

А.Г. ЕГОРОВ, О.С. ЗАХАРОВА

ОПТИМАЛЬНОЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВИБРОРОБОТА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Аннотация. Рассматривается прямолинейное квазистационарное движение двухмассовой системы, состоящей из корпуса и внутренней массы, в ньютоновской жидкости. Перемещение системы как целого происходит за счет периодического движения внутренней массы относительно корпуса. Задача заключается в нахождении закона движения внутренней массы, обеспечивающего движение корпуса с заданной средней скоростью и минимальным расходом энергии. Для произвольных законов сопротивления среды разработан алгоритм решения задачи. Найден энергетически оптимальный закон движения сферического корпуса в вязкой жидкости.

Ключевые слова: виброробот, энергетический коэффициент, оптимальное управление.

УДК: 531.391 : 517.958

Abstract. We consider a rectilinear quasi-stationary motion of a two-mass system in a viscous medium. The motion of the system as a whole occurs due to periodic movements of the internal mass relatively to the shell. The problem is to describe the law of motion of the internal mass that provides the minimum energy consumption with a specified average velocity of the shell. We propose an algorithm for solving the problem with any law of resistance of the medium. We obtain the energy-optimal law of motion of a spherical shell in a viscous liquid.

Keywords: vibration-driven robot, energy consumption coefficient, optimal control.

Введение. Исследуемая механическая система моделирует виброробот — мобильное устройство, способное перемещаться в сопротивляющейся среде без специальных движителей (например, колес, ног или гусениц).

Впервые вопрос об оптимальном движении виброробота был поставлен Ф.Л. Черноусько [1], [2], рассмотревшим прямолинейное движение по горизонтальной плоскости тела с подвижной внутренней массой при наличии между плоскостью и телом кулоновского трения. В последнее время данная проблематика широко обсуждается в литературе как для криволинейного перемещения внутренней массы, так и для других законов сопротивления [3]–[5]. До сих пор, однако, задача оптимизации рассматривалась для идеализированных законов сопротивления. Предлагаемый в данной работе метод исследования пригоден для

Поступила 01.03.2011

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 08-01-00548-а.

произвольных законов сопротивления. На его основе рассмотрен практически важный случай квазистационарного движения сферического виброробота в ньютоновской жидкости с заданной по результатам экспериментов зависимостью коэффициента сопротивления от скорости движения сферы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из двух твердых тел. Основное тело (тело M — корпус) массы M находится в среде с сопротивлением, а тело массы m (далее внутренняя “масса”) перемещается внутри него. Изучаются продольные периодические движения внутренней массы относительно тела M , при которых вся система перемещается как целое. Обозначим через u скорость тела M , а через s и $v = \dot{s}$ — перемещение и скорость внутренней массы относительно тела M .

Основное уравнение, описывающее движение $u(t)$ тела при заданном законе $s(t)$ движения внутренней массы, имеет вид [1]

$$(m + M) \dot{u} + R(u) = -m\ddot{s}. \quad (1)$$

Здесь R — сила сопротивления среды движению тела, которая в соответствии с квазистационарным приближением [5] полностью задается скоростью движения тела. Для любого периодического с периодом T закона $s(t)$ уравнение (1) однозначно определяет периодическую с тем же периодом функцию $u(t)$.

Обозначая угловыми скобками среднее по периоду, определим среднюю скорость движения тела $U(u) = \langle u \rangle$ и среднюю мощность $N(u) = \langle u \cdot R(u) \rangle$, затрачиваемую на преодоление сил сопротивления. Последняя величина равна мощности сил, сообщаемых внутренней массой телу [5]. Предложенная в [5] постановка оптимизационной задачи состоит в отыскании такого закона $s(t)$ колебаний внутренней массы, который минимизирует мощность внутреннего движителя $N(u)$ при фиксированном периоде T колебаний и средней скорости $U(u) = U_0$ движения тела.

