**С.Н. Тронин**

# ТЕОРИЯ ОПЕРАД И УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Полный текст пленарного доклада
на международной конференции АЛГЕБРА И АНАЛИЗ – 2004

**Казань — 2004**

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $n \geq 0$ — натуральное число. Всюду в дальнейшем $[n]$ обозначает множество $\{0, 1, \ldots, n\}$. Обозначим через $FSet$ подкатегорию категории множеств с объектами $[n]$, $n \geq 0$, морфизмами которой являются такие отображения $f : [n] \to [m]$, что $f(0) = 0$, и $f^{-1}(0) = \{0\}$.

Категория $FSet$ обладает конечными копроизведениями, которые описываются следующим образом. Естественный изоморфизм $[n] \sqcup [m] \to [n+m]$ отображает $i \in [n]$ в $i \in [n+m]$, $j \in [m], j > 0$ — в $n + j \in [n + m]$. Поэтому, если даны $f : [n] \to [m]$, $g : [p] \to [q]$, то $f \sqcup g : [n+p] \to [m+q]$ действует следующим образом: $(f \sqcup g)(i) = f(i)$ при $0 \leq i \leq n$, $(f \sqcup g)(j) = m + g(j)$ при $1 \leq j \leq p$.

Разбиением натурального числа $n$ на $m$ частей будет называться неубывающее отображение вида $\alpha : [n] \to [m]$, являющееся морфизмом $FSet$. Через $P$ обозначим категорию с объектами $[n]$, и множествами морфизмов $P(n,m) = P([n],[m])$, состоящими из всевозможных разбиений $n$ на $m$ частей. Для $\alpha \in P(n,m)$, и для всех $1 \leq i \leq m$ положим $n_i = |\alpha^{-1}(i)|$. Тогда $\alpha$ можно отождествить с упорядоченной последовательностью $(n_1, \ldots, n_m)$ целых неотрицательных чисел длины $m$, такой, что $n_1 + \ldots + n_m = n$. Этим объясняется выбор термина. Если $\beta \in P(n,m)$, $\alpha \in P(m,k)$, $\alpha = (m_1, \ldots, m_k)$, то $\beta$ можно записать в виде $(n_{1,1}, \ldots, n_{1,m_1}, \ldots, n_{k,1}, \ldots, n_{k,m_k})$. Теперь композицию $\alpha\beta$ можно описать как последовательность $(\sum\limits_{i=1}^{m_1} n_{1,i}, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{m_k} n_{k,i})$.

Если $\alpha \in P(n,m)$,$\beta \in P(k,l)$,то $\alpha \sqcup \beta \in P(n+k, m+l)$

(хотя $[n+m]$ не есть копроизведение $[n]$ и $[m]$ в $P$).

В категории $FSet$ существуют также расслоенные произведения. Пусть $\alpha \in P(n,m)$, $f : [k] \to [m]$ — морфизм из $FSet$. Рассмотрим расслоенное произведение (декартов квадрат) вида:

$$\begin{array}{ccc} [n]\times_{[m]}[k] & \xrightarrow{\pi_2} & [k] \\ \downarrow^{\pi_1} & & \downarrow^{f} \\ [n] & \xrightarrow{\alpha} & [m] \end{array}$$

Пусть $\alpha = (n_1, \ldots, n_m)$. В категории всех множеств $[n]\times_{[m]}[k]$ можно описать как $\{ (i,j) \mid 1 \leq i \leq n_{f(j)}, 1 \leq j \leq k \} \cup \{(0,0)\}$, причем $\pi_1((i,j)) = n_1 + \ldots + n_{f(j-1)} + i, \pi_1(0) = 0$, $\pi_2(i,j) = j$. В категории $FSet$ можно отождествить $[n]\times_{[m]}[k]$ с $[n_{f(1)} + \ldots + n_{f(k)}]$. При этом паре $(i,j)$ соответствует число $n_{f(1)} + \ldots + n_{f(j-1)} + i$, а паре $\{(0,0)\}$ соответствует 0. Теперь $\pi_2$ становится неубывающей сюръекцией, которую можно записать в виде разбиения так: $(n_{f(1)}, \ldots, n_{f(k)})$. Обозначим это разбиение через $\alpha f$.

