} = \frac{1}{1 - \frac{2r_g}{r}}; \Rightarrow e^{\lambda} = 1 - \frac{2r_g}{r}. \tag{27}$$

- Таким образом, в пустоте получаем решение Шварцшильда:

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2. \quad (28)}$$

- Легко увидеть, что при $r_g/r \to 0$ решение Шварцшильда переходит в полученное ранее решение линейных уравнений Эйнштейна.

[1] *Поскольку м ищем решение в пустоте, интеграл (17) вычисляем в пределах* $[R, r]$.

- Рассмотрим решение уравнений в пустоте вне шара радиуса R и полной массы $M(R) \equiv M_0$, которое можно получить из решения (23), полагая $M = M(r), r \leq R$ и $M(r) = M_0, r > R$ (т.е., $\varepsilon = 0, r > R$):

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2r_g}{r}, \quad (r > R); \tag{25}$$

$$r_g \equiv \frac{M_0 G}{c^4}. \tag{26}$$

- Тогда с учетом $T_1^1(r) = 0, r > R$ получим для решения (17)[1]

$$\nu(r) = \nu(R) + \int\limits_R^r \left(\frac{1}{r - 2r_g} - \frac{1}{r}\right) dr$$

$$e^{\nu} = \frac{1}{1 - \frac{2r_g}{r}}; \Rightarrow e^{\lambda} = 1 - \frac{2r_g}{r}. \tag{27}$$

- Таким образом, в пустоте получаем решение Шварцшильда:

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2.} \tag{28}$$

- Легко увидеть, что при $r_g/r \to 0$ решение Шварцшильда переходит в полученное ранее решение линейных уравнений Эйнштейна.

[1] *Поскольку м ищем решение в пустоте, интеграл (17) вычисляем в пределах* $[R, r]$.