Удобство такой постановки состоит в том, что исходная задача расщепляется на две простые, последовательно решаемые задачи: первая из них определяет оптимальный закон $u(t)$ движения тела, вторая восстанавливает по оптимальному закону $u(t)$ зависимость $s(t)$ движения внутренней массы от времени. Возможность расщепления связана с тем, что единственное условие периодичности, накладываемое на функцию $s(t)$, можно выразить в терминах u . Действительно, соотношение (1), рассматриваемое как задача нахождения периодической функции $s(t)$ при заданной периодической левой части, имеет решение тогда и только тогда, когда $\langle R(u) \rangle = 0$. Поэтому при любом законе $u(t)$, удовлетворяющем ограничению $\langle R(u) \rangle = 0$, периодическая функция $s(t)$ находится из соотношения (1) простым интегрированием. Исходная задача при этом сводится к чисто алгебраической задаче, состоящей в нахождении периодической с периодом T функции $u(t)$, минимизирующей функционал $N(u)$ с учетом ограничений $\langle u \rangle = U_0$, $\langle R(u) \rangle = 0$.

До сих пор эта и аналогичные ей задачи рассматривались [1]–[5] для идеализированных, как правило степенных, законов трения. Предложенные методы решения существенно опирались на конкретный вид закона сопротивления. Сами законы сопротивления характеризовались монотонной зависимостью $R(u)$ и соответственно выпуклостью функции $\Phi(u) = u \cdot R(u)$ энергетических потерь. Вместе с тем, во многих практически важных ситуациях нет ни монотонности $R(u)$, ни выпуклости $\Phi(u)$. Это относится, в частности, к случаю, когда плохо обтекаемое основное тело движется в вязкой жидкости. Эксперименты по обтеканию сферы ([6], с. 31) показывают, что на графике зависимости R от безразмерной

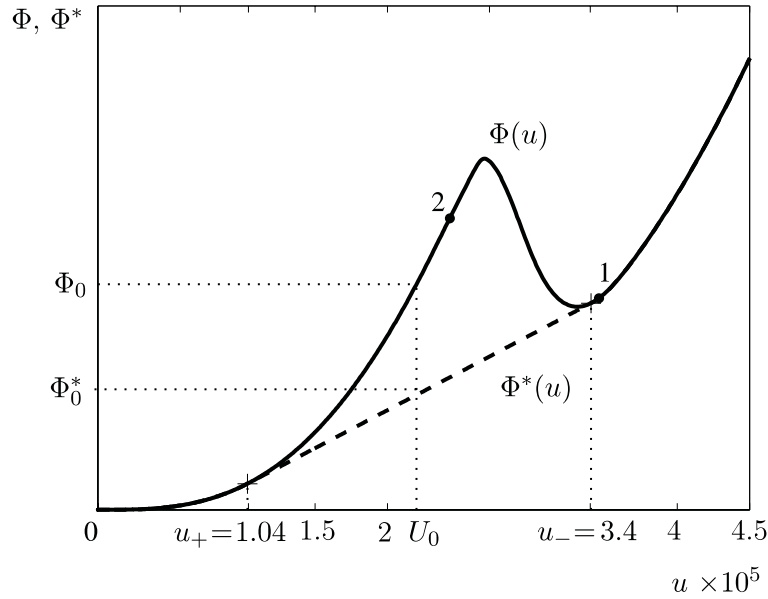


Рис. 1. Величина энергетических потерь Φ в зависимости от безразмерной скорости u (числа Рейнольдса)

скорости u (числа Рейнольдса) при $u \approx 3 \cdot 10^5$ наблюдается провал (“кризис сопротивления”). Он объясняется турбулизацией пограничного слоя на сфере и сопутствующим этому перемещением точки отрыва пограничного слоя вдоль тела вниз по потоку ([6], с. 31). Кризис сопротивления приводит к немонотонности функции $\Phi(u)$ (рис. 1).

В данной работе задача нахождения оптимального движения тела

$$\min_{u \in (3), (4)} \langle \Phi(u) \rangle, \quad (2)$$

$$\langle u \rangle = U_0, \quad (3)$$

$$\langle R(u) \rangle = 0 \quad (4)$$

решается применительно к практически важному случаю движения сферы в вязкой жидкости с существенно немонотонным законом сопротивления. Метод решения носит общий характер, прямо распространяясь и на другие законы сопротивления. Обозначение принадлежности безразмерной скорости соотношениям (3), (4) здесь (в формуле (2)) и далее следует понимать как ограничения, при которых производится минимизация.