Преимущество такого обозначения в том, что если дано $g : [p] \to [k]$, то $\alpha(fg) = (\alpha f)g$. Соответственно, проекцию $\pi_1$ обозначим через $f^*\alpha$. Это отображение можно описать следующим образом. Пусть $[p,q] = \{ p, p+1, \ldots, q-1, q \}$. Тогда ограничение $f^*\alpha : [n_{f(1)} + \ldots + n_{f(k)}] \to [n_1 + \ldots + n_m]$ на каждый отрезок $[n_{f(1)} + \ldots + n_{f(j-1)}, n_{f(1)} + \ldots + n_{f(j)}]$ есть неубывающая биекция на отрезок $[n_1 + \ldots + n_{f(j)-1}, n_1 + \ldots + n_{f(j)}]$.

Заметим, что $f^*\alpha$ есть не что иное, как подъем $\alpha$ вдоль $f$ Множество $[n_{f(1)} + \ldots + n_{f(k)}]$ можно рассматривать как результат применения функтора замены базы, то есть как $f^*[n]$.

Рассмотрим подкатегорию $W \subseteq FSet$ со всеми теми же объектами $[n]$, морфизмы которой должны удовлетворять следующим условиям:

1) Если $f, g \in Mor(W)$, то $f \sqcup g \in Mor(W)$;

2) Если $f : [k] \to [m]$ есть морфизм из $W$, то для любого $\alpha \in P(n, m)$ имеет место $f^*\alpha \in W(f^*[n], [n])$.

Категорию $W$ с указанными выше двумя свойствами будем называть *вербальной* .

Укажем несколько очевидных примеров вербальных подкатегорий.

1) Тривиальная категория $Id$, морфизмы которой — тождественные отображения вида $[n] \to [n]$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2) Категория $\Sigma$, в которой $\Sigma(n, m)$ пусто при $n \neq m$, а $\Sigma(n, n) = \Sigma_n$ — группа подстановок $n$-й степени.

3) Категория $Mon$, морфизмами которой являются все мономорфизмы (то есть инъекции) из $FSet$.

4) Категория $Epi$, морфизмами которой являются все эпиморфизмы (то есть сюръекции) из $FSet$.

5) Если $W_1$ и $W_2$ — две вербальные категории, то вербальной является и категория $W_1 \cap W_2$, класс морфизмов которой есть $Mor(W_1) \cap Mor(W_2)$. В частности, $Epi \cap Mon = \Sigma$, $P \cap \Sigma = Id$.

6) Наконец, вся категория $FSet$ также является вербальной.

*Операдой* (несимметрической) называется семейство множеств
$R = \{R(n) | n \geq 0\}$, такое, что для любых упорядоченных последовательностей неотрицательных целых чисел $(n_1, \ldots, n_m)$, $m \geq 1$, определены операции композиции

$$R(m) \times R(n_1) \times \ldots \times R(n_m) \to R(n_1 + \ldots + n_m),$$

действие которых будет обозначаться так: $(x, y_1, \ldots, y_m) \mapsto xy_1 \ldots y_m = x(y_1 \ldots y_m) = x\overline{y}$. Должен быть выделен также элемент $\varepsilon \in R(1)$.

Начало списка свойств, которыми определяется операда, выглядит так:

1) (Ассоциативность). $x(y_1\overline{z}_1) \ldots (y_m\overline{z}_m) = (xy_1 \ldots y_m)\overline{z}_1 \ldots \overline{z}_m$ для любых $x \in R(m)$, $y_i \in R(n_i)$, $1 \leq i \leq m$, $\overline{z}_i = z_{i\,1} \ldots z_{i\,n_i}$, $z_{i,j} \in R(k_{i\,j})$, $1 \leq j \leq n_i$.

2) $\varepsilon x = x = x\varepsilon \ldots \varepsilon$ для любого $x \in R(m)$, $m \geq 1$.

В общем случае пусть $W$ — вербальная категория. *$W$-операдой* будем называть операду $R$, такую, что кроме свойств 1) и 2), выполнены еще три свойства:

3) Соответствие $[n] \mapsto R(n)$ есть ковариантный функтор, определенный на категории $W$, действие которого обозначается так: если $f \in W([n], [m])$, $x \in R(n)$, то $R(f)(x) = fx \in R(m)$. Отображение $R(f) : R(n) \to R(m)$ также будем иногда ради краткости обозначать через $f$.

