Р. Г. Салахудинов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, rsalakhud@ygmail.com

ОЦЕНКИ ОДНОГО КЛАССА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть G — односвязная область на плоскости, $\rho(x,G)$ — функция расстояния от точки $x(\in G)$ до границы области G и $\boldsymbol{\rho}(G) := \sup_{x\in G}\rho(x,G)$. Рассмотрим класс геометрических функционалов

$$\int_G F(\rho(x,G))\mathrm{dA},$$

где $F(t)$ некоторая функция, определенная на $[0,\ \boldsymbol{\rho}(G)]$. В частности, при $F(t)=t^p$, $(p>0)$ получим степенные евклидовые моменты области относительно своей границы, находящие приложения в математической физике (см. [1], [2]). Степенной момент порядка p будем обозначать через $\mathbf{I}_p(G)$.

Экстремальную область в неравенстве Боннезена

$$\boldsymbol{L}(G)^2 - 4\pi\mathbf{A}(G) \geqslant (\boldsymbol{L}(G) - 2\pi\boldsymbol{\rho}(G))^2$$

будем называть областью типа Боннезена. Хорошо известно, что они образуют двухпараметрическое семейство. Пусть

$$M(t) := p\int\limits_0^t s^{p-1}m(s)\mathrm{d}s,$$

где $p>0$ и $m(s)$ — функция, необходимые свойства которой будут определены ниже.

Теорема 1. *Пусть G — односвязная область, такая, что $\mathbf{I}_p(G)<+\infty$ $(p>0)$. Тогда*
1) *Если $m(s)$ неубывающая функция, то*

$$\int_G M(\rho(x,G))\,\mathrm{dA} \leqslant (p+1)\left(\frac{\mathbf{I}_p(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}} + \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)}{p+2}\right)\int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} M(s)\mathrm{d}s - 2\pi\int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} sM(s)\mathrm{d}s,$$

2) *Если $m(s)$ не возрастающая функция, то имеет место обратное неравенство*

$$\int_G M(\rho(x,G))\,\mathrm{dA} \geqslant (p{+}1)\left(\frac{\mathbf{I}_p(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}}+\frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)}{p+2}\right)\int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} M(s)\mathrm{d}s - 2\pi\int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} sM(s)\mathrm{d}s,$$

Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда область G совпадает с областью типа Боннезена.

Теорема 2. *Пусть G — односвязная область, такая, что $\mathbf{I}_p(G) < +\infty$ ($p > 0$). Тогда*
1) *Если $m(s)$ неубывающая функция, то*

$$\int_G M(\rho(x,G))\,\mathrm{dA} \leqslant \int_{B_p} M(\rho(x,B_p))\,\mathrm{dA}.$$

2) *Если $m(s)$ не возрастающая функция, то имеет место обратное неравенство*

$$\int_G M(\rho(x,G))\,\mathrm{dA} \geqslant \int_{B_p} M(\rho(x,B_p))\,\mathrm{dA}.$$

Здесь $B_p = B_p(\boldsymbol{\rho}(G),\, d)$ — область типа Боннезена, при этом второй параметр области определяется из равенства $\mathbf{I}_p(B_p) = \mathbf{I}_p(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда область G совпадает с областью типа Боннезена.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00351), а также при финансовой поддержке РФФИ и правительства республики Татарстан (проект № 15-41-02433).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен–Венана* // Матем. сборник, *189(12):3–12, 1998.*

2. Avkhadiev F. G. Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // Lobachevskii J. Math.*, 21:3–31, 2006.*