ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

КАЩЕЕВ Р.А.

Введение в теорию гравитационного потенциала

(конспект лекций)

Казань

Публикуется по решению
Редакционно-издательского совета физического факультета

УДК 523.3

Кащеев Р.А.
Введение в теорию гравитационного потенциала. Конспект лекций
для студентов третьего курса физического факультета. Казань, 2009, 46 с.

Учебное пособие предназначено для студентов третьего курса специальности «Астрономогеодезия», изучающих дисциплину «Гравиметрия».

Рецензент:

Нефедьев Ю.А. – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической физики Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. 4

§ 1. Поле силы притяжения. 5

§ 2. Потенциалы силы притяжения. 9

§ 3. Уровенные поверхности, производные и градиент гравитационного потенциала. 15

§ 4. Простейшие случаи решения прямой задачи теории потенциала. 17

§ 5. Решение прямой задачи теории потенциала для однородного трехосного эллипсоида. 23

§ 6. Свойства потенциала объемных масс. 32

§ 7. Свойства потенциалов простого и двойного слоев. 38

§ 8. Свойства симметрии гравитационного потенциала. 43

§ 9. Постановка обратной задачи теории потенциала. 44

Литература 46

Введение

Теория потенциала представляет собой сложную теоретическую дисциплину, принципиально важную для подготовки высококвалифицированных профессионалов в области геодезии, гравиметрии, небесной механики и геофизики. На основе теории потенциала формируется и разрабатывается математический аппарат, необходимый для последующего изучения гравитационного поля, фигуры и внутреннего строения Земли, движения ее искусственных спутников, геодинамических процессов различной природы, происходящих в ее недрах. В этой связи важно подчеркнуть универсальность математических основ и методов теории потенциала с точки зрения применения их к исследованию других небесных тел.

В силу принципа аддитивности (суперпозиции) гравитационных сил в нерелятивистской механике понятие потенциала распространяется на произвольные дискретные и непрерывные распределения тяготеющих масс. Элементарное для малого числа точечных масс определение потенциала трансформируется в серьезную математическую задачу для сложно организованных протяженных тел, характерным примером которых могут служить планеты земной группы.

Теорию потенциала, история которой восходит к работам Ньютона, Клеро, Лапласа и Лежандра, следует рассматривать как один из наиболее разработанных и мощных разделов математической физики, тесно связанный с соответствующими разделами математического анализа, теории поля, функционального анализа и теории специальных функций.

Предлагаемое вашему вниманию учебное пособие соответствует содержанию первой части курса «Теория потенциала» и потому посвящено определению основных понятий и исследованию главных свойств различных видов потенциалов силы притяжения. Подробно обсуждается постановка прямой и обратной задач теории потенциала, а также свойства его симметрии.

Настоящее пособие, как и сама дисциплина «Теория потенциала» учебного плана геодезистов, носит преимущественно прикладной характер, и потому не претендует на фундаментальность изложения в случаях, связанных с исследованием существования и единственности решения задач и строгостью доказательства ряда теорем. Заметим, кстати, что иногда автор считает достаточным ограничиться формулировкой теоремы, не приводя ее доказательства.

§ 1. Поле силы притяжения.

Полем некоторой величины называется область пространства, каждой точке которой сопоставлено определенное значение этой величины, причем, как правило, значение это изменяется от точки к точке непрерывным образом. Поле может быть скалярным (поле температур, поле плотностей и т.д.) или векторным (поле скоростей, поле сил). В последнем случае каждой точке пространства сопоставляется вектор.

Для изучения пространственной структуры поля важное значение приобретают прямые задачи вычисления (восстановления) поля по распределению его источников и обратные задачи восстановления структуры источников по структуре самого поля, а также задачи продолжения поля в область, свободную от источников. Эти задачи обычно рассматриваются с использованием единого аналитического подхода, основанного на описании (моделировании) пространственной структуры поля тем или другим удобным математическим способом.