2. Энергетический коэффициент. Для описания энергетических затрат на движение тела с помощью внутреннего движителя (подвижной внутренней массы) введем энергетический коэффициент

$$\eta = \min_{u \in (3)} \langle \Phi(u) \rangle / \min_{u \in (3), (4)} \langle \Phi(u) \rangle, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (5)$$

Числитель здесь представляет минимальные энергетические затраты при произвольном движении корпуса со средней скоростью U_0 , а знаменатель — те же затраты при движении за счет колебаний внутренней массы.

Для эффективного вычисления числителя в (5) проведем операцию овыпукления Φ , обозначив через Φ^* максимальную выпуклую функцию, не превосходящую Φ . Функция Φ^*

устроена так (рис. 1), что область ее определения разбивается на два типа интервалов; на одних (интервалах строгой выпуклости) $\Phi^*(u) = \Phi(u)$, на других (интервалах линейности) Φ^* — линейная функция. В силу неравенства $\Phi^*(u) \leq \Phi(u)$ и выпуклости Φ^* имеем

$$\langle \Phi(u) \rangle \geq \langle \Phi^*(u) \rangle \geq \Phi^*(\langle u \rangle) = \Phi^*(U_0). \quad (6)$$

В том случае, когда U_0 лежит в интервале строгой выпуклости, равенство в (6) достигается на тождественно постоянной функции $u \equiv U_0$. Если же U_0 лежит в интервале линейности, то (см. рис. 1)

$$\Phi^*(U_0) = \frac{u_+ - U_0}{u_+ - u_-} \Phi(u_-) + \frac{U_0 - u_-}{u_+ - u_-} \Phi(u_+),$$

а значит, равенство в (6) достигается на кусочно-постоянных функциях, принимающих два значения u_+ , u_- на множествах меры aT и $(1 - a)T$ соответственно, $a = (U_0 - u_-) / (u_+ - u_-)$.

Таким образом, числитель в (5) определяется соотношением

$$\min_{u \in (3)} \langle \Phi(u) \rangle = \Phi^*(U_0). \quad (7)$$

Для выпуклых Φ правая часть в (7) совпадает с $\Phi(U_0)$, коэффициент эффективности (5) оказывается определенным так же, как в работе [5]. Для невыпуклых $\Phi(u)$ величина $\Phi^*(U_0)$ может быть существенно меньше $\Phi(U_0)$. Так, для движения сферы в ньютоновской жидкости (рис. 1) энергетические затраты могут быть снижены более чем вдвое за счет неравномерности движения.

3. Решение задачи об оптимальном движении тела. Вводя множитель Лагранжа λ для ограничения (4) и обозначая $C(u; \lambda) = \Phi(u) + \lambda R(u)$, имеем

$$\min_{u \in (3),(4)} \langle \Phi(u) \rangle = \min_{u \in (3),(4)} \langle C(u; \lambda) \rangle \geq \min_{u \in (3)} \langle C(u; \lambda) \rangle. \quad (8)$$

Решение задачи минимизации последнего функционала в (8) проводится так же, как в предыдущем пункте работы. Обозначая через $C^*(u; \lambda)$ овыпукленную функцию $C(u; \lambda)$, получим

$$\min_{u \in (3)} \langle C(u; \lambda) \rangle = C^*(U_0; \lambda) = \langle C(u_*; \lambda) \rangle, \quad (9)$$

где $u_*(t; \lambda)$ — кусочно-постоянная функция. После решения (9) в семействе $u_*(\lambda)$ необходимо выделить то решение, для которого выполнено ограничение $\langle R(u_*) \rangle = 0$. Обозначив через λ_* соответствующее значение множителя Лагранжа, получим согласно (8), (9)

$$\min_{u \in (3),(4)} \langle \Phi(u) \rangle \geq \langle \Phi(u_*(\lambda_*)) \rangle.$$

Отсюда следует, что искомый минимум достигается на элементе $u_*(\lambda_*)$ и равен $C^*(U_0; \lambda_*)$.

Фактическую реализацию решения удобно проводить полуобратным методом, когда для каждого λ величина U_0 не фиксируется, а подбирается так, чтобы выполнить ограничение (4). Алгоритм расчета при этом выглядит следующим образом.

1. При каждом фиксированном λ строятся функции $C(u; \lambda)$, $C^*(u; \lambda)$ и определяется содержащий нулевую точку интервал $[u_-, u_+]$ линейности C^* . Существование такого интервала при $\lambda \neq 0$ следует из того, что в окрестности нуля поведение $C(u; \lambda) = (u + \lambda) R(u)$ определяется поведением невыпуклой в этой окрестности функции $R(u)$.

