ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Об одном сопряженном объекте в симметрической тензорной C^*-категории и статистика суперотборных секторов

А.С. Ситдиков,[1,2,*] А.С Никитин[2,†]

[1] *Казанский государственный энергетический университет. Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, 51*
[2] *Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет. Казань, Кремлевская, 35,*

(Поступила в редакцию 15.03.2023; после доработки 17.04.2023; принята к публикации 25.04.2023)

В работе построена модель симметрической тензорной C^*-категории с сопряжением при размерности объекта $d = 3$. Доказывается, что построенный сопряженный объект категории удовлетворяет уравнениям сопряжения, а также рассмотрены и изучены классы морфизмов между объектами смоделированной категории. Данная категория позволяет обобщить C^*-алгебраическую модель наблюдаемых при наличии правил суперотбора, порождаемых сопряженными неабелевыми зарядами. В качестве приложения модели рассматривается область теории передачи квантовой информации, где необходимо учитывать ограничения, связанные с правилами суперотбора.

PACS: 02.10.Hh, 11.10.Cd, 11.30.Er, 11.30.Ly. УДК: 539.1.01, 512.583
Ключевые слова: тензорная симметрическая C^*-категория, сопряженный объект, правила суперотбора, передача квантовой информации.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2340101

ВВЕДЕНИЕ

Теория категорий относится к быстроразвивающимся областям математики: особо сильное развитие в последнее время получили такие ее разделы, как теория высших категорий [1], теория мультикатегорий [2] (см. также [3]), гомотопические категории [4] и др. Эти разделы имеют особый статус в калибровочных теориях и алгебраической квантовой теории поля. Без теории категорий сейчас трудно представить также логику, высшую алгебру и высшую геометрию. Сильно возросло влияние теории категорий и в развитие компьютерных наук [5].

В связи с необходимостью строгого описания суперотборной структуры в рамках алгебраической квантовой теории поля [6] мощное развитие получила и теория тензорных C^*-категорий. Первый этап ее существенного развития произошел в рамках работы [7], где была сформулирована новая теория дуальности, обобщающая классическую дуальность Танаки–Крейна [8].

Суперотборная структура теории тесно связана с внутренними симметриями и порождает динамические правила суперотбора, связанные с абсолютно сохраняющимися абелевыми или неабелевыми зарядами. Такие симметрии описываются с помощью компактных топологических групп, которым в физике элементарных частиц соответствуют группы глобальных калибровочных преобразований. Спектр (множество унитарно неэквивалентных представлений) этой группы образует множество суперотборных секторов рассматриваемой системы, и, следовательно, суперотборным секторам соответствуют конечномерные гильбертовы пространства, где реализуются унитарно неэквивалентные представления компактной группы. Авторам работы [7] удалось показать, что категория конечномерных гильбертовых пространств **hilb** изоморфна абстрактной тензорной симметрической C^*-категории $\mathcal{C}$. Объектам этой категории сопоставляются неабелевы суперотборные заряды и над ее объектами можно определить алгебраические операции сопряжения, перестановочной симметрии и композицию, которые физически можно интерпретировать как переход к античастице, статистику частиц и сложение зарядов соответственно [9]. Согласно указанной изоморфности категорий, абстрактная категория является дуальным объектом к компактной группе G, которую называют дуальностью Доплихера–Робертса. С помощью техники скрещенного произведения [10] группу G можно тогда реконструировать на аксиоматической основе из квазилокальной алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ [6], не вводя ее искусственным образом в качестве группы автоморфизмов $aut(\mathcal{F})$ полевой алгебры $\mathcal{F} = \mathcal{A}\times\mathcal{C}$. Более подробные сведения об этом приведены ниже, в п. 1.4.

Благодаря технологическим возможностям, в последнее время бурные темпы развития получила квантовая информатика. Современная экспериментальная техника позволяет ставить опыты по передаче квантовой информации, закодированной в квантовых состояниях элементраных частиц, или даже атомов и молекул. Носителем единицы квантовой информации при этом является кубит — двухуровневая квантовая система. Например, фотон

* E-mail: airat_vm@rambler.ru
† E-mail: drnikitin@rambler.ru

с продольной и поперечной поляризациями, электрон с двумя базисными состояниями, ион молекулы водорода H_2^+ с базисными состояниями локализации электрона у первого или у второго протона, молекула аммиака NH_3 с базисными состояниями, соответствующими двум зеркальным конфигурациям, разделенным барьером, и получающимися друг из друга зеркальным отражением относительно плоскости, разделяющей эти конфигурации, и т.д. являются примерами двухуровневых квантовых систем, которые находят технические применения. Как оказалось, в случае двухуровневых систем, обладающих абелевыми или неабелевыми калибровочными зарядами, возникают правила суперотбора, ограничивающие количество передаваемой информации. Такая возможность впервые была отмечена в неопубликованной работе Попеску и далее стала активно изучаться в научной литературе. С наиболее существенными результатами в этой области можно ознакомиться в обзоре [11].

В работе [12] было высказано предположение, что в квантовой теории передачи информации, наряду с зарядами, существенную роль могут сыграть и сопряженные заряды. Авторы этой работы исследовали роль сопряженного заряда в квантовой криптографии и выявили, что сопряженный абелев заряд не сможет повысить безопасность криптографических протоколов. Однако если в случае абелевых зарядов происходит полная аннигиляция с образованием вакуума, то в случае неабелевых зарядов дело намного сложнее: композиция заряда с сопряженным приводит к образованию, наряду с вакуумным, также и сектора, содержащего парачастицы. Поэтому этот вопрос еще нельзя считать закрытым.

В работе [13] нами предложена алгебраическая модель для исследования роли правил суперотбора в теории передачи квантовой информации. Такая модель позволила показать, что закодировать информацию можно с помощью лишь тех состояний, проекторы на которые коммутируют с алгеброй наблюдаемых. Поскольку эти проекторы коммутируют также и с элементами представления неабелевой группы, то получатель имеет возможность полностью восстанавливать переданную информацию. Для изучения правил суперотбора при наличии сопряженного заряда в рамках данной модели требуется ее усовершенствование с учетом сопряженного объекта. Поэтому целью настоящей статьи является проведение предварительной работы по моделированию симметрической тензорной C^*-категории с сопряженным объектом при размерности объекта $d = 3$ и изучение определенных классов морфизмов.

В соответствии с этим статья построена следующим образом. Раздел 1 имеет предварительный характер и здесь вводятся необходимые сведения по алгебрам Кунца, симметрическим тензорным C^*-категориям, а также приводятся некоторые конструкции, устанавливающие связь между абстрактными и конкретными категориями в рамках дуальности Доплихера–Робертса. Раздел 2 представляет собой оригинальную часть работы и основным результатом здесь является построение сопряженного объекта категории с размерностью $d = 3$. Доказывается, что уравнения сопряжения для этого объекта выполняются. Далее здесь вводится левое обратное отображение ϕ для объекта ρ и с его помощью определяется статистический параметр, инвариант сектора. Заключительные пункты раздела носят предварительный, вспомогательный характер, которые служат лишь дополнением к основным результатам. Здесь посредством условного ожидания (положительного отображения из полевой алгебры в алгебру наблюдаемых) строится алгебра наблюдаемых, а также рассматривается трехуровневая квантовая система, с помощью которой кодируется квантовая информация. Более подробный анализ передачи информации с помощью кутритов на основе результатов данной работы планируется рассмотреть в отдельной публикации. Наконец, в заключении дается краткий анализ работы.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Алгебра Кунца

Алгебра Кунца [14] играет важную роль в реконструкции компактной группы G в теории дуальности Доплихера–Робертса, а также при установлении изоморфизма между абстрактными тензорными C^*-категориями $\mathcal{C}$ и категорией представлений $\mathbf{rep}(G)$, упомянутыми во введении. Для удобства дальнейшего изложения приведем здесь основные сведения по алгебрам Кунца.

C^*-алгебра Кунца задается соотношениями типа Кунца

$$\psi_i^* \psi_j = \delta_{ij} I, \tag{1}$$

$$\sum_i^d \psi_i \psi_i^* = I \tag{2}$$

и скалярным произведением

$$\psi^* \psi' = \langle \psi, \psi' \rangle I, \quad \psi, \psi' \in \mathcal{H}, \tag{3}$$

где $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство размерности $\dim n \geq 2$ с ортонормированным базисом $\{\psi_i\}_{i=1,2,\ldots,d}$, а ψ_i — изометрические операторы. Другими словами, указанное d-мерное гильбертово пространство порождается линейной оболочкой $Lin\{\psi_i\}_{i=1}^d$ мультиплета ортогональных изометрий $\{\psi\}_{i=1}^d$, которое называют каноническим.

Алгебру $\mathcal{O}_d$ удобно получить с помощью следующей конструкции [15]. Пусть **hilb** — категория тензорных степеней $\underbrace{\mathcal{H} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}}_{r} = \mathcal{H}^r$ d-мерных гильбертовых пространств $\mathcal{H}$=$Lin\{\psi_i\}_{i=1}^d$, где $r \in \mathbb{Z}_+$ и $d > 1$. Морфизмы между тензорными степенями из $\mathcal{H}^s$ в $\mathcal{H}^r$ задаются линейными отображениями вида

$$t = \psi_{i_1}\psi_{i_2}...\psi_{i_r}\psi^*_{j_s}...\psi^*_{j_2}\psi^*_{j_1} \in (\mathcal{H}^s, \mathcal{H}^r),$$

которые образуют комплексное банахово пространство (здесь и в дальнейшем для краткости знаки тензорного произведения между $\psi_i \otimes \psi_j$ будут опущены).

Определим индуктивный предел ${}^0O^k_d$ инъективных отображений морфизмов при каждом фиксированном значении $k = 0; \pm1; \pm2; ...$:

$$(\mathcal{H}^r, \mathcal{H}^{r+k}) \longrightarrow^{\otimes 1} (\mathcal{H}^{r+1}, \mathcal{H}^{r+1+k}) \longrightarrow^{\otimes 1} ... \\ ... \longrightarrow^{\otimes 1} (\mathcal{H}^{r+n}, \mathcal{H}^{r+n+k}) \longrightarrow^{\otimes 1} .... \quad (4)$$

Тогда алгебра ${}^0\mathcal{O}_d$, полученная с помощью прямой суммы ${}^0\mathcal{O}_d = \oplus^0_k \mathcal{O}^k_d$ по всем значениям k, является $*$-алгеброй, а ее пополнение по единственной C^*-норме приводит к C^*-алгебре Кунца $\mathcal{O}_d$. При этом единица алгебры Кунца определяется согласно выражению (2).

Рассмотрим замкнутую подгруппу G группы унитарных операторов $U(\mathcal{H})$. Тогда можно рассматривать категорию $\mathbf{hilb}_G$, объектами которой являются G-модули $\mathcal{H}^r$, а морфизмами – G-модульные гомоморфизмы. Повторяя предыдущую конструкцию (4)

$$(\mathcal{H}^r, \mathcal{H}^{r+k})_G \longrightarrow^{\otimes 1} (\mathcal{H}^{r+1}, \mathcal{H}^{r+1+k})_G \longrightarrow^{\otimes 1} ... \\ ... \longrightarrow^{\otimes 1} (\mathcal{H}^{r+n}, \mathcal{H}^{r+n+k})_G \longrightarrow^{\otimes 1} ..., \quad (5)$$

получим $\mathbb{Z}$-градуированную $*$-алгебру ${}^0\mathcal{O}_G = \oplus^0_k \mathcal{O}^k_G$. Согласно [15], если G представляет собой подгруппу группы $SU(\mathcal{H})$, то в ${}^0\mathcal{O}_G$ существует единственная C^*-полунорма (которая на самом деле является C^*-нормой) и $\mathcal{O}_G$ представляет собой C^*-алгебру, полученную из ${}^0\mathcal{O}_G$ пополнением по этой полунорме. В этом случае алгебра $\mathcal{O}_G$ является простой. Спектральные подпространства алгебры $\mathcal{O}_G$ определяются как $\mathcal{O}^k_G = \{X \in \mathcal{O}_G : \alpha_\lambda(X) = \lambda^k X\}$, где α — непрерывное действие группы окружности на $\mathcal{O}_G$, превращающее $\mathcal{O}_G$ в $\mathbb{Z}$-градуированную C^*-алгебру, $X \in \mathcal{O}_G$. Заметим, что $\mathcal{O}^k_G$ являются замыканиями соответствующих ${}^0\mathcal{O}^k_G$.

Не вдаваясь в детали, отметим, что в $*$-алгебрах ${}^0\mathcal{O}_d$ и ${}^0\mathcal{O}_G$ можно определить нетривиальные канонические эндоморфизмы σ и σ_G соответственно, которые могут быть расширены до канонических эндоморфизмов C^*-алгебр $\mathcal{O}_d$ и $\mathcal{O}_G$. Согласно выражениям (1)–(2), канонический эндоморфизм определяется как $\sigma(X) = \sum_{i=1}^d \psi_i X \psi_i^*$, $X \in \mathcal{O}_d$ или $X \in \mathcal{O}_G$. Если $X \in \mathcal{O}_d$, то $\sigma(X)$ называют внутренним.

Также отметим, что алгебра $\mathcal{O}_G$ и ее канонический эндоморфизм σ_G определяют C^*-динамическую систему

$$(\mathcal{O}_G, \sigma_G), \quad (6)$$

которая играет важную роль в теории Доплихера–Робертса.

1.2. Симметрические тензорные C^*-категории

Приведем основные сведения об абстрактных симметрических тензорных C^*-категориях. Рассмотрение же сопряжения в таких категориях отложим до разд. 3.

Категория $\mathcal{C}$ называется C^*-категорией, если множество морфизмов (ρ, ρ_1) между двумя объектами ρ, ρ_1 образует комплексное банахово пространство и композиция между морфизмами есть билинейное отображение $t, s \to t \circ s$ с $||t \circ s|| \leq ||t|| \circ ||s||$. В этой категории действует контравариантный функтор $*$, обращающий морфизмы и действующий на объектах тождественно, поэтому норма морфизма удовлетворяет C^*-свойству $||r^* \circ r|| = ||r||^2$ для любого $r \in (\rho, \rho_1)$. Множество морфизмов (ρ, ρ) в C^*-категории $\mathcal{C}$ образует C^*-алгебру для каждого $\rho \in \mathbf{obj}\mathcal{C}$.

Тензорная C^*-категория $\mathcal{C}$ — это C^*-категория, снабженная тензорным произведением $\otimes$. Как и в случае категории $\mathbf{hilb}$, это означает, что каждой паре объектов ρ, ρ_1 соответствует объект $\rho \otimes \rho_1$, а также $\mathcal{C}$ имеет тождественный объект (единицу) ι такой, что $\rho \otimes \iota = \rho = \iota \otimes \rho$. При этом для двух морфизмов $t \in (\rho, \rho_1)$ и $s \in (\rho_2, \rho_3)$ существует морфизм $t \times s \in (\rho \otimes \rho_2, \rho_1 \otimes \rho_3)$. Для частного случая категории эндоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$, которую мы будем использовать в п. 3, имеет место соотношение

$$(t \times s) = t\rho(s) = \rho_1(s)t. \quad (7)$$

Отображение $t, s \to t \times s$ ассоциативное и билинейное и

$$1_\iota \times t = t = t \times 1_\iota, \quad (t \times s)^* = t^* \times s^*.$$

Правило чередования

$$t \times s \circ t_1 \times s_1 = (t \circ t_1) \times (s \circ s_1) \quad (8)$$

имеет место, если только определена правая часть.

Такие категории часто называют строго (strict) моноидальными, которые обозначают с помощью тройки $(\mathcal{C}, \otimes, \iota)$, где $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ассоциативный билинейный функтор (тензорное произведение), коммутирующий с операцией сопряжения $*$. В строго моноидальной категории множество морфизмов (ρ, ρ_1) не только образует структуру комплексного векторного пространства, но и имеет также естественную структуру (ι, ι)-бимодуля. Категория $\mathcal{C}$ называется *симметрической*, если имеет место перестановочная симметрия, т.е. если существует отображение $\varepsilon : \mathcal{C} \ni \rho_1, \rho_2 \longrightarrow \varepsilon(\rho_1, \rho_2) \in (\rho_1 \otimes \rho_2, \rho_2 \otimes \rho_1)$, удовлетворяющее условиям:

(1) $\varepsilon(\rho_3, \rho_4) \circ s \times t \ = \ t \times s \circ \varepsilon(\rho_1, \rho_2)$,
(2) $\varepsilon(\rho_1, \rho_2)^* \ = \ \varepsilon(\rho_2, \rho_1)$,
(3) $\varepsilon(\rho_1, \rho_2 \otimes \rho) \ = \ 1_{\rho_2} \times \varepsilon(\rho_1, \rho) \circ \varepsilon(\rho_1, \rho_2) \times 1_\rho$,
(4) $\varepsilon(\rho_1, \rho_2) \circ \varepsilon(\rho_2, \rho_1) \ = \ 1_{\rho_2 \otimes \rho_1}$,

где $t \in (\rho_2, \rho_4), s \in (\rho_1, \rho_3)$. Из 2–4 следует, что для любого ρ справедливо соотношение $\varepsilon(\rho, \iota) = \varepsilon(\iota, \rho) = 1_\rho$. Симметрические тензорные категории обозначим как $(\mathcal{C}, \varepsilon)$.

Объект ρ называется неприводимым, если $(\rho, \rho) = \mathbb{C}I$. Перестановочную симметрию для неприводимых эндоморфизмов удобно классифицировать с помощью левого обратного отображения [15]. Поэтому приведем его определение. *Левое обратное отображение* объекта ρ есть множество ненулевых линейных отображений $\phi^\rho = \{\phi^\rho_{\rho_1,\rho_2} : (\rho \otimes \rho_1, \rho \otimes \rho_2) \longrightarrow (\rho_1, \rho_2)\}$, удовлетворяющих

(1) $\phi^\rho_{\rho_3,\rho_4}(1_\rho \times t \circ r \circ 1_\rho \times s^*) = t \circ \phi^\rho_{\rho_1,\rho_2}(r) \circ s^*$,
(2) $\phi^\rho_{\rho_1\otimes\rho_3,\rho_2\otimes\rho_3}(r \times 1_{\rho_3}) = \phi^\rho_{\rho_1,\rho_2}(r) \times 1_{\rho_3}$,
(3) $\phi^\rho_{\rho_1,\rho_1}(s_1^* \circ s_1) \geq 0$,
(4) $\phi^\rho_{\iota,\iota}(1_\rho) = \mathbf{1}_\iota$,

где $s \in (\rho_1, \rho_3)$, $t \in (\rho_2, \rho_4)$, $r \in (\rho \otimes \rho_1, \rho \otimes \rho_2)$ и $s_1 \in (\rho \otimes \rho_1, \rho \otimes \rho_1)$. Говорят, что $\mathcal{C}$ имеет *левое обратное*, если любой объект этой категории имеет левое обратное отображение.

1.3. Алгебра Доплихера–Робертса

Кратко опишем схему, позволяющую построить C^*-алгебру с помощью объекта ρ категории $\mathcal{C}$ [7]. Эту алгебру в литературе принято называть алгеброй Доплихера–Робертса и ее обозначают как $\mathcal{O}_\rho$. Алгебра $\mathcal{O}_\rho$ по сути изоморфна алгебре $\mathcal{O}_G$.

Рассмотрим для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ банахово пространство $\mathcal{O}^k_\rho$, определяемое индуктивным пределом (см. также (4) и (5)):

$$... \longrightarrow^{\otimes 1} (\rho^r, \rho^{r+k}) \longrightarrow^{\otimes 1} (\rho^{r+1}, \rho^{r+k+1}) \longrightarrow^{\otimes 1} ....$$

Прямая сумма ${}^0\mathcal{O}_\rho = \oplus_k \mathcal{O}^k_\rho$ является $*$-алгеброй, а ее пополнение по C^*-норме представляет собой C^*-алгебру $\mathcal{O}_\rho$. Детальное описание этой алгебры с математической точки зрения, а также тонкости ее получения с помощью категории $\mathcal{C}$ представлены в работе [7].

1.4. Некоторые конструкции

Как было упомянуто во введении, изоморфизм абстрактных симметрических тензорных C^*-категорий, рассмотренных в п. 1.2 к симметрическим тензорным C^*-категориям конечномерных непрерывных унитарных представлений компактной группы Ли, является следствием теории дуальности Доплихера–Робертса [7]. С физической точки зрения категория, которая описывает суперотборную структуру, является симметрической тензорной C^*-категорией локализованных и транспортабельных эндоморфизмов ρ квазилокальной унитальной C^*-алгебры $\mathcal{A}$ с единицей и тривиальным центром [6]. В этой категории объекты априори не ассоциируются с конечномерными гильбертовыми пространствами, а морфизмы не ассоцииуются с линейными отображениями между ними. Такие эндоморфизмы, для которых определены композиция, перестановочная симметрия и сопряжение, образуют полугруппу. Однако в работе [10] показывается, что таким эндоморфизмам соответствуют гильбертовы пространства $\mathcal{H}_\rho$ в скрещенном произведении $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$, которому можно сопоставить в физическом плане полевую C^*-алгебру $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{C}$. В этих пространствах реализуются неприводимые представления группы G и морфизмам отвечают G-модульные гомоморфизмы. Алгебра $\mathcal{A}$ при этом является ее поточечно фиксированной подалгеброй относительно действия группы $G \subseteq aut(\mathcal{F})$, где $aut(\mathcal{F})$ — группа автоморфизмов алгебры $\mathcal{F}$. Поскольку пространства $\mathcal{H}_\rho$ порождены изометриями, в формулировке дуальности Доплихера–Робертса важную роль играют алгебры Кунца $\mathcal{O}_d$, и поэтому многие конструкции в абстрактной категории $\mathcal{C}$ можно наглядно описать с помощью изометрий (1)–(2). Также отметим, что доказательство изоморфизма C^*-динамической системы (6) к C^*-динамической системе $(\mathcal{A}, \rho)$ в случае $G \subseteq SU(d)$ также является следствием этой дуальности [16], где C^*-алгебра $\mathcal{A}$ содержит в качестве подалгебры алгебру Доплихера–Робертса $\mathcal{O}_\rho$, порожденную пространствами сплетающих операторов (ρ^r, ρ^s), $r, s \in \mathbb{N}$.

В связи с этим рассмотрим некоторые конструкции, которые помогут нам увидеть дальнейшие связи между объектами и морфизмами изоморфных категорий $\mathbf{hilb}_G$ и $(\mathcal{C}, \varepsilon)$.

Как было показано в [10, 15], образующими алгебры $\mathcal{O}_G$ $(G = SU(d))$ при произвольном d являются операторы

$$\vartheta(p) = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \psi_{i_1} ... \psi_{i_n} \psi^*_{i_{p(n)}} ... \psi^*_{i_{p(1)}} \tag{9}$$

и

$$S = \frac{1}{\sqrt{d!}} \sum_{p \in \mathbb{P}_d} sign(p) \psi_{p(1)} ... \psi_{p(d)}. \tag{10}$$

Здесь $\mathbb{P}_n$ – симметрическая группа, $p \in \mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}_d \subset \mathbb{P}_n$.

Оператор (9) является унитарным и сплетает тензорные степени вида $(\mathcal{H}^r, \mathcal{H}^r)_G$ в категории $\mathbf{hilb}_G$. В частности, если $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ два гильбертовых пространства, то

$$\vartheta(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = \sum_{i,j} \psi'_i \psi_j \psi'^*_i \psi^*_j.$$

Образом изометрического оператора S является антисимметрическое подпространство в $\mathcal{H}^d = \underbrace{\mathcal{H} \otimes ... \otimes \mathcal{H}}_{d}$, причем группа $SU(d)$ действует в этом подпространстве тривиально. Другими словами, изометрия S инвариантна относительно действия группы $SU(d)$: $\alpha_g(S) = S$, $g \in SU(d)$ и

$$SS^* = \frac{1}{d!} \sum_{p \in \mathbb{P}_d} sign(p) \vartheta^d_{\mathcal{H}}(p) \tag{11}$$

определяет проектор в полностью антисимметрическое подпространство пространства $\mathcal{H}^d$ (где S^* – сопряженный оператор). Сопряженный базис можно определить как $\psi_i^* = (-1)^{d-1}\sqrt{d} S^* \hat{\psi}_i$, где

$$\hat{\psi}_i = \frac{1}{(d-1)!} \sum_{p \in \mathbb{P}_d(i)} sign(p) \psi_{p(2)} ... \psi_{p(d)}, \tag{12}$$

$\mathbb{P}_d(i)$ – подмножество в $\mathbb{P}_d$ с $p(1) = i$.

2. СОПРЯЖЕННЫЙ ОБЪЕКТ И СТАТИСТИКА СЕКТОРОВ

В случае абелевой компактной группы G суперотборная структура исследуемой системы определяется с помощью дискретной аддитивной группы характеров $\mathcal{X}(G)$ — дуальным объектом к группе G [17] и сложению двух зарядов ρ и ρ_1 соответствует композиция $\rho \otimes \rho_1 \equiv \rho \circ \rho_1$. При этом сопряженному объекту $\bar{\rho} \in \mathcal{X}(G)$ соответствует античастица и выполняется условие $\bar{\rho} \otimes \rho = \rho \otimes \bar{\rho} = \iota$ (что физически соответствует аннигиляции пары частица–античастица). Здесь ι означает единицу группы. Однако в случае неабелевой суперотборной структуры дуальный объект компактной группы является тензорной симметрической C^*-категорией и условие сопряжения нельзя интерпретировать столь простым образом. Здесь ключевым моментом является условие выполнимости уравнений сопряжения для морфизма и сопряженного к нему морфизма, которое мы продемонстрируем в нижеследующем пункте.

Ниже рассмотрим тензорную симметрическую C^*-категорию $\mathcal{C}_\rho$, порожденную одним объектом ρ, и построим конкретный сопряженный объект $\bar{\rho} \in$ **obj** $\mathcal{C}_\rho$. При этом будем использовать введенные во первом разделе обозначения и понятия без соответствующих ссылок.

2.1. Сопряженный объект

Определение: Пусть $\mathcal{C}$ — тензорная C^*-категория. Объект $\rho \in$ **obj** $\mathcal{C}$ называется сопряженным к объекту $\bar{\rho} \in$ **obj** $\mathcal{C}$, если существуют морфизмы $r : \iota \to \bar{\rho} \otimes \rho$ и $\bar{r} : \iota \to \rho \otimes \bar{\rho}$ такие, что для них выполнены уравнения сопряжения

$$\bar{r}^* \times 1_\rho \circ 1_\rho \times r = 1_\rho; \qquad r^* \times 1_{\bar{\rho}} \circ 1_{\bar{\rho}} \times \bar{r} = 1_{\bar{\rho}}, \tag{13}$$

где

$$\bar{r} = \varepsilon(\bar{\rho}, \rho) \circ r. \tag{14}$$

Лемма 1. Пусть триплет $(\bar{\rho}, r, \bar{r})$ определяет сопряжение для $\rho \in$ **obj**$\mathcal{C}$. Тогда отображения

$$f : s \to 1_{\bar{\rho}} \times s \circ r \times 1_\rho, \quad (\rho^2, \rho) \to (\rho, \bar{\rho} \otimes \rho); \tag{15}$$

$$\tilde{f} : s' \to \bar{r}^* \times 1_\rho \circ 1_\rho \times s', \quad (\rho, \bar{\rho} \otimes \rho) \to (\rho^2, \rho) \tag{16}$$

инверсны. Здесь $1_{\bar{\rho}} \in (\bar{\rho}, \bar{\rho})$, $1_\rho \in (\rho, \rho)$, $s \in (\rho^2, \rho)$, $s' \in (\rho, \bar{\rho} \otimes \rho)$, а под ρ^2 подразумевается $\rho \otimes \rho$.

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся схемой, приведенной в [7] для категорий с произвольными морфизмами. Из отображения (15) имеем $1_{\bar{\rho}} \times (\bar{r}^* \times 1_\rho \circ 1_\rho \times s') \circ r \times 1_\rho$. Замечая, что $1_{\bar{\rho}} \times 1_\rho = 1_{\bar{\rho}\rho}$, и используя правило чередования (8), получим $1_{\bar{\rho}} \times (\bar{r}^* \times 1_\rho \circ 1_\rho \times s') \circ r \times 1_\rho =$ $1_{\bar{\rho}} \times \bar{r}^* \times 1_\rho \circ (1_{\bar{\rho}\rho} \circ r) \times (s' \circ 1_\rho) = 1_{\bar{\rho}} \times \bar{r}^* \times 1_\rho \circ r \times s' = 1_{\bar{\rho}} \times \bar{r}^* \times 1_\rho \circ r \times (1_{\bar{\rho}\rho} \circ s')$. Заметим, что $r \times s' = r \times 1_{\bar{\rho}\rho} \circ s'$. Принимая во внимание второе из уравнений (13) и беря сопряжение, получим, что $1_{\bar{\rho}} \times \bar{r}^* \times 1_\rho \circ r \times (1_{\bar{\rho}\rho} \circ s') = (1_{\bar{\rho}} \times \bar{r}^* \circ r \times 1_{\bar{\rho}}) \times 1_\rho \circ s' =$ $s' \in (\rho, \bar{\rho} \otimes \rho)$. Следовательно, $f : s \to s'$. Аналогично легко убедиться в том, что $\tilde{f} = f^{-1} : s' \to s$. Пространства (ρ^2, ρ) и $(\rho, \bar{\rho} \otimes \rho)$ изоморфны. Лемма доказана.

Аналогично показывается и инверсность отображений

$$t \to t \times 1_{\bar{\rho}} \circ 1_\rho \times \bar{r}, \quad (\rho^2, \rho) \to (\rho, \rho \otimes \bar{\rho}); \tag{17}$$

$$t' \to 1_\rho \times r^* \circ t' \times 1_\rho, \quad (\rho, \rho \otimes \bar{\rho}) \to (\rho^2, \rho). \tag{18}$$

Согласно определению, для построения сопряженного объекта $\bar{\rho}$, удовлетворяющего уравнениям (13), необходимо иметь морфизмы $r : \iota \to \bar{\rho} \otimes \rho$ и $\bar{r} : \iota \to \rho \otimes \bar{\rho}$. Ниже будем рассматривать конкретную категорию, объектами которой являются эндоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$, а морфизмами – сплетающие операторы. Определим канонический эндоморфизм $\rho(a) = \sum_i^d \psi_i a \psi_i^*$, где $a \in \mathcal{A}$, $\psi_i \in \mathcal{O}_d$ (см. п. 1.1 и 1.4), затем определим r с помощью соотношения $r = \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}_i \psi_i$, где

$$\hat{\psi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_2\psi_3 - \psi_3\psi_2), \; \hat{\psi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_3\psi_1 - \psi_1\psi_3), \\ \hat{\psi}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1) \tag{19}$$

определены согласно (12) при $d = 3$.

Лемма 2. $\bar{r} = \sum_{i=1}^3 \psi_i \hat{\psi}_i$.

Доказательство. В частности, для случая тензорного квадрата гильбертовых пространств $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ из (9) следует, что $\vartheta(p_2) = \vartheta(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = \sum_{i,j} \psi_i' \psi_j \psi_i'^* \psi_j^*$, $i, j = 1, 2, 3$. Принимая во внимание (14) и используя эквивалентность[1] $\varepsilon(\bar{\rho}, \rho) = \vartheta(\hat{\mathcal{H}}, \mathcal{H}) = \sum_{i,j} \psi_i \hat{\psi}_j \psi_i^* \hat{\psi}_j^*$, получим, что $\bar{r} = \vartheta(\hat{\mathcal{H}}, \mathcal{H}) \circ r = (\sum_{i,j} \psi_i \hat{\psi}_j \psi_i^* \hat{\psi}_j^*) \circ (\sum_{i=1}^3 \psi_i \hat{\psi}_i)$. С помощью простых вычислений получим, что $\bar{r} = \sum_{i=1}^3 \psi_i \hat{\psi}_i$. Лемма доказана. Очевидно также, что $\bar{r}^* = \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}_i^* \psi_i^*$.

Сформулируем теперь следующее утверждение.

[1] благодаря упомянутому изоморфизму $\mathbf{hilb}_G \simeq (\mathcal{C}, \varepsilon)$, см. п.2.4

Утверждение. Пусть $r = \sum_{i=1}^{3}\hat{\psi}_i\psi_i$ и $\bar{r} = \sum_{i=1}^{3}\psi_i\hat{\psi}_i$. Тогда существует сопряженный объект $\bar{\rho}(a) = \sum_{i=1}^{3}\hat{\psi}_i a\hat{\psi}_i^*$ такой, что $r\iota(a) = \bar{\rho}\otimes\rho(a)r$ $(a \in \mathcal{A})$ и при этом выполнены уравнения сопряжения (13).

Доказательство. Сначала покажем, что выполнено условие $r\iota(a) = \bar{\rho}\otimes\rho(a)r$ (т.е. $r \in (\iota, \bar{\rho}\otimes\rho)$). Левая часть этого равенства есть $r\iota(a) = ra$. Поскольку $\bar{\rho}\otimes\rho(a) = \sum_{i=1}^{3}\hat{\psi}_i\rho(a)\hat{\psi}_i^*$, то, воспользуясь соотношениями (19) и выражением $r = \sum_{i=1}^{3}\hat{\psi}_i\psi_i$, легко видеть, что $\bar{\rho}\otimes\rho(a) = (\sum_{i=1}^{3}\hat{\psi}_i\rho(a)\hat{\psi}_i^*)\circ(r = \sum_{i=1}^{3}\hat{\psi}_i\psi_i)=$ $(\hat{\psi}_1\psi_1 + \hat{\psi}_2\psi_2 + \hat{\psi}_3\psi_3)a = ra$. Итак, $r \in (\iota, \bar{\rho}\otimes\rho)$.

Рассмотрим теперь первое уравнение сопряжения (13). Преобразуем выражение $\bar{r}^*\times 1_\rho$ с помощью формулы (7). Тогда $\bar{r}^*\times 1_\rho = 1_\rho\circ\bar{r}^*$. Учитывая, что $1_\rho = \sum_{i=1}^{3}\psi_i\psi_i^* \in (\rho,\rho)$ и $\bar{r}^* = \sum_{i=1}^{3}\hat{\psi}_i^*\psi_i^*$, находим выражение для $1_\rho\circ\bar{r}^*$ (из-за громоздкости здесь его не приводим). Преобразуя по той же формуле (7) выражение $1_\rho\times r$, получим $1_\rho\times r = \rho(r)\circ 1_\rho$. Замечая, что композиция на 1_ρ справа не меняет $\rho(r)$, получаем $\rho(r)\circ 1_\rho = \rho(r)$ (действительно, $\rho(r)\circ 1_\rho = (\sum_{i=1}^{3}\psi_i r\psi_i^*)\circ(\sum_{i=1}^{3}\psi_i\psi_i^*)) = \rho(r)$). Композируя $1_\rho\circ\bar{r}^*$ с $\rho(r) = \sum_{i=1}^{3}\psi_i r\psi_i^*$, получим $(1_\rho\circ\bar{r}^*)\circ\rho(r) = 1_\rho$. Первое уравнение сопряжения тем самым выполняется.

Второе уравнение сопряжения доказывается аналогично. Здесь всего лишь заметим, что $1_{\bar{\rho}} = \bar{\rho}(1) \in (\bar{\rho},\bar{\rho})$.

Следствие. $1_{\bar{\rho}} = A_2^\rho$, где $A_2^\rho \in (\rho^2,\rho^2)$ – проектор на антисимметричное подпространство размерности $n = d-1$ (в нашем случае $d = 3$).

Это легко показать, следуя общей формуле [7]

$$A_n^\rho = 1/n!\sum_{p\in\mathbb{P}_n} sign(p)\varepsilon_\rho(p)$$

при $n = 2$. Тогда получаем, что

$$A_2^\rho = 1/2(1_{\rho^2} - \varepsilon(\rho,\rho)). \tag{20}$$

Поскольку $1_{\rho^2} = \rho^2(I) = \rho(\rho(I)) = \sum_{j=1}^{3}\psi_j(\sum_{i=1}^{3}\psi_i\psi_i^*)\psi_j^*$ и $\varepsilon(\rho,\rho)=\vartheta(\mathcal{H},\mathcal{H}) = \sum_{i,j}^{3}\psi_i\psi_j\psi_i^*\psi_j^*$, то непосредственный подсчет показывает, что $1_{\bar{\rho}} = A_2^\rho$.

2.2. Левое обратное для ρ

При наличии сопряженного объекта в категории, с помощью морфизмов, удовлетворяющих уравнениям сопряжения (13), мы можем найти конкретное выражение для левого обратного отображения ϕ. По определению (см. п. 1.2) левое обратное действует по правилу $\phi^\rho = \{\phi^\rho_{\rho_1,\rho_2} : (\rho\otimes\rho_1, \rho\otimes\rho_2) \longrightarrow (\rho_1,\rho_2)\}$. Пусть $\phi_{\sigma,\tau}(x) = s^*\times 1_\tau\circ 1_{\bar{\rho}}\times x\circ r\times 1_\sigma$, где $x \in (\rho\otimes\sigma, \rho\otimes\tau)$ и $r, s \in (\iota, \bar{\rho}\otimes\rho)$ [18]. Покажем теперь, что $\phi_{\bar{\rho},\bar{\rho}}(x) \in (\bar{\rho},\bar{\rho})$. Полагая $s = r$, где $r \in (\iota, \bar{\rho}\otimes\rho)$, получим

$$\phi_{\bar{\rho},\bar{\rho}}(x) = r^*\times 1_{\bar{\rho}}\circ 1_{\bar{\rho}}\times x\circ r\times 1_{\bar{\rho}}, \tag{21}$$

$x \in (\rho\otimes\bar{\rho}, \rho\otimes\bar{\rho})$. Здесь $1_{\bar{\rho}} = \bar{\rho}(I) = \sum_{i=1}^{3}\hat{\psi}_i\hat{\psi}_i^*$. Поскольку по определению (п. 2.1) $r = \sum_{i=1}^{3}\hat{\psi}_i\psi_i$, $r^* = \sum_{i=1}^{3}\psi_i^*\hat{\psi}_i^*$ и, согласно утверждению, $\bar{\rho}(a) = \sum_{i=1}^{3}\hat{\psi}_i a\hat{\psi}_i^*$, то легко показать, что

а) $r^*\times 1_{\bar{\rho}} = \iota(1_{\bar{\rho}})\circ r^* = 1_{\bar{\rho}}\circ r^* = \sum_{i,j}\hat{\psi}_i\hat{\psi}_i^*\psi_j^*\hat{\psi}_j^*$ (где воспользовались свойством (7));

б) $1_{\bar{\rho}}\times x = \bar{\rho}(x) = \sum_k\hat{\psi}_k x\hat{\psi}_k^*$;

в) снова, используя (7), получим,
$r\times 1_{\bar{\rho}} = r\circ\iota(1_{\bar{\rho}}) = r\circ 1_{\bar{\rho}} = \sum_{m,n}\hat{\psi}_m\psi_m\ hat\psi_n\hat{\psi}_n^*$.

Подставляя а)–в) в (21) получим

$$\phi_{\bar{\rho},\bar{\rho}}(x) = 1_{\bar{\rho}}\circ\sum_j\psi_j^* x\psi_j\circ 1_{\bar{\rho}} = \\ = \sum_j\psi_j^* x\psi_j \in (\bar{\rho},\bar{\rho}). \tag{22}$$

Поскольку $x \in (\rho\otimes\bar{\rho}, \rho\otimes\bar{\rho})$, то это равносильным образом можно представить как $x = \rho(t)$, где $t \in (\bar{\rho},\bar{\rho})$. Следовательно, $\sum_j\psi_j^* x\psi_j = \sum_j\sum_i\psi_j^*\psi_i t\psi_i^*\psi_j = \sum_j\sum_i\delta_{ji}t\delta_{ij} = d\cdot t$ и выражение (22) является левым обратным к ρ. Однако здесь требование $\phi(I) = I$ не выполняется, поэтому введем нормированное левое обратное посредством $\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{d}\phi(x)$. Тогда получим, что

$$\tilde{\phi}_{\bar{\rho},\bar{\rho}}(x) = \frac{1}{d}\sum_j\psi_j^* x\psi_j. \tag{23}$$

Рассмотрим действие левого обратного отображения на оператор проектирования $A^\rho_{d=3}$ в антисимметричное подпространство пространства (ρ^3,ρ^3). Используя (10), имеем, что $A_3^\rho = SS^*$, где $S = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_i\psi_i\hat{\psi}_i$, $S^* = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_j\hat{\psi}_j^*\psi_j^*$. Тогда $A_3^\rho = SS^* = \frac{1}{3}\sum_{i,j}\psi_i\hat{\psi}_i\hat{\psi}_j^*\psi_j^*$ и, используя (22), имеем $\phi(A_3^\rho) = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k}\psi_k^*\psi_i\hat{\psi}_i\hat{\psi}_j^*\psi_j^*\psi_k$. Пользуясь соотношениями Кунца (1) и (2), окончательно получаем, что $\phi(A_3^\rho) = \frac{1}{3}\sum_i\hat{\psi}_i\hat{\psi}_i^* = \frac{1}{3}1_{\bar{\rho}} = \frac{1}{3}A_2^\rho$.

2.3. Статистика секторов

Левое обратное позволяет описывать статистику сектора ρ с помощью статистического параметра $\lambda_\rho = \phi(\varepsilon(\rho,\rho))$. Для неприводимомого ρ имеем, что $\phi(\varepsilon(\rho,\rho)) = \lambda_\rho\mathbb{I}$, где $\lambda_\rho \in \{0\}\cup\{\pm d^{-1} : d \in \mathbb{N}\}$, причем $\lambda_\rho = \frac{1}{d}$ соответствует парабозе статистике порядка d с таблицей Юнга, имеющей длину столбца $\leq d$, $\lambda_\rho = -\frac{1}{d}$ соответствует параферми статистике порядка d с таблицей Юнга, имеющей длину строки $\leq d$. Случай $\lambda_\rho = 0$ описывает бесконечную статистику, которая для реальных частиц не наблюдается [2]. Натуральное число d называется статистической размерностью суперотборного сектора, которая совпадает с понятием размерности

[2] Этот случай описывает анионы

$dim(\rho)$ объекта ρ симметрической тензорной категории.

В случае $d = 3$ для одной частицы имеем

$$\phi(\varepsilon(\rho,\rho)) = \phi(\vartheta) = \frac{1}{3}\sum_{k,i,j}\psi_k^*\psi_i\psi_j\psi_i^*\psi_j^*\psi_k = \\ = \frac{1}{3}\sum_i \psi_i\psi_i^* = \frac{1}{3}I,$$

которая определяет сектор с парабозе статистикой со статистической размерностью 3.

Определение статистики секторов нескольких частиц требует также и разложения в прямую сумму тензорных произведений эндоморфизмов (с учетом также и сопряженных эндоморфизмов) и нахождения $3j$-символов. Например, при $d = 3$ имеем разложение $\rho\otimes\rho = \rho_0\oplus\rho_1$, где ρ_0 имеет размерность $d = 1$, а ρ_1 имеет размерность $d = 8$. Это означает, что при «столкновении» двух частиц с $d = 3$ получаются бозе-частица и частица с парастатистикой порядка 8. Однако детальное изучение секторов нескольких частиц с соответствующей классификацией их статистики требуется лишь при конкретном рассмотрении вопросов передачи квантовой инфоромации и квантовой криптографии, поэтому их будем рассматривать в соответствующей следующей публикации.

2.4. Алгебра наблюдаемых

Изученная нами выше абстрактная тензорная C^*-категория канонических эндоморфизмов $\mathcal{C}_\rho$ является замкнутой относительно прямых сумм и подобъектов, а также обладает сопряжением и симметрией. В п. 1.4 было упомянуто, что такая категория позволяет строить скрещенное произведение $\mathcal{A}\times\mathcal{C} = \mathcal{F}\supset\mathcal{A}$ по конструкции, разработанной в [10]. Эта алгебра содержит $\mathcal{A}$ в качестве подалгебры, остающейся поточечно фиксированной относительно действия компактной группы G, причем группа G является замкнутой подгруппой группы $aut(\mathcal{A}\times\mathcal{C})$. В физических терминах компактная группа G соответствует глобальной группе калибровочных преобразований [19].

Не вдаваясь в детали относительно нормы и непрерывности, рассмотрим условное ожидание, т.е. положительное линейное отображение (являющееся идемпотентом) в эту поточечно фиксированную подалгебру $\mathcal{A}$ относительно действия компактной группы G, посредством $m(\mathcal{F}) = \int\alpha_g(B)d\mu(g)$ [15]. Здесь $\alpha : g\to\alpha_g$, $g\in G$, $\alpha_g\in aut(\mathcal{F})$, $B\in\mathcal{F}$ и $d\mu(g)$ – нормированная мера Хаара. Здесь α_g можно определить как $\alpha_g\psi = u(g)\psi$, $u(g)$ – унитарная унимодулярная матрица, которая в случае группы $SU(2)$ имеет вид

$$u(g) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}, \qquad (24)$$

матричные элементы которой удовлетворяют условию $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ и $\alpha\bar\alpha + \beta\bar\beta = 1$. Поскольку $\alpha_g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, то в случае группы $SU(d)$ имеем, что $\alpha_g\rho(A) = \rho(A)\alpha_g = \rho(A)$, где $A\in\mathcal{A}$, $\rho(A) = \sum_{i=1}^d\psi_iA\psi_i^*$. Если, например, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_2$, то с помощью (24), используя параметризацию матричных элементов в виде

$$\alpha = \cos\frac{\theta}{2}\exp\left(i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right);$$
$$\beta = i\sin\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right);$$
$$\bar\alpha = \cos\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right);$$
$$\bar\beta = -i\sin\frac{\theta}{2}\exp\left(i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right), \qquad (25)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\theta$ — углы Эйлера ($0\le\varphi_1\le 2\pi$, $0\le\varphi_2\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$), легко показать, что $\mathcal{O}_{SU(2)} = m(\mathcal{O}_2)$.

В случае сопряженного эндоморфизма $\bar\rho$ имеем дело с сопряженным представлением, а изометрические операторы ψ заменяем на равенства (12). С помощью аналогичных выкладок можно получить новую алгебру $\mathcal{O}_{\widehat{SU(3)}}$, инвариантную относительно сопряженного представления группы $SU(3)$, которая позволяет обобщить алгебру наблюдаемых при наличии сопряженного объекта.

2.5. Квантовая трехуровневая система

По аналогии со схемой, разработанной нами в [13] для случая двухуровневой системы с изоспином $T = 1/2$, рассмотрим трехуровневую квантовую систему (кутрит), пространством состояний которого является трехмерное гильбертово пространство $\mathcal{H}$, образованное линейной оболочкой $\mathcal{H} = Lin\{\psi_i\}_{i=1}^3$ мультиплета ψ_1,ψ_2,ψ_3 (см. п. 1.1). Данный мультиплет служит ортонормированным базисом в пространстве $\mathcal{H}$, где реализуется фундаментальное представление π группы $SU(3)$.

Пространство состояний двух кутритов разлагается в прямую сумму двух когерентных подпространств $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H} = \mathcal{H}_6\oplus\bar{\mathcal{H}}_3$, в каждом из которых действуют неприводимые представления π_6 и $\bar\pi_3$ группы $SU(3)$, где $\pi\otimes\pi = \pi_6\oplus\bar\pi_3$. Базисом пространства $\mathcal{H}_6$ служат симметрические тензоры, образованные из базисных элементов ψ_1,ψ_2,ψ_3, удовлетворяющих соотношениям (1)–(2):

$$\left.\begin{aligned}\psi_{11} &= \psi_1\psi_1;\\ \psi_{12} &= \frac{1}{\sqrt2}(\psi_1\psi_2+\psi_2\psi_1);\\ \psi_{13} &= \frac{1}{\sqrt2}(\psi_1\psi_3+\psi_3\psi_1);\\ \psi_{22} &= \psi_2\psi_2;\\ \psi_{23} &= \frac{1}{\sqrt2}(\psi_2\psi_3+\psi_3\psi_2);\\ \psi_{33} &= \psi_3\psi_3.\end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

Базис пространства $\bar{\mathcal{H}}_3$, в котором действует сопряженное представление $\bar{\pi}_3$ группы $SU(3)$, определяется выражением

$$\left.\begin{aligned}\hat{\psi}_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2\psi_3 - \psi_3\psi_2);\\ \hat{\psi}_{31} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_3\psi_1 - \psi_1\psi_3);\\ \hat{\psi}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1).\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Таким образом, 9-мерное пространство состояний разбивается на два суперотборных сектора, один из которых является сопряженным сектором. Проекторы на базисные состояния пространства $\mathcal{H}_6$ определяются выражениями

$$\begin{aligned}&\Pi_{11} = \psi_{11}\psi_{11}^*, \quad \Pi_{12} = \psi_{12}\psi_{12}^*, \quad \Pi_{13} = \psi_{13}\psi_{13}^*,\\ &\Pi_{22} = \psi_{22}\psi_{22}^*, \quad \Pi_{23} = \psi_{23}\psi_{23}^*, \quad \Pi_{33} = \psi_{33}\psi_{33}^*.\end{aligned} \qquad (26)$$

Аналогично для проекторов на базисные состояния пространства $\bar{\mathcal{H}}_3$ получим выражения

$$\hat{\Pi}_{23} = \hat{\psi}_{23}\hat{\psi}_{23}^*, \quad \hat{\Pi}_{31} = \hat{\psi}_{31}\hat{\psi}_{31}^*, \quad \hat{\Pi}_{12} = \hat{\psi}_{12}\hat{\psi}_{12}^*. \qquad (27)$$

Не вдаваясь в подробности, используя схему работы [13], можно показать, например, что состояние, приготовленное Алисой в симметричном состоянии ψ_{11} в ее координатной системе, Боб будет получать после процедуры усреднения в виде состояния (смешанного)

$$\tilde{\Pi}_{11} = \frac{1}{6}\left(\Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{13} + \Pi_{23} + \Pi_{22} + \Pi_{33}\right). \qquad (28)$$

При получении этого выражения мы воспользовались процедурой усреднения по группе $SU(3)$ с мерой Хаара

$$d\mu(g) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi^5}\sin 2\alpha_2 \cos\alpha_4 \sin^3\alpha_4 \sin 2\alpha_6 d\alpha_1 d\alpha_2 \cdot \ldots \cdot d\alpha_8,$$

приведенной в работе [20], где

$$0 \le \alpha_1\alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \le \pi; \quad 0 \le \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6 \le \pi/2; \quad 0 \le \alpha_8 \le \pi/\sqrt{3}$$

являются обобщенными углами Эйлера. Нетрудно также убедиться в том, что $[\tilde{\Pi}_{11}, G] = 0$, которое указывает на принадлежность $\tilde{\Pi}_{11}$ к алгебре наблюдаемых.

Более подробный анализ суперотборной структуры алгебры $\mathcal{O}_{SU(3)}$ при наличии сопряженных суперотборных секторов и ее роль в передаче квантовой информации мы планируем провести в следующей публикации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено исследование подкатегории категории эндоморфизмов размерности $d = 3$ при наличии сопряженного объекта, который, в силу изоморфизма категории представлений группы G с абстрактной симметрической тензорной C^*-категорией, соответствует сопряженному представлению. Наличие таких сопряженных объектов, связанных с неабелевыми зарядами, благоприятствует более богатой суперотборной структуре теории, поскольку наряду с обычными секторами возникают и сопряженные. Как мы ожидаем, такие сопряженные неабелевы сектора будут играть существенную роль при передаче квантовой информации, а также при формулировке квантовых криптографических протоколов.

Работа выполнена за счет средств программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (Приоритет–2030).

[1] *Leinster T.* Higher operads, higher categories. Cambridge University Press, 2004.
[2] *Hermida C.* // Adv. Math. **151**(2). 164. (2000).
[3] *Тронин С.Н.* // Сиб. матем. журн. **47**, № 3. 670. (2006). (Siberian Math. J. **47**:3. 555. (2006).).
[4] *Dwyer W., Hirschhorn Ph., Kan D., Smith J.* Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories. Mathematical Surveys and Monographs. **113**. AMS, 2004.
[5] *Barr M., Wells Ch.* Category Theory for Computing Science. Theory and Applications of Categories. No. 22, 2012.
[6] *Haag R.* Local Quantum Physics. Second ed. Texts and Monographs in Physics. SpringerVerlag, Berlin, 1996.
[7] *Doplicher S., Roberts J.E.* // Invent. math. **98**. 157. (1989).
[8] *Tannaka T.* // Tohoku Math. J. **45**. 1. (1939); *M.G. Krein* Dokl. Akad. Nauk SSSR. **69**. 725. (1949).
[9] *Doplicher S., Haag R., Roberts J.E.* // Comm. Math. Phys. **35**. 49. (1974).
[10] *Doplicher S., Roberts J.E.* // Annals of Mathematics. **130**. 75. (1989).
[11] *Bartlett S.D., Rudolf T., Spekkens R.W.,* // Rev. of Mod. Phys. **79**. 555. (2007).
[12] *Kitaev A., Mayers D., Preskill J.* // Phys. Rev. **A69**. 052326-1. (2004).
[13] *Sitdikov A.S., Nikitin A.S.* // International Journal of Quantum Information. **20**, No. 1. 2150033. (2022).
[14] *Cuntz J.* // Communications in Mathematical Physics. **57**. 173. (1977).
[15] *Doplicher S., Roberts J.E.* // Journal of functional analysis. **74**. 96. (1987).
[16] *Vasselli E.* // Communications in Mathematical

Physics. **274**. 253. (2007).
[17] *Doplicher S., Haag R., Roberts J.E.* // Comm. Math. Phys. **23**. 199. (1971).
[18] *Longo R., Roberts J.E.* A Theory of Dimension. K-Theory 11: 1-3-159. 1997.
[19] *Doplicher S., Roberts J.E.* // Comm. Math. Phys. **131**. 51. (1990).
[20] *Byrd M.* // J. Math. Phys. **39**. 6125. (1998).

On one conjugate object in the symmetric tensor C*-category and the statistics of superselection sectors

A.S. Sitdikov[1,2,a], **A.S. Nikitin**[2,b]

[1] *Kazan State Power Engineering University. Kazan, 420066, Russia*
[2] *Institute of Computational Mathematics and Information Technologies, Kazan (Volga Region) Federal University. Kazan, 420066, Russia*
E-mail: [a] *airat_vm@rambler.ru*, [b] *drnikitin@rambler.ru*

In this work, a model of a symmetric tensor C^*-category with conjugation is constructed for the dimension of the object $d = 3$. It is proved that the constructed conjugate object of the category satisfies the conjugation equations. The classes of morphisms between objects of the modeled category are considered and studied, and the algebra of observables in the presence of such an conjugate object is introduced. As an application of the model, we consider the theory of quantum information transfer, where it is necessary to take into account the constraints associated with the superselection rules.

PACS: 02.10.Hh, 11.10.Cd, 11.30.Er, 11.30.Ly.
Keywords: tensor symmetric C^*-category, adjoint object, superselection rules, quantum information transfer.
Received 15 March 2023.
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2023. **78**, No. 4. Pp. .

Сведения об авторах

1. Ситдиков Айрат Салимович — доктор физ.-мат. наук, профессор, доцент, зав. кафедрой; e-mail: airat_vm@rambler.ru.
2. Никитин Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: drnikitin@rambler.ru.