

ИСТОРИЯ ЭВРИСТИК В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

М. Ф. Гильмуллин
Елабужский педуниверситет

Одной из важнейших воспитательных целей обучения математике в современной школе является формирование единства логической и эвристической составляющих мышления учащихся. Оно связано с деятельностной природой обучения. Реализация деятельностного подхода затрагивает и содержание обучения. В частности, она требует включения в него, кроме предметных знаний, действий, адекватных понятиям и математическим предложениям, а также различных эвристик. Обучение эвристической деятельности – значительно более сложная и вместе с тем гораздо более важная проблема, чем обучение готовым, сложившимся приемам решения задач. Но такому пониманию роли эвристик в методике обучения математике пришли сравнительно недавно. А реальная практика обучения математике в школе тем более далека от явного выделения и применения эвристик. Хотя неявно они присутствуют в любой математической деятельности.

Большая часть научно-методических исследований по данному вопросу посвящена изучению эвристической деятельности, эвристических методов и приемов. Например, эвристические методы решения задач рассматривались В. М. Брадисом, Е. С. Каниным, Ю. М. Колягиным, Д. Пойа, Г. И. Саранцевым, Л. М. Фридманом и др. Формированию у школьников способностей эвристического поиска доказательства посвящены некоторые работы А. К. Артемова, Я. И. Груденова, М. Клайна, В. И. Крупича, Ю. Н. Кулюткина, И. Лакатоса, Г. И. Саранцева, Г. Фройденталя и др. В данной работе мы попытаемся очертить историю эвристики как науки, рождения эвристик и их применения в математике и ее обучении. В известных работах Д. Пойа, Г. И. Саранцева, Е. Е. Семенова и др. истории эвристик уделяется недостаточно внимания [1-11].

Термин «эвристика» (по греч. отыскиваю, открываю) используется в философии, педагогике, психологии, предметных методиках, логике, теории искусственного интеллекта в различных значениях: 1) специальные методы, используемые в процессе открытия нового (эвристические методы) [10, с. 106]; 2) наука, изучающая продуктивную творческую деятельность (эвристическая деятельность) [9, с. 4]; 3) область исследований, предметом которой являются методы и правила, как делать открытия и изобретения [8, с. 208]; 4) совет, как искать решение задачи [11, с. 39]; 5) основная идея, общий метод поиска решения задачи [3, с. 36]; 6) специальный метод обучения («сократические беседы») или коллективного решения проблем («мозговой штурм»); 7) теория и практика организации избирательного поиска при решении интеллектуальных задач; 8) раздел кибернетики, содержанием которого является разработка методов машинного и математического моделирования человеческого способа

решения проблемных задач, основанная на анализе и экспериментальном изучении этого способа [9, с. 46].

В методике обучения математике под эвристикой обычно понимается всякий способ, применение которого может привести к отысканию нужного метода решения задачи или доказательства теоремы. Эвристические методы обычно противопоставляются логическим методам решения и алгоритмам, опирающимся на точные математические модели. Использование эвристик сокращает время решения задачи по сравнению с методом полного перебора возможных вариантов. Хотя эвристическому методу присущи и некоторые недостатки. Получаемые решения являются лишь допустимыми. Применение эвристик не всегда приводит к решению задачи. При обучении с применением эвристик в слабых классах могут увеличиться затраты времени, возникнуть трудности с дифференциацией обучения.

Большое внимание уделяется эвристикам в известных методических работах Д. Пойа. Особо ценной представляется его методическая таблица «Как решать задачу» и «Краткий эвристический словарь». В эвристическом процессе решения учебных математических задач он выделяет четыре ступени: понимание постановки задачи, составление плана решения, осуществление плана, взгляд назад (изучение полученного решения). Именно в работах Пойа перед нами раскрывается второе лицо математики (в отличие от первого, дедуктивного): математика в процессе создания является экспериментальной, индуктивной наукой. А такую математику, процесс рождения математических знаний, во время обучения показывают редко. Особенно важно знание этого процесса учителю математики. Лучшее понимание природы мыслительных операций оказывает положительное влияние на преподавание математики, как отмечается во многих исследованиях психологов и методистов.

Эвристические методы в математике имеют большое прошлое. Можно даже сказать, что методы эвристики древнее, чем методы строгой дедуктивной математики. Решению первых практических задач народы древних цивилизаций Востока пришли индуктивным путем. Философы Древней Греции стали изучать и формулировать законы творческого мышления. Одним из родоначальников диалектики был Сократ (470-399, до н. э.). Ему приписывается метод нахождения истины при помощи диалогов, т. е. постановки определенных вопросов и целенаправленного нахождения ответов на них. На маевтике (повивальном искусстве) Сократа основан специальный метод обретения новых знаний. Следующим шагом в разработке научной методологии можно считать логику Аристотеля (384-322, до н. э.). Он считал использование силлогизмов и индукции основными путями приобретения знаний в научном исследовании и в обучении.

Методы открытия и изобретения в математике первым изложил известный греческий математик Папп в своей книге «Сокровищница анализа» («Искусство решать задачи») около 300 г. н. э. Он считал, что эвристика создана трудами греческих математиков Евклида, Аполлония и других: «То, что называют эвристикой, можно кратко определить как особое собрание принципов, предназначенное для тех, кто после изучения обычных «Начал»

имеет желание научиться решать математические задачи» [8, с. 132]. Эвристические методы Паппа основаны на анализе и синтезе.

К исследователям, разрабатывавшим эвристику, причисляют таких великих математиков и философов, как Р. Декарт (1596-1650) и Г. В. Лейбниц (1646-1716). Знаменитое декартово сочинение «Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках» (1637) и более раннее «Правила для руководства ума» (1628), кроме разработок общего дедуктивно-математического метода изучения всех вопросов естествознания, уделяют внимание и эвристической деятельности. В понимании Декарта она представляет собой интуицию, непосредственное усмотрение связей и отношений между различными предметами и явлениями. Целью философии Лейбница тоже было создание универсального метода научного познания. Открытие закономерностей новой математики позволили бы решить проблему доказательств, сводя рассуждения к вычислениям. Но Лейбниц тоже неоднократно отмечал значение искусства изобретения: «Нет ничего важнее, чем умение найти источник изобретения, – на мой взгляд, это еще интереснее, чем само изобретение» [8, с. 99].

Интересные выводы для понимания эвристической деятельности содержатся в работах Ж. Адамара, Г. Биркгоффа, Б. Больцано, А. Пуанкаре, А. Эйнштейна и др. До конца XIX века проблема мышления разрабатывалась в рамках философии. В XX в. начинаются активные научные исследования психологии мыслительной деятельности. На развитие исследований активного мышления повлияли физиологические и психологические идеи русских ученых (И. П. Павлов, В. М. Бехтерев). Впервые экспериментальное исследование процесса решения задач предпринял американский психолог Э. Торндайк. В 1898 году он попытался лабораторно исследовать проблемные ситуации, которые могли бы служить моделью для человека. История изучения эвристических процессов началась с животных. Но эвристики у человека включают в себя мотивационно-эмоциональные процессы, обеспечивающие избирательность поиска. В первой половине XX в. были созданы различные психологические концепции процесса мышления: бихевиоризм, теория гештальта и др. В работах советских психологов А. Н. Леонтьева, С. Л. Рубинштейна и др. исследовались процессы актуализации знаний и возникновения догадки. Этапы формирования умственных действий, описанные в психологических теориях Л. С. Выготского, П. Я. Гальперина, В. В. Давыдова, Н. Ф. Талызиной и др. позволяют установить их соответствие с этапами формирования эвристик.

Творческой математической деятельности, активному математическому мышлению обращали свое внимание многие русские и советские математики: А. Д. Александров, П. С. Александров, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Л. Д. Кудрявцев, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин и др. Психология математического мышления исследовалась в трудах многих методистов: В. А. Гусев, Д. Д. Мордухай-Болтовский, Л. М. Фридман, С. И. Шварцбурд и др. В работах по методологии математики выделяются различные аспекты

проявления интуиции в математической деятельности (В. Я. Перминов, Г. И. Рузавин и др.)

В методике преподавания математики вопросы эвристического обучения были поставлены на рубеже XX века. Отмечалось чрезмерное преобладание формально-логического изложения материала в ущерб интуитивно-содержательной стороне. В докладах В. Р. Мрочка и Б. К. Млодзиевского на Всероссийских съездах учителей математики отмечалось, что при построении школьного курса математики следует исходить не только из требований логики, но и учитывать психологию обучающихся. С тех пор прошло почти сто лет. В современном математическом образовании стоят те же вопросы, хотя и на более высоком уровне. Рассмотрим некоторые научно-методические исследования с точки зрения разработки теории эвристики.

В. М. Бродис дает толкование эвристического метода: это метод, при котором учитель вместо изложения учебного материала в готовом виде подводит учащихся к самостоятельному переоткрытию соответствующих предложений и правил [2, с. 65]. Например, «метод целесообразных задач», разработанный С. И. Шохор-Троцким, является разновидностью эвристического метода. Упоминается и такая разновидность эвристического метода, как катехизический: это вопросно-ответный метод, при котором учащиеся приходят к новым для них выводам, отвечая на целенаправленные вопросы учителя, без длительной самостоятельной работы. Яркие примеры этого метода встречаются в педагогических статьях Л. Н. Толстого.

Пойа предлагает такой метод разрабатывания эвристики: это использование личного опыта в решении задач и наблюдение за тем, как решают задачи другие люди. Примером эвристических приемов могут служить наводящие вопросы, приводимые в его таблице (Известны ли вам какая-нибудь родственная задача? Нельзя ли иначе сформулировать задачу?) Последователями Пойа выделены различные эвристические приемы: элементарных задач, предельного случая, вспомогательной фигуры, восходящего анализа, суперпозиции (решение задач в частных случаях), вспомогательных неизвестных и др. Одним из методов обучения эвристикам можно считать методику решения «ключевых» задач Р. Г. Хазанкина.

Общенаучные методы познания: аналогия, наблюдение и опыт, анализ и синтез, индукция и дедукция, обобщение, абстрагирование, конкретизация обладают эвристичностью и широко используются в обучении математике. По мнению Е. Е. Семенова, если рассматривать эвристики в широком смысле, «в поисковом контексте», то ими являются также аксиомы, теоремы, определения, алгоритмы, решенные задачи. В этом смысле все компоненты математического знания составляют единое «эвристическое пространство». Провести классификацию эвристики в этом пространстве будет затруднительно. В частности, он выделяет азбучные, общеучебные, общеметодические и частнометодические эвристики.

При понимании эвристики как способа отыскания метода решения задачи можно провести такую классификацию этого понятия: 1) общие эвристики (сюда относятся общенаучные методы, эвристики Пойа, прием элементарных

задач, предельного случая и др.); 2) частные эвристики (например, метод следов при построении сечений многогранников, аналитико-синтетический метод доказательства неравенств, замена переменных и др.); 3) специальные эвристики (например, достраивание фигуры до целостной конфигурации, метод площадей, методы решения некоторых типов тригонометрических уравнений и др.).

Как рождаются эвристики? Е. Е. Семенов выделяет три варианта их появления в процессе обучения: 1) предлагаются как порождение опыта других; 2) учащиеся подводятся к ним в процессе решения задачи; 3) открываются учеником самостоятельно. Если следовать историко-генетическому методу, то эти же процессы рождения эвристик мы увидим и в истории математики. Е. С. Петрова считает, что формирование современной математической эвристики происходит по трем направлениям: 1) изучение методов и приемов математического творчества из истории развития самой математики; 2) изменение стиля математической деятельности; 3) психологические исследования процесса математического творчества [7, с. 40].

У каждой эвристики есть своя история возникновения, подчас трудно отслеживаемая. Многие из них поучительны и имеют значение как для самой математики, так и для методики обучения. С этой точки зрения можно рассматривать замечательный опыт конкурса «История научных идей и открытий» в Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», проводимой Международным интеллект-клубом «Глюон» с 1991 года. Некоторые задания этого конкурса описывают историю открытия эвристик.

Например: 1) Некоторые математики XVII века полагали, что сумма ряда $1-1+1-1+\dots$ равна $\frac{1}{2}$. Восстановите их рассуждения и, пользуясь сходными соображениями, найдите «сумму» $1-2+2^2-2^3+\dots$ (Эвристика: $S=1-2S$.) 2) Французский математик Роберваль, пытаясь вычислить площадь под аркой циклоиды, нашел кривую, названную им спутницей циклоиды. Ею оказалась синусоида $y=1-\cos x$. Найдите площадь, ограниченную этим графиком на промежутке $[0; 2\pi]$ и осью Ox , не пользуясь интегралом, т. е., как это делал Роберваль. (Эвристика: искомая площадь равна площади прямоугольника.)

Особенно полезно изучение эвристик для решения задач олимпиадного характера. Анализ учебно-методических пособий по подготовке к математическим олимпиадам показывает, что можно выделить эвристику для решения некоторого класса задач, аналогия между которыми далека от тождества. Например, многие задачи на существование решаются с использованием принципа Дирихле. В данном случае этот принцип является эвристикой. Эвристическими можно назвать метод геометрических мест точек, метод площадей и др.

В настоящее время начались исследования по применению исторических эвристик. Например, С. В. Белобородова [1, с. 66] рассматривает «эвристическое введение определения» на примере понятия логарифма. На этом примере убедительно показывается педагогическое значение истории

математики. Идея Архимеда – сведение операций над степенями к операциям над показателями степеней – лежит на основе введения понятия логарифма.

Таким образом, проблема введения эвристик в математическую деятельность школьника актуальна. Для решения этой проблемы предлагаются следующие взаимосвязанные виды работ: 1) учащихся знакомить с эвристиками специально; 2) выделить в курсе методики обучения математике времени для упражнения будущих учителей в применении эвристик; 3) разработать целостный логико-эвристический подход к обучению математике.

Владение математикой означает не только умение решать задачи, но и владение искусством поиска решения, т. е. владение эвристиками. Именно оно понадобится чаще всего в дальнейшей жизни.

Литература

1. Белобородова С. В. Педагогическое значение истории математики на примере становления понятия логарифма/С. В. Белобородова//Математика в школе. – 2003. – №9. – С.65-70.
2. Брадис В. М. Методика преподавания математики в средней школе/В. М. Брадис. – М.: Госуд. уч. -пед. изд-во МП РСФСР, 1954. – 504 с.
3. Виноградова Л. В. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие/Л. В. Виноградова. – Ростов н/Д. : Феникс, 2005. – 252 с.
4. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: кн. для учителя/Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1990. – 224 с.
5. Егоров А. А. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика/А. А. Егоров, Ж. М. Работ. – М. : Бюро Квантум, 2006. – 128 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 97. Прил. к журналу «Квант» №5/2006.)
6. Иванова Т. А. Гуманитаризация общего математического образования: монография. – Нижний Новгород: Изд-во НГПУ, 1998. -206с.
7. Петрова Е. С. Теория и методика обучения математике: учеб. –метод. пособие для студ. мат. спец. : В 3 ч. Ч. 1. Общая методика/Е. С. Петрова. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. – 84 с.
8. Пойа Д. Как решать задачу/Д. Пойа. – М. : Учпедгиз, 1959. – 207 с.
9. Пушкин В. Н. Эвристика и кибернетика/В. Н. Пушкин. – М. : Знание, 1965. – 48 с.
10. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие/Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2002. – 224 с.
11. Семенов Е. Е. Размышления об эвристиках/Е. Е. Семенов//Математика в школе. – 1995. – №5. – С. 39-43.