2. В ситуации общего положения (двухфазное движение) $C(u) > C^*(u)$ при $u_- < u < u_+$, $C(u_{\pm}) = C^*(u_{\pm})$, $R_+ = R(u_+) > 0$, $R_- = R(u_-) < 0$. При этом $u_*(t)$ определяется как

кусочно-постоянная функция, принимающая два возможных значения u_- и u_+ на подмножествах интервала $[0, T]$ меры Ta_- и Ta_+ соответственно ($a_- + a_+ = 1, a_{\pm} > 0$),

$$a_- = \frac{R_+}{R_+ - R_-}, \quad a_+ = \frac{-R_-}{R_+ - R_-}.$$

3. В особых случаях (трехфазное движение) интервал $[u_-, u_+]$ включает точку u_0 , в которой значения $C(u_0)$ и $C^*(u_0)$ совпадают; в остальных точках интервала (u_-, u_+) по-прежнему $C(u) > C^*(u)$. При этом $u_*(t)$ определяется как кусочно-постоянная функция, принимающая три возможных значения u_-, u_0, u_+ на подмножествах интервала $[0, T]$ меры Ta_-, Ta_0, Ta_+ соответственно ($a_- + a_0 + a_+ = 1, a_i > 0$). Величины a_i при $u_0 < 0$ подсчитываются по формулам

$$a_- = \frac{aR_+}{R_a}, \quad a_0 = \frac{(1-a)R_+}{R_a}, \quad a_+ = \frac{R_a - R_+}{R_a}, \quad R_a = R_+ - R_-a - R_0(1-a).$$

При $u_0 > 0$ аналогичные формулы имеют вид

$$a_+ = -\frac{aR_-}{R_a}, \quad a_0 = -\frac{(1-a)R_-}{R_a}, \quad a_- = \frac{R_a + R_-}{R_a}, \quad R_a = aR_+ + (1-a)R_0 - R_-.$$

В обоих случаях a — произвольный параметр из интервала $[0, 1]$.

4. После нахождения u_* средняя скорость вычисляется как $U_0(\lambda) = \langle u_* \rangle$. При двухфазном движении она равна $U_0 = a_-u_- + a_+u_+$, при трехфазном движении

$$U_0 = a_-u_- + a_0u_0 + a_+u_+.$$

4. Результаты расчетов. Расчеты показывают (рис. 2), что трехфазное движение реализуется при двух значениях параметра λ : $\lambda_1 = 6.95 \cdot 10^5, \lambda_2 = 1.87 \cdot 10^6$.

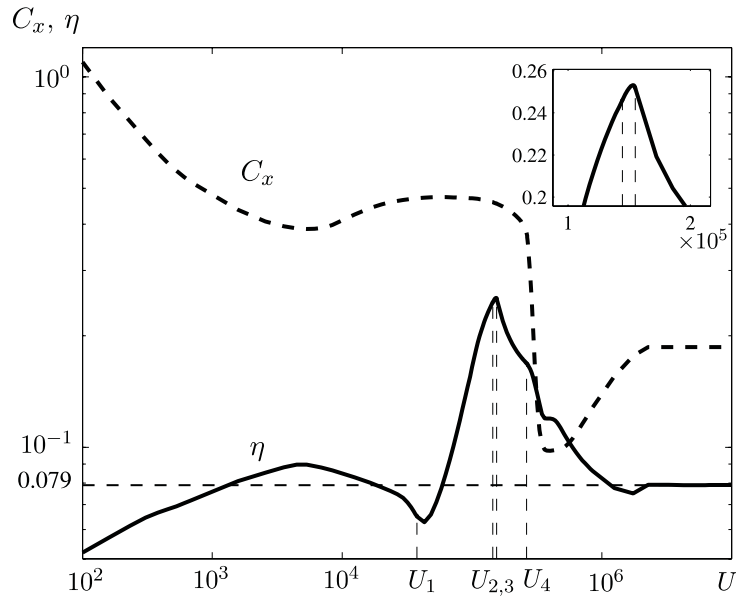


Рис. 2. Зависимости коэффициента сопротивления C_x и энергетического коэффициента η от средней скорости U движения сферы

