Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 517.983+517.986

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ПРОЕКТОРОВ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СЛЕДА НА АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Получены новые необходимые и достаточные условия коммутирования проекторов в терминах операторных неравенств. Эти неравенства применены для характеризации следа на алгебрах фон Неймана в классе всех положительных нормальных функционалов. Получена характеризация следа на алгебрах фон Неймана в терминах коммутирования произведений проекторов под знаком веса.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, спектральная теорема, вес, след, нормальный функционал, линейный ограниченный оператор, проектор, операторное неравенство, перестановочность операторов.

Введение

Исследования по задачам характеризации следов в классе нормальных весов или функционалов на алгебрах фон Неймана начались в 70-е гг. XX в. Недавние продвижения в теории сингулярных следов на идеалах компактных операторов и важные приложения этой теории в некоммутативной геометрии привели к задачам характеризации следов в более широких классах весов на алгебрах фон Неймана.

Настоящая заметка является продолжением работ [1–4], обозначений и терминологии которых мы придерживаемся. В [2] доказано неулучшаемое (по числу сомножителей) утверждение: *если алгебра фон Неймана* $\mathscr{M}$ *не имеет прямого абелева слагаемого* (*соответственно собственно бесконечна*), *то каждый оператор* $x \in \mathscr{M}$ *представляется в виде конечной суммы* $x = \sum x_k$, *где каждое* x_k *есть произведение не более чем трех* (*соответственно двух*) *проекторов из* $\mathscr{M}$. В [3] дано второе доказательство этого факта с равномерной оценкой количества слагаемых в таких представлениях. Наименьшая верхняя граница, равная трем, связана с существованием нетривиального конечного следа на этих алгебрах.

В [4] получено новое условие коммутирования пары проекторов в терминах их верхней (нижней) грани в решетке всех проекторов алгебры и показано, что каждый косоэрмитов элемент собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов из $\mathscr{M}$. В конечномерном случае в терминах конечных сумм коммутаторов проекторов описано множество операторов с нулевым каноническим следом tr.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

18. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
19. *Halmos P. R.* Two subspaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 144. P. 381–389.
20. *Бикчентаев А. М.* Характеризация следов в некоторых классах весов на алгебре фон Неймана // Теория функций и ее приложения. Казань: Казанск. фонд Математика, 1995. С. 8–9.
21. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
22. *Sherstnev A. N., Turilova E. A.* Classes of subspaces affiliated with a von Neumann algebra // Russian J. Math. Phys. 1999. V. 6, N 4. P. 426–434.
23. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: ФАН, 1986.
24. *Wegge-Olsen N. E.* K-theory and C^*-algebras. A friendly approach. New York: The Clarendon Press; Oxford Univ. Press, 1993. (Oxford Sci. Publ.).
25. *Kadison R. V.* Diagonalizing matrices // Amer. J. Math. 1984. V. 106, N 6. P. 1451–1468.
26. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1979. V. I.
27. *Deckard D., Pearcy C.* On matrices over ring of continuous complex valued functions on a Stonian space // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14, N 2. P. 322–328.
28. *Akemann C. A., Anderson J., Pedersen G. K.* Triangle inequalities in operator algebras // Linear Multilinear Algebra. 1982. V. 11, N 2. P. 167–178.

Статья поступила 3 июня 2009 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович
НИИ математики и механики
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Университетская, 17, Казань 420008
`Airat.Bikchentaev@ksu.ru`