КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра геометрии

Е.Н. СОСОВ

ВВЕДЕНИЕ В РИМАНОВУ ГЕОМЕТРИЮ: УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

КАЗАНЬ – 2016

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО “Казанский (Приволжский) федеральный университет”

Учебно-методической комиссии Института математики и механики
Протокол No. 9 от 9 июня 2016 г.

заседания кафедры геометрии
Протокол No. 8 от 30 мая 2016 г.

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, доцент **А.А. Попов**

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук, доцент К(П)ФУ **В.В. Шурыгин (мл.)**

Сосов Е.Н.
Введение в риманову геометрию: Учебно-методическое пособие /Е.Н. Сосов — Казань: Казан. ун-т, 2016. - 52 с.

Пособие содержит введение в риманову геометрию.
Предназначено для студентов-математиков III-IV курсов.

УДК 515.17

Оглавление

Введение

Данное учебно-методическое пособие включает минимум вводного курса по римановой геометрии. Оно предназначено для студентов-математиков III-IV курсов. Рассматриваются различные классы пространств и их отображений. Например, римановы, конформно-плоские и проективно-евклидовы пространства, пространства Эйнштейна и пространства постоянной кривизны.

Все задачи в пособии служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

В пособии приняты следующие обозначения.

$\odot$ — символ начала (конца) доказательства.

О — обозначает определение.

0.1 Связность на многообразии. Ковариантное дифференцирование

Для простоты формулировок предполагаем рассматриваемые функции и многообразия гладкими. Напомним некоторые определения.

О. *Тензорное поле валентности (p, q) в области $U \subset M$ гладкого многообразия есть отображение, которое произвольной точке $x \in M$ ставит в соответствие тензор $F_x(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q, \eta^1, \ldots, \eta^p)$ с аргументами из касательного и кокасательного пространств.*

В координатах тензорное поле задается своими компонентами — набором n^{p+q} $(n = \dim M)$ функций, которые в каждой точке являются значениями тензора на базисных векторах и ковекторах касательного и кокасательного пространств

$$F^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x) = F_x(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q}, dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p}).$$

Тензорное поле называется гладким, если эти функции гладкие. При переходе от карты (U, x^i) к карте $(U', x^{i'})$ компоненты тензорного поля изменяются по линейному закону

$$F^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q}(x') = P^{i'_1}_{i_1} \ldots P^{i'_p}_{i_p} F^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x) P^{j_1}_{j'_1} \ldots P^{j_q}_{j'_q}\,, \tag{1}$$

где матрицей перехода в каждой точке пересечения областей карт является якобиева матрица P с элементами $P^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ и обратная к ней матрица P^{-1} с элементами $P^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$.

Из этой формулы следует, что обращение тензорного поля в нуль не зависит от выбора координат.

Для тензорных полей выполнимы алгебраические операции: сложение тензорных полей одинаковой валентности, умножение, свертывание, симметрирование и альтернирование. Все они выполняются поточечно. Более того, тензорное поле можно умножить на функцию, поскольку в каждой точке эта операция сводится к умножению на число.

Напомним простые примеры тензорных полей.

В каждой карте (U, x^i) векторное поле $\mathbf{a}$ действует на скалярное поле $F : M \to \mathbb{R}$ как дифференциальный оператор по формуле

$$\mathbf{a}(F) = a^i \partial_i F\,,$$

т.е. в результате получим новое скалярное поле.

Ковекторное поле $\alpha : x \mapsto T_x^*M$ задается ковектором в каждой точке многообразия. Рассмотрим в какой-либо точке x множество векторов, которые обращают в нуль линейную форму α_x:

$$\alpha(\mathbf{a}) = \alpha_1 a^1 + \cdots + \alpha_n a^n = 0.$$

Это уравнение гиперплоскости в касательном пространстве этой точки. Следовательно, ковекторное поле в каждой точке многообразия задает гиперплоскость, т.е. получаем на многообразии так называемое *распределение* — поле гиперплоскостей.

О. *Ковекторное поле — потенциально, если оно является градиентом некоторого скалярного поля:* $\alpha = \mathrm{grad} F$. *Функция* F *— потенциал поля.*

Пусть $\mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли гладких векторных полей на многообразии M и $\mathbf{h}$ — заданное векторное поле.

О. *Ковариантной производной в направлении векторного поля* $\boldsymbol{h}$ *называется отображение* $\nabla_{\boldsymbol{h}} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, *удовлетворяющее условиям:*

$$1) \nabla_{\mathbf{h}}(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{a} + \mu \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{b}\,, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \tag{2}$$

$$2)\ \nabla_{\mathbf{h}}(f\mathbf{a}) = f \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{a} + (\mathbf{h} f)\mathbf{a}\,, \quad \forall f \in \mathbf{F}(M); \tag{3}$$

$$3)\ \nabla_{f\mathbf{h}_1 + g\mathbf{h}_2} \mathbf{a} = f \nabla_{\mathbf{h}_1} \mathbf{a} + g \nabla_{\mathbf{h}_2} \mathbf{a} \quad \forall f, g \in \mathbf{F}(M). \tag{4}$$

Многообразие, на котором задан оператор ковариантного дифференцирования, обозначается (M, ∇).

Пусть (U, x^i) — карта на (M, ∇) и $\{\partial_i\}$ — натуральный базис. Обозначим *частную ковариантную производную* через $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ и положим

$$\nabla_i\, \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k\,. \tag{5}$$

Это *деривационные уравнения поля натуральных реперов.*

Пусть $\mathbf{a} = a^j(x)\partial_j$. Тогда, учитывая свойства $(2-4)$, получим

$$\nabla_i \mathbf{a} = \nabla_i (a^j \partial_j) = \partial_i a^j \partial_j + \Gamma^k_{ij} a^j \partial_k = (\partial_i a^k + \Gamma^k_{ij} a^j)\partial_k\,. \tag{6}$$

Следовательно,

$$\nabla_i \mathbf{a}^k = \partial_i a^k + \Gamma^k_{ij} a^j,$$

$$\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{a} = h^i\nabla_i\mathbf{a} = h^i(\partial_i a^k + \Gamma^k_{ij}a^j)\partial_k\,.$$

Таким образом, задание операции ковариантного дифференцирования эквивалентно заданию в каждой карте совокупности функций $\Gamma^k_{ij}(x)$. Эти функции называются *компонентами линейной связности* относительно заданной карты, а линейные дифференциальные формы $\omega^k_j = \Gamma^k_{ij}dx^i$ называются *формами связности.*

О. *Линейная связность на многообразии M есть отображение $\boldsymbol{h} \mapsto \nabla_{\boldsymbol{h}}$, сопоставляющее каждому векторному полю $\boldsymbol{h} \in \mathfrak{X}(M)$ оператор ковариантного дифференцирования по $\boldsymbol{h}$.*

Более старое название: аффинная связность. Пара (M, ∇) называется *пространством аффинной связности.* Выясним, как компоненты связности преобразуются при замене координат $x^{i'} = f^{i'}(x^i)$ на пересечении $(U, x^i) \cap (U', x^{i'})$ двух карт.

Теорема 1 При переходе от одних координат к другим компоненты линейной связности преобразуются по следующему закону

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = P^{k'}_k(\Gamma^k_{ij}P^i_{i'}P^j_{j'} + P^k_{i'j'}),\ \text{где}\ P^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,,\ P^k_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\,,\ P^{k'}_k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}. \tag{7}$$

В матричной записи этот закон имеет вид

$$\omega' = P(\omega P^{-1} + dP^{-1}),$$

где $\omega = (\omega^k_j)$ —матрица форм связности.

$\odot$ Используя (5) и свойства ковариантной производной, получим

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}P^k_{k'}\partial_k = \Gamma^{k'}_{i'j'}(x')\partial_{k'} = \nabla_{i'}\partial_{j'} = \nabla_{\partial_{i'}}(P^j_{j'}\partial_j) = P^j_{j'}\nabla_{\partial_{i'}}\partial_j + \partial_{i'}P^j_{j'}\partial_j =$$

$$P^j_{j'}\nabla_{(P^i_{i'}\partial_i)}\partial_j + P^k_{i'j'}\partial_k = P^i_{i'}P^j_{j'}\nabla_{\partial_i}\partial_j + P^k_{i'j'}\partial_k = (P^i_{i'}P^j_{j'}\Gamma^k_{ij} + P^k_{i'j'})\partial_k,$$

откуда после свертывания с $P^{m'}_k$ приходим к утверждению теоремы. $\odot$

Формула (7) показывает, что компоненты связности не образуют тензорного поля и обращение их в нуль не имеет инвариантного характера.

Положим в декартовых координатах аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ все функции $\Gamma^k_{ij}(x)$ равными нулю. Тогда получим на $\mathbb{A}^n$ так называемую *каноническую линейную связность.*

0.2 Параллельный перенос вектора вдоль кривой. Группа голономии

Пусть $\gamma : [a,b] \to M$ — гладкий путь на пространстве аффинной связности (M, ∇), локально имеющий параметрические уравнения $x^i = x^i(t)$ с касательным вектором $\mathbf{h} = (\frac{dx^i}{dt})$. Тогда

$$\frac{\nabla \mathbf{a}}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\nabla_i \mathbf{a} = \Big(\frac{da^k(t)}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x^l(t))\frac{dx^i(t)}{dt}a^j(t)\Big)\partial_k$$

называется *ковариантной производной векторного поля* $\boldsymbol{a}$ *вдоль пути* γ.

О. *Векторное поле* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ *назовем параллельным вдоль заданного гладкого пути* γ*, если его ковариантная производная вдоль этого пути равна нулю*:

$$\frac{\nabla \mathbf{a}}{dt} = 0\,,$$

то есть в локальных координатах

$$\nabla_i a^k = \frac{da^k(t)}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x^l(t))\frac{dx^i(t)}{dt}a^j(t) = 0. \qquad (8)$$

Теорема 2 Пусть в начальной точке $x(0)$ гладкого пути $\gamma : x = x(t)$, $t \in [0,1]$ задан вектор $\mathbf{a}_0 \in T_{x(0)}M$. Тогда существует паралельное векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ вдоль этого пути, такое что $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0$. В этом случае говорят, что во всякой точке этого пути существует единственный вектор, параллельный данному.

$\odot$ В силу непрерывности γ образ $x([0,1])$ компактного отрезка компактен в M. Следовательно, компакт $x([0,1])$ может быть покрыт конечным числом областей карт и путь может разбит на конечное число путей, каждый из которых принадлежит одной карте. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что образ $x([0,1])$ принадлежит одной карте. Пусть $x^i = x^i(t)$ — уравнение этого пути в локальных кординатах. Условие (8) приводит к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, которая по теореме Коши имеет единственное гладкое решение при начальных данных $a^k(0) = {a^k}_0$, продолжаемое до значения $t = 1$.$\odot$

О. *Для заданного на многообразии* M *гладкого пути* $\gamma : x = x(t)$*,* $t \in [0,1]$ *отображение* $P_\gamma : T_{x(0)}M \to T_{x(t)}M$*, которое сопоставляет вектору*

$\boldsymbol{a}_0 \in T_{x(0)}M$ паралельный вдоль $\gamma|_{[0,t]}$ вектор $\boldsymbol{a}(t) \in T_{x(t)}M$, называется параллельным переносом вдоль γ.

Теорема 3 Для заданного на многообразии M гладкого пути $\gamma : x = x(t)$, $t \in [0, 1]$ параллельный перенос $P_\gamma : T_{x(0)}M \to T_{x(1)}M$ есть изоморфизм касательных пространств.