Таблица. Параметры оптимального движения виброробота

U	η	u_+	a_+	u_-	a_-	u_0	a_0
95	0.051	141.7	0.9557	-911.9	0.0443	0	0
$2.57 \cdot 10^3$	0.085	$3.26 \cdot 10^3$	0.9646	$-1.65 \cdot 10^4$	0.0354	0	0
$2 \cdot 10^4$	0.078	$2.57 \cdot 10^4$	0.9648	$-1.33 \cdot 10^5$	0.0352	0	0
$4.3 \cdot 10^4$	0.063	$3.46 \cdot 10^5$	0.0321	$-2.43 \cdot 10^5$	0.0682	$5.38 \cdot 10^4$	0.8997
$1.24 \cdot 10^5$	0.217	$3.46 \cdot 10^5$	0.5229	$-2.43 \cdot 10^5$	0.2779	$5.38 \cdot 10^4$	0.1992
$1.53 \cdot 10^5$	0.253	$3.48 \cdot 10^5$	0.6775	$-2.57 \cdot 10^5$	0.3225	0	0
$1.72 \cdot 10^5$	0.219	$3.52 \cdot 10^5$	0.7202	$-1.14 \cdot 10^6$	0.0096	$-2.61 \cdot 10^5$	0.2702
$2.56 \cdot 10^5$	0.17	$3.52 \cdot 10^5$	0.9225	$-1.14 \cdot 10^6$	0.0561	$-2.61 \cdot 10^5$	0.0215
$3.62 \cdot 10^5$	0.12	$4.37 \cdot 10^5$	0.9647	$-1.71 \cdot 10^6$	0.0353	0	0
$4.525 \cdot 10^5$	0.117	$5.44 \cdot 10^5$	0.9662	$-2.15 \cdot 10^6$	0.0338	0	0
$8.13 \cdot 10^5$	0.087	$9.79 \cdot 10^5$	0.972	$-4.97 \cdot 10^6$	0.028	0	0
$4.75 \cdot 10^6$	0.0789	$6.07 \cdot 10^6$	0.9654	$-3.20 \cdot 10^7$	0.0346	0	0

Интервалы $(0, \lambda_1)$, (λ_1, λ_2) , (λ_2, ∞) отвечают двухфазному движению. С ростом параметра λ внутри этих интервалов средняя скорость $U(\lambda)$ монотонно возрастает соответственно от нуля до $U_1 = 3.76 \cdot 10^4$, от $U_2 = 1.44 \cdot 10^5$ до $U_3 = 1.55 \cdot 10^5$ и от $U_4 = 2.63 \cdot 10^5$ до бесконечности. На первой стадии трехфазного движения при $\lambda = \lambda_1$ фиксированными остаются скорости $u_+^{(1)} = 3.46 \cdot 10^5$, $u_+^{(2)} = 5.38 \cdot 10^4$, $u_- = -2.43 \cdot 10^5$ двух поступательных и одной возвратной фазы движения. Большая из поступательных скоростей соответствует “кризисному” состоянию с малым гидродинамическим сопротивлением (точка 1 на рис. 1), в то время как возвратное движение проходит при больших сопротивлениях, отвечающих “предкризисной” скорости (точка 2 на рис. 1). Средняя скорость на данной стадии монотонно растет от U_1 до U_2 с изменением параметра a от нуля до единицы. В процессе роста средней скорости происходит перераспределение продолжительностей поступательных фаз движения в пользу энергетически выгодной быстрой фазы (табл.). На второй стадии трехфазного движения при $\lambda = \lambda_2$ фиксированными остаются скорости $u_+ = 3.52 \cdot 10^5$, $u_-^{(1)} = -2.61 \cdot 10^5$, $u_-^{(2)} = -1.14 \cdot 10^6$ одной поступательной и двух возвратных фаз движения. Скорости u_+ , $u_-^{(1)}$ несущественно отличаются от скоростей $u_+^{(1)}$, u_- предыдущей трехфазной стадии; по-прежнему положительная скорость соответствует “кризисному”, а отрицательная — “предкризисному” состоянию. Вторая, более быстрая, стадия возвратного движения проходит на “закризисной” скорости. С ростом средней скорости от U_3 до U_4 происходит перераспределение продолжительностей возвратных фаз движения в пользу быстрой фазы (табл.).