4) Если $f_i : [n_i] \to [k_i]$, $1 \leq i \leq m$ — морфизмы категории $W$, $x \in R(m)$, $y_i \in R(n_i)$, то имеет место тождество:

   $x(f_1 y_1) \ldots (f_m y_m) = (f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m)(xy_1 \ldots y_m)$

5) Если $f : [k] \to [m]$ является морфизмом $W$, $\alpha = (n_1, \ldots, n_m) \in P(n, m)$, $x \in R(k)$, $y_i \in R(n_i)$, $1 \le i \le m$, то имеет место тождество:

   $(fx)y_1 \ldots y_m = (f^*\alpha)(xy_{f(1)} \ldots y_{f(k)})$.

Легко проверяется, что $\Sigma$-операды — это операды в традиционном смысле. Отметим также, что определенные так операды естественно было бы называть *левыми* операдами. Случай *правых* операд (отличающийся только обозначениями) рассмотрен ниже в разделе об эквивалентности Мориты.

# МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР НАД ОПЕРАДАМИ

**Теорема 1.** *$FSet$-операды — это то же самое, что и абстрактные клоны, точнее, они рационально эквивалентны как многосортные алгебры.*

Эта — основной результат работы

Тронин С.Н. Абстрактные клоны и операды // Сиб. мат. журн. – 2002. – Т.43, № 4. – С. 924–936.

Пусть $W$ — вербальная категория, $R$ — некоторая $W$-операда.

*Алгебра* над операдой $R$ — это множество $A$ вместе с семейством отображений композиции

$$R(n) \times A^n \to A, \quad (r, a_1, \ldots, a_n) \mapsto ra_1 \ldots a_n = r\overline{a},$$

удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $(xy_1 \ldots y_m)\overline{a}_1 \ldots \overline{a}_m = x(y_1\overline{a}_1) \ldots (y_m\overline{a}_m)$.

Здесь $x \in R(m), y_i \in R(n_i)$, $1 \leq i \leq m$, $\overline{a}_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n_i})$, $a_{i,j} \in A$.

2) $\varepsilon a = a$ для любого $a \in A$.

В алгебре $A$ над $W$-операдой должны также быть выполнены соотношения

3) $(f\omega)a_1 \ldots a_m = \omega a_{f(1)} \ldots a_{f(k)}$ (где $\omega \in R(k)$, $f \in W(k, m)$, $a_1, \ldots, a_m \in A$).

Алгебры над операдой $R$ вместе с очевидным образом определяемыми гомоморфизмами образуют многообразие $Alg(R)$ (или $Alg(R_W)$, если надо подчеркнуть роль вербальной категории $W$). Сигнатурой здесь является сама операда $R$ ($R(n)$ рассматривается как множество символов $n$- арных операций).

**Теорема 2.** *Многообразие алгебр над $FSet$-операдой*

*$R$ рационально эквивалентно многообразию алгебр над соответствующим операде $R$ ( по теореме 1) абстрактному клону.*

Так как любое многообразие мультиоператорных алгебр по сути есть многообразие алгебр над некоторым абстракным клоном (семейством свободных алгебр этого многообразия с конечными базисами), то теоремы 1 и 2 означают, что

**Теорема 3.** *Каждое многообразие мультиоператорных алгебр рационально эквивалентно многообразию алгебр над некоторой операдой (над некоторой вербальной категорией).*

Таким образом, можно утверждать, что соотношение между теорией многообразий алгебр над операдами и классической теорией многообразий мультиоператорных алгебр носит примерно такой же характер, как и соотношение между общей теорией групп и комбинаторной теорией групп.

*$W$-тождествами* для $\Omega$-алгебр будем называть тождества вида

$$\omega_1 x_{f(1)} \dots x_{f(n)} = \omega_2 x_{g(1)} \dots x_{g(m)},$$

где $\omega_1$ и $\omega_2$ принадлежат соответственно $n$-й и $m$-й компонентам свободной несимметрической операды с базисом $\Omega$, $f \in W(n,k)$, $g \in W(m,k)$.

**Теорема 4.** *Класс многообразий мультиоператорных алгебр, определяемых $W$-тождествами, с точностью до рациональной эквивалентности совпадает с классом многообразий алгебр над $W$-операдами.*

**Проблема 1.** Верно ли, что для каждого многообразия мультиоператорных алгебр существует единственная *минимальная* по включению вербальная категория $W$ и операда $R$ над категорией $W$ такие, что данное многообразие рационально эквивалентно $Alg(R_W)$.

Одна вербальная категория с таким свойством существует всегда — это $FSet$.

**Проблема 2.** Описать все вербальные подкатегории категории $FSet$.

Пусть $C$ — операда (над некоторой вербальной категорией), и действие $\lambda \in C(n)$ на элементы $a_1, \ldots, a_n$ из $C$-алгебры $A$ обозначается как $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} a_i$. Назовем операду $C$ *коммутативной*, если для любых $\lambda \in C(n)$, $\gamma \in C(m)$ в любой $C$-алгебре имеет место тождество: $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} \sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\gamma)} x_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\gamma)} \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} x_{i,j}$.

В многообразиях алгебр над коммутативными операдами определен аналог понятия полилинейного отображения, благодаря чему можно построить теорию $C$-линейных $\Omega$-алгебр, частным случаем которой является теория линейных мультиоператорных алгебр. Для таких алгебр определено понятие $C$-полилинейного тождества. Можно ввести также понятие $C$-линейной операды $R$, алгебры над которой являются также $C$-алгебрами, а операции из $R$ должны быть $C$-полилинейными. Следующая теорема обобщает результат работы

Тронин С.Н. Операды в категории конвексоров. II. // Изв. вузов. Математика. – 2002. –№ 5.

а также более ранний результат автора о линейных алгебрах и операдах.

**Теорема 5.** *Класс многообразий $C$-линейных мультиоператоных алгебр, определяемых $C$-полилинейными тождествами, с точностью до рациональной эквивалентности совпадает с классом многообразий алгебр над $C$-линейными $\Sigma$-операдами.*

## МНОГООБРАЗИЯ СУПЕРАЛГЕБР НАД ОПЕРАДАМИ

В данном разделе рассматриваются $K$-линейные $\Sigma$-операды. Здесь $K$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Итак, операда $\mathbf{O}$ — это семейство $\{\mathbf{O}(n)|n = 1,2,\ldots\}$ множеств, причем на $\mathbf{O}(n)$ действует симметрическая группа $\Sigma_n$, и заданы всевозможные операции композиции вида:

$$\mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n_1) \times \ldots \times \mathbf{O}(n_m) \to \mathbf{O}(n_1 + \cdots + n_m)$$

обладающие рядом описанных выше свойств. Операда называется $K$-линейной, если все $\mathbf{O}(n)$ есть $K\Sigma_n$-модули, и все операции композиции $K$-полилинейны. Алгебра над операдой $\mathbf{O}$ есть $K$-модуль $A$, вместе с определенными для каждого $n$ $K$-линейными отображениями вида $\mathbf{O}(n) \otimes_{K\Sigma_n} A^{\otimes n} \to A$, обладающими свойствами, сформулированными выше. Через $Alg(\mathbf{O})$ обозначается категория (многообразие) всех линейных $\mathbf{O}$-алгебр и их гомоморфизмов. Выше было показано (частный случай теоремы 5), что класс многообразий линейных алгебр над линейными операдами в точности совпадает с классом (обычных) многообразий линейных мультиоператорных алгебр, определяемых полилинейными тождествами.

Исходным пунктом применения операд в теории супералгебр является утверждение о существование одного семейства представлений групп $\Sigma_n$ в $L^{\otimes n}$, где $L = L_0 \oplus L_1$ есть $\mathbf{Z}_2$-градуированный $K$-модуль. Для однородного $x \in L$ его степень будем обозначать через $\widetilde{x} \in \{0,1\}$.

**Лемма.** *Существует левое действие $\Sigma_n$ на $L^{\otimes n}$, такое, что для $\overline{x} = x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n$ и $\sigma \in \Sigma_n$ $\sigma\overline{x} = sgn(\sigma,\overline{x})(x_{\sigma^{-1}1} \otimes x_{\sigma^{-1}2} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}n})$ , где*

$sgn(\sigma, \overline{x}) \in \{ +1, -1 \}$, *причем если* $\sigma$ *— транспозиция,* $\sigma = (i,j), i < j$, *то* $sgn(\sigma, \overline{x}) = (-1)^k$, *где* $k = \widetilde{x}_i \widetilde{x}_j + (\widetilde{x}_i + \widetilde{x}_j)(\widetilde{x}_{i+1} + \ldots + \widetilde{x}_{j-1})$.

Пусть дано множество символов операций $\Omega = \bigcup_{n \geq 0} \Omega(n)$. Предположим, что для каждого $n \geq 1$ на множжестве $\Omega_n$ действует слева группа $\Sigma_n$.

Определим *$R$-линейную $\Omega$-супералгебру* $A$ как $\mathbf{Z}_2$-модуль, такой, что для каждого $\omega \in \Omega(n)$ задано *однородное* $K$-линейное отображение $\omega^A : A^{\otimes n} \to A$, причем для всех $\sigma \in \Sigma_n$ выполняется соотношение

$$(\sigma\omega)^A(a_1 \ldots a_n) = sgn(\sigma, \overline{a})\omega^A(a_{\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{\sigma^{-1}(n)})$$

. Для $\Omega$-супералгебр обычным образом определяются тождества и многообразия.

Пусть $\mathbf{O}$ — линейная операда. $\mathbf{Z}_2$-градуированный $K$-модуль $A$ назовем $\mathbf{O}$-супералгеброй, если для каждого $n$ заданы композиции — *однородные* $K$-линейные отображения композиции вида

$$\mathbf{O}(n) \otimes_{K\Sigma_n} A^{\otimes n} \to A,$$

причем структура $K\Sigma_n$-модуля на $A^{\otimes n}$ определена по лемме. Эти отображения должны удовлетворять первым двум свойствам из определения алгебры над операдой, приведенного выше.

Через $Alg_2(\mathbf{O})$ обозначим категорию $\mathbf{O}$-супералгебр.

Пусть $L_0$ — свободный $K$-модуль с базисом $X$, $L_1$ — свободный $K$- модуль с базисом $Y$, $L = L_0 \oplus L_1$. Положим $T^n(X,Y) = L^{\otimes n}$.

**Теорема 6.** *Свободная супералгебра с базисом* $(X,Y)$ *в многообразии* $Alg_2(\mathbf{O})$ *имеет вид*

$$F(X,Y) = \bigoplus\nolimits_{n \geq 1} \mathbf{O}(n) \otimes_{K\Sigma_n} T^n(X,Y)$$

**Теорема 7.** *Если операда* $\mathbf{O}$ *задана множеством образующих* $\Omega$ *и семейством соотношений вида* $\sum_i \lambda_i \sigma_i w_i = 0$ , *где* $\sigma_i \in \Sigma_n, w_i$ *— элементы из свободной несимметрической операды с базисом* $\Omega$ *(т.е. слова в алфавите* $\Omega$*),* $\lambda_i \in K$*, то многообразие* $Alg_2(\mathbf{O})$ *определяется тождествами вида* $\sum_i \lambda_i sgn(\overline{z}, \sigma_i) w_i(\overline{z}\,\sigma_i) = 0$ , *где* $\overline{z} = z_1 z_2 \ldots, z_i \in X \cup Y$*,* $X$ *и* $Y$ *— счетные множества переменных четной и нечетной степени — базис абсолютно свободной* $\Omega$*-супералгебры.*

Можно показать, что именно этим способом из тождеств операд, соответствующих многообразиям коммутативных, ассоциативных, лиевских, йордановых и альтернативных алгебр, получаются тождества, определяющие супералгебры соответствующего типа.

**Теорема 8.** *Многообразия супералгебр, определяемые полилинейными тождествами, и только они, рационально эквивалентны многообразиям вида* $Alg_2(\mathbf{O})$*, где* $\mathbf{O}$ *есть линейная операда.*

Когда $K$ — поле нулевой характеристики, любое многообразие $\Omega$- супералгебр определяется полилинейными тождествами. Рассмотрим операду $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}(n) = K$ для всех $n \geq 1$, действие $\Sigma_n$ тривиально, композиция (1) есть фактически умножение в $K$. $Alg_2(\mathbf{K})$ есть многообразие всех ассоциативных суперкоммутативных супералгебр над $K$ (в традиционном смысле).