$\odot$ Из линейности системы дифференциальных уравнений (8) следует, что ее решение линейно зависит от начального вектора. Значит, отображение P_γ — линейно. Параллельный перенос $P_{\gamma^{-1}}$ вдоль пути γ^{-1} : $y = x(1-t))$, $t \in [0, 1]$ обратен исходному. Следовательно, это отображение — изоморфизм.$\odot$

Пусть C_x — множество кусочно-гладких петель в точке $x \in M$. Кусочно-гладкая петля — это кусочно-гладкое отображение

$$\gamma : [0, 1] \to M, \quad \gamma(0) = \gamma(1) = x.$$

На множестве C_x определим бинарную операцию умножения петель

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \gamma_2(2t) \text{ при } t \in [0, 1/2], \ \gamma_1\gamma_2(t) = \gamma_1(2t-1) \text{ при } t \in [1/2, 1].$$

Если мы рассмотрим на (M, ∇) параллельные переносы вдоль этих петель, то с учетом доказательств теорем 2 и 3 получим

$$P_{\gamma_1\gamma_2} = P_{\gamma_1} P_{\gamma_2}.$$

Таким образом, определена бинарная операция умножения на множестве параллельных переносов H_x вдоль петель в точке $x \in M$:

$$H_x = \{P_\gamma : \gamma \in C_x\}.$$

Используя эту операцию и теорему 3, получим следующий результат.

Теорема 4 Множество H_x с рассмотренным умножением является подгруппой в группе всех невырожденных линейных операторов $GL(T_xM)$. H_x называется группой голономии линейной связности ∇ в точке $x \in M$.

Теорема 5 Если гладкое многообразие M связно, то группы голономии в двух произвольных точках изоморфны.

$\odot$ Известно, что связное гладкое многообразие линейно связно. Более того, любые две его точки x, y можно соединить кусочно-гладким путем γ. Тогда требуемый изоморфизм можно определить так

$$\phi : H_x \to H_y, \qquad \phi(P_\tau) = P_{\gamma\tau\gamma^{-1}}. \odot$$

0.3 Геодезические линейной связности. Экспоненциальное отображение

Касательным полем на гладком пути γ многообразия называется векторное поле, состоящее из касательных векторов $\gamma'(t)$.

О. *Гладкий путь γ на многообразии называется геодезическим, если при некотором каноническом выборе параметра его касательное векторное поле $\boldsymbol{h} = (\frac{dx^k}{dt})$ параллельно вдоль γ.*
Из (8) сразу вытекает, что функции $x^k = x^k(t)$ должны удовлетворять системе ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt} = 0\,. \tag{9}$$

Теорема 6 Для всякой точки $x \in M$ и всякого вектора $\mathbf{a} \in T_xM$ в этой точке существует единственный максимальный (не продолжаемый ни на какой больший интервал $I_x(\mathbf{a})$ вещественной оси) геодезический путь $\gamma_{x,\mathbf{a}} : x = x(t)$ такой, что $x(0) = x$, $\frac{dx}{dt}(0) = \mathbf{a}$. Причем, согласно теореме о гладкой зависимости решений системы ОДУ от начальных данных, функции $x^k = x^k(t)$, задающие в локальных координатах геодезический путь, являются гладкими функциями от $2n+1$ аргументов t, x^k, a^k. В этом смысле геодезический путь $\gamma_{x,\mathbf{a}}$ гладко зависит от точки x и вектора $\mathbf{a}$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.

В аффинном пространстве с канонической линейной связностью параллельный перенос вдоль гладкого пути осуществляется по обычному закону: его декартовы координаты постоянны. Это сразу следует из (8), поскольку все компоненты связности нулевые. Геодезические пути в канонической связности — прямые линии, поскольку решения системы ОДУ

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = 0$$

имеют вид

$$x^k = a^k t + b^k, \qquad a^k,\, b^k = const.$$

Если $I_x(\mathbf{a}) = \mathbb{R}$ для любой точки $x \in M$ и любого вектора $\mathbf{a} \in T_xM$, то многообразие M с линейной связностью ∇ (а также сама связность) называется *геодезически полным (ой)*.

При замене параметра $t \to \lambda t$ геодезический путь $\gamma_{x,\boldsymbol{a}}$ перейдет в геодезический путь $\gamma_{x,\lambda\boldsymbol{a}}$. Действительно, поскольку функции $y^k = x^k(\lambda t)$ также удовлетворяют уравнениям (9) и $\frac{dy^i(0)}{dt} = \lambda \frac{dx^i(0)}{dt}$, то

$$\gamma_{x,\mathbf{a}}(\lambda t) = \gamma_{x,\lambda\mathbf{a}}(t). \tag{10}$$

Предполагая для простоты рассуждений многообразие аналитическим, разложим функции, определяющие локальные уравнения геодезического пути в ряды Тейлора

$$x^i(t) = x_0^i + a^i t + c_2^i t^2 + \ldots + c_m^i t^m + \ldots, \tag{11}$$

где x_0^i — координаты точки x, $a^i = \frac{dx^i(0)}{dt}$, $1 \le i \le n$.

Тогда при любом достаточно малом $|\lambda|$ соотношение (10) равносильно тождествам

$$c_m^i(\lambda\mathbf{a}) = \lambda^m c_m^i(\mathbf{a}), \qquad 1 \le i \le n,\ 2 \le m < \infty.$$

Пусть $x_0 \in (M, \nabla)$ и $(U_0', \phi) = (U_0', x^k)$ — центрированная в x_0 карта, для которой $\phi(U_0')$ — открытый шар с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^n$.

Для каждой точки $x \in U_0'$ считаем касательное пространство T_xM снабженным евклидовой структурой, по отношению к которой натуральный базис ортонормирован.

Теорема 7 Существует такое $\varepsilon > 0$ и такая окрестность $U_0 \subset U_0'$ точки x_0, что для любой точки $x \in U_0$ и любого вектора $\mathbf{a} \in T_xM$ с $|\mathbf{a}| < \varepsilon$ геодезическая $\gamma_{x,\mathbf{a}}$ определена при $|t| < 2$ $((-2,2) \subset I_x(\mathbf{a}))$.

$\odot$ Из того, что геодезическая $\gamma_{x,\mathbf{a}}$ гладко зависит от x и $\mathbf{a}$, следует существование такой окрестности $U_0 \subset U_0'$ точки x_0 и таких чисел ε_1, ε_2, что для каждой точки $x \in U_0$ и любого вектора $\mathbf{a} \in T_xM$ с $|\mathbf{a}| < \varepsilon_1$ геодезическая $\gamma_{x,\mathbf{a}}$ определена при $|t| < 2\varepsilon_2$.

Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_1\varepsilon_2$. Тогда при $|\mathbf{a}| < \varepsilon$ верно неравенство $|\varepsilon_2^{-1}\mathbf{a}| < \varepsilon_1$, и потому геодезическая $\gamma_{x,\varepsilon_2^{-1}\mathbf{a}}$ определена при $|\varepsilon_2^{-1}t| < 2$.

Доказательство следует теперь из импликаций

$$t \in I_x(\mathbf{a}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \varepsilon_2 t \in I_x(\varepsilon_2^{-1}\mathbf{a}). \odot$$

Уменьшив, если нужно, окрестность U_0, мы можем считать, что $\phi(U_0)$ — открытый шар с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^n$.

О. *Вектор* $\boldsymbol{a} \in T_xM$ *называется экспоненциируемым, если геодезическая* $\gamma_{x,\boldsymbol{a}}$ *определена при* $t = 1$ *(т.е. если* $1 \in I_x(\boldsymbol{a})$*). (*$O_x$ *— множество всех экспоненциируемых векторов в* T_xM*). Для любого экспоненцируемого вектора* $\boldsymbol{a} \in T_xM$ *точка*

$$\exp_x \boldsymbol{a} = \gamma_{x,\boldsymbol{a}}(1)$$

называется экспонентой вектора $\boldsymbol{a}$*, а* $\exp_x$ *— экспоненциальным отображением.*

Отметим, что $\exp_x 0 = x$, т.е. $0 \in O_x$ и если $\mathbf{a} \in O_x$, то для каждого $\lambda \in [0,1]$ $\lambda\mathbf{a} \in O_x$, т.е. O_x обладает *свойством звездности.*

Равенство $O_x = T_xM$ имеет место тогда и только тогда, когда многообразие геодезически полно. По лемме 1 для каждого $x \in M$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $B(0,\varepsilon) \subset O_x$, т.е. $0 \in Int\, O_x$.

Из формулы (11) при $t = 1$ следует, что если координаты точки $\exp_x \mathbf{a}$ определены, то

$$(\exp_x \mathbf{a})^i = x^i + a^i + c_2^i(x,\mathbf{a}) + \ldots + c_m^i(x,\mathbf{a}) + \ldots, \tag{12}$$

где x^i — координаты точки x в карте

$$(U_0, \phi), \qquad a^i = \frac{dx^i}{dt}, \qquad (1 \le i \le n)$$

— координаты вектора $\mathbf{a}$ в натуральном базисе, а $c^i_m(x,\mathbf{a})$, $1 \le i \le n$, $2 \le m < \infty$, — гладкие функции от x, $\mathbf{a}$, являющиеся однородными многочленами степени m от $a^1, \dots, a^n$.

Поэтому для любых i, $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial(\exp_x \mathbf{a})^i}{\partial a^j} = \delta^i_j + \frac{\partial c^i_2(x,\mathbf{a})}{\partial a^j} + \ldots + \frac{\partial c^i_m(x,\mathbf{a})}{\partial a^j} + \ldots,$$

где

$$\frac{\partial c^i_m(x,\mathbf{a})}{\partial a^j}$$

— однородные многочлены положительной степени $m-1$ от $a^1, \dots, a^n$ (и, значит, при $a^1 = 0, \dots, a^n = 0$ равные нулю).

Таким образом, в точке $0 \in T_xM$ якобиева матрица функций (12) является единичной матрицей и точка 0 обладает в T_xM фундаментальной системой окрестностей, содержащихся в O_x, на каждой из которых отображение $\exp_x$ является диффеоморфизмом на некоторую окрестность точки x.

О. *Окрестность U^0 вектора $0 \in T_xM$ и окрестность U точки $x \in M$ называются нормальными окрестностями, если U^0 обладает свойством звездности и отображение $\exp_x$ является ее диффеоморфизмом на U.*

Таким образом, нормальные окрестности составляют фундаментальную систему окрестностей (соответственно вектора $0 \in T_xM$ и точки $x \in M$) и каждая нормальная окрестность диффеоморфна открытому шару в T_xM.

Координаты $x^1, \dots, x^n$ в нормальной окрестности U называются *нормальными координатами*, если диффеоморфизм $\exp_x^{-1}$ переводит их в линейные координаты на U^0.

Нормальные координаты характеризуются тем, что проходящие через точку x геодезические имеют в них уравнения вида

$$x^i = a^i t, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Имеет место

Теорема 8 *(Уайтхеда) Каждая точка x_0 пространства аффинной связности обладает окрестностью U, являющейся нормальной окрестностью любой своей точки, и такой, что для любых точек $x, y \in U$ отрезок геодезической $\gamma_{x,y}$ содержится в U.*

0.4 Ковариантное дифференцирование тензорных полей

Для распространения операции ковариантного дифференцирования на тензорные поля любой валентности введем в дополнение к условиям (2–4) еще два условия.

1) Ковариантная производная скалярного поля совпадает с обычной производной этого поля в заданном направлении:

$$\nabla_{\mathbf{h}} F = \mathbf{h}(F);$$

2) Для любой пары тензорных полей F, G

$$\nabla_{\mathbf{h}}(F \otimes G) = \nabla_{\mathbf{h}} F \otimes G + F \otimes \nabla_{\mathbf{h}} G\,.$$

Пусть (U, x^i) — карта на (M, ∇) и $\{\partial_i\}$ — натуральный базис. Рассмотрим сначала ковекторное поле $\alpha = \alpha_k(x) dx^k$.

Дифференцируя ковариантно условие сопряженности базисов

$$dx^k(\partial_j) = \delta^k_j,$$

получим $\nabla_i dx^k(\partial_j) + dx^k \nabla_i \partial_j = 0$.

Учитывая (5), отсюда найдем

$$\nabla_i dx^k(\partial_j) = -\Gamma^k_{ij}\,,$$

т. е.

$$\nabla_i dx^k = -\Gamma^k_{ij} dx^j\,. \tag{13}$$

Это *деривационные уравнения поля натуральных кореперов*, двойственные уравнениям (5).