Основным результатом вычислений является представленная на рис. 2 зависимость энергетического коэффициента от средней скорости движения тела. Там же изображен использованный в расчетах график коэффициента сопротивления $C_x(U) = U^{-2}R(U)$ сферы. Как видно, энергетический коэффициент η с небольшим запаздыванием по скорости U отражает изменения в зависимости $C_x(U)$.

При стремлении числа Рейнольдса U к нулю энергетический коэффициент стремится к нулю. Это связано с тем, что на малых скоростях U закон сопротивления линеен, а при линейных законах, как известно ([3], [5]), поступательное движение виброробота невозможно.

С ростом U в докризисном диапазоне зависимость $C_x(U)$ выполаживается, а коэффициент η приближается к значению 0.079, найденному в [5] для квадратичных законов сопротивления. Движение тела при этом имеет двухфазный характер с продолжительной поступательной и короткой высокоскоростной возвратной фазами (строки 1–3 в табл.). Такой режим движения будем называть базовым. При приближении U к U_1 скорость возвратного движения приближается к кризисным значениям. Однако энергетически невыгодно, чтобы возвратное движение осуществлялось при низких сопротивлениях. Вследствие этого на интервале (U_1, U_2) реализуется трехфазное движение, при котором возвратное движение проводится с докризисной скоростью, а фаза медленного поступательного движения с ростом U замещается фазой быстрого поступательного движения со скоростью, отвечающей кризису сопротивления (строки 4–5 в табл.). Далее, в узком диапазоне (U_2, U_3) скоростей реализуется наиболее энергетически выгодная ситуация с двумя фазами движения: докризисной возвратной и кризисной поступательной. Именно здесь энергетический коэффициент достигает максимального значения (строка 6 в табл.). При этом, в отличие от базового режима, скорость поступательного движения превосходит скорость возвратного. Обратная инверсия скоростей происходит в интервале (U_3, U_4) посредством трехфазного движения с одной поступательной и двумя возвратными фазами. С ростом скорости U докризисная возвратная фаза замещается закризисной (строки 7–8 в табл.). После полного замещения, начиная с $U = U_4$, реализуется двухфазный базовый режим, отвечающий в пределе $U \rightarrow \infty$ квадратичному закону сопротивления (строки 9–11 в табл.).

5. Заключение. Полное решение поставленной задачи предполагало определение закона движения внутренней массы по найденному оптимальному закону движения корпуса. В данной работе мы не привели соответствующих вычислений, которые, как было отмечено выше, сводятся к простому интегрированию. Основной целью таких расчетов [5] является нахождение амплитуды колебаний внутренней массы, ограничивающей снизу допустимую длину корпуса виброробота. Соответствующее ограничение в рамках принятой квазистационарной постановки задачи несущественно и снимается за счет роста частоты колебаний внутренней массы. Следует, однако, иметь в виду, что условие квазистационарности, предполагающее медленное изменение скорости движения тела, неизбежно нарушится с ростом частоты колебаний. В этом случае необходим более тщательный анализ изучаемого процесса, опирающийся на совместное решение механической и гидродинамической задач. Такой анализ является делом будущего.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Черноусько Ф.Л. *О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу*, Докл. РАН **405** (1), 56–60 (2005).
- [2] Черноусько Ф.Л. *Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы*, ПММ **70** (6), 915–941 (2006).
- [3] Черноусько Ф.Л. *Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде*, ПММ **72** (2), 202–215 (2008).
- [4] Болотник Н.Н., Фигурин Т.Ю. *Оптимальное управление прямолинейным движением твердого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс*, ПММ **72** (2), 216–229 (2008).
- [5] Егоров А.Г., Захарова О.С. *Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением*, ПММ **74** (4), 620–632 (2010).
- [6] Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя* (Наука, М., 1974).

А.Г. Егоров

*профессор, заведующий кафедрой аэрогидромеханики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: egorov2@ksu.ru

О.С. Захарова

*магистрант 1-го курса, кафедра аэрогидромеханики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия*

A.G. Egorov

*Professor, Head of the Chair of Aerohydromechanics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: egorov2@ksu.ru

O.S. Zakharova

*1st year Undergraduate, Chair of Aerohydromechanics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia*