КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра геометрии

Е.Н. СОСОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГРУПП ЛИ: УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

КАЗАНЬ – 2016

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Учебно-методической комиссии Института математики и механики
Протокол No. 9 от 9 июня 2016 г.

заседания кафедры геометрии
Протокол No. 8 от 30 мая 2016 г.

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, доцент **А.А. Попов**

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук, доцент К(П)ФУ **В.В. Шурыгин (мл.)**

Сосов Е.Н.
Введение в теорию групп Ли: Учебно-методическое пособие / Е.Н. Сосов — Казань: Казан. ун-т, 2016. - 89 с.

Пособие содержит введение в теорию групп Ли.
Предназначено для студентов-математиков III-IV курсов.

УДК 515.17

Оглавление

Введение

Данное учебно-методическое пособие включает минимум вводного курса по группам Ли. Оно предназначено для студентов-математиков III-IV курсов. Рассматриваются топологические группы и группы Ли, матричные группы Ли, а также алгебры, фуктор Ли, линейные представления групп Ли, факторгруппы Ли и прямое произведение групп Ли.

Все задачи в пособии служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

В пособии $\odot$ — обозначает символ начала (конца) доказательства.

0.1 Топологические группы и группы Ли

Группа G, одновременно являющаяся топологическим пространством, называется *топологической группой*, если отображения

$$f : G \times G \to G, \quad f(a, b) = ab, \tag{1}$$

$$S : G \to G, \quad S(a) = a^{-1} \tag{2}$$

являются непрерывными.

Изоморфизм топологических групп — это гомеоморфизм, который является гомоморфизмом.

Топологические группы и их непрерывные гомоморфизмы составляют категорию $GR - TOP$.

Лемма 1. *Топологическая группа тогда и только тогда хаусдорфова, когда ее единица замкнута.*

$\odot$ В хаусдорфовом пространстве любая точка замкнута, поэтому это условие необходимо.

Достаточность. Диагональ $\Delta \subset G \times G$ является прообразом единицы при непрерывном отображении

$$G \times G \to G, \quad (a, b) \mapsto ab^{-1}.$$

Следовательно, диагональ — замкнутое множество. А это эквивалентно тому, что G — хаусдорфово пространство. $\odot$

В дальнейшем мы будем рассматривать, если не оговорено противное, хаусдорфовы топологические группы. Пусть $a \in G$. Левый и правый сдвиги

$$L_a x = ax, \qquad R_a x = xa \qquad (x \in G),$$

а также инволюция S есть гомеоморфизмы топологической группы G на себя.

Следовательно, топология на G полностью определяется заданием базы окрестностей единицы Σ_e. Эта база характеризуется свойствами.

1. Для любых U, $V \in \Sigma_e$ существует такое $W \in \Sigma_e$, что $W \subset U \cap V$.

2. Пересечение всех окрестностей из Σ_e содержит лишь единицу.

3. Для всякого $U \in \Sigma_e$ существует такое $V \in \Sigma_e$, что $VV^{-1} \subset U$.

4. Для всякого $U \in \Sigma_e$ и любого $a \in G$ существует такое $V \in \Sigma_e$, что $aV \subset U$.

5. Для всякого $U \in \Sigma_e$ и любого $a \in G$ найдется такое $V \in \Sigma_e$, что

$$aVa^{-1} \subset U.$$

База окрестностей любого другого элемента $a \in G$ получается из Σ_e левыми (или правыми) сдвигами.

Подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой топологической группы*, если H — подгруппа абстрактной группы, которая является замкнутым подмножеством топологического пространства G.

Очевидно, что топологическая подгруппа является топологической группой относительно индуцированной топологии.

Подгруппа N топологической группы называется ее *нормальным делителем*, если N есть нормальный делитель абстрактной группы: $aN = Na$ для любого $a \in G$.

Подгруппа топологической группы называется *дискретной*, если она дискретна как топологическая группа относительно индуцированной топологии.

Топологическая группа называется *простой*, если всякий ее нормальный делитель дискретен или совпадает с самой группой.

Центром Z топологической группы G называется множество ее центральных элементов, т.е. элементов $z \in G$, перестановочных со всеми элементами из $G : az = za$ для любого $a \in G$.

Группа G, одновременно являющаяся гладким многообразием, называется *группой Ли (гладкой группой)*, если отображения

$$f : G \times G \to G, \quad f(a, b) = ab, \tag{3}$$

$$S : G \to G, \quad S(a) = a^{-1} \tag{4}$$

являются гладкими.

Морфизмом (гладким гомоморфизмом) двух групп Ли называется гомоморфизм абстрактных групп, являющийся гладким отображением многообразий.

Две группы Ли называются *изоморфными*, если найдется морфизм одной группы на другую, являющийся диффеоморфизмом (который в этом случае называется *изоморфизмом*).

Все группы Ли и все их гомоморфизмы образуют категорию LIE.

Известно, что любая C^r-гладкая группа C^r-изоморфна аналитической (класса C^ω) группе. Кроме того, всякая группа Ли локально компактна, поскольку всякое многообразие локально евклидово.

Очевидно, что группа Ли является топологической группой. В определении группы Ли условие гладкости отображения S на самом деле излишне.

Теорема 1. *Если для группы G, являющейся гладким многообразием отображение f гладкое, то отображение S также гладкое, и, значит, G — группа Ли.*

Пусть (U, ψ) — карта единицы e группы Ли, a^i — i-ая координата точки $a \in U$ $(i = 1, \dots, r)$.

Тогда в этой окрестности групповые операции можно записать в координатах. Если a, $b \in U$, то

$$c^i = f^i(a^1, \dots, a^r, b^1, \dots, b^r)$$

есть аналитические функции своих аргументов, которые называются *групповыми функциями.*

Групповые функции удовлетворяют очевидным соотношениям

$$f^i(a, e) = a^i, \qquad f^i(e, b) = b^i, \qquad \frac{\partial f^i}{\partial a^j} |_e = \frac{\partial f^i}{\partial b^j} |_e = \delta^i_j.$$

Подмножество H в группе Ли G называется *подгруппой Ли*, если H — подгруппа, которая является аналитическим подмногообразием.

Матрица A порядка n называется *неисключительной*, если $\det(E + A) \neq 0$. Для такой матрицы существует матрица

$$A^{\#} = (E - A)(E + A)^{-1},$$

называемая ее *кэли-образом.*

Ясно, что множество $\mathbb{R}(n)^0$ всех неисключительных матриц открыто в многообразии $\mathbb{R}(n) = \mathbb{R}(n,n)$ всех квадратных $n \times n$-матриц и потому является гладким многообразием.

Теорема 2. *Отображение $A \mapsto A^{\#}$ является инволютивным автодиффеоморфизмом многообразия $\mathbb{R}(n)^0$, т.е. для любой неисключительной матрицы A матрица $A^{\#}$ также неисключительна, отображение $A \mapsto A^{\#}$ многообразия $\mathbb{R}(n)^0$ в себя гладко и $A^{\#\#} = A$.*

$\odot$ Пусть $B = A^{\#}$. Тогда

$$E+B = E+(E-A)(E+A)^{-1} = [(E+A)+(E-A)](E+A)^{-1} = 2(E+A)^{-1}.$$

Аналогично

$$E - B = 2A(E+A)^{-1}.$$

Поэтому

$$\det(E+B) \neq 0, \qquad B^{\#} = (E-B)(E+B)^{-1} = A.$$

Гладкость отображения $A \mapsto A^{\#}$ очевидна. $\odot$

Примеры групп Ли.

1. $(\mathbb{R}^n, +)$, а также любое конечномерное линейное пространство является группой Ли по сложению.

2. Любая абстрактная (дискретная топологическая) группа будет группой Ли по отношению к гладкости, в которой она является нульмерным многообразием.

3. Единичная окружность с уравнением $|z| = 1$, точками которой являются комплексные числа $z = e^{i\theta}$, является группой Ли по умножению.

4. Множество $\mathbb{R}^*$, $(\mathbb{R}^*_+)$ ненулевых (положительных ненулевых) вещественных чисел есть группа Ли по умножению. Аналогично, множество ненулевых комплексных чисел является группой Ли по умножению.

5. Множество $GL(n,\mathbb{R})$ $(GL(n,\mathbb{C}))$ всех вещественных (комплексных) невырожденных n-матриц является группой Ли по умножению. Ее можно отождествить с группой $GL(V)$ всех линейных неособенных операторов в векторном пространстве V^n над полем $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

Многие часто встречающиеся топологические группы и группы Ли являются замкнутыми подгруппами в $GL(n, \mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ — поле комплексных или вещественных чисел. Они называются *линейными или матричными группами.*

6. Пусть $O(n)$ — группа всех ортогональных n-матриц. Покажем, что это группа Ли по умножению.

Пусть A — неисключительная ортогональная матрица и $B = A^{\#}$. Тогда $A^{\top} = A^{-1}$ и

$$B^{\top} = (E + A^{\top})^{-1}(E - A^{\top}) = (E + A^{-1})^{-1}(E - A^{-1}) =$$

$$(E + A^{-1})^{-1}A^{-1}A(E - A^{-1}) = (A(E + A^{-1}))^{-1}(A - E) =$$

$$(A + E)^{-1}(A - E) = -(E - A)(E + A)^{-1} = -B.$$

Обратно, если $B^{\top} = -B$, то

$$A^{\top} = (E + B^{\top})^{-1}(E - B^{\top}) = (E - B)^{-1}(E + B) =$$

$$(E + B)(E - B)^{-1} = A^{-1},$$

Следовательно, матрица A ортогональна.

Таким образом, *неисключительная матрица тогда и только тогда ортогональна, когда ее кэли-образ является кососимметрической матрицей.*

Но все кососимметрические матрицы образуют линейное пространство размерности $\frac{n(n-1)}{2}$, следовательно, отображение $A \mapsto A^{\#}$ может быть рассматриваемо как картирующее отображение множества (окрестности) всех ортогональных неисключительных матриц $O(n)^0$ (содержащее единичную матрицу) на множество всех кососимметрических неисключительных матриц.

Пусть C — произвольная ортогональная матрица. Множество $O(n)^0C$ является окрестностью матрицы C.

Отображение $AC \mapsto A^{\#}$ есть картирующее отображение этой окрестности на открытое множество неисключительных кососимметрических n-матриц.

Таким образом, $O(n)$ оказывается покрытой картами вида $O(n)^0C$. Если же

$$A_1C_1 = A_2C_2, \text{ где } A_1,\ A_2 \in O(n)^0,$$

а C_1, C_2 — фиксированные матрицы, то $A_2^{\#} = g(A_1^{\#})$, где g — некоторая рациональная матричная функция, зависящая от C_1, C_2.

Следовательно, каждый элемент матрицы$A_2^{\#}$ является рациональной, а значит, и гладкой функцией элементов матрицы $A_1^{\#}$.

Таким образом, любые две карты вида $O(n)^0 C$ согласованы друг с другом и, следовательно, составляют атлас.

Кэли-образ произведения двух матриц является, очевидно, рациональной функцией кэли-образов сомножителей.

Поэтому соответствующая гладкость на группе $O(n)$ согласована с умножением и $O(n)$ является группой Ли.

Анализируя приведенное доказательство, можно сделать вывод о том, что *матричная группа будет группой Ли, если кэли-образы ее неисключительных матриц составляют открытое множество некоторого линейного пространства матриц.*

О матричных группах, обладающих этим свойством говорят, что они *допускают конструкцию Кэли*, а соответствующее линейное пространство матриц называют *кэли-образом* группы.

0.2 Группы Ли $O_J(n)$ и $U_J(n)$

Пусть фиксирована n-матрица J. *J-ортогональной матрицей* называется матрица, которая удовлетворяет соотношению

$$A^\top JA = J.$$

Из соотношения

$$(AB)^\top J(AB) = B^\top (A^\top JA)B = J$$

следует, что произведение двух J-ортогональных матриц является J-ортогональной матрицей.

Если матрица J невырождена, то из определения J-ортогональной матрицы получим

$$\det A = \pm 1, \quad (A^{-1})^\top JA^{-1} = (A^{-1})^\top (A^\top JA)A^{-1} = J.$$

Следовательно, *при невырожденной матрице J все J-ортогональные матрицы порядка n образуют группу*, обозначаемую $O_J(n)$.

При $J = E$ получается группа ортогональных матриц $O(n)$. При $n = 2m$ и

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

получается так называемая *вещественная линейная симплектическая группа $Sp(m, \mathbb{R})$*, элементы которой называются *симплектическими матрицами* порядка $n = 2m$.

Симплектичность матрицы означает, что она сохраняет кососимметрическую форму

$$(x_1 y_{m+1} - x_{m+1} y_1) + \ldots + (x_m y_{2m} - x_{2m} y_m).$$

Докажем, что *неисключительная матрица A тогда и только тогда J-ортогональна, когда ее кэли-образ $A^{\#}$ является J-кососимметрической матрицей*, т.е. удовлетворяет соотношению

$$(A^{\#})^{\top} J = -J A^{\#}. \tag{6}$$

$\odot$ Пусть A — неисключительная J-ортогональная матрица. Тогда

$$(A^{\#})^{\top} J = (E + A^{\top})^{-1}(E - A^{\top})J = (E + JA^{-1}J^{-1})^{-1}(E - JA^{-1}J^{-1})J =$$

$$J(A^{-1}A + A^{-1})^{-1}(A^{-1}A - A^{-1}) = J(A + E)^{-1}(A - E) = -JA^{\#}.$$

Обратно, положим $B = A^{\#}$. Тогда

$$A^{\top} J A = (E + B^{\top})^{-1}(E - B^{\top})J(E - B)(E + B)^{-1} =$$

$$(E + B^{\top})^{-1} J(E + B)(E + B)^{-1}(E - B) = (E + B^{\top})^{-1} J(E - B) =$$

$$(E + B^{\top})^{-1}(E + B^{\top})J = J. \odot$$

Условие J-кососимметричности матрицы (6) линейно и потому определяет в пространстве всех матриц линейное подпространство.

Таким образом, *группа $O_J(n)$ допускает конструкцию Кэли и потому является группой Ли.*

Заметим, что линейное пространство матриц, удовлетворяющих условию (6) при матрице J из (5), имеет размерность $m(2m+1)$. Следовательно, $\dim Sp(m, \mathbb{R}) = m(2m + 1)$.

Пересечение $Sp(m,\mathbb{R})\cap O(2m)$ называется *ортогональной симплектической группой.*

Кэли-образы неисключительных матриц из этой группы имеют вид

$$\begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где D — симметрическая, а C — кососимметрическая матрицы.

Матрицы вида (7) составляют линейное пространство. Следовательно, $Sp(m,\mathbb{R})\cap O(2m)$ является группой Ли размерности m^2.

Аналогично, можно показать, что $GL(n,\mathbb{C})$, $O(n,\mathbb{C})$ и $Sp(n,\mathbb{C})$ являются группами Ли размерностей $2n^2$, $n(n-1)$ и $2m(2m+1)$ соответственно.

Комплексная n-матрица A называется *J-унитарной матрицой*, если она удовлетворяет соотношению

$$\bar{A}^\top JA = J \tag{8}$$

J-унитарные матрицы в случае невырожденной матрицы J составляют группу $U_J(n)$. При $J=E$ получается *группа унитарных матриц* $U(n)$.

В случае, если J имеет вид (5) и $n=2m$ получаем группу $Up(m)$.

Аналогично вещественному случаю доказывается, что *неисключительная комплексная матрица A тогда и только тогда J-унитарна, когда ее кэли-образ удовлетворяет соотношению*

$$(\bar{A}^\#)^\top J = -JA^\#. \tag{9}$$

Это соотношение линейно над полем $\mathbb{R}$, следовательно, $U_J(n)$ *является группой Ли* размерности n^2. Размерность группы Ли $Up(m)$ равна $4m^2$.

Группа $U(n)$ естественно изоморфна ортогональной симплектической группе $Sp(n,\mathbb{R})\cap O(2n)$.

Изоморфизм осуществляется соответствием

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto A+iB \tag{10}$$

Кроме того, ортогональная симплектическая группа в силу равенства

$$Sp(m,\mathbb{R})\cap U(2m) = Sp(m,\mathbb{R})\cap O(2m)$$

изоморфна группе $U(m)$.

$Sp(m) = Sp(m,\mathbb{C}) \cap U(2m)$ называется *унитарной симплектической группой или симплектической группой.*

Это группа Ли размерности $m(2m+1)$, которая содержит ортогональную симплектическую подгруппу $Sp(m) \cap O(2m)$.

Группу $U(m)$ можно интерпретировать как подгруппу всех обратимых линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$, сохраняющих эрмитову форму

$$x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n.$$

Аналогично, можно рассмотреть группу $U^{\mathbb{H}}(n)$ всех обратимых и линейных по отношению к умножению слева преобразований кватернионного пространства $\mathbb{H}^n$, сохраняющих кватернионную эрмитову форму

$$(\xi,\eta) = \xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_n\bar{\eta}_n, \quad \text{где } \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n),\ \eta = (\eta_1,\ldots,\eta_n) \in \mathbb{H}^n.$$

$\mathbb{H}^n$ можно отождествить с $\mathbb{C}^{2n}$, сопоставив любому кватерниону $u + vj$ пару комплексных чисел (u,v).

При этом группа $U^{\mathbb{H}}(n)$ интерпретируется как группа комплексных матриц. Пусть

$$\xi_1 = x_1 + x_{n+1}j,\ \ldots,\ \xi_n = x_n + x_{2n}j,$$

$$\eta_1 = y_1 + y_{n+1}j,\ \ldots,\ \eta_n = y_n + y_{2n}j.$$

В силу равенств $\overline{u+vj} = \bar{u} - vj$ и $vj = j\bar{v}$ получим

$$(\xi,\eta) = [x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n + x_{n+1}\bar{y}_{n+1} + \ldots + x_{2n}\bar{y}_{2n}]+$$

$$[(x_{n+1}y_1 - x_1y_{n+1}) + \ldots + (x_{2n}y_n - x_ny_{2n})]j.$$

Следовательно, каждый элемент группы $U^{\mathbb{H}}(n)$, интерпретированный как комплексная матрица, сохраняет эрмитову форму

$$x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_{2n}\bar{y}_{2n}.$$

(является унитарной матрицей) и кососимметрическую форму

$$(x_{n+1}y_1 - x_1y_{n+1}) + \ldots + (x_{2n}y_n - x_ny_{2n})$$

(является симплектической матрицей), т.е. принадлежит унитарной симплектической группе $Sp(n)$.

Обратно, если матрица A унитарна и симплектична, то, интерпретированная как преобразование пространства $\mathbb{H}^n$, она сохраняет форму (ξ, η).

Это преобразование переводит сумму в сумму и для любого $\zeta \in \mathbb{H}$

$$(A(\zeta\xi) - \zeta A\xi, A\eta) = (A(\zeta\xi), A\eta) - \zeta(A\xi, A\eta) = (\zeta\xi, \eta) - \zeta(\xi, \eta) = 0.$$

Следовательно, $A(\zeta\xi) = \zeta A\xi$, поскольку в виде $A\eta$ может быть представлен любой вектор из $\mathbb{H}^n$.

Таким образом, это преобразование линейно и *группа $U^{\mathbb{H}}(n)$ изоморфна унитарной симплектической группе $Sp(n)$.*

Докажем, что *любая невырожденная матрица A может быть непрерывным путем соединена в $GL(n)$ с ортогональной матрицей.*

$\odot$ Известно, что имеет место однозначное представление (полярное разложение) $A = PU$, где P — положительно определенная матрица и U — ортогональная матрица.

В свою очередь, по теореме приведения к главным осям $P = VDV^{-1}$, где V — ортогональная матрица, а D — диагональная матрица с положительными диагональными элементами.

Следовательно,

$$A = VDV^{-1}U = VDW,$$

где $W = V^{-1}U$. Умножим справа и слева непрерывный путь

$$t \mapsto (1-t)D + tE,$$

соединяющий в $GL(n)$ матрицу D с единичной матрицей E, на ортогональные матрицы V и W.

Получим непрерывный путь, соединяющий в $GL(n)$ матрицу A с ортогональной матрицей $B = VW$. $\odot$

0.3 Линейная связность некоторых матричных групп Ли

Обозначим через $GL^+(n)$ $(SO(n))$ группу всех n-матриц с положительным определителем (унимодулярных ортогональных n-матриц).

Любая унимодулярная ортогональная n-матрица может быть непрерывным путем соединена в группе $GL^+(n)$ (даже в группе $SO(n)$) с единичной матрицей E.

Из доказательства предыдущего утверждения следует, что если $\det A = \det(VDW) > 0$, то $\det B = \det(VW) > 0$.

Таким образом, доказав наше утверждение, мы также докажем, что *группа Ли $GL^+(n)$ линейно связна и группа $GL(n)$ состоит из двух компонент*: подгруппы $GL^+(n)$ и ее смежного класса $GL^-(n)$, состоящего из матриц с отрицательным определителем.

$\odot$ Согласно основной теореме об ортогональных операторах, каждый унимодулярный ортогональный оператор (вращение) является прямой суммой тождественного оператора и "двумерных вращений"с матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{11}$$

Заменив в каждой из этих матриц угол θ на угол $t\theta$, получим непрерывное семейство (путь) ортогональных операторов, связывающее данный оператор, получающийся при $t = 1$, с тождественным оператором, получающимся при $t = 0$.

Затем переходим от операторов к их матрицам. $\odot$

Обозначим через G_e *компоненту единицы* топологической группы G.

Если $a \in G_e$, то $a \in L_a(G_e)$ и

$$G_e \cap L_a(G_e) \neq \emptyset.$$

Следовательно, $L_a(G_e) = G_e$, поскольку компонента единицы связна и максимальна.

Аналогично доказывается, что для $a \in G_e$ $R_a(G_e) = G_e$, и что $G_e^{-1} = G_e$.

Следовательно, G_e — подгруппа G. Более того, любой эндоморфизм T группы G переводит G_e в связную подгруппу $T(G_e)$, пересекающуюся с G_e.

Следовательно, по тем же соображениям, $T(G_e) \subset G_e$ и *компонента единицы G_e является вполне характеристической подгруппой группы G*

(т.е. инвариантной относительно всех эндоморфизмов группы G) и, в частности, является нормальным делителем.

Ясно, что *для любой группы Ли компонента G_e является подгруппой Ли.*

Например, для $GL(n)$ компонентой единицы является группа $GL^+(n)$.

В факторгруппу G/G_e вводят *топологию отождествления*, т.е. топологию, в которой подмножество $C \subset G/G_e$ открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда открыт (замкнут) его полный прообраз в G.

Прообразом единицы группы G/G_e является компонента G_e.

Следовательно, *единица факторгруппы G/G_e тогда и только тогда изолирована (является открыто замкнутым множеством), т.е. факторгруппа дискретна, когда компонента G_e открыта (она всегда замкнута).*

В частности, это так, если группа G локально связна (например, является группой Ли).

Таким образом, *любая локально связная группа G (в частности, любая группа Ли) является расширением связной группы (ее компоненты единицы G_e) посредством дискретной группы G/G_e,* а теория локально связных групп сводится к теории связных групп и теории дискретных (абстрактных) групп.

Например, компонентой единицы группы Ли $O(n)$ является группа Ли $SO(n) = O^+(n)$.

Вторая компонента группы $O(n)$ есть смежный класс $O^-(n)$, элементы которого есть несобственные (с определителем -1) ортогональные матрицы.

Группа $U(n)$ связна.

$\odot$ Любая унитарная матрица имеет вид UDU^{-1}, где U — некоторая унитарная матрица, а D — диагональная матрица с диагональными элементами вида $e^{i\theta_k}$.

Заменив все углы θ_k на $t\theta_k$, получим непрерывное семейство (путь) унитарных матриц, связывающее данную матрицу, получающуюся при $t = 1$, с единичной матрицей, получающейся при $t = 0$. $\odot$

Лемма. *Топологическая группа G связна, если она содержит связную подгруппу H со связным факторпространством G/H.*

$\odot$ Естественное отображение $\pi : G \to G/H$ открыто.

Действительно, если $U \subset G$, то по определению фактортопологии множество $\pi(U) \subset G/H$ тогда и только тогда открыто, когда открыто множество $\pi^{-1}(\pi(U)) \subset G$. Но

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{h \in H} Uh.$$

Тогда, если U, а значит, и любое Uh открыто, то множество $\pi^{-1}(\pi(U))$, а потому и множество $\pi(U)$, открыто.

Пусть $G = U \cup V$, где U и V — непустые открытые множества. Тогда

$$G/H = \pi(U) \cup \pi(V),$$

где множества $\pi(U)$ и $\pi(V)$ также непустые и открытые.

Поэтому $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$, т.к. пространство G/H по условию связно.

Пусть $\pi(a) \in \pi(U) \cap \pi(V)$. Тогда $\pi(a) = aH$ пересекается с $U \cap V$.

При этом $aH = U_1 \cap V_1$, где $U_1 = aH \cap U$ и $V_1 = aH \cap V$ открыты в aH и по доказанному непустые.

Но aH (вместе с H) связно, поэтому $U_1 \cap V_1 \neq \emptyset$ и, значит, $U \cap V \neq \emptyset$. Следовательно, группа G связна. $\odot$

Примеры применения леммы.

1. Рассмотрим отображение $U(n) \to \mathbb{C}^n$, сопоставляющее каждой матрице ее последний столбец.

Образ группы $U(n)$ при этом отображении состоит из всех единичных векторов пространства $\mathbb{C}^n$ и может быть отождествлен единичной сферой $\mathbb{S}^{2n-1}$ пространства $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$.

Прообраз каждого такого вектора в $U(n)$ является смежным классом по подгруппе $U(n-1)$, являющейся прообразом вектора $(0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Следовательно, наше отображение индуцирует биекцию

$$U(n)/U(n-1) \to \mathbb{S}^{2n-1},$$

являющуюся гомеоморфизмом, поскольку непрерывная биекция на компакт является гомеоморфизмом.

Сфера $\mathbb{S}^{2n-1}$ связна. В силу леммы группа $U(n)$ связна, если связна группа $U(n-1)$.

Группа $U(1)$ естественным образом отождествляется со связной группой $\mathbb{S}^1$ и потому связна.

По индукции связность всех групп $U(n)$ оказывается заново доказанной.

2. *Для любого $n \geq 1$ симплектическая группа $Sp(n) = U^{\mathbb{H}}(n)$ связна.*

$\odot$ Факторпространство $Sp(n)/Sp(n-1)$ естественным образом отождествляется с единичной сферой $\mathbb{S}^{4n-1}$ пространства $\mathbb{R}^{4n} = \mathbb{H}^n$ и потому также связно.

А группа $Sp(1) = U^{\mathbb{H}}(1)$ отождествляется со связной группой $\mathbb{S}^3$ кватернионов единичного модуля.$\odot$

3. *Для любого $n \geq 1$ группа унимодулярных унитарных матриц $SU(n)$ связна.*

$\odot$ Нетрудно понять, что

$$SU(n)/SU(n-1) = U(n)/U(n-1)$$

и $SU(1)$, являясь единичной группой, связна. $\odot$

Напомним, что все касательные пространства T_xM, $x \in M$, составляют гладкое $2n$-мерное многообразие $T(M)$, естественным образом проектирующееся на n-мерное гладкое многообразие M.

Проекция

$$\pi : T(M) \to M$$

относит каждому вектору $\mathbf{v} \in T_xM$ точку $x \in M$, так что $T_xM = \pi^{-1}(x)$.

Сечения этой проекции, т.е. гладкие отображения

$$X : M \to T(M), \quad x \mapsto X_x, \quad x \in M,$$

для которых $\pi \circ X = \mathrm{id}$, т.е. $X_x \in T_xM$, называются векторными полями на M.

Дифференциалы $d\Phi_x : T_xM \to T_{\Phi(x)}N$ произвольного гладкого отображения $\Phi : M \to N$ составляют гладкое отображение $T(\Phi) : T(M) \to T(N)$, для которого

$$\pi \circ T(\Phi) = \Phi \circ \pi$$

и соответствия $M \to T(M)$, $\Phi \to T(\Phi)$ являются функтором из категории DIFF гладких многообразий в себя.

Если Φ — диффеоморфизм, то для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ определено поле

$$\Phi_*X = T(\Phi) \circ X \circ \Phi^{-1} \in \mathfrak{X}(N),$$

а для любого векторного поля $Y \in \mathfrak{X}(N)$ определено поле

$$\Phi^*Y = T(\Phi)^{-1} \circ X \circ \Phi \in \mathfrak{X}(M).$$

Ясно, что отображения Φ_* и Φ^* линейны, а так как

$$\Phi_* = (\Phi^*)^{-1} = (\Phi^{-1})^*, \qquad \Phi^* = (\Phi_*)^{-1} = (\Phi^{-1})_*,$$

то они являются взаимно обратными изоморфизмами линейных пространств.

0.4 Алгебра. Экспоненциальная функция в алгебре

Линейное пространство $\mathbb{A}$ с заданным на нем умножением $< \mathbf{x}, \mathbf{y} > \mapsto \mathbf{xy}$ называется *алгеброй* над полем $\mathbb{K}$, если для каждого $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ отображения

$$L_{\mathbf{a}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad L_{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \mathbf{ax}; \qquad R_{\mathbf{a}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad R_{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \mathbf{xa}$$

линейны.

Гомоморфизмом алгебр называется линейное отображение одной алгебры в другую, переводящее произведение в произведение.

Линейное подпространство $\mathbb{B}$ алгебры $\mathbb{A}$ называется *подалгеброй алгебры* $\mathbb{A}$, если для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{B}$ $\mathbf{xy} \in \mathbb{B}$.

Ассоциативная алгебра (в ней умножение ассоциативно) называется *унитальной алгеброй*, если в ней существует *единица* $\mathbf{e}$, т.е. такой элемент, что для любого $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ $\mathbf{ae} = \mathbf{ea} = \mathbf{a}$.

Элемент $\mathbf{a}$ унитальной алгебры $\mathbb{A}$ называется *обратимым*, если существует такой элемент $\mathbf{a}^{-1} \in \mathbb{A}$, что $\mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{e}$.

Множество $G(\mathbb{A})$ всех обратимых элементов алгебры $\mathbb{A}$ является, очевидно, группой по умножению.

Элемент $\mathbf{a}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим линейный оператор $L_{\mathbf{a}}$, т.е. в случае конечномерности алгебры $\mathbb{A}$, когда его матрица $L_{\mathbf{a}}$ невырождена.

При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ отсюда следует, что *для конечномерной алгебры $\mathbb{A}$ множество $G(\mathbb{A})$ открыто в $\mathbb{A}$ и, следовательно, является гладким многообразием размерности $n = \dim \mathbb{A}$.*

Кроме того, умножение в $G(\mathbb{A})$ билинейно и, следовательно, гладкое. Таким образом, $G(\mathbb{A})$ — *группа Ли.*

Норма, заданная в призвольной алгебре $\mathbb{A}$ над полем $\mathbb{R}$, называется *мультипликативной*, если для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{A}$

$$||\mathbf{ab}|| \leq ||\mathbf{a}|| ||\mathbf{b}||.$$

Лемма. *В любой конечномерной алгебре $\mathbb{A}$ над полем $\mathbb{R}$ существует мультипликативная норма.*

$\odot$ Если в $\mathbb{A}$ задан базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$, то формула

$$||\mathbf{a}|| = \max\{|a^1|, \dots, |a^n|\}$$

определяет $\mathbb{A}$ некоторую норму. Покажем, что при некотором выборе базиса эта норма мультипликативна.

Разложения по базису произведений

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = C_{ij}^k \mathbf{e}_k, \qquad i,\ j\ k = 1, \dots, n.$$

определяют так называемые *структурные константы C_{ij}^k алгебры* $\mathbb{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Тогда для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{A}$

$$||\mathbf{ab}|| = ||C_{ij}^k a^i b^j \mathbf{e}_k|| = \max_k |C_{ij}^k a^i b^j| \leq$$

$$\max_k |C_{ij}^k| \max_i |a^i| \max_j |b^j| \leq C ||\mathbf{a}|| ||\mathbf{b}||,$$

где $C = \max_{i,j,k} |C_{ij}^k|$. Поэтому для нормы

$$||\mathbf{a}|| = \frac{1}{\lambda} \max\{|a^1|, \dots, |a^n|\},$$

где $\lambda > C$ (это предыдущая норма, соответствующая базису $\frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_1, \ldots, \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_n$), имеет место неравенство

$$||\mathbf{ab}|| \leq \frac{C}{\lambda}||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||. \quad \odot$$

Для любого элемента $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ рассмотрим ряд

$$\mathbf{e} + t\mathbf{a} + \frac{t^2\mathbf{a}^2}{2} + \ldots + \frac{t^n\mathbf{a}^n}{n!} + \ldots \tag{12}$$

По отношению к произвольной мультипликативной норме этот *ряд абсолютно сходится*, т.е. сходится числовой ряд

$$||\mathbf{e}|| + ||t\mathbf{a}|| + \frac{||t^2\mathbf{a}^2||}{2} + \ldots + \frac{||t^n\mathbf{a}^n||}{n!} + \ldots, \tag{13}$$

поскольку этот ряд мажорируется рядом для $e^{||t\mathbf{a}||}$.

Стандартное доказательство для числовых рядов того, что *любой абсолютно сходящийся ряд сходится*, дословно сохраняется для рядов с векторными членами.

Причем сходимость по норме равносильна в конечномерном линеале покоординатной сходимости. Следовательно, *ряд* (12) *сходится.*

Сумма этого ряда обозначается $e^{t\mathbf{a}}$, а $\mathbb{A}$-значная функция $t \mapsto e^{t\mathbf{a}}$ называется *экспоненциальной функцией в алгебре* $\mathbb{A}$.

В частности, в унитальной алгебре матриц $\mathbb{A} = \mathbb{R}(n)$ получается *матричная экспоненциальная функция* $t \mapsto e^{tA}$, $A \in \mathbb{R}(n)$.

$\mathbb{A}$-значная функция является знакомой нам вектор-функцией. Для таких функций обычным образом (с предосторожностями, вызванными возможной некоммутативностью умножения в алгебре) можно доказать следующие формулы

$$(\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t))' = \mathbf{a}'(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\mathbf{b}'(t), \qquad (\mathbf{a}^{-1}(t))' = -\mathbf{a}^{-1}(t)\mathbf{a}'(t)\mathbf{a}^{-1}(t).$$

Если значения $\mathbb{A}$-значной функции $t \mapsto \mathbf{a}(t)$ перестановочны, т.е. $\mathbf{a}(t)\mathbf{a}(s) = \mathbf{a}(s)\mathbf{a}(t)$ для любых t и s, то никаких оговорок делать не нужно. В частности, для любого многочлена

$$f(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$$

и любой $\mathbb{A}$-значной функции $t \mapsto \mathbf{a}(t)$ с перестановочными значениями имеет место формула

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{a}(t)) = f'(\mathbf{a}(t))\mathbf{a}'(t), \tag{14}$$

где

$$f'(X) = a_1 + 2a_2X + \ldots + ma_mX^{m-1}.$$

Эта формула сохраняется и когда $f(X)$ является суммой бесконечного степенного ряда вида

$$f(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n + \ldots, \tag{15}$$

поскольку необходимая перестановка двух предельных переходов в этом случае, очевидно, законна, в предположении, что $||\mathbf{a}(t)||$ лежит в круге сходимости ряда (15).

Согласно обычным правилам для почленного дифференцирования из (12) получим

$$\frac{de^{t\mathbf{a}}}{dt} = \mathbf{a} + t\mathbf{a}^2 + \ldots + \frac{t^{n-1}\mathbf{a}^n}{(n-1)!} + \ldots =$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{e} + t\mathbf{a} + \ldots + \frac{t^n\mathbf{a}^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots) = \mathbf{a}e^{t\mathbf{a}}.$$

Таким образом, *экспоненциальная функция обладает тем свойством, что для любого t*

$$\frac{de^{t\mathbf{a}}}{dt} = \mathbf{a}e^{t\mathbf{a}}. \tag{16}$$

Следовательно, *решение $\mathbb{A}$-значного дифференциального уравнения*

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}(t). \tag{17}$$

при начальном условии $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$ выражается формулой $\boldsymbol{x}(t) = e^{t\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}$.
⊙ Согласно (14)

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{a}e^{t\mathbf{a}}\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{x}(t)$$

и $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$. С другой стороны, для вектора $\mathbf{x}(t)$ уравнение (17) сводится к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Поэтому решение $\mathbf{x}(t)$ существует и единственно. ⊙

Кроме того, *для любых* s *и* t *имеет место равенство*

$$e^{(t+s)\mathbf{a}} = e^{t\mathbf{a}}e^{s\mathbf{a}}. \tag{18}$$

$\odot$ Для каждого фиксированного s функция $t \mapsto \mathbf{x}(t) = e^{(t+s)\mathbf{a}}$, удовлетворяет уравнению (17) с начальным условием $\mathbf{x}(0) = e^{s\mathbf{a}}$.

Поэтому $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{a}}e^{s\mathbf{a}}$. $\odot$

Из (18) следует, что *функция* $t \mapsto e^{t\boldsymbol{a}}$ *является функцией с перестановочными значениями.*

Поэтому для любого степенного ряда (15) имеет место формула

$$\frac{d}{dt}f(e^{t\mathbf{a}}) = f'(e^{t\mathbf{a}})\mathbf{a}e^{t\mathbf{a}}, \tag{19}$$

если ряд $f(e^{t\mathbf{a}})$ абсолютно сходится.

Векторное пространство $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли*, если задано билинейное отображение (*коммутатор или скобка Ли*) $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющее условию антикоммутативности

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$$

для любых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ и тождеству Якоби

$$[[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}] + [[\mathbf{v}, \mathbf{w}], \mathbf{u}] + [[\mathbf{w}, \mathbf{u}], \mathbf{v}] = 0$$

для любых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathfrak{g}$.

Если для любых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0$, то алгебра Ли называется *коммутативной.*

Две алгебры Ли над одним и тем же полем называются *изоморфными*, если существует линейный изоморфизм одной алгебры на другую, сохраняющий коммутатор.

Если в конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задан базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то разложения по базису произведений

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = C_{ij}^k \mathbf{e}_k, \qquad i,\ j\ k = 1, \ldots, n.$$

называются *структурными уравнениями* алгебры Ли, а числа C_{ij}^k называются *структурными константами* алгебры Ли.

Если заданы структурные уравнения, то вычисление коммутатора векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathfrak{g}$ может быть произведено по формуле

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = C_{ij}^k x^i y^j \mathbf{e}_k.$$

В силу свойств коммутатора структурные константы являются компонентами тензора и удовлетворяют следующим условиям

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \quad C_{ij}^s C_{sm}^k + C_{jm}^s C_{si}^k + C_{mi}^s C_{sj}^k = 0.$$

0.5 Алгебра Ли

Пусть $\varphi : \mathfrak{g} \to \hat{\mathfrak{g}}$ изоморфизм конечномерных алгебр.

Выбрав в этих алгебрах базисы и положив

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \varphi_i^\alpha,$$

получим, что

$$\varphi_s^\alpha C_{ij}^s = \hat{C}_{\beta\gamma}^\alpha \varphi_s^\beta \varphi_s^\gamma.$$

Обратно, если две алгебры Ли заданы своими структурными уравнениями, то вопрос об их изоморфности сводится к разрешимости этой системы алгебраических уравнений относительно φ.

При заданных векторных подпространствах h и k в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ обозначим через $[h, k]$ линейную оболочку всех коммутаторов $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, где $\mathbf{x}$ пробегает h и $\mathbf{y}$ пробегает k.

Векторное подпространство $h \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Ли* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если $[h, h] \subset h$.

Подалгебра Ли, удовлетворяющая более сильному условию $[h, \mathfrak{g}] \subset h$, называется *идеалом.*

Максимальный по включению идеал z, удовлетворяющий условию $[z, \mathfrak{g}] = 0$, называется *центром алгебры Ли.*

Центр алгебры Ли коммутативен, поскольку $[z, z] = 0$.

Всякую комплексную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ размерности r можно рассматривать как вещественную алгебру Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ размерности $2r$ с комплексной структурой J: $J^2 = -E$, удовлетворяющей условию

$$[J\mathbf{x}, J\mathbf{y}] = -[\mathbf{x}, \mathbf{y}].$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ разлагается в прямую сумму

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus J\mathfrak{g}_0.$$

Тогда $\mathfrak{g}_0$ есть подалгебра в $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, называемая *вещественной формой алгебры* $\mathfrak{g}$.

Для произвольных элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ассоциативной алгебры $\mathbb{A}$ определим коммутатор

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{xy} - \mathbf{yx},$$

для которого нетрудно установить свойство антикоммутативности и тождество Якоби.

Полученную алгебру $[\mathbb{A}]$ называют *коммутаторной алгеброй Ли.*

Любой гомоморфизм ассоциативных алгебр является гомоморфизмом соответствующих коммутаторных алгебр.

Следовательно, соответствие $\mathbb{A} \to [\mathbb{A}]$ есть *функтор из категории ассоциативных алгебр $ALG - ASS$ в категорию алгебр Ли $ALG - LIE = lie$.*

Примером коммутаторной алгебры Ли является коммутаторная алгебра Ли $[End\,V] = gl(V)$ ассоциативной алгебры $End\,V$ всех эндоморфизмов (линейных операторов) линейного пространства V.

Если V является алгеброй (не обязательно ассоциативной), то в алгебре $[End\,V]$ выделяется линейное подпространство $\mathfrak{D}(V)$ всех *дифференцирований алгебры V*, т.е. таких линейных отображений $D : V \to V$, что для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$

$$D(\mathbf{xy}) = D\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot D\mathbf{y}.$$

Нетрудно подсчитать, что для любых D_1, $D_2 \in \mathfrak{D}(V)$

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1 \in \mathfrak{D}(V).$$

Таким образом, *линеал $\mathfrak{D}(V)$ является подалгеброй Ли алгебры Ли* $[End\,V]$.

Перепишем тождество Якоби алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в двух эквивалентных формах

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = [[\mathbf{a}, \mathbf{x}], \mathbf{y}] + [\mathbf{x}, [\mathbf{a}, \mathbf{y}]], \qquad \mathbf{a},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathfrak{g};$$

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{x}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{x}]] - [\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]], \qquad \mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathfrak{g};$$

Первое из этих тождеств равносильно утверждению, что *для любого* $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{g}$ *отображение*

$$ad\,\boldsymbol{a} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (ad\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}],$$

является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а второе — утверждению, что *отображение* $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ *— гомоморфизм.*

Дифференцирования вида $ad\,\mathbf{a}$ называются *внутренними дифференцированиями алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Таким образом, *совокупность* $ad\,\mathfrak{g}$ *всех внутренних дифференцирований произвольной алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *является алгеброй Ли, представляющей собой гомоморфный образ алгебры* $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим примеры алгебр Ли.

1. $\mathbb{R}^3$ вместе с векторным произведением $[\cdot,\cdot]$ в качестве коммутатора является алгеброй Ли.

Напомним, что

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] = \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{x},\, \mathbf{y},\, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3.$$

Выберем в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Тогда получим следующие структурные уравнения

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3, \quad [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1, \quad [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2,$$

а также существенные структурные константы

$$C_{12}^3 = C_{23}^1 = C_{31}^2 = 1.$$

Следовательно, коммутатор $\mathbf{z} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ имеет координаты

$$z^1 = x^2y^3 - x^3y^2, \quad z^2 = x^3y^1 - x^1y^3, \quad z^3 = x^1y^2 - x^2y^1.$$

2. Линейное пространство n-матриц $\mathbb{K}(n)$ над полем $\mathbb{K}$ с коммутатором $[A, B] = AB - BA$ образует так называемую *полную линейную (или матричную) алгебру Ли* $gl(n, \mathbb{K})$.

Введем в $gl(n, \mathbb{K})$ базис, состоящий из матричных единиц E_i^j, у которых на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит единица, а все остальные элементы равны нулю.

Тогда для произвольной матрицы A получаем разложение по базису

$$A = A^i_j E^j_i.$$

Учитывая, что $E^j_i E^k_l = \delta^j_l E^k_i$, получим структурные уравнения

$$[E^j_i, E^k_l] = \delta^j_l E^k_i - \delta^k_i E^j_l.$$

Следовательно, коммутатор любой пары матриц запишется в координатах в виде

$$[A, B] = (A^i_s B^s_j - B^i_s A^s_j) E^j_i.$$

Отметим, что вещественной формой комплексной алгебры $gl(n, \mathbb{C})$ является алгебра $gl(n, \mathbb{R})$.

3. Выберем в линейном пространстве V^n над полем $\mathbb{K}$ некоторый базис. Тогда $gl(V^n)$ можно отождествить с $gl(n, \mathbb{K})$.

Пусть в V^n задана билинейная форма $J(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Подмножество $g(J) \subset gl(V^n)$ всех линейных операторов, удовлетворяющих условию инвариантности

$$J(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + J(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = 0,$$

образует подалгебру Ли.

$\odot$ Для любых A, $B \in g(J)$

$$J([A, B]\mathbf{x}, \mathbf{y}) = J(AB\mathbf{x}, \mathbf{y}) - J(BA\mathbf{x}, y) = -J(B\mathbf{x}, A\mathbf{y}) + J(A\mathbf{x}, B\mathbf{y}) = -J(\mathbf{x}, [A, B]\mathbf{y}).$$

Следовательно, $[A, B] \in g(J)$. $\odot$

Условие инвариантности можно записать в матричном виде. Полагая $J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^\top J Y$, получим

$$A^\top J + JA = 0,$$

т.е. матрица оператора A является J-кососимметрической матрицей.

Рассмотрим случай, когда V^n вещественно, а форма J невырождена и симметрична.

Тогда $g(J)$ называется вещественной *псевдоортогональной алгеброй Ли* $o(p, q)$ соответствующего индекса (p, q).

Выберем матрицу билинейной формы в каноническом виде

$$J = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} \tag{20}$$

Разбивая матрицу A на блоки

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

получим следующие условия ее J-кососимметричности

$$A_1^\top = -A_1, \quad A_2^\top = A_3, \quad A_4^\top = -A_4.$$

Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & A_4 \end{pmatrix},$$

где матрицы A_1 и A_4 кососимметричны. Следовательно,

$$\dim o(p,q) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + pq.$$

Если форма J положительно определенная ($p = n$, $q = 0$), то получаем *вещественную ортогональную алгебру Ли* $o(n, \mathbb{R})$ *размерности* $\frac{n(n-1)}{2}$.

В ортонормированном базисе $J = E$ и условие инвариантности примет вид $A^\top + A = 0$.

Следовательно, *алгебра* $o(n, \mathbb{R})$ *состоит из кососимметрических матриц.*

4. Выберем в качестве базиса в алгебре $o(3, \mathbb{R})$ матрицы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Структурные уравнения имеют вид

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_3, e_1] = e_2.$$

Таким образом, *алгебра Ли* $o(3, \mathbb{R})$ *изоморфна трехмерной алгебре Ли* $\mathbb{R}^3$ *вместе с векторным произведением* $[\cdot, \cdot]$.

Изоморфизм устанавливается соответствием

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Множество $\mathfrak{X}(M)$ всех дифференцируемых векторных полей на гладком многообразии M с коммутатором векторных полей является бесконечномерной алгеброй Ли.

Пусть $\{\mathbf{e}_i(x)\}$ — произвольное поле реперов на многообразии M и $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = R^s_{ij}\mathbf{e}_s$, где $R^s_{ij}(x)$ — объект неголономности этого поля.

Полагая $\mathbf{u} = u^i(x)\mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = v^j(x)\mathbf{e}_j$, получим

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^k = u^i\mathbf{e}_i(v^k) - v^j\mathbf{e}_j(u^k) + R^k_{ij}u^i v^j.$$

В частности, в натуральном поле реперов $\mathbf{e}_i = \partial_i$ имеем $R^s_{ij} = 0$.

0.6 Левоинвариантные векторные поля. Параллелизуемость группы Ли. Интегральные кривые левоинвариантных векторных полей и однопараметрические подгруппы

Пусть G — группа Ли. Векторное поле $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(G)$ называется *левоинвариантным*, если для любого $a \in G$

$$L_a^*\mathbf{x} = \mathbf{x},$$

т.е. если для любых a, $b \in G$

$$\mathbf{x}_b = (dL_{a^{-1}})_{ab}(\mathbf{x}_{ab}). \tag{21}$$

Ясно, что *все левоинвариантные векторные поля составляют линейное подпространство пространства $\mathfrak{X}(G)$ всех гладких векторных полей, которое обозначим через $\mathfrak{g}$.*

Векторное поле $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{X}(G)$ тогда и только тогда левоинварантно, когда для любого $a \in G$

$$\mathbf{x}_a = (dL_a)_e(\mathbf{x}_e). \tag{22}$$

$\odot$ Соотношение (22) является частным случаем (при $b = e$) формулы (21) и потому выполнено, если векторное поле $\mathbf{x}$ левоинвариантно.

Обратно, если (22) выполнено, то для любых a, $b \in G$

$$\mathbf{x}_{ab} = (dL_{ab})_e(\mathbf{x}_e) = ((dL_a)_b \circ (dL_b)_e)(\mathbf{x}_e) = (dL_a)_b(\mathbf{x}_b),$$

что равносильно (21). $\odot$

Линейное отображение $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_e$ пространства $\mathfrak{g}$ в касательное пространство T_eG является изоморфизмом.

$\odot$ Для любого $\mathbf{a} \in T_eG$ отображение $a \mapsto (dL_a)_e\mathbf{a}$, $a \in G$, есть векторное поле на G (поскольку его гладкость следует из представления этого отображения в локальных координатах), обладающее свойством (21) и потому левоинвариантным. Кроме того, полученное отображение $T_eG \to \mathfrak{g}$, очевидно, является обратным к отображению $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_e$. $\odot$

Таким образом, можно посредством отображения $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_e$ отождествить пространство $\mathfrak{g}$ с пространством T_eG и

$$\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = n = \dim G.$$

$\mathbf{F}(M)$-модуль $\mathfrak{X}(M)$ над алгеброй $\mathbf{F}(M)$ всех гладких функций на гладком многообразии M называется *свободным модулем ранга n*, если на M существует такое семейство $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ векторных полей (базис $\mathbf{F}(M)$-модуля $\mathfrak{X}(M)$), что любое векторное поле $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(M)$ единственным образом представляется в виде

$$\mathbf{x} = f^i\mathbf{x}_i,$$

где $f^1, \dots, f^n \in \mathbf{F}(M)$. При этом многообразие M называется *параллелизуемым.*

Теорема 1. *Любая группа Ли G параллелизуема. Более того, каждый базис $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ линейного пространства $\mathfrak{g}$ является базисом $\boldsymbol{F}(G)$-модуля $\mathfrak{X}(G)$.*

$\odot$ Для каждого $a \in G$ векторы $(\mathbf{x}_1)_a, \dots, (\mathbf{x}_n)_a$ составляют базис линейного пространства T_aG.

Следовательно, для любого $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(G)$ вектор $\mathbf{x}_a$ однозначно разлагается по векторам $(\mathbf{x}_1)_a, \dots, (\mathbf{x}_n)_a$.

Это означает, что для любого $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(G)$ существуют такие функции $f^i : a \mapsto f^i(a)$, $a \in G$, что

$$\mathbf{x} = f^i \mathbf{x}_i.$$

Поэтому нужно лишь доказать, что $f^i \in \mathbf{F}(G)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть (U, x^k) — произвольная карта многообразия G. Поля $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ гладкие, поэтому на U существуют такие гладкие функции $x_1^i, \ldots, x_n^i$, $i = 1, \ldots, n$, что для любого $j = 1, \ldots, n$

$$\mathbf{x}_j = x_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Ясно, что на U $\det(x_j^i) \neq 0$, следовательно, существуют такие гладкие функции y_i^k, что

$$x_j^i y_i^k = \delta_j^k, \qquad i,\ j,\ k = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\mathbf{x} = f^j \mathbf{x}_j = f^j x_j^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

т.е. функции $f^j x_j^i$ являются компонентами векторного поля $\mathbf{x}$ в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ и потому гладкие.

В правой части равенств

$$f^k = f^j \delta_j^k = (f^j x_j^i) y_i^k$$

стоят произведения гладких функций, поэтому функции f^i также гладкие на U. Являясь гладкими на каждой координатной окрестности, эти функции гладки на всем многообразии G. $\odot$

Многообразие G (группы Ли) хаусдорфово, поэтому *для любого $a \in G$ существует максимальная интегральная кривая φ_a поля $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{X}(G)$, проходящая при $t = 0$ через точку a, т.е. $\varphi_a(0) = a$.*

Векторное поле $\boldsymbol{x}$ на группе Ли G тогда и только тогда левоинвариантно, когда для любых a, $b \in G$

$$\varphi_{ab} = L_a \circ \varphi_b, \tag{23}$$

т.е. $\varphi_{ab}(t) = a\varphi_b(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$\odot$ Для любого фиксированного $a \in G$ формула $\psi_b(t) = L_a \circ \varphi_{a^{-1}b}(t)$ определяет для любой точки $b \in G$ некоторую кривую $t \mapsto \psi_b(t)$, проходящую при $t = 0$ через точку b.

Положив
$$\mathbf{y}_b = \frac{d\psi_b(t)}{dt}|_{t=0}\,,$$
мы получим на G некоторое векторное поле $\mathbf{y} : b \mapsto \mathbf{y}_b$.

При этом по правилам вычисления касательных векторов гладких кривых для любого $b \in G$ будет иметь равенство
$$\mathbf{y}_b = \frac{d\psi_b(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{d(L_a \circ \varphi_{a^{-1}b}(t))}{dt}|_{t=0} =$$
$$(dL_a)_{a^{-1}b}\left(\frac{d\varphi_{a^{-1}b}(t)}{dt}|_{t=0}\right) = (dL_a)_{a^{-1}b}(\mathbf{x}_{a^{-1}b}).$$
Поэтому, если (23) выполнено и, следовательно, $\psi_b = \varphi_b$ (и, значит, $\mathbf{y}_b = \mathbf{x}_b$), то
$$\mathbf{x}_b = (dL_a)_{a^{-1}b}(\mathbf{x}_{a^{-1}b}),$$
и, в частности, $\mathbf{x}_a = (dL_a)_e(\mathbf{x}_e)$. Следовательно, поле $\mathbf{x}$ левоинвариантно.

Обратно, если поле $\mathbf{x}$ левоинвариантно (и потому удовлетворяет соотношению (21)), то $\mathbf{y}_b = \mathbf{x}_b$ для любого $b \in G$, т.е. $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

Но ясно, что кривые $t \mapsto \psi_b(t)$ являются интегральными кривыми поля $\mathbf{y}$ (автоматически максимальными), и потому в силу равенства $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ эти кривые совпадают с интегральными кривыми $t \mapsto \varphi_b(t)$ поля $\mathbf{x}$.

Таким образом, $\varphi_b(t) = a\varphi_{a^{-1}b}(t)$, что равносильно (23). $\odot$

Гладкая кривая $\beta : \mathbb{R} \to G$ называется *однопараметрической подгруппой* группы Ли G, если для любых t, $s \in \mathbb{R}$
$$\beta(t+s) = \beta(t)\beta(s).$$
Иными словами, однопараметрическая подгруппа есть гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел (рассматриваемой как группа Ли) в группу Ли G.

Очевидно, что при $t = 0$ каждая однопараметрическая подгруппа β проходит через единицу e группы G: $\beta(0) = e$.

Теорема 2. *Каждая однопараметрическая подгруппа β является интегральной кривой некоторого левоинвариантного векторного поля $\boldsymbol{x}$.*

$\odot$ Формула
$$\varphi_a(t) = a\beta(t), \qquad a \in G,\ t \in \mathbb{R},$$

определяет на G гладкую кривую $t \mapsto \varphi_a(t)$, проходящую при $t = 0$ через точку a. Положим

$$\mathbf{x}_a = \frac{d\varphi_a(t)}{dt}\Big|_{t=0} .$$

Непосредственная проверка показывает, что отображение $a \mapsto \mathbf{x}_a$ гладкое, т.е. является векторным полем на G, и что кривые φ_a являются интегральными кривыми этого поля.

В частности, интегральной кривой будет кривая $\varphi_e = \beta$.

Наконец, поле $\mathbf{x}$ левоинвариантно, поскольку

$$\varphi_{ab}(t) = (ab)\beta(t) = a(b\beta(t)) = a\varphi_b(t). \quad \odot$$

Теорема 3. *Проходящая при $t = 0$ через точку e максимальная интегральная кривая β произвольного левоинвариантного векторного поля $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{g}$ является однопараметрической подгруппой группы Ли G (и, в частности, определена на всей оси $\mathbb{R}$).*

$\odot$ Интегральные кривые φ_a поля $\mathbf{x}$ удовлетворяют соотношению (23), поскольку это поле левоинвариантно.

Поэтому, в частности, интервал I_a оси $\mathbb{R}$, на котором определена интегральная кривая φ_a, совпадает с интервалом $I = I_e$, на котором определена интегральная кривая $\beta = \varphi_e$.

Кроме того, для любого фиксированного $s \in \mathbb{R}$ кривая $t \mapsto \varphi_e(t+s)$ является интегральной кривой поля $\mathbf{x}$, проходящей через $b = \varphi_e(s)$, и потому $\varphi_e(t+s) = \varphi_b(t)$.

Тогда для любых s, $t \in I$ таких, что $s + t \in I$

$$\beta(s+t) = \beta(t+s) = \varphi_e(t+s) = \varphi_b(t) = b\varphi_e(t) = \varphi_e(s)\varphi_e(t) = \beta(s)\beta(t). \tag{24}$$

Поэтому для доказательства теоремы 3 нужно лишь показать, что кривая β определена на всей оси $\mathbb{R}$, т.е, что $I = \mathbb{R}$.

Пусть $I \neq \mathbb{R}$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ существует такое целое число n, что $\frac{t}{n} \in I$.

Доопределим кривую β для любого $t \in \mathbb{R}$, положив

$$\beta(t) = \beta\left(\frac{t}{n}\right)^n ,$$

если $\frac{t}{n} \in I$. Это определение корректно. Действительно, если $\frac{t}{n} \in I$ и $\frac{t}{m} \in I$, то $\frac{t}{nm} \in I$, и потому, согласно соотношению (24),

$$\beta\left(\frac{t}{n}\right)^n = \left[\beta\left(\frac{t}{nm}\right)^m\right]^n = \left[\beta\left(\frac{t}{nm}\right)^n\right]^m = \beta\left(\frac{t}{m}\right)^m.$$

Ясно, что построенная таким образом кривая гладкая и удовлетворяет соотношению (24) для всех t, $s \in \mathbb{R}$, т.е. является однопараметрической подгруппой.

Мы придем к противоречию с предположением $I \neq \mathbb{R}$, если покажем, что кривая β на всей оси $\mathbb{R}$ является интегральной кривой поля $\mathbf{x}$.

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $a = \beta(t_0)$. По определению касательный вектор $\frac{d\beta(t_0)}{dt}$ кривой β в точке a действует функцию f (из множества $O_a(G)$ всех функций, определенных в некоторой окрестности точки a и гладких в этой окрестности) по формуле

$$\frac{d\beta(t_0)}{dt} f = \frac{d(f \circ \beta)(t)}{dt}|_{t=t_0}.$$

Аналогично касательный вектор $\frac{d\beta(0)}{dt}$ в точке e действует на функцию $f \in O_e(G)$ по формуле

$$\frac{d\beta(0)}{dt} f = \frac{d(f \circ \beta)(t)}{dt}|_{t=0}.$$

Следовательно, для любой функции $f \in O_a(G)$

$$\left[(dL_a)_e \frac{d\beta(0)}{dt}\right] f = \frac{d\beta(0)}{dt}(f \circ L_a) =$$

$$\frac{d(f \circ L_a \circ \beta)(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{df(a\beta(t))}{dt}|_{t=0} =$$

$$\frac{df(\beta(t+t_0))}{dt}|_{t=0} = \frac{df(\beta(t))}{dt}|_{t=t_0} = \frac{d\beta(t_0)}{dt} f,$$

т.е $(dL_a)_e \frac{d\beta(0)}{dt} = \frac{d\beta(t_0)}{dt}$.

Но при $t \in I$ кривая β является интегральной кривой поля $\mathbf{x}$. В частности,

$$\frac{d\beta(0)}{dt} = \mathbf{x}_{\beta(0)} = \mathbf{x}_e.$$

Кроме того, $(dL_a)_e\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_a = \mathbf{x}_{\varphi(t_0)}$, поскольку поле $\mathbf{x}$ левоинвариантно. Следовательно,

$$\mathbf{x}_{\varphi(t_0)} = \frac{d\beta(t_0)}{dt},$$

так что кривая β действительно является интегральной кривой векторного поля $\mathbf{x}$ при $t \in \mathbb{R}$. $\odot$

Следствие. *Каждое левоинвариантное векторное поле $\boldsymbol{x}$ полно.*

Согласно теоремам 2 и 3 левоинвариантные поля $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$ и однопараметрические группы β находятся в естественном биективном соответствии. Сопоставляя все полученные утверждения, мы видим, что справедлива

Теорема 4. *Пространство $\mathfrak{g}$ допускает следующие три равноправные интерпретации.*

(*i*) *Элементами пространства $\mathfrak{g}$ являются левоинвариантные векторные поля $\boldsymbol{x}$ на группе Ли G.*

(*ii*) *Элементами пространства $\mathfrak{g}$ являются касательные векторы группы G в единице e.*

(*iii*) *Элементами пространства $\mathfrak{g}$ являются однопараметрические подгруппы β группы Ли G.*

Переход от первой интерпретации ко второй задается соответствием

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_e,$$

Переход от третьей интерпретации ко второй задается соответствием

$$\beta \mapsto \frac{d\beta(0)}{dt},$$

Переход от первой интерпретации к третьей задается соответствием

$$\boldsymbol{x} \mapsto \varphi_e,$$

где φ_e — интегральная кривая поля $\boldsymbol{x}$, проходящая при $t = 0$ через точку e.

Первая и вторая интерпретации дают нам линейные операции в $\mathfrak{g}$, относительно которых $\mathfrak{g}$ является n-мерным линейным пространством. Как получить эти линейные операции в третьей интерпретации, мы покажем позже.

Алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}G$ называется *алгеброй Ли группы Ли* G.

0.7 Категория. Функтор. Функтор Ли

В аксиоматической теории множеств Геделя–Бернайса *класс* элементов отличается от множества тем, что класс не может быть элементом никакого другого класса и, в частности, множества.

Всякое множество является классом. Интуитивно, *класс* это $<$коллекция$>$ всех множеств x, обладающих некоторым свойством $A(x)$.

Класс, не являющийся множеством, часто называют *собственным классом.*

Отображение f из собственного класса A в собственный класс B является собственным классом пар $(x, f(x))$, $x \in A$.

Пусть $\mathbf{C}$ — класс, являющийся дизъюнктным объединением двух классов $Ob\,\mathbf{C}$ и $Ar\,\mathbf{C}$.

Элементы $Ob\,\mathbf{C}$ называются *объектами*, а элементы $Ar\,\mathbf{C}$ — *стрелками* или *морфизмами.*

1. Каждому морфизму $f \in Ar\,\mathbf{C}$ сопоставляются два объекта A, B, что записывается так: $f : A \to B$.

2. Все морфизмы вида $f : A \to B$ с данными A и B образуют множество морфизмов из A в B, которое обозначается $\mathbf{C}(A, B)$ (или $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$, $Mor_{\mathbf{C}}(A, B)$).

3. Для любых A, B, $C \in Ob\,\mathbf{C}$ задано отображение

$$g \circ f : \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \to \mathbf{C}(A, C),$$

сопоставляющее любым двум морфизмам $f : A \to B$, $g : B \to C$ морфизм $g \circ f : A \to C$, называемый *композицией морфизмов* f и g.

4. Операция $\circ$ должна обладать свойством ассоциативности.

5. Для любого $A \in Ob\,\mathbf{C}$ в множестве $\mathbf{C}(A, A)$ (обозначаемым также $End_{\mathbf{C}}A$) указан некоторый элемент id_A (1_A) такой, что для любых B,

$C \in Ob\,\mathbf{C}$ и для любых $f : A \to B$, $g : C \to A$

$$f \circ id_A = f, \qquad id_A \circ g = g.$$

Морфизм id_A называется *тождественным морфизмом* объекта, а класс $\mathbf{C}$, обладающий описанной структурой, называется *категорией*.

Примеры категорий.

1. Категория $LIN(\mathbb{K})$ конечномерных линейных пространств над $\mathbb{K}$ и их линейных отображений.

2. Категория TOP топологических пространств и их непрерывных отображений.

3. Категория $DIFF$ гладких многообразий и их гладких отображений.

4. Категория $GROUPS$ всех групп и всех их гомоморфизмов.

5. Категория LIE всех групп Ли и всех их гомоморфизмов.

6. Категория $lie = lie(\mathbb{R})$ всех конечномерных алгебр Ли над $\mathbb{R}$ и всех их гоморфизмов.

Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — две категории. Отображение

$$F : Ob\,\mathbf{C} \to Ob\,\mathbf{D} \tag{25}$$

называется *естественной конструкцией*, если существует отображение

$$F : Ar\,\mathbf{C} \to Ar\,\mathbf{D}, \tag{26}$$

удовлетворяющее одному из следующих двух наборов условий: либо

a) если $f : A \to B$, то $F(f) : F(A) \to F(B)$;

b) если $f = id_A$, то $F(f) = id_{F(A)}$;

c) если $f = h \circ g$, то $F(f) = F(h) \circ F(g)$;

либо

a$'$) если $f : A \to B$, то $F(f) : F(B) \to F(A)$;

b$'$) если $f = id_A$, то $F(f) = id_{F(A)}$;

c$'$) если $f = h \circ g$, то $F(f) = F(g) \circ F(h)$.

Об отображении (25), удовлетворяющем условиям $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ или $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, говорят, что оно обладает *свойством функториальности.*

Об отображениях (25) и (26) вместе говорят, что они составляют *функтор (ковариантный функтор)*, когда выполнены условия $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, или *кофунктор (контравариантный функтор)*, когда выполнены условия $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, из категории $\mathbf{C}$ в категорию $\mathbf{D}$.

При этом отображение (25) называется *объектной частью*, а отображение (26) — *стрелочной частью* функтора (кофунктора).

Отметим, что стрелочная часть (ко)функтора однозначно определяет его объектную часть.

Пусть $f : G \to H$ — произвольный гомоморфизм групп Ли. Напомним, что поля $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(G)$, $\mathbf{y} \in \mathfrak{X}(H)$ называются f*-связанными*, если для любой точки $a \in G$

$$\mathbf{y}_{f(a)} = df_a\, \mathbf{x}_a,$$

иными словами для любой гладкой функции g, определенной на в некотором открытом подмножестве многообразия H, имеет место равенство

$$\mathbf{x}(g \circ f) = \mathbf{y}g \circ f.$$

Предложение 1. *Для любого левоинвариантного поля $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{l}G$ существует единственное левоинвариантное поле $\boldsymbol{y} \in \mathfrak{l}H$, которое f-связано с полем $\boldsymbol{x}$.*

$\odot$ Если поле $\mathbf{y}$ существует, то для любого $b \in H$ $\mathbf{y}_e = df_e\, \mathbf{x}_e$ и $\mathbf{y}_b = (dL_b)_e\, \mathbf{y}_e$, т.е.

$$\mathbf{y}_b = (dL_b)_e\, df_e\, \mathbf{x}_e, \qquad b \in H. \tag{27}$$

Это доказывает единственность поля $\mathbf{y}$.

Определим поле $\mathbf{y}$ формулой (27). Ясно, что это поле левоинвариантно (принадлежит $\mathfrak{l}H$).

Кроме того, для любого $a \in G$ $L_{f(a)} \circ f = f \circ L_a$, поскольку $f(ax) = f(a)f(x)$. Следовательно,

$$\mathbf{y}_{f(a)} = d(f \circ L_a)_e\, \mathbf{x}_e = df_a\, (dL_a)_e\, \mathbf{x}_e = df_a\, \mathbf{x}_a$$

и, значит, поле $\mathbf{y}$ f-связано с полем $\mathbf{x}$. $\odot$

Обозначив поле $\mathbf{y}$ через $\mathfrak{l}\,\mathbf{x}$, мы, следовательно, получим линейное отображение

$$\mathfrak{l}(f) : \mathfrak{l}\,G \to \mathfrak{l}\,H,$$

являющееся гомоморфизмом алгебр Ли, поскольку, если поля $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{X}(G)$ f-связаны с полями $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}' \in \mathfrak{X}(H)$, то поле $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ f-связано с полем $[\mathbf{u}', \mathbf{v}']$.

$\odot$ Пусть произвольная гладкая функция g, определена в некотором открытом подмножестве многообразия H. Тогда

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}](g \circ f) = \mathbf{u}(\mathbf{v}(g \circ f)) - \mathbf{v}(\mathbf{u}(g \circ f)) = \mathbf{u}(\mathbf{v}'g \circ f) - \mathbf{v}(\mathbf{u}'g \circ f) =$$

$$\mathbf{u}'(\mathbf{v}'g) \circ f - \mathbf{v}'(\mathbf{u}'g) \circ f = [\mathbf{u}', \mathbf{v}']g \circ f. \odot$$

Конструкция: группа Ли $G \Longrightarrow$ алгебра Ли $\mathfrak{l}\,G$ естественна, поскольку отображение $f \to \mathfrak{l}(f)$ обладает, как легко проверить, свойствами **a**, **b**, **c**.

При отождествлении алгебр Ли $\mathfrak{l}\,G$ и $\mathfrak{l}\,H$ с касательными пространствами T_eG и T_eH гомоморфизм $\mathfrak{l}(f)$ будет дифференциалом

$$df_e : T_eG \to T_eH$$

отображения f в точке e.

Построенный функтор $G \to \mathfrak{l}\,G$, $f \to \mathfrak{l}(f)$ из категории LIE в категорию lie называется (левым) функтором Ли.

Предложение 1'. *При интерпретации элементов алгебр Ли $\mathfrak{l}\,G$ и $\mathfrak{l}\,H$ как однопараметрических подгрупп гомоморфизм $\mathfrak{l}(f)$ задается соответствием*

$$\mathfrak{l}(f)(\beta) = f \circ \beta, \qquad \beta : \mathbb{R} \to G. \tag{28}$$

$\odot$ По определению

$$df_e \left(\frac{d\beta(t)}{dt}|_{t=0} \right) = \frac{d(f \circ \beta)(t)}{dt}|_{t=0}\,.$$

Следовательно, при отождествлении однопараметрической подгруппы β с вектором $\mathbf{a} = \frac{d\beta(t)}{dt}|_{t=0}$ однопараметрическая подгруппа $f \circ \beta$ отождествится с вектором

$$df_e\mathbf{a} = \mathfrak{l}(f)\mathbf{a}. \odot$$

Ясно, что касательные пространства T_eG и T_eG_e группы Ли и ее компоненты единицы G_e совпадают.

Это означает, что $\mathfrak{l}G = \mathfrak{l}G_e$. Поэтому при изучении функтора Ли можно ограничиться лишь связными группами Ли.

Рассмотрим группу Ли $G(\mathbb{A})$ всех обратимых элементов вещественной конечномерной унитальной алгебры $\mathbb{A}$.

Вспомним, что для любого конечномерного линеала V, рассматриваемого как гладкое многообразие, и любого $\mathbf{a} \in V$ касательное пространство $T_{\mathbf{a}}V$ естественным образом отождествляется с V.

$\odot$ Отождествляющий изоморфизм $V \to T_{\mathbf{a}}V$ сопоставляет каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ касательный вектор в точке $t = 0$ кривой $t \mapsto \mathbf{a} + t\mathbf{x}$. $\odot$

Поэтому, в частности, $T_{\mathbf{e}}\mathbb{A} = \mathbb{A}$. С другой стороны

$$T_{\mathbf{e}}G(\mathbb{A}) = T_{\mathbf{e}}\mathbb{A}.$$

Следовательно, используя интерпретацию линеала $\mathfrak{l}G$ как касательного пространства T_eG, получим

$$\mathfrak{l}G(\mathbb{A}) = \mathbb{A}. \tag{29}$$

Проинтерпретируем это равенство в рамках первой интерпретации пространства $\mathfrak{l}G$.

Пусть $A : V \to V$ произвольный линейный оператор. Он является гладким отображением.

Следовательно, определен его дифференциал

$$dA_{\mathbf{a}} : T_{\mathbf{a}}V \to T_{A\mathbf{a}}V,$$

который по определению переводит касательный вектор к кривой $t \mapsto \mathbf{a} + t\mathbf{x}$ в касательный вектор к кривой $t \mapsto A(\mathbf{a} + t\mathbf{x}) = A\mathbf{a} + tA\mathbf{x}$.

В силу отождествлений $T_{\mathbf{a}}V = V$, $T_{A\mathbf{a}}V = V$ это означает, что $dA_{\mathbf{a}} = A$, т.е. *дифференциалом линейного оператора является он сам.*

В частности, для любого $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$

$$(dL_{\mathbf{a}})_{\mathbf{e}} = L_{\mathbf{a}}.$$

С другой стороны, в силу тех же отождествлений любое векторное поле $\mathbf{x}$ на $G(\mathbb{A})$ является некоторым гладким отображением $G(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}$.

Условие левоинвариантности для так трактуемого векторного поля тогда имеет вид

$$\mathbf{x}_{\mathbf{b}} = L_{\mathbf{a}^{-1}}\mathbf{x}_{\mathbf{ab}}, \tag{30}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in G(\mathbb{A})$. Откуда при $\mathbf{b} = \mathbf{e}$ получим $\mathbf{x}_{\mathbf{a}} = L_{\mathbf{a}}\mathbf{x}_{\mathbf{e}}$, т.е. поле имеет вид $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{ab}$, где $\mathbf{b} = \mathbf{x}_{\mathbf{e}} \in \mathbb{A}$.

Но любое такое поле удовлетворяет, очевидно, (30).

Таким образом, *все левоинвариантные векторные поля* $G(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}$ *на группе Ли* $G(\mathbb{A})$ *имеют вид* $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} \in G(\mathbb{A})$, *где* $\boldsymbol{a}$ *— произвольный элемент алгебры* $\mathbb{A}$.

Проинтерпретируем равенство (29) в рамках третьей интерпретации пространства $\mathfrak{l}G$.

Однопараметрические подгруппы группы $G(\mathbb{A})$ есть гладкие $\mathbb{A}$-значные функции $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(t)$, удовлетворяющие соотношению

$$\mathbf{x}(s+t) = \mathbf{x}(s)\mathbf{x}(t), \qquad s,\, t \in \mathbb{R} \tag{31}$$

Продифференцировав это соотношение по s и положив затем $s = 0$, мы получим известное нам дифференциальное уравнение (17) с $\mathbf{a} = \mathbf{x}'(0)$.

Ввиду начального условия $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}$ получаем, что $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{a}}$.

Согласно формуле (18), это решение удовлетворяет соотношению (31).

Таким образом, *любая однопараметрическая подгруппа группы* $G(\mathbb{A})$ *имеет вид* $t \mapsto e^{t\boldsymbol{a}}$.

Обозначив однопараметрическую подгруппу $t \mapsto e^{t\mathbf{a}}$ символом $\beta_{\mathbf{a}}$, мы получаем, биекцию $\mathbf{a} \mapsto \beta_{\mathbf{a}}$ между элементами алгебры $\mathbb{A}$ и однопараметрическими подгруппами группы Ли $G(\mathbb{A})$.

Это и есть соответствие (29) в рамках третьей интерпретации пространства $\mathfrak{l}G$.

0.8 Матричные группы Ли, допускающие конструкцию Кэли. Обращение конструкции Кэли. Группы, обладающие ln-образами

Из предыдущих результатов ясно, что *однопараметрическими подгруппами группы $GL(n, \mathbb{R})$ являются матричные экспоненциальные функции $t \mapsto e^{tA}$ и только эти функции.*

Каждая однопараметрическая подгруппа матричной группы G является однопараметрической подгруппой группы $GL(n)$, и потому имеет вид $t \mapsto e^{tA}$.

Это определяет инъекцию $\mathfrak{l}G \to \mathfrak{l}(GL(n)) = \mathbb{R}(n)$, являющуюся отображением $\mathfrak{l}(\iota)$ для отображения вложения $\iota : G \to GL(n)$.

Таким образом, *для любой матричной группы Ли линейное пространство $\mathfrak{l}G$ естественно отождествляется с некоторым подпространством линейного пространства $\mathbb{R}(n)$.*

Примером матричной группы Ли может служить любая группа, допускающая конструкцию Кэли.

По определению матричная однопараметрическая подгруппа $t \mapsto e^{tA}$ тогда и только тогда является однопараметрической подгруппой группы $O_J(n)$, когда для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$(e^{tA})^\top J e^{tA} = J.$$

Дифференцируя это соотношение по t и полагая $t = 0$, получим соотношение

$$A^\top J + JA = 0,$$

означающее, что матрица A является J-кососимметрической матрицей.

И обратно, *для любой J-кососимметрической матрицы A отображение $t \mapsto e^{tA}$ является однопараметрической подгруппой группы $O_J(n)$.*

$\odot$ Используем матричный аналог формулы

$$e^a = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{a}{m}\right)^m.$$

Покажем, что (с заменой 1 на e) *эта формула справедлива в любой конечномерной ассоциативной алгебре $\mathbb{A}$.*

⊙ Действительно, так как

$$\frac{C_m^k}{m^k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m^k k!} \le \frac{1}{k!}\,,$$

то для любой мультипликативной нормы

$$||e^a - \left(e + \frac{a}{m}\right)^m|| = ||\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k}\right)a^k|| \le$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k}\right)||a||^k = e^{||a||} - \left(1 + \frac{||a||}{m}\right)^m.$$

Тогда

$$\lim_{m\to\infty} ||e^a - \left(e + \frac{a}{m}\right)^m|| = 0,$$

поскольку

$$\left(1 + \frac{||a||}{m}\right)^m \to e^{||a||}. \odot$$

Для любого t имеет место равенство

$$Je^{tA} = J\lim_{m\to\infty}\left(E + \frac{tA}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty} J\left(E + \frac{tA}{m}\right)^m =$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(E - \frac{tA^\top}{m}\right)^m J = e^{-tA^\top}J,$$

поскольку для любого многочлена $f(A)$ от матрицы A $Jf(A) = f(-A^\top)J$. Следовательно,

$$(e^{tA})^\top Je^{tA} = (e^{tA})^\top e^{-tA^\top}J = J. \odot$$

Таким образом, *для группы $O_J(n)$ подпространством $\mathfrak{l}(O_J(n))$ пространства $\mathbb{R}(n)$ является линейное пространство всех кососимметрических матриц.*

Предложение 1. *Если матричная группа $G \subset GL(n)$ допускает конструкцию Кэли (и потому является матричной группой Ли), то $\mathfrak{l}G = G^\#$, т.е. алгебра Ли матричной группы Ли совпадает с кэли-образом этой группы.*

⊙ Пусть $A \in \mathfrak{l}G$, т.е. отображение $t \mapsto e^{tA}$ есть однопараметрическая подгруппа группы G.

Множество G^0 неисключительных матриц из G является окрестностью единицы E группы G.

Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $|t| < \varepsilon$ матрица e^{tA} неисключительна и потому определен ее кэли-образ

$$(e^{tA})^{\#} = (E - e^{tA})(E + e^{tA})^{-1} \in G^{\#}.$$

$G^{\#}$ является линейным пространством, следовательно, матрица

$$\frac{d(e^{tA})^{\#}}{dt}|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{(e^{tA})^{\#}}{t}$$

также принадлежит $G^{\#}$. Но, с другой стороны,

$$\frac{d(e^{tA})^{\#}}{dt} = -Ae^{tA}(E + e^{tA})^{-1} + (E - e^{tA})\frac{d(E + e^{tA})^{-1}}{dt},$$

и потому

$$\frac{d(e^{tA})^{\#}}{dt}|_{t=0} = -\frac{1}{2}A.$$

Следовательно, $A \in G^{\#}$ и $\mathfrak{l}G \subset G^{\#}$. Таким образом, $\mathfrak{l}G = G^{\#}$, поскольку линейные пространства $\mathfrak{l}G$ и $G^{\#}$ имеют одну и ту же размерность равную $\dim G$. $\odot$

Из предложения 1 и ранее разобранных примеров следует, что *пространство* $\mathfrak{l}G$:

для ортогональной группы $O(n)$ (или, что равносильно, для группы $SO(n)$) состоит из кососимметрических матриц порядка n;

для вещественной симплектической группы $Sp(m, \mathbb{R})$ — из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^{\top} \end{pmatrix},$$

где B и C — симметрические матрицы порядка m, а матрица A произвольна;

для ортогональной симплектической группы $Sp(m) \cap O(2m)$ — из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & -C \\ C & A \end{pmatrix},$$

где A — кососимметрическая, а C — симметрическая матрица;

для унитарной группы $U(n)$ — из косоэрмитовых матриц;

для группы $Up(m)$ — из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -\overline{A}^{\top} \end{pmatrix},$$

где B и C — эрмитовы матрицы порядка m, а матрица A произвольна;

для симплектической группы $Sp(m)$ — из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix},$$

где A — косоэрмитова, а B — симметрическая матрица порядка m.

Предложение 2. *Подгруппа $G \subset GL(n)$ является матричной группой Ли, если существует диффеоморфизм $f : V \to \overset{\circ}{V}$ некоторой окрестности V единичной матрицы в группе $Gl(n)$ на открытое множество $\overset{\circ}{V}$ пространства $\mathbb{R}(n)$, обладающий тем свойством, что множество $f(G \cap V)$ является пересечением множества $\overset{\circ}{V}$ с некоторым линейным подпространством $G^{\#}$ пространства $\mathbb{R}(n)$:*

$$f(G \cap V) = G^{\#} \cap \overset{\circ}{V}.$$

$\odot$ Пусть $m = \dim G^{\#}$, $\varphi : G^{\#} \to \mathbb{R}^m$ — произвольный изоморфизм, $U = G \cap V$ и $\overset{\circ}{U} = \varphi(G^{\#} \cap \overset{\circ}{V})$.

Тогда множество $\overset{\circ}{U}$ открыто в $\mathbb{R}^m$, а отображение $h = \varphi \circ f : U \to \overset{\circ}{U}$ — биекция.

Следовательно, (U, h) — карта на G.

Пусть теперь $A \in G$, $U_A = L_A(U)$ и $h_A = h \circ L_A^{-1}$. Тогда (U_A, h_A) — карта на G.

Все множества вида U_A покрывают G, поскольку $A \in U_A$.

Кроме того, если $U_A \cap U_B \neq \emptyset$, то на $h_A(U_A \cap U_B)$ отображение $h_B \circ h_A^{-1}$ будет ограничением диффеоморфизма

$$h \circ L_B^{-1} \circ L_A \circ h^{-1} = \varphi \circ f \circ L_{B^{-1}A} \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}$$

и потому само будет диффеоморфизмом. Следовательно, карты (U_A, h_A) составляют атлас.

Тем самым на G определяется гладкость, по отношению к которой G будет матричной группой Ли. $\odot$

Случай группы, допускающей конструкцию Кэли, получается, когда $V = G^0$, а $f : V \to \overset{\circ}{V}$ является отображением Кэли (и, следовательно, линейное пространство $G^\#$ является кэли-образом группы G).

Предложение 1 также переносится на рассматриваемый общий случай, если потребовать, чтобы диффеоморфизм $f : V \to \overset{\circ}{V}$ был *аналитическим*, т.е. чтобы были выполнены следующие условия:

a) найдется такие число R и матричная норма $|| \cdot ||$, что для любой матрицы $A \in V$ $||A - V|| < R$;

b) существует такой ряд

$$f(z) = a_0 + a_1(z-1) + \ldots + a_m(z-1)^m + \ldots,$$

сходящийся при $|z-1| < R$, что для любой матрицы $A \in V$ имеет место равенство

$$f(A) = a_0 E + a_1(A-E) + \ldots + a_m(A-E)^m + \ldots$$

(ввиду условия a) это равенство имеет смысл);

c) $a_1 = f'(1) \neq 0$.

Предложение 3. *Если для подгруппы $G \subset GL(n)$ существует удовлетворяющий условиям предложения 2 аналитический диффеоморфизм $f : V \to \overset{\circ}{V}$, то соответствующее этой группе линейное пространство $\mathfrak{l}G$ совпадает с линейным пространством $G^\#$, предусмотренным предложением 2.*

$\odot$ Пусть $t \mapsto e^{tA}$ — произвольная однопараметрическая подгруппа группы G, $\varepsilon > 0$ — такое число, что при $|t| < \varepsilon$ матрица e^{tA} принадлежит V.

Тогда $e^{tA} \in G \cap V$ и, значит, $f(e^{tA}) \in G^\# \cap \overset{\circ}{V}$. Поэтому

$$\frac{df(e^{tA})}{dt} \in G^\# \quad \text{и, в частности,} \quad \frac{df(e^{tA})}{dt}\Big|_{t=0} \in G^\#.$$

Но согласно формуле (19)

$$\frac{df(e^{tA})}{dt}|_{t=0} = f'(e^{tA})Ae^{tA}|_{t=0} = a_1 A,$$

поскольку

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-1) + \ldots + ma_m(z-1)^{m-1} + \ldots$$

и, значит, $f'(E) = a_1 E$. Следовательно, $a_1 A \in G^\#$ и $A \in G^\#$, поскольку по условию $a_1 \neq 0$.

Таким образом, $\mathfrak{l}G \subset G^\#$. Более того, $\mathfrak{l}G = G^\#$, поскольку размерности этих линейных пространств совпадают. $\odot$

Для того, чтобы в явном виде построить диффеоморфизм f, рассмотрим матричный ряд

$$\ln A = (A-E) - \frac{1}{2}(A-E)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m}(A-E)^m + \ldots,$$

который сходится при $||A-E|| < 1$, где $||\cdot||$ — произвольная матричная мультипликативная норма, например, норма $A = n \max\limits_{i,j} a_{ij}$.

Вычисление, аналогичное вычислению для числовых рядов, показывает, что

$$e^{\ln A} = A \text{ при } ||A-E|| < 1,$$

т.е. когда матрица $\ln A$ определена.

Но равенство $\ln e^A = A$ может быть не выполнено даже тогда, когда матрица $\ln e^A$ определена (в том смысле, что для матрицы $B = e^A$ сходится ряд $\ln B$).

$\odot$ Для

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \qquad e^A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

и потому при $\theta = 2\pi$ $e^A = E$. Следовательно, $\ln e^A = 0 \neq A$. $\odot$

Равенство $\ln e^A = A$ *имеет место при* $||A|| < \ln 2$.

По аналогии с тем, что равенство $\ln e^z = z$ имеет место в круге сходимости $|z| < \ln 2$ ($z \in \mathbb{C}$) ряда $\ln e^z$.

Таким образом, *отображение* $\ln$ *есть диффеоморфизм некоторой окрестности* V *единичной матрицы в группе* $GL(n)$ *на некоторую окрестность* $\overset{\circ}{V}$ *нулевой матрицы в линеале* $\mathbb{R}(n)$ *с обратным диффеоморфизмом* $\exp : A \mapsto e^A$.

Говорят, что *подгруппа* $G \subset GL(n)$ *обладает* $\ln$*-образом*, если в $\mathbb{R}(n)$ существует такое подпространство $G^\flat$, что

$$\ln(G \cap V) = G^\flat \cap \overset{\circ}{V} .$$

Согласно предложению 2 такая подгруппа является матричной группой Ли, а согласно предложению 3 линеал $G^\flat$ совпадает с линеалом $\mathfrak{l}G$.

В отличие от конструкции Кэли, эта конструкция позволяет немедленно доказать, что *группы* $SL(n)$ *и* $SU(n)$ *унимодулярных матриц являются матричными группами Ли.*

$\odot$ Известно, что

$$\det e^A = e^{Tr\, A}.$$

(Это равенство достаточно доказать для матриц, имеющих жорданову, или хотя бы треугольную форму. Для такой матрицы A матрица e^A также треугольна, а ее диагональные элементы имеют вид $e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}$, где $a_1, \ldots, a_n$ — диагональные элементы матрицы A. Поэтому

$$\det e^A = e^{a_1} \ldots e^{a_n} = e^{a_1 + \ldots + a_n} = e^{TrA}).$$

Поэтому условие унимодулярности матрицы e^A равносильно линейному условию $Tr\, A = 0$ на матрицу A. $\odot$

Основное преимущество ln-конструкции перед конструкцией Кэли состоит в ее универсальности.

Предложение 4. *Каждая матричная группа Ли* G *обладает* $\ln$*-образом.*

$\odot$ Согласно сказанному выше, единственным кандидатом на роль линеала $G^\flat$ является линеал $\mathfrak{l}G$. Покажем, что он обладает нужным свойством.

Пусть V и $\overset{\circ}{V}$ — такие окрестности единичноой и нулевой матрицы соответственно, что $\ln : V \to \overset{\circ}{V}$ — диффеоморфизм с обратным диффеоморфизмом $exp : \overset{\circ}{V} \to V$.

Тогда для любой матрицы $A \in \mathfrak{l}G \cap \overset{\circ}{V}$ верно включение $e^A \in G \cap V$, поскольку для любого t $e^{tA} \in G$.

Но $\ln e^A = A$, поэтому $\mathfrak{l}G \cap \overset{\circ}{V} \subset \ln(G \cap V)$.

Обратно, пусть $B \in G \cap V$. Тогда определена матрица $A = \ln B \in \overset{\circ}{V}$.

Рассмотрим в $GL(n)$ соответствующее левоинвариантное векторное поле $\mathbf{y} : P \mapsto PA$.

Ограничение $\mathbf{x} = \mathbf{y}|_G$ является, очевидно, гладким левоинвариантным векторным полем на G (элементом линеала $\mathfrak{l}G$), которое ι-связано с полем $\mathbf{y}$, где $\iota : G \to GL(n)$ — отображение вложения.

Согласно (28) это означает, что $\mathfrak{l}(\iota)\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Следовательно, в силу наших общих отождествлений поле $\mathbf{x}$ отождествляется с матрицей A.

Следовательно, $A \in \mathfrak{l}G$ и $\ln(G \cap V) \subset \mathfrak{l}G \cap \overset{\circ}{V}$.

Таким образом, $\ln(G \cap V) = \mathfrak{l}G \cap \overset{\circ}{V}$. $\odot$

Итак, *матричная группа тогда и только тогда является группой Ли, когда она обладает* ln-*образом.*

Но линейное пространство $\mathfrak{l}G$, совпадающее для матричных групп с ln-образом, определено для любых групп Ли.

Оказывается функтор Ли $\mathfrak{l} : G \to \mathfrak{l}G$ играет в теории произвольных групп Ли роль, сходную с ролью функтора ln в теории матричных групп Ли.

Этот факт является фундаментом всей теории групп Ли.

0.9 Алгебра Ли группы обратимых элементов ассоциативной алгебры. Локально изоморфные группы Ли. Групускулы Ли. Функтор Ли на категории групускул Ли. Экспонента линейного дифференциального оператора. Формула для значений гладкой функции в нормальной окрестности единицы группы Ли

В силу того, что $\mathfrak{l}G_e = \mathfrak{l}G$ вопрос об обратимости функтора Ли $\mathfrak{l} : LIE \to lie$ целесообразно ставить только для связных групп Ли.

Полную подкатегорию категории LIE, порожденную связными группами Ли, обозначим через LIE_0.

Ограничение функтора Ли на этой подкатегории также называется *функтором Ли.*

В общем случае группы Ли с изоморфными алгебрами Ли не являются изоморфными, т.е. в общем случае функтор Ли необратим.

$\odot$ Алгебры Ли коммутативных групп Ли $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ одномерны и коммутативны. Следовательно, они изоморфны. Но группы Ли $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{R}$ не являются изоморфными, поскольку первая компактна, а вторая не является компактной.$\odot$

Гладкое многообразие G называется *групускулой Ли или локальной группой Ли*, если:

1) в ней выделен некоторый элемент e, называемый *единицей*;

2) выделены окрестность $U \subset G \times G$ элемента (e, e) и окрестность $U_0 \subset G$ элемента e;

3) задано гладкое отображение $\cdot : U \to G$, называемое *умножением* и гладкое отображение $(\cdot)^{-1} : U_0 \to G$ называемое *операцией взятия обратного элемента*;

4) имеет место равенство $e^{-1} = e$;

5) если $(x, e) \in U$, то $xe = x$; если $(e, x) \in U$, то $ex = x$;

6) если $(x, y) \in U$, $(y, z) \in U$, $(xy, z) \in U$ и $(x, yz) \in U$, то

$$(xy)z = x(yz);$$

7) если $(x, y) \in U$, $y \in U_0$ и $(xy, y^{-1}) \in U$, то

$$(xy)y^{-1} = x,$$

и аналогично, если $(x, y) \in U$, $x \in U_0$ и $(x^{-1}, xy) \in U$, то

$$x^{-1}(xy) = y.$$

Менее строго, G есть групускула Ли, если для элементов x, y, достаточно близких к единице e, определено произведение xy и обратный элемент x^{-1}, гладко зависящие от x, y, причем выполнены все аксиомы группы каждый раз, когда участвующие в этих аксиомах объекты определены.

Примером групускулы Ли является произвольное открытое множество H, содержащее единицу в произвольной группе Ли G. При этом H называется *частью* групускулы G.

Две групускулы Ли G называются *эквивалентными*, если некоторые их части совпадают, а класс эквивалентных групускул Ли называется *ростком* групускул Ли.

Гомоморфизмом групускулы Ли G в групускулу Ли H называется такое гладкое отображение F некоторой окрестности V единицы групускулы G в групускулу H, что

$$F(xy) = Fx \cdot Fy$$

каждый раз, когда элементы $F(xy)$ и $Fx \cdot Fy$ определены.

Если G_1 и H_1 — части групускул G и H и $F(V \cap G_1) \subset H_1$, то F определяет некоторый гомоморфизм групускулы G_1 в групускулу H_1, называемый *частью* гомоморфизма F.

Два гомоморфизма называются *эквивалентными*, если у них имеется общая часть.

Класс эквивалентных гомоморфизмов называется *ростком гомоморфизмов или гомоморфизмом ростков*.

Категория всех групускул Ли и их гомоморфизмов (точнее, ростков групускул Ли и их гомоморфизмов) обозначается символом $GR - LOC$.

Функтором локализации называется функтор $LIE \to GR - LOC$ (или $LIE_0 \to GR - LOC$), определенный операцией перехода к произвольной окрестности единицы.

Образ группы Ли G при функторе локализации обозначается G_{loc}.

Группы Ли *локально изоморфны*, если их локализации изоморфны (как объекты категории $GR - LOC$).

Совокупность $\mathfrak{l}G$ всех левоинвариантных векторных полей (касательных векторов в единице, однопараметрических подгрупп (точнее подгрупускул)) на групускуле Ли G является алгеброй Ли, называемой *алгеброй Ли групускулы* G.

Возникающий функтор $\mathfrak{l} : GR - LOC \to lie$ также называется *функтором Ли.*

Функтор $LIE \to lie$ распадается в композицию трех функторов: функтора $LIE \to LIE_0$, функтора локализации $LIE_0 \to GR - LOC$ и функтора Ли $GR - LOC \to lie$ для групускул Ли.

Локальная часть задачи в исследовании функтора Ли сосредоточена в последнем функторе, а глобальная в первых двух функторах.

Как было доказано, любая группа Ли G является расширением своей компоненты единицы $H = G_e$ посредством некоторой дискретной группы.

Обратно, каждое расширение G связной группы Ли H посредством дискретной группы является группой Ли с $G_e = H$.

В первом приближении это достаточно удовлетворительно описывает функтор $LIE \to LIE_0$.

Наша ближайшая цель состоит в исследовании функтора $\mathfrak{l} : GR - LOC \to lie$.

Пусть $\mathbf{x}$ гладкое векторное поле на аналитическом многообразии M.

Рассмотрим линейный оператор

$$e^{\mathbf{x}} = E + \mathbf{x} + \ldots + \frac{\mathbf{x}^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^n}{n!}, \tag{32}$$

где E — тождественный оператор, а $\mathbf{x}^n$ — n-кратная итерация оператора $\mathbf{x}$.

Определим результат $e^{\mathbf{x}}f$ применения этого оператора к функции $f \in O(M)$ ($O(M)$ — множество всех функций, определенных в некотором, зависящем от функции, открытом множестве в M) формулой

$$e^{\mathbf{x}}f = f + \mathbf{x}f + \ldots + \frac{\mathbf{x}^n f}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^n f}{n!} \tag{33}$$

и будем считать, что этот оператор применяется только к таким функциям, для которых данный функциональный ряд имеет непустую область сходимости, которая принимается за область определения функции $e^{\mathbf{x}}f$.

Покажем, что оператор $e^{\mathbf{x}}$ индуцируется некоторым диффеоморфизмом $F : M \to M$, т.е. имеет вид $f \mapsto f \circ F$ (и не является дифференциальным оператором).

Пусть интегральные кривые $t \mapsto \varphi_a(t)$ поля $\mathbf{x}$ определены при $|t| \leq 1$ и существует такая точка a в области определения $W(f)$ функции f, что $\varphi_a(t) \in W(f)$ при $|t| \leq 1$.

Тогда функция $e^{\mathbf{x}}f$ будет определена для всех таких точек a и будет выражаться формулой

$$(e^{\mathbf{x}}f)(a) = f(\varphi_a(1)). \tag{34}$$

$\odot$ По условию функция $g(t) = f(\varphi_a(t))$ определена и аналитична при $|t| \leq 1$.

Поэтому она разлагается в ряд Тейлора

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n,$$

сходящийся при $|t| \leq 1$. С другой стороны, кривая $t \mapsto \varphi_a(t)$ является интегральной кривой поля $\mathbf{x}$, следовательно,

$$g'(t) = \frac{df(\varphi_a(t))}{dt} = \frac{d\varphi_a(t)}{dt} f = \mathbf{x}_{\varphi_a(t)} f = (\mathbf{x}f)(\varphi_a(t)).$$

Это означает, что функцией $g(t)$ для функции $\mathbf{x}f$ служит функция $g'(t)$, откуда посредством индукции выводится, что функцией $g(t)$ для функции $\mathbf{x}^{(n)}f$ служит функция $g^{(n)}(t)$, т.е. что

$$g^{(n)}(t) = (\mathbf{x}^n f)(\varphi_a(t)).$$

Поэтому

$$g^{(n)}(0) = (\mathbf{x}^n f)(\varphi_a(0)) = (\mathbf{x}^n f)(a),$$

и, значит,

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{x}^n f)(a)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{x})^n f)}{n!}(a) = (e^{t\mathbf{x}} f)(a).$$

Осталось положить $t = 1$. $\odot$

Мы будем применять общую формулу (34) к левоинвариантным векторным полям $\mathbf{x}$ на аналитической группе (или групускуле) Ли G и к функциям f, определенным и аналитическим в некоторой окрестности единицы e группы G.

За точку a примем единицу e. Обозначив точку $\varphi_e(1)$ символом $\exp \mathbf{x}$, перепишем для этого случая формулу (34) в следующем виде

$$f(\exp \mathbf{x}) = (e^{\mathbf{x}} f)(e). \tag{35}$$

Для левоинвариантного векторного поля $\mathbf{x}$ интегральной кривой $t \mapsto \varphi_e(t)$ является соответствующая однопараметрическая подгруппа $t \mapsto \beta(t)$.

Поэтому $\exp \mathbf{x} = \beta(1)$ и формула (35) имеет место для любых функций f, область определения которых содержит отрезок $t \mapsto \beta(t)$, $|t| \leq 1$, этой подгруппы.

По определению exp представляет собой такое отображение линейного пространства $\mathfrak{l}G$ в группу G, что $\exp 0 = e$.

Оно, очевидно, обладает *свойством естественности*, т.е. для любого гомоморфизма $F : G \to H$ групп Ли имеет место равенство

$$F \circ \exp = \exp \circ \mathfrak{l}(F).$$

Из теоремы о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных следует, что отображение

$$\exp : \mathfrak{l}G \to G$$

гладкое.

Утверждение А. *Отображение* $\exp : \mathfrak{l}G \to G$ *является в точке* 0 *диффеоморфизмом.*

Докажем это утверждение позже.

Окрестность $\overset{\circ}{U}$ нулевого вектора $0 \in \mathfrak{l}G$ называется *нормальной*, если

a) она обладает *свойством звездности*, т.е. вместе с некоторым вектором $\mathbf{b}$ содержит и все векторы вида $t\mathbf{b}$ при $|t| \leq 1$;

b) отображение exp диффеоморфно отображает окрестность $\overset{\circ}{U}$ на некторую окрестность U единицы e группы G.

Окрестность U также называется *нормальной*.

Согласно утверждению A существуют сколь угодно малые (содержащиеся в любой наперед заданной окрестности) нормальные окрестности как вектора $0 \in \mathfrak{l}G$, так и единицы $e \in G$.

Ясно, что для поля $a\mathbf{x}$, где $a \in \mathbb{R}$, интегральной кривой будет кривая $t \mapsto \beta(at)$, также являющаяся однопараметрической подгруппой.

Следовательно, при $t = a$

$$\exp(t\mathbf{x}) = \beta(t).$$

Эта формула означает, $\beta : t \mapsto \exp(t\mathbf{x})$, т.е. что *однопараметрические подгруппы β группы G являются образами прямых $t \to t\boldsymbol{x}$ при отображении* exp.

В силу условия a) отсюда следует, что условие на область определения функции f, необходимое (и достаточное) для справедливости формулы (35), выполнено, если этой областью является некоторая нормальная окрестность U точки e.

При этом *формула* (35) *задает функцию f на всей окрестности U*, поскольку любая точка из U имеет вид exp $\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{U}$.

0.10 Формула для значений гладких функций на призведении двух элементов. Ряд Кэмпбелла–Хаусдорфа и многочлены Дынкина. Сходимость ряда Кэмпбелла–Хаусдорфа. Восстановление групускулы по ее алгебре Ли. Операции в алгебре Ли группы Ли и однопараметрические подгруппы

Применим формулу (35) к вычислению значения $f(ab)$, где $ab \in U$, $a = \exp \mathbf{x}$ и $b = \exp \mathbf{y}$.

Пусть $a \in U$. Определим в некоторой содержащейся в U нормальной окрестности точки e гладкую функцию f_a формулой $f_a(b) = f(ab)$.

При этом, согласно формуле (35), если $b = \exp \mathbf{y}$, то $f_a(b) = (e^{\mathbf{y}} f_a)(e)$. Но $f_a = f \circ L_a$.

Поэтому в силу левоинвариантности поля $\mathbf{y}$ имеет место формула

$$\mathbf{y} f_a = \mathbf{y} f \circ L_a = (\mathbf{y} f)_a.$$

Тогда для каждого $n \geq 0$ $\mathbf{y}^n f_a = (\mathbf{y}^n f)_a$, и потому

$$e^{\mathbf{y}} f_a = (e^{\mathbf{y}} f)_a.$$

Следовательно, если $a = \exp \mathbf{x}$, то

$$f(\exp \mathbf{x} \exp \mathbf{y}) = f_a(b) = (e^{\mathbf{y}} f_a)_e = (e^{\mathbf{y}} f)(a) = (e^{\mathbf{x}} e^{\mathbf{y}} f)(e).$$

Таким образом, для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из соответствующей нормальной окрестности алгебры $\mathfrak{l}G$

$$f(\exp \mathbf{x} \exp \mathbf{y}) = (e^{\mathbf{x}} e^{\mathbf{y}} f)(e). \tag{36}$$

По определению (без рассмотрения вопроса о сходмости)

$$e^{\mathbf{x}} e^{\mathbf{y}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^p}{p!} \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathbf{y}^q}{q!} \right) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^p \mathbf{y}^q}{p!q!}.$$

Подставив этот ряд в логарифмический ряд

$$\ln \mathbf{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (\mathbf{z} - E)^k}{k},$$

мы получим (учитывая, что операторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, вообще говоря, не коммутируют) формальный ряд

$$\ln\left(e^{\mathbf{x}}e^{\mathbf{y}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\sum_{p,q=0,\,p+q>0}^{\infty}\frac{\mathbf{x}^p\mathbf{y}^q}{p!q!}\right)^k =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum\frac{\mathbf{x}^{p_1}\mathbf{y}^{q_1}\dots\mathbf{x}^{p_k}\mathbf{y}^{q_k}}{p_1!q_1!\dots p_k!q_k!},$$

где во внутренней сумме суммирование распространено на всевозможные наборы $(p_1,\dots,p_k,q_1,\dots,q_k)$ целых неотрицательных чисел, подчиненных условиям

$$p_1+q_1>0,\dots,p_k+q_k>0. \tag{37}$$

Положив

$$z_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum\frac{x^{p_1}y^{q_1}\dots x^{p_k}y^{q_k}}{p_1!q_1!\dots p_k!q_k!},. \tag{38}$$

где во внутренней сумме показатели $p_1,\dots,p_k,q_1,\dots,q_k$, кроме условия (37), удовлетворяют также условию

$$p_1+\dots+p_k+q_1+\dots+q_k=n, \tag{39}$$

перепишем ряд $\ln\left(e^{\mathbf{x}}e^{\mathbf{y}}\right)$ в следующем виде

$$\ln\left(e^{\mathbf{x}}e^{\mathbf{y}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{40}$$

Этот формальный ряд называется рядом *рядом Кэмпбелла–Хаусдорфа.*

Обозначим через $\mathbb{K} < x,y >$ унитальную алгебру всех некоммутативных многочленов от символов x и y над полем $\mathbb{K}$.

В коммутаторной алгебре $[\mathbb{K} < x,y >]$ *лиевы многочлены* от x и y получаются из x и y действиями сложения, умножения на элементы поля $\mathbb{K}$ и операцией Ли $[a,b]=ab-ba$.

Все лиевы многочлены образуют подалгебру $\mathfrak{l} < x,y >$ в алгебре Ли $[\mathbb{K} < x,y >]$, порожденную элементами x и y.

Определим инъективное линейное отображение

$$\iota : \mathfrak{l} < x,y > \to \mathbb{K} < x,y >, \quad u \mapsto \iota u,$$

где многочлен ιu получается из многочлена u раскрытием всех скобок Ли по правилу $[a,b]=ab-ba$.

Очевидно, что это отображение обладает свойством: для любых a, $b\in \mathfrak{l}<x,y>$
$$\iota[a,b]=\iota a\iota b-\iota b\iota a.$$
Если поле $\mathbb{K}$ имеет характеристику 0, то формула (38) определяет в $\mathbb{K}<x,y>$ некоторый элемент $z_n(x,y)$.

Утверждение B. *Существует такой лиев многочлен $\zeta_n(x,y)$, что*
$$\iota\zeta_n(x,y)=z_n(x,y).$$

Примеры.

1. При $n=1$ $z_1(x,y)=x+y$. Следовательно, $\zeta_1(x,y)=x+y$.

2. Пусть $n=2$. При $k=1$ внутренняя сумма в формуле (38) содержит три слагаемых $x^2/2$, xy и $y^2/2$, а при $k=2$ четыре слагаемых x^2, xy, yx и y^2. Следовательно,
$$z_2(x,y)=\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}yx,$$
и потому $\zeta_2(x,y)=\frac{1}{2}[x,y]$.

3. Аналогично проверяется, что
$$z_3(x,y)=\frac{1}{12}(x^2y+yx^2+xy^2+y^2x-2xyx-2yxy),$$
$$\zeta_3(x,y)=\frac{1}{12}([x,[x,y]]+[y,[y,x]]).$$
Многочлен $\zeta_n(x,y)$ называется *многочленом Е.Б. Дынкина*, который нашел для него явную формулу.

Отметим, что *многочлен Дынкина однороден степени n по x и y*, т.е. для любого t
$$\zeta_n(tx,ty)=t^n\zeta_n(x,y).$$
Из утверждения B следует, что *для любых операторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathfrak{l}G$ каждый оператор $\zeta_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ принадлежит алгебре $\mathfrak{l}G$.*

Поэтому алгебре $\mathfrak{l}G$ принадлежит и оператор $\ln(e^{\mathbf{x}}e^{\mathbf{y}})$, если этот опрератор имеет смысл, т.е. если ряд (40) сходится. Приведем следующую теорему без доказательства.

Теорема 1. *Единица e аналитической группы (или групускулы) Ли имеет окрестность U, обладающую следующими свойствами:*

a) существует такое $\delta > 0$, что каждая точка окрестности U единственным образом представляется в виде $\exp \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{l}G$ и $||\boldsymbol{x}|| < \delta$;

b) для любых двух точек $\exp \boldsymbol{x}$ и $\exp \boldsymbol{y}$ окрестности U в алгебре $\mathfrak{l}G$ существует такой элемент $\boldsymbol{z}$, что

$$\exp \boldsymbol{x} \exp \boldsymbol{y} = \exp \boldsymbol{z}; \tag{41}$$

c) этот элемент $\boldsymbol{z}$ является суммой $\zeta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ряда $\zeta_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \ldots + \zeta_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \ldots$, членами которого являются многочлены Дынкина.

Эта теорема означает, что группа (групускула) Ли G обладает частью, умножение в которой однозначно восстанавливается (в соответствии с формулой (41)) по алгебре Ли $\mathfrak{l}G$.

Следовательно, *две (аналитические) групускулы Ли с изоморфными алгебрами Ли изоморфны (точнее изоморфны их ростки).*

Таким образом, *с точностью до изоморфизма функтор Ли $\mathfrak{l} : GR-LOC \to lie$ обратим.*

Если в линеале $\mathfrak{l}G$ произвольно выбран базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то для любой нормальной окрестности U единицы группы G композиция h диффеоморфизма

$$\exp^{-1} : U \to \overset{\circ}{U}$$

с ограничением на $\overset{\circ}{U}$ соответствующего координатного изоморфизма $\mathfrak{l}G \to \mathbb{R}^n$ будет диффеоморфизмом окрестности U на некоторое открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. пара (U, h) — карта на группе Ли G.

Соответствующие локальные координаты называются *нормальными координатами.*

Таким образом, если $a = \exp \mathbf{x}$ и $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$, то числа $x^1, \ldots, x^n$ являются нормальными координатами точки $a \in U$.

Обозначим через $\beta_{\mathbf{x}}$ однопараметрическую подгруппу $t \mapsto \exp(t\mathbf{x})$, соответствующую элементу $\mathbf{x} \in \mathfrak{l}G$.

Предложение 1. *Для любого $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{l}G$ и любого $k \in \mathbb{R}$ элемент $k\boldsymbol{x} \in \mathfrak{l}G$ (интерпретированный как элемент пространства T_eG) является век-*

тором, касающимся при $t=0$ кривой

$$t \mapsto \beta_{\boldsymbol{x}}(kt). \tag{42}$$

Для любых $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathfrak{l}G$ элемент $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathfrak{l}G$ является вектором, касающимся при $t=0$ кривой

$$t \mapsto \beta_{\boldsymbol{x}}(t)\beta_{\boldsymbol{y}}(t), \tag{43}$$

а элемент $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \in \mathfrak{l}G$ — вектором, касающимся при $t=0$ кривой

$$t \mapsto \beta_{\mathbf{x}}(\sqrt{t})\beta_{\mathbf{y}}(\sqrt{t})\beta_{\mathbf{x}}(\sqrt{t})^{-1}\beta_{\mathbf{y}}(\sqrt{t})^{-1}. \tag{44}$$

⊙ Первое утверждение очевидно, поскольку кривая (42), т.е. кривая $t \mapsto \exp(kt\mathbf{x})$ является однопараметрической подгруппой $\beta_{k\mathbf{x}}$.

Заметим, что

$$\zeta(t\mathbf{x}, t\mathbf{y}) = t(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + o(t),$$

поскольку $\zeta_n(t\mathbf{x}, t\mathbf{y}) = t^n\zeta_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\zeta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}+\mathbf{y}$.

Поэтому кривая (43) имеет вид

$$t \mapsto \exp(t(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + o(t))$$

и, значит, в нормальных координатах (определенных произвольным базисом алгебры Ли $\mathfrak{l}G$) задается функциями

$$x^i(t) = t(X^i + Y^i) + o(t).$$

Следовательно, ее касательный вектор при $t=0$ имеет координаты

$$\frac{dx^i(t)}{dt}\Big|_{t=0} = X^i + Y^i$$

и потому совпадает с вектором $\mathbf{x}+\mathbf{y}$.

Аналогично.

$$(\exp \mathbf{x})(\exp \mathbf{y})(\exp \mathbf{x})^{-1}(\exp \mathbf{y})^{-1} = (\exp \mathbf{x})(\exp \mathbf{y})(\exp(-\mathbf{x}))(\exp(-\mathbf{y})) =$$

$$\exp(\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\exp(\zeta(-\mathbf{x}, -\mathbf{y})) = \exp\,\zeta(\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \zeta(-\mathbf{x}, -\mathbf{y})),$$

$$\zeta(\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \zeta(-\mathbf{x}, -\mathbf{y})) = \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta(-\mathbf{x}, -\mathbf{y}) +$$

$$\frac{1}{2}[\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \zeta(-\mathbf{x}, -\mathbf{y})] + \ldots = \{(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \frac{1}{2}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \ldots\} +$$

$$\{(-\mathbf{x}-\mathbf{y})+\frac{1}{2}[-\mathbf{x},-\mathbf{y}]+\ldots\}+\frac{1}{2}[\mathbf{x}+\mathbf{y}+\ldots,-\mathbf{x}-\mathbf{y}+\ldots]+\ldots=$$
$$\frac{1}{2}[\mathbf{x},\mathbf{y}]+\frac{1}{2}[\mathbf{x},\mathbf{y}]+\frac{1}{2}[\mathbf{x},-\mathbf{y}]+\frac{1}{2}[\mathbf{y},-\mathbf{x}]+\ldots=$$
$$[\mathbf{x},\mathbf{y}]+\ldots.$$

Поэтому кривая (44) имеет вид

$$t\mapsto\exp\left([\sqrt{t}\mathbf{x},\sqrt{t}\mathbf{y}]+o(\sqrt{t})\right)=\exp\left(t[\mathbf{x},\mathbf{y}]+o(\sqrt{t})\right)$$

и, значит, в нормальных координатах задается функциями

$$x^i(t)=t[\mathbf{x},\mathbf{y}]^i+o(\sqrt{t}).$$

Следовательно, ее касательный вектор при $t=0$ имеет координаты

$$\frac{dx^i(t)}{dt}|_{t=0}=[\mathbf{x},\mathbf{y}]^i$$

и потому совпадает с вектором $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$. $\odot$

0.11 Дифференциалы внутреннего автоморфизма и экспоненциального отображения. Канонические координаты. Единственность структуры группы Ли. Группы Ли без малых подгрупп и пятая проблема Гильберта

Для каждого элемента a группы Ли G дифференциал $(dF_a)_e=\mathfrak{l}(F_a)$ соответствующего внутреннего автоморфизма $F_a=L_a\circ R_{a^{-1}}:x\mapsto axa^{-1}$, $x\in G$, обозначается символом

$$Ad(a)=(dL_a)_{a^{-1}}\circ(dR_{a^{-1}})_e:\mathfrak{l}G\to\mathfrak{l}G$$

и является линейным обратимым отображением.

Отображение $Ad:a\mapsto Ad(a)$ является гомоморфизмом группы Ли G в группу Ли $Aut\,\mathfrak{l}G$ *всех невырожденных линейных операторов линеала* $\mathfrak{l}G$ и называется *присоединенным представлением группы Ли* G *в алгебре Ли* $\mathfrak{l}G$.

Подгруппа Ли $Ad(G) \subset Aut\,\mathfrak{l}G$ называется *присоединенной группой Ли.*

$$(dAd)_e = \mathfrak{l}\,(Ad) : \mathfrak{l}G \to End\,\mathfrak{l}G = \mathfrak{l}(Aut\,\mathfrak{l}G)$$

— есть линейное отображение. Нам известно также отображение

$$ad : \mathfrak{l}G \to End\,\mathfrak{l}G, \quad ad\,\mathbf{x} : \mathbf{y} \mapsto [\mathbf{x}, \mathbf{y}].$$

Предложение 1. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{l}(Ad) = ad.$$

$\odot$ Из равенств

$$\zeta(\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), -\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \frac{1}{2}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \ldots, -\mathbf{x}) =$$

$$\mathbf{y} + \frac{1}{2}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \frac{1}{2}[\mathbf{y}, -\mathbf{x}] + \ldots = \mathbf{y} + [\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \ldots,$$

где многоточие обозначает члены не менее чем третьей степени по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, следует

$$(\exp\,\mathbf{x})(\exp\,\mathbf{y})(\exp\,\mathbf{x})^{-1} = \exp\,\zeta(\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), -\mathbf{x}) =$$

$$\exp\,(\mathbf{y} + [\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \ldots).$$

Поэтому

$$F_{\beta_{\mathbf{x}}(s)}(\beta_{\mathbf{y}}(t)) = (\exp\,(s\mathbf{x}))(\exp\,(t\mathbf{y}))(\exp\,(s\mathbf{x}))^{-1} =$$

$$\exp\,(t\mathbf{y} + st[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \ldots),$$

где многоточие обозначает члены не менее чем третьей степени по s и t. Следовательно, нормальные координаты вектора

$$(d\,F_{\beta_{\mathbf{x}}(s)})_e\mathbf{y} = (d\,F_{\beta_{\mathbf{x}}(s)})\left(\frac{d\,\beta_{\mathbf{y}}(t)}{dt}|_{t=0}\right) = \left(\frac{d}{dt}F_{\beta_{\mathbf{x}}(s)}(\beta_{\mathbf{y}}(t))\right)|_{t=0}$$

равны

$$\left(\frac{d}{dt}(tY^i + st[\mathbf{x}, \mathbf{y}]^i + \ldots\right)|_{t=0} = Y^i + s[\mathbf{x}, \mathbf{y}]^i + \ldots,$$

где последнее многоточие обозначает члены не менее чем второй степени по s. Тогда

$$(d\,F_{\beta_{\mathbf{x}}(s)})_e\mathbf{y} = \mathbf{y} + s[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \ldots.$$

Но

$$(d\,Ad)_e\mathbf{x} = (d\,Ad)_e\left(\frac{d\beta_{\mathbf{x}}(s)}{ds}|_{s=0}\right) = \left(\frac{d}{ds}Ad(\beta_{\mathbf{x}}(s)\right)|_{s=0} =$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{Ad(\beta_{\mathbf{x}}(s)) - Ad(e)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{(d\,F_{\beta_{\mathbf{x}}(s)})_e - E}{s}\,,$$

следовательно,

$$((d\,Ad)_e\mathbf{x})\mathbf{y} = \lim_{s\to 0}\frac{(d\,F_{\beta_{\mathbf{x}}(s)})_e\mathbf{y} - \mathbf{y}}{s} = \lim_{s\to 0}([\mathbf{x},\mathbf{y}] + \ldots) = [\mathbf{x},\mathbf{y}] = (ad\,\mathbf{x})\mathbf{y}.\odot$$

Следствие 1. *Для любого элемента* $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{l}G$ *имеет место равенство*

$$Ad(\exp\,\mathbf{x}) = e^{ad\,\mathbf{x}}.$$

$\odot$ Формулы

$$t \mapsto Ad(\exp\,t\mathbf{x}), \qquad t \to e^{tad\,\mathbf{x}}$$

задают однопараметрические подгруппы группы Ли $Aut\,\mathfrak{l}G$, имеющие при $t = 0$ один и тот же касательный вектор

$$(d\,Ad)_e\mathbf{x} = ad\,\mathbf{x},$$

и потому совпадающие при всех t. $\odot$

Рассмотрим в алгебре Ли $\mathfrak{l}G$ произвольную гладкую кривую $t \to \mathbf{x}(t)$. Пусть

$$\mathbf{a}(s) = \frac{d}{dt}\exp(s\mathbf{x}(t))|_{t=0}$$

— касательный вектор этой кривой в точке $a(s) = \exp(s\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(0)$.

Перенеся посредством дифференциала $(dR_{a(s)^{-1}})|_{a(s)}$ этот вектор в точку e, мы получим в $\mathfrak{l}G = T_eG$ вектор

$$\mathbf{b}(s) = (dR_{a(s)^{-1}})|_{a(s)}\mathbf{a}(s).$$

Оказывается, что

$$\mathbf{b}'(s) = Ad(a(s))\mathbf{y}, \tag{45}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{x}'(0)$.

$\odot$ По определению действия дифференциала гладкого отображения на касательные векторы кривых

$$\mathbf{b}(s) = \frac{d}{dt}(R_{a(s)^{-1}}(\exp(s\mathbf{x}(t))))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp(s\mathbf{x}(t)))\exp(-s\mathbf{x})|_{t=0}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{b}(s+\Delta s)-\mathbf{b}(s)=\frac{d}{dt}((\exp(s\mathbf{x}(t))\exp(-s\mathbf{x}))^{-1}(\exp((s+\Delta s)\mathbf{x}(t))\exp(-(s+\Delta s)\mathbf{x}))|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt}(\exp(s\mathbf{x})\exp(-s\mathbf{x}(t))(\exp((s+\Delta s)\mathbf{x}(t))\exp(-(s+\Delta s)\mathbf{x}))|_{t=0}=$$

$$\frac{d}{dt}(a(s)\exp(\Delta s\mathbf{x}(t))a(s+\Delta s)^{-1})=(dL_{a(s)}\circ dR_{a(s+\Delta s)^{-1}})\frac{d}{dt}(\exp(\Delta s\mathbf{x}(t)))|_{t=0}.$$

Поэтому

$$\mathbf{b}'(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{b}(s+\Delta s)-\mathbf{b}(s)}{\Delta s}=(dL_{a(s)}\circ dR_{a(s)^{-1}})\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\frac{d}{dt}(\exp(\Delta s\mathbf{x}(t)))|_{t=0}}{\Delta s}=$$

$$Ad(a(s))\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\frac{d}{dt}(\exp(\Delta s\mathbf{x}(t)))|_{t=0}}{\Delta s}.$$

В нормальных координатах, соответствующих произвольному базису $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ линеала $\mathfrak{l}G$, точка $\exp(\Delta s\mathbf{x}(t))$ имеет координаты $\Delta sX^i(t)$, где $X^i(t)$ — координаты вектора $\mathbf{x}(t)$ в базисе $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$. Тогда вектор

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\frac{d}{dt}(\exp(\Delta s\mathbf{x}(t)))|_{t=0}}{\Delta s}$$

имеет координаты $\frac{dX^i(0)}{dt}$, т.е. те же координаты, что и вектор $\mathbf{x}'(0)=\mathbf{y}$. $\odot$

Линейный оператор из формулы (45) можно переписать в следующем виде

$$Ad(a(s))=Ad(\exp(s\mathbf{x}))=e^{s\,ad\,\mathbf{x}}=E+s\,ad\,\mathbf{x}+\ldots+s^n\frac{(ad\,\mathbf{x})^n}{n!}+\ldots$$

Интегрируя это операторное тождество, получим тождество

$$\int\limits_0^1 Ad(a(s))ds=\frac{e^{ad\,\mathbf{x}}-E}{ad\,\mathbf{x}},$$

где под правой частью понимается сумма операторного ряда

$$E+\frac{ad\,\mathbf{x}}{2!}+\ldots+\frac{(ad\,\mathbf{x})^n}{(n+1)!}+\ldots,$$

получающегося из степенного ряда для функции $\frac{e^z-1}{z}$ подстановкой вместо z оператора $ad\,\mathbf{x}$.

Для вектора $\mathbf{b}(1)$ отсюда в силу формулы (45) следует, что

$$\mathbf{b}(1) = \int_0^1 \mathbf{b}'(s)ds = \frac{e^{ad\,\mathbf{x}} - E}{ad\,\mathbf{x}}\,\mathbf{y}.$$

Но по определению

$$\mathbf{b}(1) = (dR_{a(s)^{-1}})_{a(1)}\frac{d}{dt}\exp(\mathbf{x}(t))|_{t=0} = (dR_{\exp(-\mathbf{x})})_{\exp(\mathbf{x})}\frac{d}{dt}\exp(\mathbf{x}(t))|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt}(\exp(\mathbf{x}(t))\exp(-\mathbf{x}))|_{t=0}.$$

Этим доказано, что

$$\frac{d}{dt}(\exp(\mathbf{x}(t))\exp(-\mathbf{x}))|_{t=0} = \frac{e^{ad\,\mathbf{x}} - E}{ad\,\mathbf{x}}\,\mathbf{y}.$$

Переходя к нормальным координатам, получим, что для вектора $\mathbf{z}(t) \in \mathfrak{l}G$, удовлетворяющего соотношению $\exp(\mathbf{x}(t))\exp(-\mathbf{x}) = \exp\mathbf{z}(t)$, справедливо равенство

$$\mathbf{z}'(0) = \frac{e^{ad\,\mathbf{x}} - E}{ad\,\mathbf{x}}\,\mathbf{y}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{z}(t) = t\,\frac{e^{ad\,\mathbf{x}} - E}{ad\,\mathbf{x}}\,\mathbf{y} + o(t).$$

Возвращаясь к $\exp\mathbf{z}(t)$ и полагая $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{y}$, мы видим, что нами доказано

Предложение 2. *Для любых $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathfrak{l}G$ имеет место равенство*

$$\exp(\mathbf{x} + t\mathbf{y})\exp(-\mathbf{x}) = \exp\left(t\,\frac{e^{ad\,\mathbf{x}} - E}{ad\,\mathbf{x}}\,\mathbf{y} + o(t)\right).$$

Для каждого $\mathbf{x} \in \mathfrak{l}G$ дифференциал $(d\exp)_{\mathbf{x}}$ в точке $\mathbf{x}$ гладкого отображения $\exp : \mathfrak{l}G \to G$ есть линейное отображение $\mathfrak{l}G \to T_aG$, где $a = \exp\mathbf{x}$.

Поэтому его композиция с отображением $(dR_a)_e^{-1} : T_aG \to T_eG = \mathfrak{l}G$ будет отображением из $\mathfrak{l}G$ в $\mathfrak{l}G$.

Следствие 2. *Имеет место формула*

$$(dR_a)_e^{-1} \circ (d\exp)_{\mathbf{x}} = \frac{e^{ad\,\mathbf{x}} - E}{ad\,\mathbf{x}}\,, \qquad a = \exp\mathbf{x}$$

$\odot$ Пусть $\mathbf{y} \in \mathfrak{l}G$. Тогда

$$((dR_a)_e^{-1} \circ (d\exp)_{\mathbf{x}})\mathbf{y} = \frac{d}{dt}(\exp(\mathbf{x} + t\mathbf{y})\exp(-\mathbf{x}))|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(t\,\frac{e^{ad\,\mathbf{x}} - E}{ad\,\mathbf{x}}\mathbf{y} + o(t)\right)|_{t=0} = \frac{e^{ad\,\mathbf{x}} - E}{ad\,\mathbf{x}}\mathbf{y}. \odot$$

Следствие 3. *Отображение* $\exp : \mathfrak{l}G \to G$ *тогда и только тогда является диффеоморфизмом в точке* $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{l}G$ *когда ни один корень оператора* $ad\,\boldsymbol{x}$ *не имеет вида* $2m\pi i$.

$\odot$ Отображение exp тогда и только тогда является диффеоморфизмом в точке $\mathbf{x}$, когда его дифференциал $(d\exp)_{\mathbf{x}}$ в этой точке является изоморфизмом, а оператор $ad\,\mathbf{x}$ тогда и только тогда имеет характеристические корни вида $2m\pi i$, когда оператор $e^{ad\,\mathbf{x}} - E$, а значит, и оператор $\frac{e^{ad\,\mathbf{x}} - E}{ad\,\mathbf{x}}$ вырожден. $\odot$

Предложение 3. *Пусть* $\mathfrak{l}G = \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ *— разложение линеала* $\mathfrak{l}G$ *в прямую сумму подпростанств* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$. *Тогда отображение*

$$F : \mathfrak{l}G \to G, \quad F(\boldsymbol{x}) = \exp\,\boldsymbol{a}\exp\boldsymbol{b}, \tag{46}$$

где $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}$ *и* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{B}$ *— компоненты вектора* $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{l}G$ *в разложении линеала* $\mathfrak{l}G$, *является диффеоморфизмом в точке* $0 \in \mathfrak{l}G$.

$\odot$ Очевидно, отображение F гладкое и переводит $0 \in \mathfrak{l}G$ в $e \in G$.

Пусть $l : \mathfrak{l}G \to T_0G$ — естественный изоморфизм, переводящий вектор $\mathbf{x} \in \mathfrak{l}G$ в вектор, касающийся в точке 0 кривой $t \mapsto t\mathbf{x}$.

Отображение F переводит эту кривую в кривую

$$t \mapsto \exp\,t\mathbf{a}\exp t\mathbf{b} = \exp\,\zeta(t\mathbf{a}, t\mathbf{b}). \tag{47}$$

Следовательно, его дифференциал $dF_0 : T_0(\mathfrak{l}G) \to T_eG$ переводит вектор $l(\mathbf{x})$ в вектор, касающийся в точке e кривой (47).

Следовательно, для любой функции $f \in O_e(G)$ имеет место формула

$$[(dF_0 \circ l)(\mathbf{x})]f = \frac{df(\exp\,\zeta(t\mathbf{a}, t\mathbf{b}))}{dt}|_{t=0} = \frac{d(e^{\zeta(t\mathbf{a},t\mathbf{b})}f)(e)}{dt}|_{t=0}\,.$$

Но

$$e^{\zeta(t\mathbf{a},t\mathbf{b})}f = (E + \zeta(t\mathbf{a}, t\mathbf{b}) + o(t))f = f + t(\mathbf{a} + \mathbf{b})f + o(t).$$

Поэтому

$$\frac{d(e^{\zeta(t\mathbf{a},t\mathbf{b})}f)(e)}{dt}|_{t=0} = ((\mathbf{a}+\mathbf{b})f)(e) = (\mathbf{x}f)(e) = \mathbf{x}_e f.$$

Следовательно,

$$(dF_0 \circ l)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_e, \qquad dF_0 \circ l = i,$$

где $i : \mathfrak{l}G \to T_eG$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_e$, — изоморфизм.

Таким образом, dF_0 — изоморфизм, поскольку i и l являются изоморфизмами. Осталось использовать стандартную теорему о локальных диффеоморфизмах. $\odot$

При $\mathfrak{l}G = \mathbb{A}$ (и $\mathbb{B} = 0$) из предложения 3 следует утверждение A.

Согласно предложению 3 точка $0 \in \mathfrak{l}G$ обладает сколь угодно малой звездной окрестностью $\overset{\circ}{U}$, на которой отображение F является диффеоморфизмом, отображающим ее на некоторую окрестность U единицы $e \in G$.

Обладающие этим свойством окрестности $\overset{\circ}{U}$ и U называются *каноническими окрестностями* (точек $0 \in \mathfrak{l}G$ и $e \in G$ соответственно), отвечающими прямому разложению $\mathfrak{l}G = \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$.

Выбрав в подпространствах $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ произвольные базисы, мы получим некоторый базис пространства $\mathfrak{l}G$.

Композиция h диффеоморфизма $F^{-1} : U \to \overset{\circ}{U}$ с ограничением на $\overset{\circ}{U}$ соответствующего координатного изоморфизма $\mathfrak{l}G \to \mathbb{R}^n$ будет диффеоморфизмом окрестности U на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, т.е. пара (U, h) будет некоторой картой на G.

Карты такого вида называются *каноническими картами*, отвечающими разложению $\mathfrak{l}G = \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$, соответствующие локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ — *каноническими координатами.*

Все эти определения вместе с предложением 3 переносятся на случай, когда задано разложение

$$\mathfrak{l}G = \mathbb{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{A}_m \tag{48}$$

линеала $\mathfrak{l}G$ в прямую сумму любого числа подпространств.

При $m = 1$ канонические окрестности совпадают с нормальными окрестностями, а канонические координаты с нормальными координатами.

При $m = n$ все подпространства в разложении одномерны и само разложение определяется выбором в $\mathfrak{l}G$ некоторого базиса .

Соответствующие канонические координаты в этом случае называются *каноническими координатами второго рода* (тогда как *каноническими координатами первого рода* называются нормальные координаты).

Заметим, что канонические координаты первого и второго рода задаются произвольным базисом линеала $\mathfrak{l}G$.

С помощью канонических координат можно доказать следующее важное

Предложение 4. *Любой непрерывный гомоморфизм $\Phi : H \to G$ групп Ли является гладким отображением, т.е. гомоморфизмом групп Ли.*

Следствие 4. *Если две группы Ли изоморфны как топологические группы, то они изоморфны и как группы Ли.*

В частности, отсюда следует, что *если на топологической группе можно ввести согласованную с топологией гладкость так, чтобы она стала группой Ли, то это можно сделать только одним способом.*

Это означает, что функтор игнорирования $LIE \to GR - TOP$ переводит различные группы Ли в различные топологические группы.

Поэтому можно считать, что этот функтор осуществляет вложение категории LIE в категорию $GR - TOP$ и категорию всех групп Ли можно считать в силу предложения 4 полной подкатегорией категории всех топологических групп.

Топологическая группа G называется группой *без малых подгрупп*, если ее единица e обладает окрестностью, не содержащей никаких подгрупп $H \neq \{e\}$.

Предложение 5. *Каждая группа Ли является группой без малых подгрупп.*

$\odot$ Введем на линеале $T_eG = \mathfrak{l}G$ произвольную евклидову метрику.

Тогда для достаточно малого $\delta > 0$ шар радиуса δ с центром в точке 0 будет нормальной окрестностью этой точки, и, следовательно, его образ при отображении exp будет нормальной окрестностью единицы в G.

Пусть U — нормальная окрестность, аналогичным образом строящаяся по числу $\delta/2$.

Ясно, что для любого ненулевого вектора $\mathbf{a} \in \mathfrak{l}G$, длина которого меньше $\delta/2$, найдется такое целое число m, что длина вектора $m\mathbf{a}$ будет больше $\delta/2$ и меньше δ.

Это означает, что для любого отличного от единицы элемента $a = \exp \mathbf{a}$ окрестности U существует такое m, что $a^m = \exp m\mathbf{a}$ не принадлежит U.

Поэтому окрестность U не может содержать никакой подгруппы $H \neq \{e\}$. $\odot$

Теорема. (Глисон и Ямабе) *Топологическая хаусдорфова группа тогда и только тогда является группой Ли, когда она локально компактна и не имеет малых подгрупп.*

Одно необходимое условие лиевости топологической группы состоит в ее хаусдорфовости и локальной компактности, другое — в ее локальной евклидовости, т.е. в том, чтобы она была топологическим многообразием.

Вопрос о том, является ли последнее необходимое условие достаточным, составляет содержание так называемой *пятой проблемы Гильберта.*

Было доказано, что *никакая локально евклидова группа малых подгрупп имееть не может.*

В комбинации с теоремой Глисона–Ямабе это немедленно дает положительное решение проблемы Гильберта: *любая локально евклидова группа является группой Ли.*

0.12 Вычисление структурных констант алгебры Ли с помощью групповых функций. Левоинвариантные дифференциальные формы. Структурные уравнения Маурера–Картана

Пусть групповые функции в окрестности единицы $U \subset G$ группы Ли в локальных координатах имеют вид

$$c^i = f^i(a^1, \ldots, a^n, b^1, \ldots, b^n), \qquad a, b \in U.$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{v}_e \in T_eG$ и такое левоинвариантное векторное поле $\mathbf{v} \in \mathfrak{l}G = \mathfrak{g}$, что для любого $a \in G$

$$\mathbf{v}_a = (dL_a)_e(\mathbf{v}_e).$$

Матрица линейного оператора $(dL_a)_e$ имеет вид

$$((dL_a)_e) = (L^j_i(a)) = \left(\frac{\partial f^j(a,b)}{\partial b^i}|_{b=e}\right).$$

Следовательно, относительно натурального поля репера

$$\mathbf{v}_a = L^j_i(a) v^i_e \partial_j.$$

Выберем базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$

$$\mathbf{e}_i(a) = L^j_i(a)\partial_j$$

и запишем структурные уравнения алгебры Ли

$$[\mathbf{e}_i(a), \mathbf{e}_j(a)] = C^k_{ij}\mathbf{e}_k(a).$$

Следовательно, *объект неголономности левоинвариантного поля репера совпадает со структурным тензором.*

Произвольное левоинвариантное векторное поле $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ есть линейная комбинация векторов левоинвариантного поля репера с постоянными коэффициетами $\mathbf{v}(a) = v^i\mathbf{e}_i(a)$.

Запишем структурные уравнения относительно натурального поля реперов

$$L^s_i\partial_s L^k_j - L^s_j\partial_s L^k_i = C^s_{ij}L^k_s.$$

Полагая здесь $a = e$ и учитывая, что $L_i^j(e) = \delta_i^j$, получим формулу, выражающую структурные константы алгебры Ли через групповые функции

$$C_{ij}^k = (\partial_i L_j^k - \partial_j L_i^k)|_{a=e}.$$

Внешняя дифференциальная q-форма θ на группе Ли G называется *левоинвариантной*, если для любого $a \in G$ $L_a^*\theta = \theta$, т.е. для любых a, $b \in G$ и для всех $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q \in T_bG$

$$(L_a^*\theta)(b)(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q) := \theta(ab)((dL_a)_b\mathbf{u}_1, \ldots, (dL_a)_b\mathbf{u}_q) = \theta(b)(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q).$$

Таким образом, левоинвариантная q-форма однозначно определяется своими значениями при $b = e$.

Левоинвариантная 1-форма называется также *формой Маурера–Картана.*

Пусть $\mathfrak{g}^*$ — множество всех левоинвариантных 1-форм.

Значение левоинвариантной формы $\theta \in \mathfrak{g}^*$ на левоинваринтном векторном поле $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}$ есть постоянная функция.

$\odot$ Для любого $a \in G$

$$\theta(e)(\mathbf{v}_e) = (L_a^*\theta)(e)(\mathbf{v}_e) = \theta(a)((dL_a)_e\mathbf{v}_e) = \theta(a)(\mathbf{v}_a) = \text{const}. \quad \odot$$

Пусть $\theta^1, \ldots, \theta^n$ — левоинвариантные 1-формы, в каждой точке $a \in G$ образующие кобазис по отношению к базису левоинвариантных векторных полей, т.е $\theta^j(a)(\mathbf{e}_i(a)) = \delta_i^j$.

Они образуют базис n-мерном линеале $\mathfrak{g}^*$. Найдем внешние дифференциалы от этих 1-форм.

$$d\theta^k(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i(\theta^k(\mathbf{e}_j)) - \mathbf{e}_j(\theta^k(\mathbf{e}_i)) - \theta^k([\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j])) = -\frac{1}{2}C_{ij}^k.$$

Но эти внешние дифференциалы должны разлагаться по базису $\{\theta^l \wedge \theta^m\}$ $(l < m)$ пространства левоинвариантных 2-форм

$$d\theta^k = A_{ij}^k\theta^i \wedge \theta^j.$$

Отсюда получим, так называемые *структурные уравнения Маурера–Картана*

$$d\theta^k = -\frac{1}{2}C_{ij}^k\theta^i \wedge \theta^j.$$

Относительно натурального поля кореперов базисные левоинвариантные 1-формы имеют вид

$$\theta^k(a) = V_s^k(a) da^s,$$

где матрица $(V_s^k(a))$ обратна матрице $(L_i^j(a))$.

Компоненты этой матрицы, называемые вспомогательными функциями, можно и непосредственно подсчитать через групповые функции

$$V_i^j(a) = \left(\frac{\partial f^j(b,a)}{\partial a^i} |_{b=a^{-1}} \right).$$

Тогда структурные уравнения Маурера–Картана принимают вид

$$\partial_j V_i^k - \partial_i V_j^k = C_{sl}^k V_i^s V_j^l.$$

Полагая здесь $a = e$ и учитывая, что $V_i^j(e) = \delta_i^j$, получим еще один способ вычисления структурных констант алгебры Ли

$$C_{ij}^k = (\partial_j V_i^k - \partial_i V_j^k)|_{a=e}.$$

Примеры.

1. Рассмотрим двумерную аффинную группу $GA(2)$ с групповыми функциями

$$f^1(a,b) = a^1 + a^2 b^1, \qquad f^2(a,b) = a^2 b^2.$$

Найдем матрицы $(L_i^j(a))$, $(V_s^k(a))$.

$$(L_i^j(a)) = \left(\frac{\partial f^j(a,b)}{\partial b^i} |_{b=e} \right) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \qquad (V_i^j(a)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{e}_1(a) = a^2 \partial_1, \qquad \mathbf{e}_2(a) = a^2 \partial_2, \qquad [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = -\mathbf{e}_1.$$

А базисные левоинвариантные 1-формы

$$d\theta^1 = \frac{1}{a^2} da^1, \qquad d\theta^2 = \frac{1}{a^2} da^2$$

удовлетворяют следующим уравнениям Маурера–Картана

$$d\theta^1 = \theta^1 \wedge \theta^2, \qquad d\theta^2 = 0.$$

2. Рассмотрим полную линейную группу $GL(n, \mathbb{K})$. Левый сдвиг и его дифференциал имеют вид

$$L_A X = AX, \qquad (dL_A)_E U = AU,$$

где A, $X \in GL(n, \mathbb{K})$, $U \in gl(n, \mathbb{K})$. Всякое левоинвариантное векторное поле имеет вид $U(A) = AU$.

Полагая $U = E_i^j$, получим базис левоинвариантных векторных полей $E_i^j(A) = AE_i^j$, состоящий из n-матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & A_i^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_i^n & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где ненулевые элементы образуют j-й столбец.

Поэтому относительно натурального поля реперов

$$E_i^j(A) = A_i^s \frac{\partial}{\partial A_j^s}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial A_i^j}{\partial A_k^l} = \delta_l^j \delta_i^k,$$

получим знакомое нам выражение для коммутатора левоинвариантных полей $U(A) = AU$, $V(A) = AV$

$$[U(A), V(A)] = A(UV - VU).$$

Напомним структурные уравнения алгебры Ли $gl(n, \mathbb{K})$

$$[E_i^j, E_l^k] = \delta_l^j E_i^k - \delta_i^k E_l^j.$$

Найдем левоинвариантные 1-формы. Базис этих форм вычисляем по формуле

$$\theta_i^j = V_{il}^{js} dA_s^l, \text{ где } \qquad V_{il}^{js} = \left(\frac{\partial (B_m^j A_i^m)}{\partial A_s^l} |_{B=A^{-1}} \right) = (A^{-1})_l^j \delta_i^s.$$

Следовательно, $\theta_i^j = (A^{-1})_l^j dA_i^l$.

Для нахождения уравнений Маурера–Картана получим следующие формулы

$$d\theta_i^j = d(A^{-1})_l^j \wedge dA_i^l, \qquad dA_i^l = A_s^l \theta_i^s, \qquad d(A^{-1})_l^j = -(A^{-1})_l^m \theta_m^j.$$

Тогда $d\theta_i^j = \theta_i^s \wedge \theta_s^j$.

0.13 Восстановление локальной группы Ли по ее алгебре Ли

Пусть $\mathbf{v}_a = (dL_a)_e(\mathbf{v}_e)$ — левоинвариантное векторное поле на группе Ли G.

Его траектории есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da}{dt} = \mathbf{v}_a \text{ или в координатах } \quad \frac{da^j}{dt} = L_i^j(a)v^i.$$

При начальном условии $a(0) = a$ единственная траектория имеет вид: $a(t) = \mathrm{Exp}(t\mathbf{v})a$.

Экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$, $\exp(\mathbf{v}) = a(1)$, является диффеоморфизмом в некоторой (нормальной) окрестности нуля на (нормальную) окрестность единицы $U \subset G$ — локальную группу Ли или групповое ядро.

В ней могут быть введены канонические координаты первого рода: за координаты элемента $a = \exp(\mathbf{v})$ принимаются координаты вектора $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ относительно некоторого базиса.

Пусть $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ — разложение вектора $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ по некоторому базису алгебры Ли.

Отображение

$$F(\mathbf{v}) = \exp(v^1\mathbf{e}_1)\dots\exp(v^n\mathbf{e}_n)$$

является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на некоторую окрестность единицы в G и $(v^1, \dots, v^n)$ есть канонические координаты второго рода элемента $a = F(\mathbf{v})$ в локальной группе Ли.

Восстановление локальной группы Ли по алгебре Ли производится следующим образом.

Пусть $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = C_{ij}^k\mathbf{e}_k$ — структурные уравнения алгебры Ли.

1. Сначала интегрируются уравнения Маурера–Картана для вспомогательных функций $V_i^j(a)$.

Рассмотренные в канонических координатах первого рода $a^i = v^i$, они вдоль однопараметрических подгрупп сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $W^i_j(t,a)$

$$\frac{dW^i_j}{dt} = \delta^i_j + C^i_{pq} W^p_j a^q$$

с начальным условием $W^i_j(0,a) = 0$.

Полагая затем $V^i_j(a) = W^i_j(1,a)$, получим вспомогательные функции.

2. Для нахождения групповых функций $f^i(a,b)$ рассматриваются уравнения Ли

$$V^i_k(f)\frac{\partial f^k}{\partial b^j} = V^i_j(b)$$

при начальном условии $f^i(a,e) = a^i$.

Эти уравнения можно переписать в виде системы Пфаффа

$$V^i_k(f)df^k = V^i_k(b)db^k,$$

что выражает собой факт левоинвариантности 1-форм θ^i.

Пусть $h \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра Ли, заданная базисом $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ левоинвариантных векторных полей.

Тогда $[\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_m] = \hat{C}^s_{lm}\mathbf{u}_s$. Это означает полную интегрируемость k-мерного распределения, натянутого на $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$.

Тогда, максимальное связное интегральное многообразие этого распределения, проходящее через единицу группы, есть подгруппа Ли $H \subset G$, алгебра Ли которой есть h.

Используя канонические координаты второго рода на G, можно найти соответствующую h локальную подгруппу Ли следующим образом

$$a(t^1, \ldots, t^k) = \exp(t^1\mathbf{u}_1)\ldots\exp(t^k\mathbf{u}_k).$$

Если же h задана как аннулятор системы линейно независимых левоинвариантных 1-форм $\{\omega^1, \ldots, \omega^{n-k}\}$, то дело сводится к интегрированию системы пфаффовых уравнений $\omega^{\hat{s}} = 0$.

Ее полная интегрируемость обеспечена структурными уравнениями Маурера–Картана для h.

Примеры.

3. В алгебре Ли $gl(n,\mathbb{K})$ уравнением $\omega = \theta^i_i = 0$ задана подалгебра $sl(n,\mathbb{K})$.

Из структурных уравнений Маурера–Картана следует, что

$$d\omega = \theta^i_j \wedge \theta^j_i = 0.$$

Поэтому это уравнение Пфаффа вполне интегрируемо.

Найдем соответствующую подгруппу Ли. Имеем

$$\omega = (A^{-1})^i_j dA^j_i = 0.$$

Заметим, что

$$d\det(A) = \det(A)(A^{-1})^i_j dA^j_i = 0.$$

Поэтому интегральные многообразия имеют уравнения $\det(A) = \mathrm{const}$.

Начальное условие $\det(E) = 1$ выделяет подгруппу $SL(n,\mathbb{K})$.

4. Пусть $T_0(3,\mathbb{R})$ — группа Ли унипотентных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^1 & a^3 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее алгебра Ли $t_0(3,\mathbb{R})$ состоит из строго верхних треугольных матриц.

Найдем однопараметрические подгруппы и экспоненциальное отображение.

Всякое левоинвариантное векторное поле имеет вид $U(A) = AU$, поскольку группа матричная.

Следовательно, оно образовано матрицами

$$U(A) = \begin{pmatrix} 0 & u^1 & a^1u^2 + u^3 \\ 0 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и дифференциальные уравнения однопараметрических подгрупп таковы

$$\frac{da^1}{dt} = u^1, \qquad \frac{da^2}{dt} = u^2, \qquad \frac{da^3}{dt} = a^1u^2 + u^3,$$

где u^i фиксированы. Интегрируя их при начальном условии $a^i(0) = 0$, получим

$$a^1 = u^1 t, \qquad a^2 = u^2 t, \qquad a^3 = \frac{1}{2}u^1u^2(t)^2 + u^3 t.$$

Следовательно,

$$\exp(U) = \begin{pmatrix} 1 & u^1 & \frac{1}{2}u^1u^2 + u^3 \\ 0 & 1 & u^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь (u^1, u^2, u^3) являются каноническими координатами на группе $T_0(3, \mathbb{R})$.

5. Пусть алгебра Ли задана структурными уравнениями

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 0, \qquad [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] = 0, \qquad [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1$$

с ненулевыми структурными константами $C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$.

Найдем соответствующую ей локальную группу Ли.

$$\frac{dW^1_1}{dt} = 1 - W^3_1u^2 + W^2_1u^3, \qquad \frac{dW^1_2}{dt} = -W^3_2u^2 + W^2_2u^3,$$

$$\frac{dW^1_3}{dt} = -W^3_3u^2 + W^2_3u^3, \qquad \frac{dW^2_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dW^2_2}{dt} = 1,$$

$$\frac{dW^2_3}{dt} = 0, \qquad \frac{dW^3_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dW^3_2}{dt} = 0, \qquad \frac{dW^3_3}{dt} = 1,$$

где u^i фиксированы. При начальном условии $W^i_j(0, a) = 0$ получим следующее решение

$$(W^i_j) = \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2}a^3(t)^2 & -\frac{1}{2}a^2(t)^2 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(V^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}a^3 & -\frac{1}{2}a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, левоинвариантные 1-формы группы Ли имеют вид

$$\theta^1 = da^1 + \frac{1}{2}(a^3da^2 - a^2da^3), \qquad \theta^2 = da^2, \qquad \theta^3 = da^3.$$

Интегрируя теперь уравнения Ли

$$df^1+\frac{1}{2}(f^3df^2-f^2df^3)=db^1+\frac{1}{2}(b^3db^2-b^2db^3), \qquad df^2=db^2, \qquad df^3=db^3,$$

получим

$$f^1=a^1+b^1+\frac{1}{2}(a^2b^3-a^3b^2), \qquad f^2=a^2+b^2, \qquad f^3=a^3+b^3.$$

Мы нашли закон умножения в искомой группе, записанный в канонических координатах второго рода, в котором a^i входят в качестве констант интегрирования.

0.14 Примеры гомоморфизмов групп и алгебр Ли. Факторгруппы. Прямое произведение групп Ли

Ядро гомоморфизма $f: G\to\hat{G}$ групп Ли

$$\operatorname{Ker} f=\{a\in G:\ f(a)=\hat{e}\},$$

очевидно, является нормальным делителем в G, а $f(G)$ есть подгруппа Ли в $\hat{G}$.

В частности, для инъективности гомоморфизма достаточно, чтобы $\operatorname{Ker} f=e$. Если, кроме того, $f(G)=\hat{G}$, то группы изоморфны.

Если $\mathbf{v}\in\mathfrak{g}$, то $f_*\mathbf{v}\in\hat{\mathfrak{g}}$, где f_* — дифференциал гомоморфизма и $\hat{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\hat{G}$.

Для любых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathfrak{g}$ $f_*[\mathbf{u},\mathbf{v}]=[f_*\mathbf{u},f_*\mathbf{v}]$, т.е. $f_*:\mathfrak{g}\to\hat{\mathfrak{g}}$ — *гомоморфизм алгебр Ли.*

При этом $\operatorname{Ker} f_*$ есть идеал в $\mathfrak{g}$, являющийся алгеброй Ли ядра $\operatorname{Ker} f$, а алгебра Ли подгруппы Ли $f(G)$ есть $f_*(\mathfrak{g})$.

В случае связной группы Ли G группа всех автоморфизмов $Aut(G)$ группы G изоморфна группе всех автоморфизмов $Aut(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В окрестностях единиц f и f_* связаны формулой

$$f\circ\exp=\exp\circ f_*.$$

Вспомним, что множество всех внутренних автоморфизмов

$$\hat{x}=axa^{-1}, \quad a\in G$$

является подгруппой в $Aut(G)$. Элементы $\hat{x} = axa^{-1}$ и x называются *сопряженными.*

Дифференциалы $Ad(a)$ внутренних автоморфизмов образуют подгруппу Ли $Ad(G) \subset Aut(\mathfrak{g})$ — группу Ли внутренних автоморфизмов алгебры Ли, называемую также *присоединенной группой.*

Центральные элементы порождают тождественные преобразования этой группы.

Отметим, что подалгебра $h \subset \mathfrak{g}$ является идеалом тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно преобразований присоединенной группы, т.е. для любого $a \in G$ $Ad(a)h \subset h$.

Алгебра Ли присоединенной группы $ad(\mathfrak{g})$ называется *присоединенной алгеброй.*

Примеры.

1. Рассмотрим отображение $\det : GL(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$.

Это гомоморфизм групп Ли, поскольку аналитическое отображение и $\det(AB) = \det A \det B$.

$$Ker \det = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) : \det A = 1\} = SL(n, \mathbb{K}).$$

Дифференцируя определитель и вычисляя результат в единице группы, получим $\det_* U = \operatorname{tr} U$.

$\det_*$ — гомоморфизм алгебры Ли $gl(n, \mathbb{K})$ на алгебру $\mathbb{K}$.

Его ядро образовано матрицами с нулевым следом $\operatorname{tr} U = 0$. Это идеал $sl(n, \mathbb{K})$.

2. Отображение

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad f(x) = e^{2\pi i x}$$

аналитично и сохраняет групповую операцию

$$f(x+y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi i x} e^{2\pi i y} = f(x) f(y).$$

Его ядро определено условием $e^{2\pi i x} = 1$ и, следовательно, есть дискретный нормальный делитель $\mathbb{Z}$.

Окрестность нуля $U = (-1/2, 1/2)$ биективно отображается на $\mathbb{S}^1 \backslash \{(0, -1)\}$.

Следовательно, f — локальный изоморфизм, не являющийся изоморфизмом.

3. Автоморфизмы аддитивной группы Ли $\mathbb{R}$ удовлетворяют условию

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Дифференцируя это условие по x, получим $f'(x+y) = f'(x)$.

Следовательно, $f'(x) = c = \text{const} \neq 0$. С учетом начального условия $f(0) = 0$, получим $f(x) = cx$.

4. Пусть алгебра Ли задана структурными уравнениями

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 3\mathbf{e}_1, \qquad [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_2, \qquad [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = 3\mathbf{e}_3.$$

Найдем присоединенную алгебру $ad(\mathfrak{g})$. Для любого $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}$

$$ad(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 3u^2 & -3u^1 & 0 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ 0 & 3u^3 & -3u^2 \end{pmatrix}.$$

Положим $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$ и найдем соответствующую однопараметрическую подгруппу.

Для этого интегрируем уравнения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = ad(\mathbf{e}_1)\mathbf{v}$$

при начальном условии $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}$, т.е. систему

$$\frac{dv^1}{dt} = -3v^2, \quad \frac{dv^2}{dt} = -v^3, \quad \frac{dv^3}{dt} = 0.$$

Получим однопараметрическую группу линейных преобразований

$$v^1(t) = v^1 - 3v^2 t + \frac{3}{2}(t)^2 v^3, \quad v^2(t) = v^2 - v^3 t, \quad v^3(t) = v^3,$$

с матрицей

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3t & \frac{3}{2}(t)^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, операторы $ad(\mathbf{e}_2)$ и $ad(\mathbf{e}_3)$ порождают в $\mathfrak{g}$ однопараметрические группы внутренних автоморфизмов с матрицами

$$A_2(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}, \qquad A_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{3}{2}(t)^2 & 3t & 0 \end{pmatrix}.$$

Произвольный внутренний автоморфизм локальной группы $Ad(G)$ находится теперь в виде произведения

$$A(t^1, t^2, t^3) = A_1(t^1)A_2(t^2)A_3(t^3),$$

где t^1, t^2, t^3 — канонические координаты второго рода на группе $Ad(G)$. При вычислении матрицы A удобно перейти к другим координатам, положив

$$t^1 = 2a, \quad t^2 = \frac{1}{3}\ln b, \quad t^3 = 2c.$$

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} p^2b & -6pa & \frac{6a^2}{b} \\ 2pbc & 1-12ac & -\frac{2a}{b} \\ 6bc^2 & 6c & \frac{1}{b} \end{pmatrix},$$

где $p = 1 - 6ac$, $b > 0$.

Пусть $H \subset G$ — замкнутая подгруппа Ли. Подмногообразия $L_aH = aH$ называются левыми смежными классами по этой подгруппе.

Они являются классами эквивалентности по отношению : $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $a^{-1}b \in H$.

Множество G/H всех левых смежных классов наделяется структурой аналитического многообразия, если потребовать, чтобы каноническое отображение

$$\pi : G \to G/H, \qquad \pi(a) = aH$$

было аналитическим. Если H — нормальный делитель, то формула $\pi(ab) = aH \cdot bH$ определяет в G/H групповую операцию, превращающую G/H в группу Ли, называемую *факторгруппой* группы G по H.

Проекция π является в этом случае гомоморфизмом G на G/H с ядром H.

Обратно, пусть $\pi : G \to \hat{G}$ — аналитический гомоморфизм G на $\hat{G}$ и $H = Ker\,\pi$ — его ядро. Тогда $\hat{G}$ изоморфно факторгруппе G/H.

Если h — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то определен коммутатор смежных классов

$$[\mathbf{u}+h, \mathbf{v}+h] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}] + h,$$

который превращает факторпространство $\mathfrak{g}/h$ в алгебру Ли, называемую *факторалгеброй* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по h.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G, а h — подалгебра Ли, соответствующая подгруппе Ли H, то алгебра Ли группы G/H изоморфна факторалгебре $\mathfrak{g}/h$.

При этом $\pi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/h$ — канонический гомоморфизм.

На прямом произведении групп Ли $G = G_1 \times G_2$ возникает структура аналитического многообразия, для которой проекции $p_i : G_1 \times G_2 \to G_i$ $(i = 1, 2)$ аналитичны.

Формула $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$ превращает это произведение в группу Ли, называемую *прямым произведением групп Ли*.

При этом подгруппы $\hat{G}_1 = G_1 \times \{e_2\}$, $\hat{G}_2 = \{e_1\} \times G_2$ есть коммутирующие нормальные делители изоморфные соответственно G_1 и G_2, и имеющие общим элементом лишь единицу (e_1, e_2).

Такие подгруппы называются *взаимно простыми.* С другой стороны, $G = \hat{G}_1 \hat{G}_2$ и это представление G в виде произведения однозначно.

Алгебра Ли прямого произведения однозначно представляется в виде прямой суммы $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ с коммутатором

$$[(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)] = ([\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1], [\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2]).$$

Слагаемые этой суммы с помощью проекций $(p_i)_*$ отождествляются с идеалами алгебры $\mathfrak{g}$.

Примеры.

5. Рассматривая в примере 1 гомоморфизм $\det : GL(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$, мы видели, что его ядром является нормальный делитель $SL(n, \mathbb{K})$. Поэтому факторгруппа $GL(n, \mathbb{K})/SL(n, \mathbb{K})$ изоморфна мультипликативной группе $\mathbb{K}^*$, а факторалгебра $gl(n, \mathbb{K})/sl(n, \mathbb{K})$ изоморфна коммутативной алгебре $\mathbb{K}$.

6. Пусть $\mathbb{Z}$ — подмножество всех целых чисел в аддитивной группе Ли $\mathbb{R}$. Это дискретный и, следовательно, замкнутый нормальный делитель.

Факторгруппа $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ есть одномерный тор, в котором групповая операция определена равенством $c := a + b\,(mod\,\mathbb{Z})$.

Это группа Ли, изоморфная группе $\mathbb{S}^1$ комплексных чисел единичного модуля $f(a) = e^{2\pi i a}$.

n-мерным тором называется факторгруппа Ли $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, в которой групповая операция определена равенством $c^i := a^i + b^i\,(mod\,\mathbb{Z})$.

Это n-мерная коммутативная группа Ли, локально изоморфная $\mathbb{R}^n$.

7. $SL(n, \mathbb{R})$ и группа $\mathbb{R}^*_+$ скалярных матриц λE, $\lambda > 0$ являются коммутирующими между собой нормальными делителями группы Ли $GL^+(n, \mathbb{R})$ n-матриц с положительным определителем.

Из $\det(\lambda E) = \lambda^n = 1$ следует $\lambda = 1$. Таким образом, эти подгруппы взаимно просты.

С другой стороны, каждая матрица $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$ может быть однозначно представлена в виде произведения $A = (\det A)^{1/n} E \cdot A_1$, где $A_1 \in SL(n, \mathbb{R})$.

Поэтому $GL^+(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*_+ \times SL(n, \mathbb{R})$. Переходя к алгебрам Ли, получим прямую сумму $gl(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus sl(n, \mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ представлена как алгебра Ли всех скалярных вещественных матриц.

0.15 Линейные представления

Линейным представлением или действием группы G *на векторном пространстве* V называется гомоморфизм $f : G \to GL(V)$.

Если $Ker\, f = \{e\}$, то представление называют *точным или эффективным.*

Мы будем рассматривать лишь конечномерные представления размерности $n = \dim V$. Выбор базиса в V позволяет заменить $GL(V)$ на $GL(n, \mathbb{K})$.

Линейные представления $f_1 : G \to GL(V_1)$ и $f_2 : G \to GL(V_2)$ называются *эквивалентными*, если существует такой линейный изоморфизм $L : V_1 \to V_2$, что для любого $a \in G$ $L \circ f_1(a) = f_2(a) \circ L$.

Векторное подпространство $V_1 \subset V$ называется *инвариантным отно-*

сительно представления или G-инвариантным, если для любого $a \in G$ $f(a)V_1 \subset V_1$.

Выбрав базис в V таким образом, чтобы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \in V_1$, получим матрицы операторов представления в виде

$$f(a) = \begin{pmatrix} f_1(a) & f_3(a) \\ 0 & f_2(a) \end{pmatrix}.$$

Здесь $f_1(a)$ дает представление группы G в подпространстве V_1 — *подпредставление*, а $f_2(a)$ — представление G в факторпространстве V/V_1 — *факторпредставление.*

Представление называется *неприводимым*, если оно не имеет нетривиальных инвариантных подпространств и *вполне приводимым*, если V разлагается в прямую сумму $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ инвариантных неприводимых подпространств.

Выбрав базис в V адаптированный к этому разложению, мы приведем матрицы всех операторов представления к блочно-диагональному виду

$$f(a) = \begin{pmatrix} f_1(a) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & f_s(a) \end{pmatrix},$$

где каждое f_i реализует неприводимое подпредставление.

В этом случае говорят, что f разложено в сумму неприводимых представлений $f = f_1 \oplus \ldots \oplus f_s$. Некоторые из них могут оказаться эквивалентными.

Учитывая «подобные члены», пишут $f = k_1 f_1 \oplus \ldots \oplus k_t f_t$.

Обратно, если заданы представления $f_1 : G \to GL(V_1)$ и $f_2 : G \to GL(V_2)$, то их сумма в пространстве $V_1 \oplus V_2$ определяется формулой

$$(f_1 \oplus f_2)(a)(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f_1(a)\mathbf{x}_1 + f_2(a)\mathbf{x}_2.$$

Если при этом f_1, f_2 неприводимы, то $f_1 \oplus f_2$ будет вполне приводимым.

Тензорное произведение представлений $f_1 \otimes f_2$ определяется на тензорном произведении векторных пространств $V = V_1 \otimes V_2$ формулой

$$(f_1 \otimes f_2)(a) = f_1(a) \otimes f_2(a).$$

В базисе $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ тензорное произведение представлений реализуется кронекеровским произведением соответствующих матриц

$$f_1 \otimes f_2 = (f(1)_i^k f(2)_j^l).$$

Всякое линейное представление f в V порождает *сопряженное или контрагредиентное представление* в V^*, порожденное сопряженными операторами $\hat{f}(a) = f(a^{-1})^*$ (или $f(a) = f(a^{-1})^\top$ в вещественном случае).

Комбинации сопряжений и тензорных степеней приводят к понятию *тензорного представления* $\otimes^s f \otimes^r \hat{f}$.

Важнейшим инструментом при изучении представления является его *характер* $\chi_f(a) = \operatorname{tr} f(a)$.

В силу свойств следа матрицы он не зависит от выбора базиса. *Характеры эквивалентных представлений совпадают и обратно, если два неприводимых представления имеют одинаковые характеры, то они эквивалентны.*

Если f — представление группы Ли, то возникает *линейное представление ее алгебры Ли* $f_* : \mathfrak{g} \to gl(V)$.

По свойству гомоморфизмов оно сохраняет коммутатор $f_*[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = f_*(\mathbf{u}) f_*(\mathbf{v}) - f_*(\mathbf{v}) f_*(\mathbf{u})$.

Обратно, если группа G связна, то всякое ее линейное представление однозначно определяется представлением ее алгебры Ли.

Часто представление группы G рассматривается не произвольными линейными операторами, а лишь в классе операторов некоторой подгруппы $H \subset GL(V)$.

Если, например, $H = U(n)$, то представление называется *унитарным.* Это значит, что операторы должны сохранять скалярное произведение

$$(f^*(a)\mathbf{x}, f(a)\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

В соответствующем базисе $f^*(a)f(a) = E$. Унитарное представление всегда вполне приводимо. Действительно, если $L \subset V$ инвариантное подпространство, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ будет также инвариантно.

Это позволяет, в свою очередь, доказать полную приводимость всякого комплексного представления компактной (в частности, конечной) группы.

Примеры.

1. Рассмотрим простейшие представления аддитивной группы Ли $\mathbb{R}$.

А. Гомоморфизм

$$f : \mathbb{R} \to SO(2), \qquad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

является представлением $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ с ядром $Ker\, f$ изоморфным $\mathbb{Z}$.

Это представление неприводимо, так как вращения в $\mathbb{R}^2$ не имеют инвариантных подпространств.

B) Гомоморфизм

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является представлением $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$. Оно точное и реализуется группой сдвигов $x^{1'} = x^1 + tx^2$, $x^{2'} = x^2$.

Его инвариантные векторные подпространства находятся из условия $f(t)\mathbf{x} = \lambda(t)\mathbf{x}$.

Отсюда получаем систему уравнений

$$x^1 + tx^2 = \lambda(t)x^1, \qquad x^2 = \lambda(t)x^2,$$

из которой следует, что единственное нетривиальное инвариантное подпространство задается вектором $\mathbf{e} = (1, 0)$.

Следовательно, представление приводимо, но не вполне приводимо.

C) Гомоморфизм

$$f(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

является представлением $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ группой псевдоевклидовых вращений $SO_e(1,1)$.

Для нахождения инвариантных подпространств получим систему

$$x^1(\operatorname{ch} t - \lambda(t)) + x^2 \operatorname{sh} t = 0, \qquad x^1 \operatorname{sh} t + x^2(\operatorname{ch} t - \lambda(t)) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 2\lambda \operatorname{ch} t + 1 = 0$$

и имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2} = \operatorname{ch} t \pm \operatorname{sh} t$.

Это дает две инвариантные прямые с направляющими векторами $\mathbf{e}_1 = (1, 1)$ и $\mathbf{e}_2 = (1, -1)$ — изотропные прямые псевдоевклидовой метрики.

2. Все одномерные комплексные представления группы $\mathbb{R}$ задаются аналитической функцией $f(t)$ на $\mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям

$$f(t+s) = f(t)f(s), \qquad f(0) = 1.$$

Решение имеет вид $f(t) = e^{ct}$, где c — некоторая комплексная константа.

Найдем среди этих представлений унитарные. Эрмитова метрика на $\mathbb{C}$ имеет вид $F(x, x) = x\overline{x}$.

Условие унитарности дает $e^{ct}e^{\overline{c}t} = 1$, откуда $c + \overline{c} = 0$.

Следовательно, $c = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Таким образом, функции $f(t) = e^{i\alpha t}$ дают полный набор унитарных представлений группы $\mathbb{R}$.

3. Пусть $\mathbb{H}$ — тело кватернионов, $\mathbb{R}^3$ — содержащееся в нем трехмерное пространство чисто мнимых кватернионов

$$x = x^1 i + x^2 j + x^3 k, \quad (\overline{x} = -x),$$

$\mathbb{S}^3$ — группа Ли кватернионов единичного модуля, связная, односвязная и компактная.

Отметим, что в $\mathbb{R}^3$ есть евклидова метрика $|x|^2 = x\overline{x}$. Каждому $a \in \mathbb{S}^3$ сопоставим преобразование $f(a)x = axa^{-1}$.

Это линейный оператор в $\mathbb{R}^3$, поскольку из $\overline{x} = -x$ следует, что

$$\overline{x}' = \overline{axa^{-1}} = \overline{a^{-1}}\,\overline{x}\,\overline{a} = -axa^{-1} = -x'.$$

Это ортогональный оператор, поскольку

$$|\overline{x}'| = |a||x||a^{-1}| = |x|.$$

Имеем гомоморфизм $f : \mathbb{S}^3 \to SO(3)$, поскольку группа $\mathbb{S}^3$ связная. Найдем его ядро.

Из условия $axa^{-1} = x$ следует $ax = xa$. Полагая здесь $x = i$, а затем $x = j$, получим, что этому равенству удовлетворяет при произвольном x лишь $a = \pm 1$.

Итак, $Ker\, f = \mathbb{Z}_2$. Значит, образ $f(\$^3) \subset SO(3)$ трехмерен, а поскольку $\mathbb{S}^3$ связно, то он также связен.

В силу теоремы Шрейера отсюда заключаем, что $f(\$^3) = SO(3)$.

Таким образом, построено линейное представление группы $\mathbb{S}^3$ в виде группы собственных вращений трехмерного евклидова пространства. Ясно, что это представление неприводимо.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Постников М. М. Лекции по геометрии. Группы и алгебры Ли. - М.: Наука, 1982.

[2] Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. - М.: Мир, 1987.

[3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Том I. - М.: УРСС, 1998.

[4] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. - М.: Наука, 1981.

[5] Шапуков Б. Н. Задачи по группам Ли и их приложениям. - М.: РХД, 2002.

[6] Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. -М.: Изд-во МГУ, 1980.