Принимая во внимание свойства (2) и (3), будем иметь

$$(\nabla_i \alpha) = (\partial_i \alpha_k) dx^k + \alpha_k \nabla_i dx^k = (\partial_i \alpha_k) dx^k - \alpha_k \Gamma^k_{ij} dx^j$$

и, следовательно, имеем следующий аналог формулы (6)

$$\nabla_i \alpha_j = \partial_i \alpha_j - \Gamma_{ij}^k \alpha_k \,. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь, например, тензорное поле валентности $(1,1)$. Пусть

$$F = F_j^i(x) \partial_i \otimes dx^j$$

— разложение этого тензора по векторам натуральных репера и корепера. Учитывая деривационные уравнения (5) и (13), получим

$$\nabla_k F = (\partial_k F_j^i) \partial_i \otimes dx^j + F_j^i (\nabla_k \partial_i \otimes dx^j + \partial_i \otimes \nabla_k dx^j) =$$

$$(\partial_k F_j^i) \partial_i \otimes dx^j + F_j^i (\Gamma_{ki}^s \partial_s \otimes dx^j - \partial_i \otimes \Gamma_{ks}^j dx^s) \,.$$

В итоге имеем тензорное поле с компонентами

$$\nabla_k F_j^i = \partial_k F_j^i + \Gamma_{ks}^i F_j^s - \Gamma_{kj}^s F_s^i \,. \tag{15}$$

В общем случае координатная формула получается аналогично. Приведем ее еще для тензорных полей валентности $(0,2)$ — билинейных форм:

$$\nabla_{\mathbf{h}} F_{ij} = h^k \nabla_k F_{ij} = h^k (\partial_k F_{ij} - \Gamma_{ki}^s F_{sj} - \Gamma_{kj}^s F_{is}) \,. \tag{16}$$

Для заданного на многообразии M гладкого пути $\gamma : x = x(t)$, $t \in [0,1]$ параллельный перенос $P_\gamma : T_{x(0)}M \to T_{x(1)}M$ есть изоморфизм касательных пространств. Следовательно, определен линейный изоморфизм кокасательных пространств $P_\gamma^* : T_{x(1)}^* M \to T_{x(0)}^* M$.

Вследствие этого становится возможным параллельное перенесение тензорных полей любой валентности. Условием этого является обращение в нуль ковариантной производной вдоль заданной кривой $x = x(t)$, когда $\mathbf{h} = (\frac{dx^i}{dt})$. Например, для тензорного поля валентности $(0,2)$

$$\frac{\nabla F_{ij}}{dt} = \frac{dF_{ij}}{dt} - (\Gamma_{ki}^s F_{sj} + \Gamma_{kj}^s F_{is}) \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

0.5 Тензор кручения и симметрические связности. Геометрический смысл тензора кручения. Координаты тензора кручения в голономном и неголономном реперах

О. *Отображение*

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} - \nabla_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],$$

определяет кососимметричное тензорное поле валентности $(1, 2)$, *которое называется тензором кручения аффинной связности* ∇. *В случае, когда этот тензор равен нулю, т.е. когда для любых векторных полей* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} - \nabla_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],$$

связность ∇ *называется симметрической (или симметричной).*

$\mathbb{R}$-билинейность отображения T сразу следует из свойств ковариантной производной и скобки. Установим $\mathbf{F}(M)$-билинейность этого отображения.

$$T(f\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \nabla_{f\mathbf{a}}\mathbf{b} - \nabla_{\mathbf{b}}(f\mathbf{a}) - [f\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$$

$$f\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{b} - \mathbf{b}(f)\mathbf{a} - f\nabla_{\mathbf{b}}\mathbf{a} - f[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \mathbf{b}(f)\mathbf{a} = fT(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Найдем координаты тензора кручения в некоторой карте

$$T^k_{ij} = T(\partial_i, \partial_j)^k = (\nabla_i \partial_j)^k - (\nabla_j \partial_i)^k = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}, \quad i,\ j,\ k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, аффинная связность ∇ тогда и только тогда симметрична, когда в каждой карте

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}, \quad i,\ j,\ k = 1, \ldots, n.$$

Теорема 9 Если аффинная связность ∇ на многообразии M симметрична, то для любой точки x_0 в центрированных в этой точке нормальных координатах

$$(\Gamma^k_{ij})_{x_0} = 0, \quad i,\ j,\ k = 1, \ldots, n.$$

$\odot$ Подставим в уравнения геодезических решение

$$x^i = a^i t, \qquad\qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\Gamma^k_{ij}(t\mathbf{a}) a^i a^j = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Подставив в эти уравнения $t = 0$, с учетом симметричности связности и произвольности чисел $a^i, \quad i = 1, \ldots, n$, получим требуемое.$\odot$

Пусть $x_0 \in M$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_{x_0}M$. Тогда на многообразии M найдется векторное поле $\mathbf{A}$, что в карте (U, x^i) его компоненты постоянны и в натуральном базисе в точке x_0 имеют координаты $a^i, \quad i = 1, \ldots, n$, совпадающие с координатами вектора $\mathbf{a}$.

Интегральная кривая $u : t \mapsto u(t)$ этого поля, проходящая при $t = 0$ через точку x_0, будет задаваться в карте (U, x^i) функциями

$$x^i(t) = x^i_0 + a^i t, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $x^i_0 \quad (i = 1, \ldots, n)$ — координаты точки x_0.

Поэтому для координат $b^i(t)$ вектора $\mathbf{b}(t)$, полученного параллельным переносом вектора $\mathbf{b}$ вдоль кривой u в точку $u(t)$, будут иметь равенства

$$b^i(t) = b^i - (\Gamma^i_{kj})_{x_0} a^k b^j t + o(t).$$

Фиксируем t. Пусть $\mathbf{B}$ — векторное поле на M, координаты которого в карте (U, x^i) постоянны и равны $b^i(t)$.

Тогда интегральная кривая $v : s \to v(s)$ этого поля, проходящая при $s = 0$ через точку $u(t)$, будет задаваться в карте (U, x^i) функциями

$$s \mapsto x^i(t) + b^i(t)s, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Для координат точки $x_t = v(s)|_{s=t}$ получим равенство

$$x^i_t = x^i_0 + (a^i + b^i)t - (\Gamma^i_{kj})_{x_0} a^k b^j t^2 + o(t^2).$$

Точку x_t можно представлять себе как результат сдвига точки x_0 на расстояние t сначала в направлении вектора $\mathbf{a}$, а затем в направлении вектора $\mathbf{b}$.

Аналогичные формулы (с перестановкой координат a^i и b^i) будут иметь место и для точки y_t, получающейся сдвигом точки x_0 сначала в направлении вектора $\mathbf{b}$, а затем в направлении вектора $\mathbf{a}$. Поэтому

$$y_t^i - x_t^i = [(\Gamma^i_{kj})_{x_0} a^k b^j - (\Gamma^i_{kj})_{x_0} a^j b^k] t^2 + o(t^2) =$$

$$[(\Gamma^i_{kj})_{x_0} - (\Gamma^i_{jk})_{x_0}] a^k b^j t^2 + o(t^2) = T(\mathbf{a}, \mathbf{b})^i t^2 + o(t^2).$$

На инфинитезимальном языке это означает, что попытка построить в M на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ бесконечно малый параллелограмм приводит к пятиугольнику, замыкающая сторона которого является бесконечно малой второго порядка, с точностью до бесконечно малых третьего порядка равной $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Это дает геометрическую интерпретацию тензора кручения и, в частности, показывает, что *аффинная связность тогда и только тогда симметрична, когда каждый бесконечно малый параллелограмм замыкается с точностью до бесконечно малых третьего порядка.*

Задача. Пусть аффинная связность ∇ на многообразии M симметрична и для любой точки x_0 с координатами $x_0^k, \quad k = 1, \ldots, n$, компоненты связности равны

$$(\Gamma^k_{ij})_{x_0}, \quad i,\, j,\, k = 1, \ldots, n.$$

Тогда нормальные координаты в некоторой окрестности этой точки можно ввести формулами

$$x^{k'} = \delta^{k'}_s \{(x^s - x_0^s) + \frac{1}{2} (\Gamma^s_{ij})_{x_0} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)\}, \quad i,\, j,\, k',\, s = 1, \ldots, n.$$

.

Произвольный базис

$$X_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

модуля $\mathfrak{X}(M)$ над областью U карты (U, x^i) называется *неголономным базисом* в отличие от натурального (голономного) базиса.

Сопряженный базис (кобазис), то есть базис модуля 1-форм $\Omega^1 M$ над U, обозначим так

$$\theta^j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

По определению

$$\theta^j(X_i) = \delta^j_i, \quad i,\, j = 1, \ldots, n.$$

Компоненты

$$\Gamma^k_{ij} = \theta^k(\nabla_{X_i} X_j), \qquad \omega^k_j = \Gamma^k_{ij}\theta^i, \qquad T^k_{ij} = \theta^k(T(X_i, X_j)), \quad i,\, j,\, k = 1, \ldots, n$$

называются *компонентами линейной связности, форм связности и тензора кручения соответственно в неголономном базисе* $\{\theta^j\}$.

Найдем компоненты тензора кручения в неголономном базисе

$$T^k_{ij} = \theta^k(T(X_i, X_j)) = \theta^k(\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - [X_i, X_j]) = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} - C^k_{ij},$$

где коэффициенты C^k_{ij} находятся из разложений

$$[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k.$$

0.6 Тензор кривизны линейной связности. Координаты тензора кривизны в голономном и неголономном реперах. Тождества Бианки. Геометрический смысл тензора кривизны

О. *Отображение*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad R(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \nabla_{\boldsymbol{a}} \nabla_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{c} - \nabla_{\boldsymbol{b}} \nabla_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{c} - \nabla_{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]} \boldsymbol{c},$$

определяет тензорное поле валентности $(1, 3)$, *которое называется тензором кривизны линейной связности* ∇.

Найдем координаты тензора кривизны в некоторой карте

$$R_{ijl}{}^k = (R(\partial_i, \partial_j)\partial_l)^k = (\nabla_i \nabla_j \partial_l)^k - (\nabla_j \nabla_i \partial_l)^k =$$

$$(\nabla_i(\Gamma^s_{jl}\partial_s))^k - (\nabla_j(\Gamma^s_{il}\partial_s))^k =$$

$$(\partial_i \Gamma^s_{jl}\partial_s)^k - (\partial_j \Gamma^s_{il}\partial_s)^k + (\Gamma^s_{jl}\Gamma^m_{is}\partial_m)^k - (\Gamma^s_{il}\Gamma^m_{js}\partial_m)^k =$$

$$\partial_i\Gamma^k_{jl}-\partial_j\Gamma^k_{il}+\Gamma^s_{jl}\Gamma^k_{is}-\Gamma^s_{il}\Gamma^k_{js}=2\{\partial_{[i}\Gamma^k_{j]l}+\Gamma^s_{[j|l|}\Gamma^k_{i]s}\},\quad i,\, j,\, k,\, l,\, m,\, s=1,\dots,n.$$

При замене координат эти компоненты изменяются по тензорному закону

$$R_{i'j'l'}{}^{k'}=P^i_{i'}P^j_{j'}P^l_{l'}P^{k'}_k R_{ijl}{}^k.$$

Найдем компоненты тензора кривизны в неголономном базисе

$$R_{ijl}{}^k=\theta^k(R(X_i,X_j)X_l)=\theta^k(\nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_l-\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_l-\nabla_{[X_i,X_j]}X_l)=$$

$$\theta^k(\nabla_{X_i}(\Gamma^s_{jl}X_s)-\nabla_{X_j}(\Gamma^s_{il}X_s)-C^s_{ij}\nabla_{X_s}X_l)=$$

$$\theta^k(X_i(\Gamma^s_{jl})X_s-X_j(\Gamma^s_{il})X_s+\Gamma^s_{jl}\Gamma^m_{is}X_m-\Gamma^s_{il}\Gamma^m_{js}X_m-C^s_{ij}\Gamma^m_{sl}X_m)=$$

$$X_i(\Gamma^k_{jl})-X_j(\Gamma^k_{il})+\Gamma^s_{jl}\Gamma^k_{is}-\Gamma^s_{il}\Gamma^k_{js}-C^s_{ij}\Gamma^k_{sl}.$$

Задача. Пусть $c^k, F^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ — координаты векторного поля и тензорного поля в карте (U,x^i), где индексы изменяются от 1 до n. Тогда имеют место формулы (тождества Риччи)

$$2\nabla_{[i}\nabla_{j]}c^k=R_{ijl}{}^k c^l-T^l_{ij}\nabla_l c^k,$$

$$2\nabla_{[k}\nabla_{m]}F^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}=\sum_{a=1}^{p}R_{kml}{}^{i_a}F^{i_1\dots l\dots i_p}_{j_1\dots j_q}-\sum_{b=1}^{q}R_{kmj_b}{}^{l}F^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots l\dots j_q}-T^l_{km}\nabla_l F^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q},$$

Теорема 10 Пусть линейная связность ∇ на многообразии M симметрична. Тогда ее тензор кривизны удовлетворяет тождеству Бианки

$$R_{ijl}{}^k+R_{jli}{}^k+R_{lij}{}^k=0$$

и дифференциальному тождеству Бианки

$$\nabla_q R_{ijl}{}^k+\nabla_i R_{jql}{}^k+\nabla_j R_{qil}{}^k=0.$$

$\odot$ Для любой точки $x_0 \in M$ в центрированных в этой точке нормальных координатах

$$(\Gamma^k_{ij})_{x_0} = 0, \quad i,\, j,\, k = 1, \ldots, n.$$

Тогда в точке x_0

$$R_{ijl}{}^k = \partial_i \Gamma^k_{jl} - \partial_j \Gamma^k_{il}.$$

Непосредственное вычисление приводит к тождеству Бианки. Далее

$$\nabla_q R_{ijl}{}^k = \partial_q \partial_i \Gamma^k_{jl} - \partial_q \partial_j \Gamma^k_{il}.$$

Снова непосредственное вычисление приводит к дифференциальному тождеству Бианки. $\odot$

Лемма. *Компоненты оператора параллельного перенесения $P_\gamma : T_x M \to T_{x(t)} M$ вдоль пути $\gamma : x = x(t)$ с начальной точкой $x(0) = x$ и с начальным касательным вектором $\boldsymbol{p} = (\frac{dx^i}{dt}(0))$ с точностью до малых более высокого порядка относительно параметра t равны*

$$P^k_j(x,t) = \delta^k_j - t\Gamma^k_{ij}(x)p^i. \tag{17}$$

$\odot$ Условием параллельного перенесения вектора $\mathbf{a}$ вдоль пути $x = x(t)$ с начальной точкой $x = x(0)$ является

$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}a^j(t) = 0\,.$$

Будем искать решение этой системы ОДУ в виде степенного ряда по параметру t с начальным значением $a^k(0) = a^k$

$$a^k(t) = a^k + t\frac{da^k(t)}{dt}(0) + \ldots$$

Значение производной в начальной точке из условия параллельного перенесения равно $\frac{da^k(t)}{dt}(0) = -\Gamma^k_{ij}(x)p^i a^j$, откуда

$$a^k(t) = (\delta^k_j - t\Gamma^k_{ij}(x)p^i)a^j\,,$$

что доказывает лемму. $\odot$

Для того, чтобы выяснить геометрический смысл тензора кривизны, рассмотрим проходящую через точку $x \in M$ 2-мерную поверхность с параметрическими уравнениями $x^k = x^k(u,v)$.

Векторы с координатами $p^i = \partial_u x^i(0)$ и $q^i = \partial_v x^i(0)$ образуют в этой точке натуральный базис этой поверхности и определяют ее касательную 2-плоскость $L \subset T_x M$.

Рассмотрим на этой поверхности петлю $\gamma : x = x(t)$, $0 \le t \le 1$ с началом и концом в точке x. Паралельное перенесение произвольного вектора $\mathbf{a}$ вдоль этой петли порождает изоморфизм касательного пространства $T_x M$ на себя, которое в главной своей части определяется тензором кривизны и выбранной петлей.

В качестве петли рассмотрим принадлежащий поверхности малый криволинейный параллелограмм, образованный координатными линиями с вершинами

$$x(u,v), \qquad x_1(u+t,v), \qquad x_2(u,v+t), \qquad x_3(u+t,v+t).$$

Параллельный перенос вдоль пути $\gamma_1 = xx_1x_3$ есть изоморфизм касательных пространств $P_{\gamma_1} : T_x M \to T_{x_3} M$.

Аналогичный изоморфизм P_{γ_2} получается при параллельном перенесении вдоль пути $\gamma_2 = xx_2x_3$. Пусть $\Delta\mathbf{a} = P_{\gamma_2}(\mathbf{a}) - P_{\gamma_1}(\mathbf{a})$. Тогда

$$\Delta\mathbf{a}^k = t^2 R_{ijl}{}^k(x) p^i q^j a^l + o(t^2)\,.$$

Согласно лемме, в точке x_1 получим вектор $P(x,t)\mathbf{a}$, а в точке x_2 вектор $Q(x,t)\mathbf{a}$, где оператор параллельного переноса вдоль второй координатной линии $Q(x,t)\mathbf{a}$ определен аналогично $P(x,t)$ с помощью вектора $\mathbf{q}$

$$Q^k_j(x,t) = \delta^k_j - t\Gamma^k_{ij}(x) q^i.$$

Аналогично получим векторы $Q(x_1,t)P(x,t)\mathbf{a}$, $P(x_2,t)Q(x,t)\mathbf{a}$. Следовательно, необходимо вычислить

$$\Delta\mathbf{a} = \{P(x_2,t)Q(x,t) - Q(x_1,t)P(x,t)\}\mathbf{a} = \{P(x,t)Q(x,t) - Q(x,t)P(x,t) +$$

$$t(q^i(x)\partial_i P(x,t)Q(x,t) - p^i(x)\partial_i Q(x,t)P(x,t))\}\mathbf{a} + o(t^2).$$

в координатах

$$\Delta\mathbf{a}^k = \{(\delta^k_s - t\Gamma^k_{is}p^i)(\delta^s_m - t\Gamma^s_{jm}q^j) - (\delta^k_s - t\Gamma^k_{is}q^i)(\delta^s_m - t\Gamma^s_{jm}p^j) +$$

$$t^2(-q^i(\partial_i\Gamma^k_{jm}p^j+\Gamma^k_{jm}\partial_i p^j)+p^i(\partial_i\Gamma^k_{jm}q^j+\Gamma^k_{jm}\partial_i q^j)\}a^m+o(t^2)=$$

$$t^2\{(\Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm}-\Gamma^k_{js}\Gamma^s_{im}+\partial_i\Gamma^k_{jm}-\partial_j\Gamma^k_{im})p^iq^j\}a^m+o(t^2)=t^2R_{ijl}{}^kp^iq^ja^l+o(t^2)\,,$$

поскольку векторные поля $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, являясь операторами частных производных, коммутируют

$$[\mathbf{p},\mathbf{q}]^j=p^i\partial_i q^j-q^i\partial_i p^j=0.$$

0.7 Тензор Риччи. Форма объема. Эквиаффинная связность

О. *Тензор валентности* $(0,2)$ *с компонентами*

$$R_{ij}=R_{kij}{}^k=2\{\partial_{[k}\Gamma^k_{i]j}+\Gamma^s_{[i|j|}\Gamma^k_{k]s}\},\quad i,\ j,\ k,\ s=1,\dots,n,$$

называется тензором Риччи пространства аффинной связности. Обозначается

$$Ric(\mathbf{a},\mathbf{b})=R_{ij}a^ib^j.$$

Задача 1 Доказать, что если линейная связность симметрична, то для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in\mathfrak{X}(M)$

$$Ric(\mathbf{a},\mathbf{b})-Ric(\mathbf{b},\mathbf{a})=TrR(\mathbf{b},\mathbf{a}),$$

где

$$TrR_{ij}=R_{ijk}{}^k=2\partial_{[i}\Gamma^k_{j]k}$$

— компоненты следа оператора кривизны.

Задача 2 Доказать, что TrR является внешним дифференциалом $d\gamma$ дифференциальной формы

$$\gamma=\Gamma^k_{jk}dx^j,$$

которая при замене координат изменяется на слагаемое, равное определителю матрицы перехода.

Следствие. *Тензор Риччи симметрической линейной связности тогда и только тогда симметричен, когда тензор TrR тождественно равен нулю, т.е. когда*

$$d\gamma = 0$$

(*дифференциальная форма замкнута*).

О. *Пусть M — ориентируемое многообразие, на котором задана нигде не обращающаяся в нуль форма ω степени n. Такая n-форма называется формой объема.*

Форма объема задает ориентацию на M и для любой карты (U, x^i) имеет вид

$$\omega|_U = f_U(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Значение этой формы на векторах в фиксированной точке определяет объем ориентированного параллелепипеда, построенного на этих векторах в касательном пространстве.

О. *Пространство аффинной связности без кручения называется эквиаффинным, если оно допускает существование формы объема, сохраняющейся при паралельном перенесении.*

В локальных координатах это условие сводится к следующим

$$\nabla_k \omega_{i_1 \dots i_n} = 0,$$

которые в силу косой симметрии $\omega_{i_1 \dots i_n}$ равносильны таким

$$\partial_k \omega_{1 \dots n} - \Gamma^s_{ks} \omega_{1 \dots n} = 0.$$

Вводя *основную плотность* $e = \omega_{1 \dots n}$, получим второй вид условия, характеризующего эквиаффинную связность

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e.$$

Из этого условия следует, что *основная плотность определяется по компонентам связности с точностью до постоянного множителя.*

Для связности без кручения симметрия тензора Риччи является необходимым и достаточным условием, чтобы существовала плотность с вышеуказанным свойством.

Таким образом, *эквиаффинная связность характеризуется симметрией тензора Риччи или обращением в нуль тензора* TrR.

0.8 Риманова связность. Тензор кривизны римановой связности

О. *Римановой (псевдоримановой) метрикой на многообразии M называется симметричное тензорное поле g валентности (0,2) такое, что для каждого $x \in M$ тензор g_x задает в касательном пространстве T_xM скалярное (псевдоскалярное) произведение. Многообразие, снабженное римановой (псевдоримановой) метрикой называется римановым (псевдоримановым) и обозначается (M,g). Тензорное поле g называется также римановым (псевдоримановым) метрическим тензором.*

Для римановой метрики для каждого $x \in M$ и для любого $\mathbf{a} \in T_xM\backslash\{0\}$

$$g_x(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0,$$

т.е. квадратичная форма для скалярного произведения положительно определена, а для псевдоримановой метрики для каждого $x \in M$ из того, что для любого $\mathbf{a} \in T_xM$

$$g_x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0,$$

следует, что $\mathbf{b} = 0$, т.е. квадратичная форма для псевдоскалярного произведения лишь невырождена.

Итак, мы определили полную аналогию первой фундаментальной формы поверхности и многие понятия римановой геометрии представляют собой просто многомерное обобщение ее внутренней геометрии.

Отметим, что если многообразие риманово (псевдориманово), то касательное векторное пространство в каждой его точке является евклидовым (псевдоевклидовым).

Интерес к псевдоримановым многообразиям возник в связи с общей теорией относительности: физическое пространство-время этой теории четырехмерно и имеет псевдориманову метрику сигнатуры $(-+++)$.

Пусть (U, x^i) — некоторая карта на многообразии и $\{\partial_i\}$ — соответствующее поле натуральных реперов.

Тогда метрический тензор имеет компоненты

$$g_{ij}(x) = g_x(\partial_i, \partial_j),$$

а скалярное произведение имеет вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_x = g_{ij}(x)a^i(x)b^j(x).$$

Отметим, что в силу условия положительной определенности определитель матрицы метрического тензора

$$\det(g_{ij}) > 0.$$

Так как метрический тензор невырожденный, то в каждой точке определен линейный изоморфизм $\psi_x : T_xM \to T_x^*M$ касательного пространства на кокасательное.

С помощью таких изоморфизмов векторному полю $\mathbf{a}(x)$ можно поставить в соответствие ковекторное поле

$$\psi_x(\mathbf{a}) = \alpha_{\mathbf{a}}(x), \qquad \text{где} \qquad \alpha_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

При координатной записи вектор и соответствующий ему ковектор обозначают одной и той же буквой, различая их лишь положением индекса.

Тогда в координатах это отображение выражается формулой

$$a_i = g_{ij}a^j$$

и называется *опусканием индекса.*

Более того, изоморфизм ψ_x является линейной изометрией, если определить скалярное произведение ковекторов формулой

$$(\alpha_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Обратное отображение называется *поднятием индекса* и имеет вид

$$a^i = g^{ij}a_j,$$

где взаимный тензор g^{ij} к метрическому тензору определен из соотношений

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k.$$

Это позволяет в римановой геометрии вместо ковекторного поля говорить о векторном поле с ковариантными компонентами.

Имея метрический тензор, мы можем в некоторой карте также, как в теории поверхностей, определить угол между векторными полями, модуль векторного поля, а также ориентированную длину дуги пути $x = x(t)$ формулой

$$l = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}(x(t))\frac{dx^i(t)}{dt}\frac{dx^j(t)}{dt}}\,dt.$$

Теорема 11 *На римановом многообразии существует единственная симметричная линейная связность такая, что при параллельном перенесении векторов по любому пути сохраняется их скалярное произведение.*

Это условие означает, что линейный изоморфизм касательных пространств при параллельном перенесении является *изометрией*. Такая линейная связность называется *римановой*.

Отметим, что риманова связность может быть также охарактеризована, как единственная симметричная линейная связность, относительно которой метрический тензор ковариантно постоянен.

$\odot$ Пусть при параллельном перенесении векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вдоль любого пути $x = x(t)$, т. е. локально при условиях

$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}a^j(t) = 0, \quad \frac{db^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}b^j(t) = 0,$$

сохраняется скалярное произведение

$$f(t) = g_{ij}(t)a^i(t)b^j(t)$$

этих векторов. Следовательно, $f'(t) = 0$.

Дифференцируя это тождество и учитывая условие параллельного перенесения, после несложных выкладок получим

$$f'(t) = (\partial_k g_{ij} - \Gamma^s_{ki} g_{sj} - \Gamma^s_{kj} g_{is}) a^i b^j \frac{dx^k(t)}{dt} = 0.$$

Заметим, что выражения в скобках есть ковариантные производные метрического тензора. Принимая во внимание произвольность в выборе векторов **a**, **b** и пути, получим систему алгебраических уравнений

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k \, g_{ij} - \Gamma^s_{ki} \, g_{sj} - \Gamma^s_{kj} \, g_{is} = 0$$

для компонент связности.

Перепишем эти уравнения дважды, сделав циклическую перестановку нижних индексов $kij \to ijk \to jki$.

$$\partial_i \, g_{jk} - \Gamma^s_{ij} \, g_{sk} - \Gamma^s_{ik} \, g_{js} = 0,$$

$$\partial_j \, g_{ki} - \Gamma^s_{jk} \, g_{si} - \Gamma^s_{ji} \, g_{ks} = 0.$$

Сложив эти уравнения с знаками $(- + +)$, получим

$$\partial_i \, g_{jk} + \partial_j \, g_{ki} - \partial_k \, g_{ij} = 2\Gamma^s_{ij} \, g_{sk}.$$

Свернув обе части этого равенства с g^{lk}, получим единственное решение — *символы Кристоффеля*

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{lk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \tag{18}$$

$\odot$

Следствие *Если связность риманова, то при параллельном перенесении сохраняется угол между векторами и длина вектора.*

Отметим также, что *тензор кривизны риманова пространства полностью определяется его метрическим тензором.*

Опустив верхний индекс с помощью метрического тензора, можно рассмотреть также ковариантные компоненты тензора кривизны

$$R_{ijmk} = g_{ks} R_{ijm\cdot}{}^{s}.$$

Лемма (i) *Компоненты тензора кривизны римановой связности обладают следующими свойствами симметрии*

$$R_{kmij} = -R_{kmji}, \quad R_{kmij} = R_{ijkm}, \quad R_{kmij} = -R_{mkij},$$

$$R_{kmij} + R_{mikj} + R_{ikmj} = 0.$$

(ii) *Тензор Риччи римановой связности симметричен.*

$\odot$ (i) Первое тождество следует из тождества

$$2\nabla_{[k}\nabla_{m]}g_{ij} = -R_{kmi}{}^{l}g_{lj} - R_{kmj}{}^{l}g_{il}.$$

Третье — следствие тождества Бианки.

Второе следует из тождества

$$\frac{1}{2}(R_{kijl} + R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{ljik} + R_{iljk} + R_{jilk} -$$

$$R_{lkji} - R_{jlki} - R_{kjli} - R_{klij} - R_{likj} - R_{iklj}) = 0.$$

(ii) Используя первое тождество, получим

$$R_{ijs\cdot}{}^{s} = R_{ijmk}g^{mk} = 0.$$

Утверждение следует теперь из следствия предыдущей лекции. $\odot$

Скалярной кривизной риманова (псевдориманова) многообразия называется функция

$$R = g^{ij}R_{ij}.$$

Псевдориманово многообразие, для которого

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}$$

называется *пространством Эйнштейна.*

Для пространства Эйнштейна

$$\lambda = \frac{R}{n}\,.$$

0.9 Преобразование связности

Пусть в некотором пространстве аффинной связности (M, ∇) задана еще одна связность $\hat{\nabla}$.

Тогда в некоторой карте разность ковариантных производных векторного поля имеет $\mathbf{v}$ вид

$$\hat{\nabla}_i v^k - \nabla_i v^k = S^k_{is} v^s,$$

где

$$S^k_{is} = \hat{\Gamma}^k_{is} - \Gamma^k_{is}.$$

Разность ковариантных производных есть тензор и $\mathbf{v}$ — произвольный вектор. Следовательно, S — тензор валентности $(1, 2)$, называемый *тензором аффинной деформации.*

Заметим, что *всякая система функций*

$$\hat{\Gamma}^k_{is} = \Gamma^k_{is} + S^k_{is},$$

где S — тензор валентности $(1, 2)$*, определяет аффинную связность.*

$\odot$ Это следует из законов пребразований

$$\hat{\Gamma}^{k'}_{i's'} - S^{k'}_{i's'} = P^{k'}_k P^i_{i'} P^s_{s'} (\hat{\Gamma}^k_{is} - S^k_{is}) + P^{k'}_k P^k_{i's'} = P^{k'}_k P^i_{i'} P^s_{s'} \hat{\Gamma}^k_{is} - S^{k'}_{i's'} + P^{k'}_k P^k_{i's'}.$$

$\odot$

Этот результат имеет многочисленные приложения. Например, для аффинных связностей ∇, $\hat{\nabla}$ и $t \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ система функций

$$\tilde{\Gamma}^k_{is} = \frac{\Gamma^k_{is} + t\hat{\Gamma}^k_{is}}{1+t} = \Gamma^k_{is} + \frac{t}{1+t}(\hat{\Gamma}^k_{is} - \Gamma^k_{is}),$$

определяет аффинную связность $\tilde{\nabla}$.

При $t = 1$ эта аффинная связность называется *средней* по отношению к связностям ∇, $\hat{\nabla}$.

Соотношения

$$\tilde{\Gamma}^k_{is} = \Gamma^k_{si} = \Gamma^k_{is} + T^k_{si},$$

где T — тензор кручения, определяют *взаимную* связность для связности ∇.

Используя коэффициенты взаимных связностей, можно построить среднюю связность взаимной пары

$$\tilde{\Gamma}^k_{is} = \frac{\Gamma^k_{is} + \Gamma^k_{si}}{2}\,.$$

Выясним закон преобразования тензора кривизны при преобразовании связности, подставляя коэффициенты связности в выражение для компонент тензора кривизны

$$\tilde{R}_{ijl}{}^k = R_{ijl}{}^k + 2(\partial_{[i}S^k_{j]l} + \Gamma^k_{[i|s|}S^s_{j]l} + S^k_{[i|s|}\Gamma^s_{j]l} + S^k_{[i|s|}S^s_{j]l}).$$

Но

$$\partial_{[i}S^k_{j]l} = \nabla_{[i}S^k_{j]l} - \Gamma^k_{[i|s|}S^s_{j]l} + \frac{1}{2}T^s_{ij}S^k_{sl} + \Gamma^s_{[i|l|}S^k_{j]s}.$$

Таким образом,

$$\tilde{R}_{ijl}{}^k = R_{ijl}{}^k + 2(\nabla_{[i}S^k_{j]l} + S^k_{[i|s|}S^s_{j]l}) + T^s_{ij}S^k_{sl}.$$

0.10 Тензоры Бианки, Вейля, Эйнштейна и гауссова кривизна. Римановы тензоры кривизны двумерного и трехмерного многообразий

Тезорное поле S валентности $(0,4)$ на (псевдо)римановом пространстве, удовлетворяющее в каждой карте тождествам

$$S_{kmij} = -S_{kmji}, \quad S_{kmij} = S_{ijkm}, \quad S_{kmij} = -S_{mkij},$$
$$S_{kmij} + S_{mikj} + S_{ikmj} = 0,$$

называется *виртуальным тензором кривизны* или *тензором Бианки.*

Все тензоры Бианки на (псевдо)римановом пространстве M образуют $\mathbf{F}(M)$-модуль BM.

Тензором Риччи $Ric\,S$ тензора Бианки S называется тензор, имеющий в произвольной карте компоненты

$$Ric\,S_{ij} = S_{kijm}g^{km}.$$

Задача 1 *Доказать, что тензор Риччи $Ric\,S$ тензора Бианки S симметричен.*

Отображение
$$Ric : BM \to S^2M, \tag{19}$$
где S^2M — $\mathbf{F}(M)$-модуль всех симметрических $\mathbf{F}(M)$-билинейных функционалов из $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ в $\mathbf{F}(M)$, является $\mathbf{F}(M)$-линейным.

Если S — тензор Бианки, то обычно вводят следующее обозначение
$$K = \frac{Ric\,S_{ij}g^{ij}}{n(n-1)}\,.$$

В случае, когда $S = R$ — тензор кривизны (псевдо)риманова пространства, функция K называется *гауссовой кривизной* этого пространства.

Тензоры Бианки, тензоры Риччи которых равны нулю, называются *тензорами Вейля* или *безриччиевыми тензорами.*

Задача 2 *Тензор E с компонентами*
$$g_{ijkl} = g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk} = 2g_{k[i}g_{j]l}.$$
в произвольной карте (псевдо)риманова пространства является тензором Бианки. Его след равен $n(1-n)$, т.е. для него $K = -1$.

Задача 3 *Произвольный тензор Бианки S единственным образом представляется в виде*
$$S = -KE + S_0,$$
где S_0 — бесследный тензор (для которого $K = 0$).

Лемма 1 *При $n = 2$ любой тензор Бианки S имеет вид KE, т.е. его компоненты выражаются формулой*
$$S_{ijlk} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 2Kg_{k[i}g_{j]l}.$$
Кроме того,
$$R_{ij} = \frac{R}{2}g_{ij}.$$

$\odot$ Это следует из того, что тензор S имеет единственную существенную компоненту, т.е. $\dim BM = 1$ и $S_0 = 0$. $\odot$

Поэтому при $n = 2$ отображение (19) заведомо не сюръективно.

Таким образом, тензор кривизны поверхности полностью характеризуется его гауссовой кривизной (проверить, что K действительно гауссова кривизна поверхности) и

$$R_{2112} = Kg = h.$$

Теорема 12 *При* $n \geq 3$ *отображение* (19) *сюръективно и, более того, обладает сечением, т.е. для него существует обратное справа* $\boldsymbol{F}(M)$-*линейное отображение*

$$Q : S^2M \to BM. \tag{20}$$

⊙ Нетрудно проверить, что для произвольного тензора $t \in S^2M$ тензор P с компонентами

$$P_{ijlk} = g_{ik}t_{jl} - g_{il}t_{jk} + g_{jl}t_{ik} - g_{jk}t_{il} = 2g_{k[i}t_{j]l} - 2g_{l[i}t_{j]k}$$

является тензором Бианки, тензор Риччи которого имеет компоненты

$$g^{ik}P_{ijlk} = nt_{jl} - t_{jl} + g_{jl}(Tr\,t) - t_{jl}) = (Tr\,t)g_{jl} + (n-2)t_{jl},$$

т.е. выражается формулой

$$Ric\,P = (Tr\,t)g + (n-2)t,$$

где

$$Tr\,t = g^{pq}t_{pq}$$

— след тензора t. С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что при $t = g$ тензор $P = -2E$ является тензором Бианки.

Следовательно, во-первых

$$Ric\,E = (1-n)g$$

и, во-вторых,

$$Ric\left(P + \frac{Tr\,t}{n-1}E\right) = (n-2)t.$$

Тогда формула

$$Q(t) = \frac{P}{n-2} + \frac{Tr\,t}{(n-1)(n-2)}E \tag{21}$$

определяет $\mathbf{F}(M)$-линейное отображение (20), для которого

$$Ric \circ Q = id.$$

$\odot$

Следствие 1 *При $n \geq 3$ подмодуль $Im\,Q$ модуля BM изоморфен модулю S^2M и выделяется в BM прямым слагаемым.*

$\odot$ Дополнительное слагаемое состоит из тензоров Вейля. $\odot$

Тензоры вида $Q(t)$ называются *тензорами Эйнштейна.*

Таким образом, любой тензор Бианки единственным образом разлагается в сумму некоторого тензора Эйнштейна и некоторого тензора Вейля.

Следствие 2 *При $n = 3$ подмодуль $Im\,Q$ исчерпывает весь модуль BM, т.е. любой тензор Бианки является тензором Эйнштейна $Q(Ric\,R)$.*

$\odot$ Размерность $\mathbf{F}(M)$-модуля тензоров Вейля равна

$$\dim\, BM - \dim\, S^2M = \frac{n^2(n^2-1)}{12} - \frac{n(n+1)}{2}$$

и при $n = 3$ это число равно нулю. Подсчет $\dim\, BM$. Если у существенной компоненты тензора Бианки имеется только два различных индекса, то она одна: R_{ijij}. Если три различных индекса, то таких компонент три:

$$R_{ijik}, \quad R_{ijjk}, \quad R_{ikjk}.$$

Если все четыре различных индекса, то достаточно рассмотреть компоненты:

$$R_{ijkl}, \quad R_{ikjl}, \quad R_{iljk}.$$

В силу тождества Бианки одна из компонент выражается через две другие, поэтому существенных компонент две и

$$\dim\, BM = C_n^2 + 3C_n^3 + 2C_n^4 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

$\odot$

Теорема 13 *При $n = 3$ тензор кривизны выражается через тензор Риччи и гауссову кривизну*

$$R_{ijlk} = g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} + 3K(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) =$$

$$2g_{k[i}R_{j]l} - 2g_{l[i}R_{j]k} + 6Kg_{l[i}g_{j]k}, \qquad (22)$$

$$3K = \frac{R}{2}\,.$$

$\odot$ Рассмотрим тензор $S = Ric\,R$. Тогда

$$Q(Ric\,R) = P + \frac{Tr\;Ric\,R}{2}E = P + 3KE.\odot$$

0.11 Секционная кривизна. Пространство постоянной кривизны

Секционной (римановой) кривизной пространства (M, g) *в точке* $x \in M$ *в двумерном направлении* $L \subset T_xM$, определяемым парой линейно независимых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in T_xM$, называется величина

$$K = K_x(L) = -\frac{R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v})} = -\frac{R_{ijkl}u^iv^ju^kv^l}{g_{ijkl}u^iv^ju^kv^l}\,.$$

Она не зависит от базиса пространства L, а лишь от самого этого двумерного пространства (проверить).

Если векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in T_xM$ образуют ортонормированный базис в римановом случае, то формула упрощается (проверить)

$$K = -R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Псевдориманово (риманово) многообразие (M, g) называется *пространством постоянной кривизны*, если его секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от двумерного направления.

Теорема 14 *Тензор кривизны и риманов тензор кривизны пространства постоянной кривизны K имеют вид для любых $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z} \in \mathfrak{X}(M)$*

$$R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v},)\boldsymbol{w} = K(g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{u} - g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{v}),$$

$$R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) = K(g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}))\ \textit{или}\ R = -KE.$$

В координатах

$$R_{ijl}{}^{k} = K(g_{jl}\delta_i^k - g_{il}\delta_j^k) = 2Kg_{l[j}\delta_{i]}^k,$$

$$R_{ijlk} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 2Kg_{k[i}g_{j]l}.$$

$\odot$ Из определения пространства постоянной кривизны следует, что для любых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{X}(M)$

$$R(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{v}) = -K(g(\mathbf{u},\mathbf{u})g(\mathbf{v},\mathbf{v}) - g^2(\mathbf{u},\mathbf{v})) = -KE(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Заметим, что

$$\hat{R} = R + KE$$

является тензором Бианки. Необходимо доказать, что он равен нулю. Действительно,

$$0 = \hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{u}) = \hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{u}) + \hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}) + \hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u}) +$$

$$\hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{w},\mathbf{u}) = \hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}) + \hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u}) = 2\hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}).$$

Тогда

$$0 = \hat{R}(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{z},\mathbf{u}+\mathbf{w}) = \hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z},\mathbf{w}) + \hat{R}(\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{z},\mathbf{u}) =$$

$$\hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z},\mathbf{w}) + \hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{z},\mathbf{v},\mathbf{w}).$$

Переставив $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{z}$, получим

$$\hat{R}(\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \hat{R}(\mathbf{v},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{w}).$$

Теперь в силу тождества Бианки

$$0 = \hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z},\mathbf{w}) + \hat{R}(\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + \hat{R}(\mathbf{v},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{w}) = 3\hat{R}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z},\mathbf{w}).\odot$$

0.12 Пространство Эйнштейна. Критерий Томаса

Нами было доказано, что любое двумерное риманово пространство является пространством Эйнштейна.

Лемма 1 *В произвольном (псевдо)римановом пространстве M в каждой карте имеет место равенство*

$$\partial_k R = 2\nabla_l R_k^l,$$

где $R_k^l = g^{ls}R_{sk}$.

$\odot$ Свернем дифференциальное тождество Бианки

$$\nabla_q R_{ijl}{}^k + \nabla_i R_{jql}{}^k + \nabla_j R_{qil}{}^k = 0$$

по индексам q, k

$$\nabla_q R_{ijl}{}^q - \nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} = 0. \tag{23}$$

С другой стороны, учитывая коваринтное постоянство метрического тензора, получим

$$\partial_k R = \partial_k(g^{ls}R_{ls}) = g^{ls}\nabla_k R_{ls},$$

$$g^{jl}\nabla_l R_{jk} = \nabla_l R_k^l,$$

$$g^{jl}\nabla_q R_{ijl}{}^q = g^{jl}g^{qs}\nabla_q R_{ijls} = g^{jl}g^{qs}\nabla_q R_{jisl} = g^{qs}\nabla_q R_{is} = \nabla_q R_i^q.$$

Свернув (23) с g^{jl} получим

$$2\nabla_q R_i^q = \partial_i R. \odot$$

Теорема 15 *При $n \geq 3$ скалярная кривизна пространства Эйнштейна постоянна.*

$\odot$ Если M — пространство Эйнштейна, то

$$R_k^l = \frac{R}{n}\delta_k^l.$$

Учитывая лемму 1, получим

$$\nabla_l R_k^l = \frac{\partial_k R}{n} = \frac{\partial_k R}{2}.$$

При $n \geq 3$ это возможно только, если $\partial_k R = 0$. $\odot$

Задача 1 *Формула из леммы 1 равносильна соотношениям*

$$\nabla_l T^{lk} = 0,$$

где

$$T^{lk} = g^{lp}g^{kq}(R_{pq} - \frac{R}{2}g_{pq}).$$

Следствие 1 *При* $n \geq 3$ *в каждом пространстве Эйнштейна тензор Риччи ковариантно постоянен*

$$\nabla_k R_{ij} = 0$$

и либо тождественно равен нулю, либо является всюду невырожденным симметрическим тензором.

Предложение 1 *Если в пространстве аффинной связности* M *тензор Риччи ковариантно постоянен, симметричен и невырожден, то связность на* M *является метрической связностью и индуцируется метрическим тензором, по отношению к которой* M *является пространством Эйнштейна.*

$\odot$ Примем тензор Риччи за метрический тензор, который будучи ковариантно постоянным индуцирует на M данную связность. По отношению к этой связности M — пространство Эйнштейна, поскольку $Ric = g$. $\odot$

Задача 2 *Симметрический тензор* S *в римановом пространстве тогда и только тогда тождественно равен нулю, когда равна нулю функция*

$$g^{ik}g^{jl}S_{ij}S_{kl}.$$

(Указание. Эта функция равна сумме квадратов компонент $S_j^k = g^{ik}S_{ij}$.)

Для тензора $R_{pq} - \lambda g_{pq}$ эта функция имеет вид

$$g^{ik}g^{jl}(R_{ij} - \lambda g_{ij})(R_{kl} - \lambda g_{kl}) =$$

$$g^{ik}g^{jl}(R_{ij}R_{kl} - 2\lambda g_{ij}R_{kl} + \lambda^2 g_{ij}g_{kl}) =$$

$$R_{ij}R^{ij} - 2\lambda R + \lambda^2 n.$$

Она равна

$$R_{ij}R^{ij} - \frac{R^2}{n} \text{ при } \quad \lambda = \frac{R}{n}.$$

Критерий Томаса. *Риманово пространство тогда и только тогда является пространством Эйнштейна, когда*

$$R^2 = nR_{ij}R^{ij}.$$

0.13 Конформные преобразования метрического тензора

Согласно следствию 1 лекции 9 при $n \geq 3$ тензор кривизны R (псевдо)риманова пространства имеет разложение

$$R = Q(Ric) + W,$$

где W — тензор Бианки с компонентами

$$W_{ijlk} = R_{ijlk} - \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il}) -$$

$$\frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) = R_{ijlk} - \frac{2}{n-2}(g_{k[i}R_{j]l} - g_{l[i}R_{j]k}) -$$

$$\frac{2R}{(n-1)(n-2)}g_{l[i}g_{j]k},$$

$$W_{ijl}{}^{k} - R_{ijl}{}^{k} = -\frac{2}{n-2}(\delta^k_{[i}R_{j]l} - g_{l[i}R^k_{j]}) - \frac{2R}{(n-1)(n-2)}g_{l[i}\delta^k_{j]}.$$

Это *вейлевская компонента тензора кривизны.*

Говорят, что метрический тензор $\tilde{g}$ на многообразии M получен *конформным преобразованием* метрического тензора g, если

$$\tilde{g} = e^{2\sigma}g,$$

где σ — некоторая функция на M.

Очевидно, что при нетождественном конформном преобразовании длины кривых меняются, но углы между кривыми остаются прежними.

Если $\sigma = \mathrm{const}$, то метрическая связность при конформном преобразовании не меняется, а потому не меняется и тензор кривизны.

Риманов тензор кривизны изменяется при этом так

$$\tilde{R}_{ijkl} = e^{2\sigma}R_{ijkl}, \text{ т.е. } e^{-2\sigma}\tilde{R}_{ijkl} - R_{ijkl} = 0.$$

Вычислим эту разность в общем случае.

$$\partial_l\tilde{g}_{ij} = 2e^{2\sigma}\sigma_l g_{ij} + e^{2\sigma}\partial_l g_{ij}, \ \sigma_l = \partial_l\sigma.$$

Следовательно,

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}g^{ks}(\partial_i\tilde{g}_{js} + \partial_j\tilde{g}_{is} - \partial_s\tilde{g}_{ij}) = \Gamma^k_{ij} + S^k_{ij},$$

где тензор деформации имеет вид

$$S^k_{ij} = \sigma_i\delta^k_j + \sigma_j\delta^k_i - g_{ij}g^{ks}\sigma_s.$$

Используя ранее полученную формулу для преобразования тензора кривизны, получим

$$\tilde{R}_{ijl}{}^k = R_{ijl}{}^k + 2(\nabla_{[i}S^k_{j]l} + S^k_{[i|m|}S^m_{j]l}) =$$

$$R_{ijl}{}^k + 2\{\nabla_{[i}(\sigma_{j]}\delta^k_l + \delta^k_{j]}\sigma_l - g_{j]l}g^{ks}\sigma_s) +$$

$$(\delta^k_m\sigma_{[i} + \sigma_m\delta^k_{[i} - g^{ks}\sigma_s g_{m[i})(\sigma_{j]}\delta^m_l + \delta^m_{j]}\sigma_l - g_{j]l}g^{ms}\sigma_s)\} =$$

$$R_{ijl}{}^k + 2\{(\delta^k_{[j}\nabla_{i]}\sigma_l - g^{ks}g_{l[j}\nabla_{i]}\sigma_s) + \sigma_{[i}(\delta^k_{j]}\sigma_l - g_{j]l}g^{ks}\sigma_s) +$$

$$\delta^k_{[i}(\sigma_{j]}\sigma_l 2 - g_{j]l}g^{ms}\sigma_m\sigma_s) - g^{ks}\sigma_s(\sigma_{[j}g_{i]l} - g_{l[j}\sigma_{i]})\} =$$

$$R_{ijl}{}^k + 2\{(\delta^k_{[j}\nabla_{i]}\sigma_l - g^{ks}g_{l[j}\nabla_{i]}\sigma_s) +$$

$$\delta^k_{[i}(\sigma_{j]}\sigma_l - g_{j]l}g^{ms}\sigma_m\sigma_s) - g^{ks}\sigma_s\sigma_{[j}g_{i]l}\}.$$

Тогда свернув обе части с g_{kq}, получим

$$e^{-2\sigma}\tilde{R}_{ijlq} - R_{ijlq} = 2\{(g_{q[j}\nabla_{i]}\sigma_l - g_{l[j}\nabla_{i]}\sigma_q) +$$

$$g_{q[i}(\sigma_{j]}\sigma_l - g_{j]l}g^{ms}\sigma_m\sigma_s) - \sigma_q\sigma_{[j}g_{i]l}\} = 2\{g_{q[j}S_{i]l} - g_{l[j}S_{i]q}\},$$

где

$$S_{il} = \nabla_i\sigma_l - \sigma_i\sigma_l + \frac{1}{2}g_{il}g^{ms}\sigma_m\sigma_s$$

симметричный тензор. Свертка наденного соотношения с тензором

$$g^{iq} = e^{2\sigma}\tilde{g}^{iq}$$

дает для тензоров Риччи формулу

$$\tilde{R}_{jl} - R_{jl} = -Sg_{jl} - (n-2)S_{jl}, \quad S = g^{iq}S_{iq},$$

а для скалярных кривизн формулу

$$e^{2\sigma}\tilde{R} - R = -2(n-1)S.$$

0.14 Тензор конформной кривизны. Конформно-плоские пространства

Из последних двух формул при $n > 2$ получим

$$S_{jl} = -\frac{\tilde{R}_{jl} - R_{jl}}{n-2} + \frac{e^{2\sigma}\tilde{R} - R}{2(n-1)(n-2)} g_{jl}\,,$$

и потому

$$e^{-2\sigma}\tilde{R}_{ijlq} - R_{ijlq} = 2\{g_{q[j}S_{i]l} - g_{l[j}S_{i]q}\} =$$

$$-\frac{2g_{q[j}(\tilde{R}_{i]l} - R_{i]l})}{n-2} + \frac{e^{2\sigma}\tilde{R} - R}{2(n-1)(n-2)} 2g_{q[j}g_{i]l} + \frac{2g_{l[j}(\tilde{R}_{i]q} - R_{i]q})}{n-2}$$

$$-\frac{e^{2\sigma}\tilde{R} - R}{2(n-1)(n-2)} 2g_{l[j}g_{i]q} = -2e^{-2\sigma}\frac{\tilde{g}_{q[j}\tilde{R}_{i]l} - \tilde{g}_{l[j}\tilde{R}_{i]q}}{n-2} +$$

$$\frac{2e^{-2\sigma}\tilde{R}}{(n-1)(n-2)}\tilde{g}_{q[j}\tilde{g}_{i]l} + 2\frac{g_{q[j}R_{i]l} - g_{l[j}R_{i]q}}{n-2} - \frac{2R}{(n-1)(n-2)} g_{q[j}g_{i]l} =$$

$$e^{-2\sigma}(\tilde{R}_{ijlq} - \tilde{W}_{ijlq}) + W_{ijlq} - R_{ijlq}.$$

Таким образом,

$$e^{-2\sigma}\tilde{W}_{ijlq} = W_{ijlq}, \qquad \tilde{W}_{ijl}{}^{k} = W_{ijl}{}^{k}.$$

Последний тензор называется *тензором конформной кривизны Вейля.*

Следовательно, *при конформном преобразовании метрического тензора тензор конформной кривизны Вейля не изменяется.*

Для пространства Эйнштейна

$$W_{ijl}{}^{k} - R_{ijl}{}^{k} = -\frac{2R}{n(n-1)}\delta^{k}_{[i}g_{j]l}.$$

Диффеоморфизм (псевдо)римановых пространств

$$f : (M, g_M) \to (\hat{M}, g_{\hat{M}})$$

называется *конформной эквивалентностью*, если метрический тензор $f^* g_{\hat{M}}$ на M получается из метрического тензора g_M конформным преобразованием, т.е. если на M существует такая всюду положительная функция φ, что

$$f^* g_{\hat{M}} = \varphi g_M.$$

На этом языке конформная инваринтность тензора Вейля означает, что *для любой конформной эквивалентности*

$$f : (M, g_M) \to (\hat{M}, g_{\hat{M}})$$

имеет место равенство

$$f^* W_{\hat{M}} = W_M,$$

где $W_{\hat{M}}$ *и* W_M *— тензоры Вейля пространств* (M, g_M) *и* $(\hat{M}, g_{\hat{M}})$ *соответственно.*

Риманово пространство называется *конформно-плоским*, если его метрический тензор может быть конформно преобразован в метрический тензор евклидова пространства (с тождественно равным нулю тензором кривизны.)

Для такого пространства тензор Вейля тождественно равен нулю.

Тензор Вейля равен нулю и в случае, когда каждая точка пространства M обладает окрестностью, на которой метрический тензор может быть конформно преобразован в метрический тензор евклидова пространства, т.е. когда пространство M *локально конформно-плоское.*

Оказывается, при $n \geq 4$ верно и обратное утверждение: *если* $W = 0$, *то пространство* M *локально конформно плоское* (без доказательства).

Согласно следствию 2 лекции 9 *при* $n = 3$ *тензор Вейля тождественно равен нулю.*

Существуют трехмерные римановы пространства, не являющиеся локально конформно-плоскими.

При $n = 3$ роль тензора Вейля играет тензор V с компонентами

$$V_{ijk} = \frac{2\nabla_{[i} R_{j]k}}{n-2} - \frac{\partial_{[i} R g_{j]k}}{(n-1)(n-2)}.$$

Задача 1. *Покажите, что*

(i) *если трехмерное риманово пространство локально конформно-плоское, то* $V = 0$;

(ii) *при* $n \geq 4$ *из равенства* $W = 0$ *следует равенство* $V = 0$.

При $n = 3$ равенство $V = 0$ не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы риманово пространство было локально конформно-плоским.

Задача 2 *Найдите и разберите доказательство утверждения. Всякое двумерное риманово пространство является локально конформно-плоским.*

Однако утверждение о том, что любая поверхность является глобально конформно-плоским неверно. Справедливо лишь следующее более слабое утверждение.

Теорема 16 *Любое двумерное риманово пространство конформно эквивалентно геодезически полной поверхности постоянной гауссовой кривизны.*

Следствие 1 *На любом двумерном хаусдорфовом паракомпактном гладком многообразии существует геодезически полная метрика постоянной гауссовой кривизны.*

0.15 Аффинные отображения пространств аффинной связности. Аффиннитеты

Пусть (M, ∇), $(\hat{M}, \hat{\nabla})$ — пространства аффинной связности.

В каждой карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ $((V, y^1, \dots, y^m))$ линейная связность ∇ $(\hat{\nabla})$ задается матрицей ω $(\hat{\omega})$ форм связности.

Пусть $f : M \to \hat{M}$ — гладкое отображение. Карты $(U, x^1, \dots, x^n)$, $(V, y^1, \dots, y^m)$ назовем *f-связанными*, если $f(U) = V$.

В таких картах отображение f в координатах задается функциями

$$y^b = f^b(x^1, \dots, x^n), \qquad b = 1, \dots, m.$$

Якобиева матрица

$$J_f = (\partial_i f^b), \qquad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq b \leq m,$$

этих функций называется *якобиевой матрицей отображения f* в картах $(U, x^1, \dots, x^n)$, $(V, y^1, \dots, y^m)$.

Напомним, что векторные поля $\mathbf{a} \in \mathfrak{X}(M)$ и $\hat{\mathbf{a}} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$ называются *f-связанными*, если

$$df_x \mathbf{a}_x = \hat{\mathbf{a}}_{f(x)}$$

для любой точки $x \in M$, т.е. если для любой пары f-связанных карт $(U, x^1, \ldots, x^n)$, $(V, y^1, \ldots, y^m)$ имеют место равенства

$$\partial_i f^b a^i = \hat{a}^b \circ f, \qquad 1 \le i \le n, \quad 1 \le b \le m,$$

где a^i, $\hat{a}^b$ — компоненты векторных полей $\mathbf{a}$ и $\hat{\mathbf{a}}$ в соответствующих картах.

Теорема 17 *Следующие свойства гладкого отображения $f : M \to \hat{M}$ равносильны*

(A) Если поля $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathfrak{X}(M)$ f-связаны с полями $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\hat{b} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$, то поле

$$\nabla_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} \quad f - \text{связано с полем} \quad \hat{\nabla}_{\hat{\boldsymbol{a}}} \hat{\boldsymbol{b}}.$$

(B) Для любых f-связанных карт $(U, x^1, \ldots, x^n)$, $(V, y^1, \ldots, y^m)$

$$J_f \omega = f^* \hat{\omega} J_f + dJ_f \quad \text{на } U.$$

(C) Для любой кривой $\gamma : I \to M$ и любого векторного поля $\boldsymbol{a} : t \mapsto \boldsymbol{a}(t)$ на γ

$$\frac{\hat{\nabla}}{dt}[df_{\gamma(t)} \boldsymbol{a}(t)] = df_{\gamma(t)} \frac{\nabla}{dt} \boldsymbol{a}(t), \quad t \in I.$$

(D) Для любой кривой $\gamma : I \to M$

$$df_y \circ P_\gamma = \hat{P}_{f \circ \gamma} \circ df_x,$$

где x — начальная и y — конечная точки кривой γ, P_γ и $\hat{P}_{f\circ\gamma}$ — параллельные переносы вдоль кривых γ и $f \circ \gamma$.

$\odot$ Если поля $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathfrak{X}(M)$ f-связаны с полями $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$, то для любых f-связанных карт $(U, x^1, \ldots, x^n)$, $(V, y^1, \ldots, y^m)$

$$\partial_i f^b a^i = \hat{a}^b \circ f, \qquad \partial_i f^b b^i = \hat{b}^b \circ f \quad \text{на } U.$$

С другой стороны

$$(\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{b})^k = (\partial_i b^k + \Gamma^k_{ij} b^j) a^i, \quad (\hat{\nabla}_{\hat{\mathbf{a}}} \hat{\mathbf{b}})^c = (\partial_a \hat{b}^c + \hat{\Gamma}^c_{ab} \hat{b}^b) \hat{a}^a.$$

Поэтому
$$(\hat{\nabla}_{\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{b}})^c \circ f = (\partial_a \hat{b}^c \circ f + (\hat{\Gamma}^c_{ab} \circ f)\hat{b}^b \circ f)\hat{a}^a \circ f =$$
$$((\partial_a \hat{b}^c \circ f)\partial_i f^a + (\hat{\Gamma}^c_{ab} \circ f)\partial_j f^b b^j \partial_i f^a)a^i =$$
$$(\partial_i(\hat{b}^c \circ f) + (\hat{\Gamma}^c_{ab} \circ f)\partial_j f^b \partial_i f^a b^j)a^i =$$
$$(\partial_i(\partial_j f^c b^j) + (\hat{\Gamma}^c_{ab} \circ f)\partial_j f^b \partial_i f^a b^j)a^i =$$
$$(\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{b})^j \partial_j f^c + (-\partial_k f^c \Gamma^k_{ij} + \partial_i \partial_j f^c + (\hat{\Gamma}^c_{ab} \circ f)\partial_j f^b \partial_i f^a)a^i b^j.$$
Поскольку равенство
$$(\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{b})^j \partial_j f^c = (\hat{\nabla}_{\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{b}})^c \circ f$$
означает, что поля $\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ и $\hat{\nabla}_{\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{b}}$ f-связаны, а равенство
$$\partial_k f^c \Gamma^k_{ij} = \partial_i \partial_j f^c + (\hat{\Gamma}^c_{ab} \circ f)\partial_j f^b \partial_i f^a$$
после умножения на dx^i перейдет в равенство (B), то это доказывает равносильность (A) и (B). $\odot$

Задача 1 *Завершите доказательство теоремы 1.*

Гладкое отображение $f : M \to \hat{M}$ обладающее свойствами $(A - D)$ называется *аффинным отображением.*

Задача 2 *Каждый интервал $I \subset \mathbb{R}$ является пространством аффинной связности относительно канонической связности $\nabla_{\partial_t} = \partial_t$. Поэтому имеет смысл говорить о кривых $\gamma : \mathbb{R} \to M$, являющихся аффинными отображениями. Покажите, что это в точности геодезические кривые пространства M.*

Ясно, что свойство отображения быть аффинным является локальным свойством, т.е. *отображение $f : M \to \hat{M}$ аффинно, если оно аффинно на некоторой окрестности любой точки $x \in M$.*

Кроме того, из свойства (D) аффинных отображений непосредственно следует, что *каждое аффинное отображение переводит геодезические в геодезические, и поэтому в нормальных координатах записывается линейными функциями.*

Теорема 18 *(О единственности аффинного отображения) Пусть аффинные отображения f, $g : M \to \hat{M}$ обладают свойствами*

$$f(x) = g(x), \qquad df_x = dg_x.$$

Тогда $f = g$ на компоненте связности многообразия M, содержащей точку $x \in M$.

$\odot$ Пусть

$$C = \{y \in M : \ f(y) = g(y), \qquad df_y = dg_y\}.$$

Отображения f и g непрерывны, а многообразие M хаусдорфово. Следовательно, множество C замкнуто.

С другой стороны, из того, что каждое аффинное отображение в нормальных координатах записывается линейными функциями, непосредственно следует, что для любой точки $x \in C$ каждая ее нормальная окрестность содержится в C.

Тогда множество C открыто. Являясь открыто-замкнутым множеством содержащим точку x, множество C содержит компоненту связности этой точки.

Значит, $f = g$ на компоненте связности многообразия M, содержащей точку x. $\odot$

Ясно, что *композиция аффинных отображений является аффинным отображением.*

Аффинное отображение, являющееся диффеоморфизмом, называется *аффинным диффеоморфизмом, аффинным изоморфизмом или аффиннитетом.*

Для аффиннитета f условие (B) можно переписать в виде

$$\omega = J_f^{-1}(f^*\hat{\omega})J_f + J_f^{-1}dJ_f.$$

В частном случае, когда аффиннитет f действует по равенству координат, (т.е. каждую точку $x \in (U, x^1, \ldots, x^n)$ переводит в точку $y \in (V, y^1, \ldots, y^m)$ с теми же координатами), это условие приобретает вид

$$\omega = f^*\hat{\omega},$$

означающий, что $\hat{\omega}$ переходит в ω при подстановке $y^i = x^i, \quad 1 \le i \le n$ (формы $\hat{\omega}$, в ω отличаются лишь обозначениями переменных).

Каждый диффеоморфизм $f : M \to \hat{M}$ определяет по формуле

$$(f_* \mathbf{a})_y = df_x \mathbf{a}_x, \qquad x = f^{-1}(y),$$

биекцию $f_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(\hat{M})$, обладающую тем свойством, что поля $\mathbf{a}$ и $f_*\mathbf{a}$ f-связаны.

Поэтому в силу свойства (A) теоремы 1, *диффеоморфизм $f : M \to \hat{M}$ тогда и только тогда является аффиннитетом, когда для любого поля* $\mathbf{a} \in \mathfrak{X}(M)$

$$\hat{\nabla}_{f_*\mathbf{a}} \circ f_* = f_* \circ \nabla_{\mathbf{a}}.$$

Отсюда непосредственно следует, что *каждый аффинитет сохраняет тензоры кручения и кривизны*, точнее, для любого аффиннитета $f : M \to \hat{M}$ имеют место равенства

$$T = f^* \hat{T}, \qquad R = f^* \hat{R}.$$

Эти равенства необходимы, но вообще говоря недостаточны для того, чтобы диффеоморфизм $f : M \to \hat{M}$ был аффиннитетом.

0.16 Геодезические отображения пространств аффинной связности. Проективно-евклидово пространство аффинной связности

Из уравнений геодезических пространства аффинной связности следует, что у линейных связностей с компонентами

$$\Gamma^k_{ij}, \qquad \hat{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji})$$

геодезические общие.

Следовательно, *для исследования геодезических достаточно ограничиться линейными связностями без кручения.*

Диффеоморфизм пространств аффинной связности, при котором геодезические кривые отображаются на геодезические кривые называется *геодезическим или проективным* диффеоморфизмом, а о пространствах говорят, что они *проективны друг другу.*

Отнесем соответствующие области карт к системе координат, общей по отоношению к геодезическому диффеоморфизму.

Можно даже считать, что у нас одно многообразие с различными симметричными линейными связностями.

Пусть
$$\mathbf{a} = \left(\frac{dx^k}{dt}\right), \qquad \mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$$
касательные векторы к общей геодезической переносимые параллельно в связностях ∇ и $\hat{\nabla}$ соответственно.

Тогда условия параллельного перенесения примут вид
$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt} = 0, \qquad \frac{d(\lambda dx^k)}{dt^2} + \hat{\Gamma}^k_{ij}(x(t))\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{\lambda dx^j}{dt} = 0.$$
Откуда найдем
$$S^k_{ij}dx^idx^j = -d\ln\lambda\, dx^k,$$
где $S^k_{ij} = \hat{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}$ — тензор аффинной деформации.

Перейдем к равносильным соотношениям
$$dx^{[l}S^{k]}_{ij}dx^idx^j = 0, \tag{24}$$
которые должны удовлетворяться тождественно, т.е. при любых значениях dx^i. Поэтому
$$\delta^{[l}_{(m}S^{k]}_{ij)} = 0,$$
что в силу симметричности тензора деформации по нижним индексам эквивалентно соотношениям
$$\delta^{[l}_mS^{k]}_{ij} + \delta^{[l}_iS^{k]}_{jm} + \delta^{[l}_jS^{k]}_{mi} = 0.$$
Свертывая по индексам l и m, получим
$$(n+1)S^k_{ij} - \delta^k_iS^s_{sj} - \delta^k_mS^s_{si} = 0.$$

Следовательно, *тензор аффинной деформации, соответствующей проективному отображению, имеет вид*

$$S_{ij}^k = \delta_i^k p_j + \delta_j^k p_i,$$

где

$$p_i = \frac{1}{n+1} S_{si}^s.$$

Обратно, если это уравнение выполнено, то подстановка S_{ij}^k в уравнение (24) обращает его в тождество.

Ковектор p_i называется *ковектором проективного преобразования линейной связности.*

Если оба пространства эквиаффинны, то

$$p_i = \frac{1}{n+1} \partial_i \ln \frac{\hat{e}}{e},$$

где e и $\hat{e}$ — основные плотности.

Следовательно, *для того, чтобы проективное отображение сохраняло эквиаффинность необходимо и достаточно, чтобы ковектор преобразования был градиентен.*

Учитывая закон преобразования тензора кривизны при преобразовании линейной связности, получим

$$\tilde{R}_{ijl}{}^k = R_{ijl}{}^k + 2(\nabla_{[i} S_{j]l}^k + S_{[i|m|}^k S_{j]l}^m) =$$

$$R_{ijl}{}^k + 2\{\nabla_{[i}(p_{j]}\delta_l^k + \delta_{j]}^k p_l) + (\delta_m^k p_{[i} + p_m \delta_{[i]}^k)(p_{j]}\delta_l^m + \delta_{j]}^m p_l)\} =$$

$$R_{ijl}{}^k + 2\{\nabla_{[i} p_{j]}\delta_l^k + \delta_{[j}^k \nabla_{i]} p_l + \delta_{[i}^k p_{j]} p_l\} = R_{ijl}{}^k + 2\{p_{[ij]}\delta_l^k + \delta_{[j}^k p_{i]l}\},$$

где $p_{ij} = \nabla_i p_j - p_i p_j$.

Заметим, *что если конформное соответствие двух пространств является в проективным, то линейные связности этих пространств совпадают.*

Действительно, свертывая равенство

$$\sigma_i \delta_j^k + \sigma_j \delta_i^k - g_{ij} g^{kl} \sigma_l = \delta_j^k p_i + \delta_i^k p_j$$

сначала по индексам k и j, а потом свертывая с тензором g^{ij}, получим два уравнения:

$$n\sigma_i = (n+1)p_i, \qquad (2-n)\sigma_i = 2p_i,$$

которые удовлетворяются при целом n только нулевыми значениями ковекторов σ_i и p_i.

Пространство аффинной связности, проективное евклидову пространству, называется *проективно-евклидовым пространством.*

Таким образом, тензор кривизны проективно-евклидова пространства имеет вид

$$R_{ijl}{}^{k} = 2\{p_{[ji]}\delta_l^k + \delta_{[i}^k p_{j]l}\} \tag{25}$$

и существует ковектор p_i, удовлетворяющий уравнениям

$$\nabla_i p_j = p_{ij} + p_i p_j.$$

Задача 1 Показать, что условие интегрируемости последних уравнений имеют вид

$$\nabla_{[i} p_{j]k} = 0. \tag{26}$$

Итак, доказана

Теорема 19 *Пространство аффинной связности без кручения является проективно-евклидовым тогда и только тогда, когда существует тензор p_{ij}, удовлетворяющий* (25) *и* (26).

Задача 2 Показать, что при $n > 2$ условие (26) является следствием условия (25) (применить тождество Бианки).

Используя (25), выразим тензор p_{ij} через тензор Риччи.

$$R_{jl} = np_{jl} - p_{lj}, \qquad R_{lj} = np_{lj} - p_{jl}.$$

Следовательно,

$$p_{jl} = \frac{nR_{jl} + R_{lj}}{n^2 - 1}\,.$$

Эквипроективным пространством называется эквиаффинное проективно-евклидово пространство.

Его тензоры Риччи и p_{ij} симметричны, поэтому для эквипроективного пространства

$$R_{ijl}{}^{k} = 2\delta^k_{[i}p_{j]l}, \qquad R_{jl} = (n-1)p_{jl}, \tag{27}$$

а тензор Риччи удовлетворяет условию (уравнению) Кодацци

$$\nabla_{[i}R_{j]k} = 0. \tag{28}$$

В эквипроективном пространстве можно указать общее решение уравнения Кодацци.

Рассмотрим для этого систему дифференциальных уравнений

$$b_{jk} = \nabla_j \nabla_k \varphi + \frac{\varphi}{n-1}R_{jk}, \tag{29}$$

где b_{jk} — симметричный тензор. Найдем условия ее интегрируемости, предполагая, что пространство эквипроективно.

$$\nabla_{[i}b_{j]k} = -\frac{1}{2}R_{ijk}{}^{l}\nabla_l\varphi + \frac{\nabla_{[i}\varphi R_{j]k}}{n-1} + \frac{\varphi}{n-1}\nabla_{[i}R_{j]k},$$

но в силу (25), (27) и (28) получим

$$\nabla_{[i}b_{j]k} = 0. \tag{30}$$

Таким образом, *общее решение уравнения* (30) *в эквипроективном пространстве имеет* (29), *где* φ *— произвольная гладкая функция.*

В частности, в евклидовом пространстве общее решение уравнения (30) имеет вид

$$b_{jk} = \nabla_j \nabla_k \varphi. \tag{31}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. - М.: Изд-во Факториал, 1998.

[2] Норден. А. П. Пространства аффинной связности. - М.: Наука, 1976.

[3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Том I. - М.: УРСС, 1998.

[4] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. - М.: Наука, 1981.