ПРАВИТЕЛЬСТВО РЕСПУБЛИКИ ТАТАРСТАН
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАТАРСТАН

Научно-техническая конференция по итогам совместного конкурса фундаментальных исследований РФФИ – РТ

Сборник докладов

г. Казань, 2018 г.

УДК 001.83
ББК 72.4(2)
Н34

Научно-техническая конференция по итогам совместного конкурса фундаментальных исследований РФФИ – РТ: сборник докладов региональной научно-практической конференции. – Казань: Изд-во АН РТ, 2018. – 662 с.

ISBN 978-5-9690-0506-8

Сборник содержит информацию о проектах выполняемых в рамках регионального конкурса фундаментальных научных исследований под эгидой Академии наук Республики Татарстан и Российского фонда фундаментальных исследований.

ISBN 978-5-9690-0506-8

© Академия наук РТ, 2018
© Изд-во АН РТ, 2018

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ И ПРИВЕДЕННЫХ МОДУЛЕЙ
EXISTENCE AND UNIQUENESS CONDITIONS FOR THE CRITICAL POINTS OF CONFORMAL RADII AND REDUCED MODULI

Казанцев Андрей Витальевич, Киндер Михаил Иванович
Kazantsev Andrei Vitalievich, Kinder Mihail Ivanovich
Академия наук Республики Татарстан

Аннотация: Получены новые признаки единственности корня уравнения Гахова, исследованы новые конструкции обобщенных приведенных модулей.
Ключевые слова: конформный радиус, класс Гахова, приведенный модуль.

Abstract: New uniqueness criteria for the root of Gakhov's equation is obtained, and new constructions of the generalized reduced moduli are investigated.
Keywords: conformal radius, Gakhov class, reduced module.

Исследование конформных инвариантов как носителей корректности граничных задач восходит, в частности, к связи между внешней обратной краевой задачей в постановке Гахова и конформным радиусом Полиа-Сеге-Хиги; указанная связь основана на эквивалентности [1]

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2} \;\Leftrightarrow\; \nabla h_f(\zeta) = 0\,. \tag{1}$$

В левой части (1) стоит уравнение Гахова, рассматриваемое на классе H_0 всех голоморфных и локально однолистных в круге $D = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| < 1\}$ функций f с $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. В правой части (1) фигурирует гиперболическая производная (конформный радиус)

$$h_f(\zeta) = (1-|\zeta|^2)\,|f'(\zeta)| \tag{2}$$

функции f. Множество всех корней эквивалентных уравнений в (1) обозначим через M_f; k_f – число элементов M_f. Каждый элемент $a \in M_f$ может быть только локальным максимумом ($\gamma_f(a) = +1$), седлом ($\gamma_f(a) = -1$) или полуседлом ($\gamma_f(a) = 0$) поверхности $h = h_f(\zeta)$; $\gamma_f(a)$ есть индекс точки a как особой для векторного поля $\nabla h_f(\zeta)$. Если M и S – количества критических точек (2) индекса $+1$ и -1, соответственно, то при некоторых дополнительных условиях на f имеет место формула Пуанкаре–Хопфа [2]

$$M - S = 1. \tag{3}$$

Заметка посвящена нескольким направлениям исследования эквивалентности (1), а также ее аналога для многосвязных областей.

1^0. Гаховские барьеры и экстремали для линий уровня [3].

Рассмотрим регулярный класс Гахова $\boldsymbol{G}_1$, состоящий из функций $f \in H_0$, для которых уравнение Гахова имеет единственный корень в D, являющийся максимумом функции (2). С использованием линий уровня

$$f_r(\zeta) = f(r\zeta)/r\,,\; 0 \le r \le 1,\; f_0(\zeta) \equiv \zeta\,, \tag{4}$$

функции f введем множества $L_f(f)=\{f_\xi : 0\le\xi\le r\}$ и $L_r(X)=\bigcup_{f\in X}L_r(f)$ при $X\subset H_0$, и постоянные $\overline{r}_f=\sup\{r\in[0,1]: L_r(f)\subset \boldsymbol{G}_1\}$ и $\rho(X)=\sup\{r\in[0,1]: L_r(X)\subset \boldsymbol{G}_1\}$. Величину $\rho(X)$ назовем *гаховским барьером* для серии классов $\{L_r(X)\}_{r\in[0,1]}$, множество $E(X)=$ $=\{f\in X:\overline{r}_f=\rho(X)\}$ – *гаховской экстремалью* для той же серии; $\tilde{X}:=X\bigcap\{f''(0)=0\}$.

Задача состоит в отыскании гаховских барьеров и экстремалей для различных подклассов $X\subset H_0$. При этом выход из $\boldsymbol{G}_1$ вдоль отдельных траекторий допускает следующие варианты:

1) *тип* Ψ : максимум переходит в два максимума и седло;

2) *тип* $\bigcup$: при имеющемся максимуме возникает (хотя бы одно ненулевое) полуседло, распадающееся затем в седло и максимум.

Тип Ψ превалирует в ситуациях выхода из $\boldsymbol{G}_1$ по линиям уровня. Поэтому особое значение приобретает поиск ситуаций, когда выход из $\boldsymbol{G}_1$ вдоль траекторий вида (4) из гаховской экстремали имеет тип $\bigcup$. Последнему соответствуют следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $a\ge 0$ – постоянная, и пусть X – любой подкласс функций $f\in H_0$, удовлетворяющих условию*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)|\le a|\zeta|/(1-|\zeta|),\ \zeta\in D.$$

Если $a\le 1$, то $X\subset\tilde{\boldsymbol{G}}_1$. Пусть $a>1$ и предположим, что объединение $E=\bigcup_{|\varepsilon|=1}E_\varepsilon$ множеств $E_\varepsilon=\{f\in X:\varepsilon(f''/f')(\varepsilon/a)=a/(a-1)\}$ не пусто. Тогда $\rho(X)=\sqrt{2a-1}/a$ и $E(X)=E$.

Следствие. *Пусть $a\ge 0$ и $\varepsilon\in\partial D$ – постоянные, и пусть X совпадает с подклассом $X_\varepsilon\subset H_0$ всех функций, удовлетворяющих условию подчиненности*

$$\varepsilon\frac{f''}{f'}(\zeta)\prec\frac{a\zeta}{1-\zeta},\ \zeta\in D.$$

Тогда если $a\le 1$, то $X\subset\tilde{\boldsymbol{G}}_1$, а если $a>1$, то $\rho(X)=\sqrt{2a-1}/a$ и множество $E(X)$ состоит из единственного вращения $f_{\overline{\varepsilon}}(\zeta)=\varepsilon f_a(\overline{\varepsilon}\zeta)$ функции $f_a(\zeta)=\int_0^\zeta e^{-au}(1-u)^{-a}du$.

Новым Ψ-результатом является следующее решение (ρ,E)-задачи для класса $N(a)$, сформированного из функций $f\in H_0$ с условием типа Нехари $(1-|\zeta|^2)^2|\{f,\zeta\}|\le a$, $\zeta\in D$, где $\{f,\zeta\}=(f''/f')'(\zeta)-(f''/f')^2(\zeta)/2$ – производная Шварца функции f.

Обозначим через $\boldsymbol{U}$ семейство вращений функции $u\in H_0$, отображающей D на горизонтальную симметричную полосу; условие $f\in N(a)\setminus\boldsymbol{U}\Rightarrow k_f\le 1$ является хорошо известным (см. ссылки в [3]). Пусть $a>2$ и $\rho_a:=\sqrt{2/a}$. Будем говорить, что функция $f\in N(a)$ принадлежит классу $E_{N(a)}$, если для единственного элемента $\omega\in M_{f_{\rho_a}}$ имеет место соотношение $(1-|\omega|^2)^2\{f_{\rho_a},\zeta\}=-2\overline{\omega}/\omega$. При $\omega=0$ последнее равенство понимается как

$$\{f_{\rho_a},0\}=-2\overline{\varepsilon}^2 \tag{5}$$

для некоторого $\varepsilon\in\partial D$. Класс функций $f\in\tilde{N}(a)$, каждая из которых удовлетворяет условию (5) со своим ε, обозначим $E_{\tilde{N}(a)}$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $a > 2$. *Тогда справедливы равенства* $\rho(N(a)) = \rho(\tilde{N}(a)) = \rho_a$, $E(\tilde{N}(a)) = E_{\tilde{N}(a)}$ *и* $E(N(a)) = E_{N(a)}$.

2^0. О выходе из множества Гахова по семейству классов Авхадиева [4].

Классом Авхадиева называется любой класс голоморфных функций с ограниченным искажением. Для постоянных λ и Λ, $0 < \lambda < \Lambda < +\infty$, рассмотрим двупараметрическую серию классов Авхадиева $\boldsymbol{A}_\nu(\lambda, \Lambda) = \{f \in H_0 : \lambda \le |f'(\zeta)| \le \Lambda, \zeta \in D\}$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in \tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\lambda, \Lambda)$ *при* $\lambda > 0$ *и* $\Lambda / \lambda \le e^{\pi/2}$. *Тогда* $M_f = \{0\}$ *и постоянная* $e^{\pi/2}$ *неулучшаема.*

Однопараметрическая серия $\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\alpha) = \{f \in \tilde{H}_0 : e^{-\alpha} \le |f'(\zeta)| \le e^{\alpha}, \zeta \in D\}$, $\alpha \ge 0$, классов Авхадиева допускает аналог (ρ, E)-постановки из п. 1^0. Включение $f \in \tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\alpha)$ означает выполнение равенства

$$\ln f'(\zeta) = A(\varphi, \alpha) \equiv i\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{1+\varphi}{1-\varphi},\ \varphi = \varphi(\zeta),\ \zeta \in D, \tag{6}$$

где φ принадлежит классу $\boldsymbol{V}$ голоморфных функций ϕ с условием $\phi(D) \subset D$ и разложением $\phi(\zeta) = c\zeta^2 + \ldots$ в D. Классы функций, для которых строились r-линии уровня, соответствуют максимальному параметру серии $r = 1$. В рассматриваемом случае таким параметром будет $\alpha = \pi$; данный выбор обусловлен тем, что π – точная верхняя грань значений σ, для которых объединение $\bigcup_{\alpha \in [0,\sigma]} M_{f_\alpha}$ не имеет предельных точек на ∂D, где f_α – α-линия уровня, которую сейчас определим.

Для произвольной функции $f \in \tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi)$ равенство (6) при $\alpha = \pi$ однозначно определяет функцию $\varphi \in \boldsymbol{V}$. С данной φ для любого $\alpha \ge 0$ задача (6) с «начальными» условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ имеет единственное решение f_α в классе $\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\alpha)$ такое, что $f_\pi = f$. Более того, для каждого $\alpha \ge 0$ всякий элемент класса $\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\alpha)$ имеет вид f_α для некоторой функции $f \in \tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi)$. Построенное семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha \ge 0}$ назовем *A-семейством функции* f, элементы f_α – ее A- или α-линиями уровня.

A-аналогами величины $\overline{r}_f$, барьера $\rho(X)$ и экстремали $E(X)$ являются функционал первого выхода из множества Гахова $\overline{G}_f = \sup\{\xi \ge 0 : \alpha \in [0, \xi] \Rightarrow f_\alpha \in \boldsymbol{G}_1\}$, гаховский барьер $\Gamma(\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi)) = \inf\{\overline{G}_f : f \in \tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi)\}$ для серии классов $\{\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\alpha)\}_{\alpha \ge 0}$ и экстремальное множество для указанной серии, $E_{\boldsymbol{G}}(\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi)) = \{f \in \tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi) : \overline{G}_f = \Gamma(\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi))\}$. Если переопределить $\overline{G}_f$, заменив $\boldsymbol{G}_1$ на класс $\boldsymbol{S}$ всех нормированных однолистных функций в D, то вместо гаховского барьера $\Gamma(\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi))$ получится авхадиевский барьер $\mathrm{A}(\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi))$, или барьер однолистности.

Теорема 4. *Имеют место соотношения* $\mathrm{A}(\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi)) = \Gamma(\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi)) = \pi/2$. *Экстремальное множество* $E_{\boldsymbol{G}}(\tilde{\boldsymbol{A}}_\nu(\pi))$ *совпадает с набором всех вращений функции, определяемой из* (6) *при* $\varphi(\zeta) = \zeta^2$ *и* $\alpha = \pi$.

3^0. Формула Пуанкаре–Хопфа для мероморфных функций [5].

Параметрические семейства внешних обратных краевых задач, изучение которых восходит к известному трактату Р.Б. Салимова, стали источником новых постановок и методов в исследовании указанных задач. Действующие в качестве свободных параметров

таких задач критические точки конформных радиусов демонстрируют интересные взаимосвязи между их параметрической динамикой и геометрическим поведением. С использованием семейства (4) формула (3) обобщается на случай, когда производная отображающей функции имеет нули и полюсы на единичном круге и его границе.

Теорема 5. *Пусть* f *– мероморфная функция в круге* $D_R = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| < R\}$, *где* $R > 1$, *и множество* M_f *свободно от континуумов. Тогда число* k_f *конечно и выполняется равенство* $M + M^{\infty} + M^{\partial} - S = 1 - n$.

Здесь M^{∞} – число полюсов функции f внутри D и M^{∂} – их число на ∂D, n – число нулей производной f' внутри единичного круга.

4⁰. Условия единственности критической точки конформного радиуса [6], [7].