**Теорема 9.** *Для любой $R$-линейной операды* $\mathbf{O}$ *существует функтор*

$Alg_2(\mathbf{K}) \times Alg_2(\mathbf{O}) \longrightarrow Alg(\mathbf{O})$,
$(G, A) \mapsto GA = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$.

$GA$ можно назвать $G$-оболочкой супералгебры $A$. При фиксированном $G$ имеем функтор $G : Alg_2(\mathbf{O}) \to Alg(\mathbf{O})$.

**Теорема 10.** *Пусть* $\mathbf{O}$ *представлена как фактороперада свободной операды* $\mathbf{F}$. *Тогда имеет место коммутативная диаграмма функторов:*

$$\begin{array}{ccc} Alg_2(\mathbf{F}) & \xrightarrow{G} & Alg(\mathbf{F}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ Alg_2(\mathbf{O}) & \longrightarrow & Alg(\mathbf{O}) \end{array}$$

*в которой вертикальные стрелки — полные вложения. Если $G = \Lambda$ есть счетно порожденная алгебра Грассмана, то на объектах $G^{-1}(Alg(\mathbf{O})) = Alg_2(\mathbf{O})$. Иными словами, если на $G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$ выполнены тождества $Alg(\mathbf{O})$, то $A_0 \oplus A_1$ принадлежит $Alg_2(\mathbf{O})$.*

Таким образом, в классическом случае алгебр с одной бинарной операцией наше определение многообразий супералгебр эквивалентно традиционному. Аналогичный результат можно доказать и для некоторых других суперкоммутативных супералгебр $G$, а также для модулей над алгебрами над операдами. Для лиевских алгебр и супералгебр это понятие эквивалентно понятию представления.

## ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МОРИТЫ

Пусть $K$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Обозначим через $\mathbf{S}$ категорию, объекты которой — семейства $A = \{A(n,m)|n,m = 1,2,\ldots\}$, причем $A(n,m)$ есть $K\Sigma_n$-$K\Sigma_m$-бимодуль, а морфизмы $\mathbf{S}$ — семейства бимодульных гомоморфизмов. Известно, что $\mathbf{S}$ есть моноидальная замкнутая категория с тензорным произведением

$$(A \otimes B)(n,m) = \overset{\infty}{\underset{r=1}{\oplus}} A(n,r) \otimes_{K\Sigma_r} B(r,m).$$

Пусть $\overline{\mathbf{S}}$ есть подкатегория $\mathbf{S}$, состоящая из биградуированных ассоциативных колец (без единицы) и кольцевых гомоморфизмов. Обозначим через $\mathbf{LS}$ категорию, объекты которой — семейства $P = \{P(n)|n = 1,2,\ldots\}$, в которых $P(n)$ — левые $K\Sigma_n$-модули, а морфизмы — семейства эквивариантных отображений. Определен функтор

$$\otimes : \mathbf{S} \times \mathbf{LS} \to \mathbf{LS}, \quad (A \otimes P)(n) = \overset{\infty}{\underset{r=1}{\oplus}} A(n,r) \otimes_{K\Sigma_r} P(r).$$

Рассмотрим, кроме того, функтор $\widetilde{(\ )} : \mathbf{LS} \to \overline{\mathbf{S}}$:

$$\widetilde{P}(n,m) = \overset{n}{\underset{m=1}{\oplus}} \underset{n_1+\ldots+n_m=n}{\oplus} K\Sigma_n \otimes_C (P(n_1) \otimes_K \ldots \otimes_K P(n_m)),$$

где $C = K\Sigma_{n_1} \otimes_K \ldots \otimes_K K\Sigma_{n_m}$. Определим "тензорное произведение"в $\mathbf{LS}$ по формуле

$$P \odot Q = \widetilde{P} \otimes Q.$$

**Теорема 11.** *Тензорное умножение $\odot$ превращает $\mathbf{LS}$ в моноидальную замкнутую категорию. Точнее,*

$$\mathbf{LS}(P \odot Q, V) \cong \mathbf{LS}(Q, [P,V]),$$

*где*

$$[P, V](m) = \prod_{n \geq m} \mathrm{Hom}_{K\Sigma_n}(\widetilde{(}P)(n, m), V(n)).$$

*Функтор* $\widetilde{(\ )}$ *при этом становится моноидальным:*

$$\widetilde{P \odot Q} \cong \widetilde{P} \otimes \widetilde{Q}.$$

*Он также обладает правым сопряженным:*

$$\overline{\mathbf{S}}(\widetilde{P}, A) \cong \mathbf{LS}(P, A_0).$$

*Здесь* $A_0(n) = A(n, 1)$.

Моноиды в моноидальной категории $\mathbf{LS}$ — это (правые) линейные операды. Выбор "правого"вместо "левого"(рассматривавшегося выше) связан с желанием приблизить обозначения к теории эквивалентности Мориты для модулей, когда рассматриваются категории правых модулей над кольцом, а гомоморфизмы записываются слева от аргументов.

Далее удобно опираться на результаты (и обозначения) работы

Pareigis B. *Non-additive ring and module theory. I. General theory of monoids* // Publ. Math. (Debrecen). – 1977. – T. 24, fasc. 1–2. – P. 189 – 203.

Для операд $R$ и $D$ (как моноидов в моноидальной категории $\mathbf{LS}$ ) ввводятся категории левых, правых и двухсторонних объектов над ними: ${}_R\mathbf{LS}$, $\mathbf{LS}_D$, ${}_R\mathbf{LS}_D$, и для $P \in {}_R\mathbf{LS}_D$ функтор

$$\otimes_R P : \mathbf{LS}_R \to \mathbf{LS}_D.$$

Для $P, Q \in {}_R\mathbf{LS}$ определен ${}_R[P, Q] \in \mathbf{LS}$ такой, что при любом $X \in \mathbf{LS}$ имеет место естественный изоморфизм

$$ {}_R\mathbf{LS}(P \odot X, Q) \cong \mathbf{LS}(X, {}_R[P, Q]). $$

Отсюда следует, что ${}_R[P, P]$ является моноидом в $\mathbf{LS}$, т.е. операдой.

Рассмотрим категорию $K$-модулей $\mathbf{M}$, и определим функтор

$$ \bigcirc : \mathbf{M} \times \mathbf{LS} \to \mathbf{M}, \quad V \bigcirc P = \bigoplus_{r=1}^{\infty} V^{\otimes n} \otimes_{K\Sigma_n} P(n). $$

Имеет место естественный изоморфизм

$$ V \bigcirc (P \odot Q) \cong (V \bigcirc P) \bigcirc Q), $$

благодаря чему можно определить категорию правых объектов $\mathbf{M}$ над операдой $R$, которая будет обозначаться через $Alg(R)$, так как она естественным образом эквивалентна категории алгебр над операдой $R$.

Примерно так же, как это сделано в упомянутой выше работе Б. Парейгиса, для $P \in {}_R\mathbf{LS}_D$ можно определить функтор

$$ \bigcirc_R P : Alg(R) \to Alg(D). $$

При этом, если $Q \in {}_D\mathbf{LS}_Z$, то

$$ (V \bigcirc_R P) \odot_D Q \cong V \bigcirc_R (P \odot_D Q) $$

В частности, если $Z = R$, и функторы $\odot_R P$, $\odot_D Q$ являются взаимно обратными эквивалентностями, то и функторы $\bigcirc_R P$, $\bigcirc_D Q$ также являются взаимно обратными эквивалентностями.

Определим Морита-контекст как пару $(P, Q)$, $P \in {}_R\mathbf{LS}_D$, $Q \in {}_D\mathbf{LS}_R$, вместе с морфизмами $P \odot_D Q \to R$, $Q \odot_R P \to D$, обладающими теми же свойствами, что и Морита-контексты для модулей.

**Теорема 12.** *Для того, чтобы* $\odot_R P$ *и* $\odot_D Q$ *были взаимно обратными эквивалентностями, необходимо и достаточно, чтобы все отображения, соответствующие морфизмам из определения Морита-контекста, то есть отображения вида*

$$\bigoplus_{m\geq 1} \widetilde{P}(n,m)\otimes_{K\Sigma_m} Q(m) \to R(n), \quad \bigoplus_{m\geq 1} \widetilde{Q}(n,m)\otimes_{K\Sigma_m} P(m) \to D(n),$$

*были бы сюръективными.*

Назовем это условием эквивалентности для Морита контекста. Пусть $F \in {}_R\mathbf{LS}$, $F(n) = R(n) \otimes_K KX$, где $KX$ — свободный модуль с базисом $X$ над коммутативным кольцом $K$.