В рамках предлагаемого курса нас будет главным образом интересовать поле ньютоновской силы притяжения, существующей между двумя гравитирующими массами. Согласно закону всемирного притяжения (И.Ньютон, 1687) взаимодействие двух материальных точек (точечных масс) с массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга описывается формулой:

$$\overline{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\overline{r}}{r}, \tag{1}$$

в которой знак минус выбирается, следуя договоренности о противоположном направлении векторов силы $\overline{F}$ и радиуса-вектора $\overline{r}$, т.е. сила направлена к притягивающей массе, а радиус-вектор $\overline{r}$ – в сторону единичной (пробной) массы. Символом G обозначена кавендишева гравитационная постоянная (Г.Кавендиш, 1798), равная $G{=}6.67{\cdot}10^{-11}m^3/kg{\cdot}sec^2$. Следуя традициям математической теории потенциала в процессе выкладок принимают $G{=}1$, восстанавливая конкретное значение постоянной лишь в окончательных формулах, используемых для вычислений. Под точечными массами понимают физические объекты, имеющие конечные размеры, во много раз меньшие, однако, чем расстояния между объектами.

Векторное поле силы притяжения (гравитационное поле) конкретной массы в каждой точке пространства описывается вектором силы притяжения, действующей на единичную пробную точечную массу, помещенную в эту точку. Иными словами, силовое поле тяготения будет однозначно описано, если в каждой точке трехмерного пространства нам будут известны три компоненты вектора силы притяжения $\overline{F}$. Используя прямоугольную систему координат, получим далее необходимые для этого математические соотношения.

А) Притяжение материальной точки.

Пусть материальная точка массой m , расположена в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$, а единичная пробная масса,– в точке $P(x,y,z)$. Тогда расстояние r будет вычисляться как $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$, а составляющие вектора силы притяжения:

$$F_x = F\cdot\cos(\overline{F},x) = -\frac{m(x-\xi)}{r^3},$$

$$F_y = F\cdot\cos(\overline{F},y) = -\frac{m(y-\eta)}{r^3}, \qquad (2)$$

$$F_z = F\cdot\cos(\overline{F},z) = -\frac{m(z-\zeta)}{r^3}.$$

Таким образом, всякий точечный объект массой m , находящийся в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$, создает в окружающем его пространстве центральное силовое гравитационное поле, в каждой точке $P(x,y,z)$ описываемое вектором $\overline{F}(P)$ силы притяжения. По принципу независимости сил, пользуясь формулами (2), возможно получить соотношения для составляющих вектора силы притяжения любых дискретных либо протяженных образований.

Б) Притяжение совокупности материальных точек.

Пусть система K материальных точек с массами m_k ,$(k=1,2,...K)$ располагается в точках $M_k(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$. Тогда, в согласии с принципом суперпозиции, компоненты вектора силы притяжения единичной пробной массы, помещенной в точку $P(x,y,z)$, могут быть вычислены по формулам:

$$F_x = -\sum_{k=1}^{K} \frac{m_k(x-\xi_k)}{r_k^3},$$

$$F_y = -\sum_{k=1}^{K} \frac{m_k(y-\eta_k)}{r_k^3}, \qquad (3)$$

$$F_z = -\sum_{k=1}^{K} \frac{m_k(z-\zeta_k)}{r_k^3}.$$

Согласно принципу суперпозиции, сила притяжения совокупности масс равна сумме их сил притяжения.

В) Притяжение материального тела (объемных масс).