Одним из подходов к накоплению достаточных признаков единственности экстремума (2) является обращение к теории классов однолистных и многолистных функций, используя и обобщая приводимые там условия. Одним из таких обобщений является подчиненность

$$\ln f'(\zeta) \prec \beta\zeta / (1 - \alpha\zeta), \ \zeta \in D, \tag{7}$$

рассматриваемая над полуполосой $\Pi = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 : |\alpha| < 1, \beta \geq 0\}$.

Множество $\Omega \subset \Pi$ назовем *областью единственности* для условия (7), если для любого $(\alpha, \beta) \in \Omega$ указанное условие обеспечивает единственность критической точки гиперболической производной функции $f \in \tilde{H}_0$, удовлетворяющей (7).

Пусть $\Delta_{-1} = \{(\alpha, \beta) : -1 < \alpha < -1/2, \beta \leq 4|\alpha|(1 - |\alpha|)\}$, $\Delta_0 = [-1/2, 1/2] \times [0,1]$ и $\Delta_1 = \{(\alpha, \beta) : 1/2 < \alpha < 1, \beta < 4|\alpha|(1 - |\alpha|)\}$. Справедлива

Теорема 6. *Множество* $\Omega = \Delta_{-1} \bigcup \Delta_0 \bigcup \Delta_1$ *есть область единственности для условия подчиненности* (7).

Пусть M_{α} – класс α-выпуклых функций Мокану, состоящий из всех $f \in H_0$ таких, что

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha\left(1 + \zeta\frac{f''}{f'}(\zeta)\right) + (1-\alpha)\zeta\frac{f'}{f}(\zeta)\right\} \geq 0, \ \zeta \in D.$$

Теорема 7. *Объединение* $\bigcup_{\alpha \geq 1} \mathrm{M}_{\alpha}$ *становится классом* (*не более чем*) *единственности критической точки* (2) *после удаления из него семейства* $\boldsymbol{U}$ (*см. п.* 1⁰). *Значение* $\alpha = 1$ *является препятствием для продолжения единственности в область* $\alpha < 1$.

5⁰. Обобщенный приведенный модуль [8], [9].

Для $(n+1)$-связной плоской области G с аналитической границей введены функции типа функции Грина и гармонических мер, с помощью которых получено новое представление функции $F(w, w_0) = (w - w_0) f(w, w_0)$, конформно отображающей область G на единичный круг с круговыми и радиальными разрезами. *Обобщенным приведенным модулем* области G в точке w назовем функцию $M(w) = (2\pi)^{-1} \ln|f(w, w)|$. Условие разрешимости соответствующей внешней обратной краевой задачи опирается на существование критической точки поверхности $M = M(w)$. С использованием явной формулы для функции $F(w, w_0)$ доказана

Теорема 8. *Уравнение* $(\partial / \partial w) M(w) = 0$ *для нахождения критических точек поверхности* $M = M(w)$ *в* $(n+1)$*-связной области* G *с аналитической границей разрешимо при любом* $n \neq 1$.

Для двусвязного случая, исключенного из теоремы, приведены примеры областей, для которых отсутствуют критические точки поверхности обобщенного приведенного модуля.

Двусвязные области служат своеобразным полигоном, на котором можно проверить предполагаемые факты и утверждения. Именно поэтому в рамках проекта были проведены исследования отдельно этого случая. Были изучены также обобщенные приведенные модули относительно других двусвязных канонических областей, в частности, единичного круга с концентрическим круговым разрезом или радиальным разрезом, звездообразных областей с радиальным разрезом или круговым разрезом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта №18-41-160017.

Список литературы

1. Аксентьев Л.А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 2. – С. 3-11.

2. Киндер М.И. Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1985. – Вып. 22. – С. 104-116.

3. Казанцев А.В. Гаховские барьеры и экстремали для линий уровня // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4.

4. Казанцев А.В. О выходе из множества Гахова по семейству классов Авхадиева // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 3. – С. 318-326.

5. Kazantsev A.V. Meromorphization of M.I. Kinder's formula via the change of contours // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39, No. 6. – P. 771-776.

6. Kazantsev A.V., Kinder M.I. Uniqueness of the critical point of the conformal radius: ”method of déjà vu” // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39, No. 9.

7. Kazantsev A.V. On some “collateral” effects in the alpha-convex theory // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39, No. 9.

8. Kazantsev A.V., Kinder M.I. Study of the surface of a generalized reduced module for multiply connected domain // Комплексный анализ и его приложения: материалы Междунар. школы-конф. – Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2018. – С. 59.

9. Kazantsev A.V., Kinder M.I. Generalized reduced module of a domain over the unit disc with circular and radial slits // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-18. Материалы семинара, школы и конференции. – Казань: Академия наук РТ, 2018.