**Теорема 13.** *Пусть Морита-контекст* $({}_RP_D, {}_DQ_R)$ *удовлетворяет условию эквивалентности. Тогда имеют место изоморфизмы:*

$$D \cong {}_R[P,P], R \cong {}_D[Q,Q], Q \cong {}_R[P,R], P \cong {}_D[Q,D].$$

*Кроме того,* $P$ *как объект из* ${}_R\mathbf{LS}$ *есть ретракт* $F$ *для некоторого конечного* $X$, *и* $R$ *есть ретракт* $P\coprod\ldots\coprod P$ *( конечное число слагаемых).*

Дадим более явное описание для ${}_R[P,Q]$, где $P,Q \in {}_R\mathbf{LS}$. Во-первых,

$${}_R[P,Q](m) \subseteq [P,Q](m) = \prod_{n\geq m}(\widetilde{P}(n,m), Q(n)).$$

Во-вторых, ${}_R[P,Q](m)$ состоит из всех тех $\varphi = (\varphi_n)_{n\geq m}$, $\varphi_n : \widetilde{P}(n,m) \to Q(n)$, которые обладают следующим свойством.

Представим $\varphi_n$ как семейство

$\varphi_{n,\alpha} : P(n_1) \otimes \ldots \otimes P(n_m) \to Q(n)$ , где $\alpha = (n_1,\ldots,n_m)$ , $n_1+\ldots+n_m = n$.

Тогда, если $\overline{r}_i p_i \in P(n_i)$, $\overline{r}_i = (r_{1,i}, \ldots, r_{k_i,i})$, $r_{j,i} \in R(d_{j,i})$, $d_{1,i} + \ldots + d_{k_i,i} = n_i$, $p_i \in P(k_i)$, $1 \le i \le m$, то

$$(\overline{r}_1 p_1) \ldots (\overline{r}_m p_m)\varphi_{n,\alpha} = (\overline{r}_1 \ldots \overline{r}_m)(p_1 \ldots p_m \varphi_{l,\beta}),$$

где $l = k_1 + \ldots + k_m$, $\beta = (k_1, \ldots, k_m)$.

Как уже отмечено выше, $D = {}_R[P, P]$ есть подоперада $[P, P]$. При этом $P \in {}_R\mathbf{LS}_D$. Положим $Q = {}_R[P, R]$, тогда $Q \in {}_D\mathbf{LS}_R$.

**Теорема 14.** *Пара $({}_R P_D, {}_D Q_R)$, построенная выше, является Морита-контекстом. Функторы $\odot_R P$ и $\odot_D Q$ осуществляют эквивалентность категорий $\mathbf{LS}_R$ и $\mathbf{LS}_D$ тогда и только тогда, когда $P$ есть ретракт определенного выше $F$ (с конечным множеством $X$) и $R$ есть ретракт копроизведение конечного числа экземпляров $P$. Эти же условия равносильны тому, что функторы $\bigcirc_R P$ и $\bigcirc_D Q$ осуществляют эквивалентность категорий $Alg(R)$ и $Alg(D)$.*

**Теорема 15.** *Имеет место изоморфизм линейных операд:*

$${}_R[F, F] \cong M(X, R)$$

*Здесь $M(X, R)$ – операда многомерных матриц, введенная в работе*

Тронин С.Н., Копп О.А. *Матричные линейные операды*// Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 53–62.

$n$-я компонента этой операды устроена следующим образом:

$M(X, R)(n)$ есть множество всех отображений вида $A : X^n \times X \to R(n)$, таких, что для каждого набора $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ имеет место равенство $A(x_1, \ldots, x_n; y) = 0$ для почти всех $y \in X$.

В упомянутой работе С.Н. Тронина и О.А. Коппа доказан следующий результат:

**Теорема 16.** *Категории $Alg(R)$ и $Alg(M(X, R))$ при конечном $X$ эквивалентны.*

Позднее тот же по сути результат был получен в работе

Kapranov M., Manin Yu. *Modules and Morita theorem for operads* // Amer. J. Math. – 2001. – V. 123, № 5. – P. 811–838.