Предельный переход позволяет из равенств (3) получить выражения для вычисления компонент силы притяжения материального тела конечных размеров и конечной массы M:

$$F_x = -\iiint_M \cos(r,x)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2},$$

$$F_y = -\iiint_M \cos(r,y)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2}, \qquad (4)$$

$$F_z = -\iiint_M \cos(r,z)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2},$$

Г) Притяжение материального бесконечно тонкого слоя конечной массы M ***(простого слоя):***

$$F_x = -\iint\limits_M \cos(r,x)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2},$$

$$F_y = -\iint\limits_M \cos(r,y)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2}, \qquad (5)$$

$$F_z = -\iint\limits_M \cos(r,z)\frac{dm(\xi,\eta,\zeta)}{r^2},$$

Заметим, что свойства силы притяжения простого слоя будут нами рассмотрены ниже с необходимой детальностью, пока же ограничимся вытекающей из (4) формальной записью (5) для составляющих этого вектора.

§ 2. Потенциалы силы притяжения.

Потенциалом (потенциальной функцией) силового поля называется скалярная функция, частные производные которой по осям прямоугольной системы координат равны проекциям вектора силы на эти оси (А.Лагранж, 1773). Это означает, что

$$\mathrm{grad}V(P)=\overline{F}(P), \qquad (6)$$

где $V(P)$ – потенциал поля силы $\overline{F}(P)$ в точке $P(x,y,z)$. Иными словами, $F_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial V}{\partial z}$. Вводимая таким образом потенциальная функция $V(P)$ позволяет заменить изучение векторного поля $\overline{F}(P)$ изучением скалярного поля $V(P)$.

Вопрос о знаке градиента равенства (6) решается в результате следующего соглашения:

- для гравитационных сил (одноименные заряды-массы притягиваются) градиент положительный, а потенциал совпадает с силовой функцией и равен потенциальной энергии системы, взятой с обратным знаком;
- для электромагнитных сил (одноименные заряды отталкиваются) градиент отрицательный, потенциал совпадает с потенциальной энергией и равен силовой функции, взятой с обратным знаком.

Физический смысл потенциала состоит в том, что в любой точке P пространства функция $V(P)$ равна работе, которую требуется совершить против сил поля притяжения, чтобы единичную массу переместить из точки P в бесконечность. Заметим также, что, поскольку замена в (6) функции $V(P)$ на $V(P)+\mathrm{const}$ несущественна, физический смысл имеет не потенциал в отдельной точке, а разность значений потенциалов в двух произвольных точках. Стандартным способом фиксации произвольной аддитивной постоянной является требование $V=0$ на бесконечности.

Классическими видами потенциалов притяжения являются точечный потенциал, потенциал объемных (протяженных в пространстве) масс и потенциалы простого и двойного материальных слоев. Ниже рассмотрим потенциалы этих классических типов гравитирующих масс.

А) Потенциал притяжения материальной точки.

Материальная точка массой m, расположенная в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$, наводит в точке $P(x,y,z)$, в которой находится единичная пробная масса, потенциал

$$V(x,y,z)=\frac{m}{r}, \qquad (7)$$

где $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$.

Справедливость формулы (7) подтверждается прямым ее дифференцированием по какому- либо аргументу

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{m}{r^2}\cdot\frac{x-\xi}{r}=-\frac{m(x-\xi)}{r^3}$$

и сопоставлением полученного результата с первым выражением соотношений (2).

Б) Потенциал притяжения совокупности материальных точек.

Исходя из принципа суперпозиции, для совокупности K материальных точек имеем:

$$V(x,y,z)=\sum_{k=1}^{K} V_k=\sum_{k=1}^{K}\frac{m_k}{r_k}, \qquad (8)$$

В) Потенциал притяжения объемных масс.

Разбивая массу тела на элементарные массы dm, согласно (7), имеем для элементарного потенциала $dV = {dm}/{r}$. Введем функцию объемной плотности $\delta = {dm}/{d\tau}$, где $d\tau$ – есть элемент объема, занятого массой dm. Тогда $dm = \delta d\tau$ и $dV = {\delta d\tau}/{r}$. Интегрирование по полному объему τ исследуемого тела позволяет получить искомую формулу для потенциала объемных масс:

$$V(P) = \iiint\limits_{\tau} \frac{\delta(M)}{r} d\tau(M), \;\; M \in \tau. \tag{9}$$

Заметим, что масса любого тела существует как одно из свойств материи, вследствие чего распределение dm, если оно адекватно описывает свойства тела, обязано быть интегрируемым; то же относится и к функции $\delta(M), \quad M \in \tau$ распределения объемной плотности. Интегрирование в (9) выполняется по координатам текущей точки M, а под r понимается расстояние от точки M до точки P.

Г) Потенциал притяжения простого слоя.

Простым слоем называется масса m, распределенная на поверхности σ в виде бесконечно тонкого слоя. Пусть h – расстояние между двумя весьма близкими друг к другу поверхностями σ и $\tilde{\sigma}$. Тогда элемент объема, заключенного между этими поверхностями и заполненного массами будет равен $d\tau=h\cdot d\sigma$. Согласно (9), потенциал слоя

$$V(P)=\iint_{\sigma}\frac{\delta\cdot h}{r}d\sigma.$$

Введем поверхностную плотность $\mu(M)=\frac{dm}{d\sigma}$, $M\in\sigma$, так, чтобы $\lim\limits_{h\to 0}\delta h=\mu(M)\neq 0$. В результате предельного перехода элемент массы dm оказывается сконденсированным на элементарную площадку $d\sigma(M)$. Тогда потенциал простого слоя определяется формулой:

$$V(P)=\iint_{\sigma}\frac{\mu(M)}{r}d\sigma(M),\ \ M\in\sigma. \tag{10}$$

Будем далее предполагать, что в каждой точке поверхности σ возможно провести единственную касательную плоскость, а, следовательно, и нормаль к ней, направление которой меняется от точки к точке непрерывным образом. Договоримся также считать положительным направление нормали изнутри наружу (так называемая внешняя нормаль) поверхности σ.

Д) Потенциал притяжения двойного слоя.

Двойным слоем называются два простых слоя с плотностями μ и $\tilde{\mu}$, расположенные на поверхностях σ и $\tilde{\sigma}$ на весьма близком расстоянии h друг от друга. При этом плотности слоев на отрезке h общей нормали равны между собой по абсолютному значению, но противоположны по знаку, т.е. $\mu(M)=-\tilde{\mu}(\tilde{M}),\quad M\in\sigma,\quad \tilde{M}\in\tilde{\sigma}$. Тогда, исходя из (10), и полагая $d\sigma(M)=d\tilde{\sigma}(\tilde{M})$, имеем:

$$V(P)=\iint\limits_{\sigma}\mu(M)\left(\frac{1}{\tilde{r}}-\frac{1}{r}\right)d\sigma(M).$$

Так как по малости h, $\dfrac{1}{\tilde{r}}=\dfrac{1}{r}+h\cdot\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{1}{r}\right),$ получаем

$$V(P)=\iint\limits_{\sigma}\mu(M)\cdot h\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma(M).\tag{11}$$

В формуле (11) символом $\partial/\partial n$ обозначен оператор дифференцирования по нормали к поверхности слоя σ. Устремляя $h\to 0$, приходим к

$$V(P)=\lim_{h\to 0}\iint\limits_{\sigma}\mu(M)\cdot h\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma(M).$$

Накладываем условие:

$$\underbrace{\lim}_{h\to 0}\mu(M)\cdot h=\nu(M)\neq 0,$$

где ν - конечная величина, называемая плотностью двойного слоя. В итоге приходим к выражению для потенциала двойного слоя:

$$V(P)=\iint\limits_{\sigma}\nu(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma(M),\quad M\in\sigma.\tag{12}$$

§ 3. Уровенные поверхности, производные и градиент гравитационного потенциала.

Введение потенциала силы притяжения означает переход от заданного в некоторой области пространства τ векторного поля $\overline{F}(P),\ P\in\tau$ к соответствующему той же области пространства τ скалярному полю $V(P),\ P\in\tau$, для большей наглядности представления которого используются рассматриваемые ниже характеристики.

Уровенной поверхностью (поверхностью уровня) скалярного поля $V(P),\ P\in\tau$ называется геометрическое место точек, в которых функция $V(P)$ принимает постоянное значение $V(P)=c_1=\text{const}$. Поверхности уровня, соответствующие различным значениям постоянной c_1, заполняют всю область τ, при этом никакие две эквипотенциальные поверхности $V(P)=c_1$, $V(P)=c_2$, $c_1\neq c_2$ не имеют общих точек.

Производная скалярного поля $V(P)$ по фиксированному направлению s, задаваемому положением точек P и P_1, определяется результатом предельного перехода

$$\frac{dV(P)}{ds}=\lim_{P_1\to P}\frac{V(P_1)-V(P)}{PP_1}$$

и характеризует скорость изменения поля по заданному направлению. В прямоугольной декартовой системе координат производная функции $V(P)$ по направлению s выражается формулой:

$$\frac{dV}{ds}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos(s,x)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(s,y)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(s,z).$$

Градиент скалярного поля $V(P)$ представляет собой вектор, проекция которого на направление s равна производной поля $V(P)$ по направлению s, т.е.:

$$\frac{dV(P)}{ds}=\left(\mathrm{grad}V(P)\cdot\bar{s}\right).$$

Вектор градиента направлен по нормали к уровенной поверхности в сторону возрастания $V(P)$ и характеризует направление и скорость максимального роста функции $V(P)$. Сказанное выше означает, что производная по направлению $\partial V(P)/\partial s$ принимает максимальное значение, равное $\left|\mathrm{grad}V(P)\right|$, по направлению вектора градиента. Если всюду в τ $\mathrm{grad}V(P)=0,\quad P\in\tau,$ то $V(P)=\mathrm{const}$.

В прямоугольной декартовой системе координат градиент скалярного поля (функции) $V(x,y,z)$ определяется формулой:

$$\mathrm{grad}V(x,y,z)=\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\bar{k},$$

а в сферической системе координат - формулой:

$$\mathrm{grad}V(\rho,\varphi,\lambda)=\frac{\partial V}{\partial\rho}\bar{i}+\frac{\partial V}{\rho\partial\varphi}\bar{j}+\frac{\partial V}{\rho\cos\varphi\partial\lambda}\bar{k}.$$

§ 4. Простейшие случаи решения прямой задачи теории потенциала.

Прямая задача теории потенциала (применительно к потенциалу силы притяжения ее часто называют прямой гравиметрической задачей) формулируется следующим образом: заданы тело τ и ограничивающая его поверхность σ, а также функция распределения плотности $\delta(M),\ M\in\sigma$ его масс. Требуется определить гравитационный потенциал $V(P)$ в некоторой (внутренней или внешней) точке P пространства. Решение задачи на практике сводится к вычислению объемного интеграла (9) по области τ. Отметим, что даже в случае тел постоянной плотности $\delta(M)=\mathrm{const}$ искомый интеграл выражается в элементарных функциях только для некоторых простейших гравитирующих конфигураций, некоторые примеры которых рассматриваются в данном параграфе.

А) Притяжение однородного сферического простого слоя на внешнюю и внутреннюю точки.

Пусть на сфере σ радиуса R распределен простой слой плотности $\mu(M)=const,\quad M\in\sigma$. Тогда во внешней точке P в соответствии с (10) имеем:

$$V(P)=\iint\limits_{\sigma}\frac{\mu d\sigma}{r},$$

где r – расстояние от текущей точки M до точки P (рис. 1а).

В сферической системе координат с центром, совпадающим с центром сферы σ, площадь элемента поверхности $d\sigma=R^2\sin\psi d\psi d\lambda$ и

$$V(P) = 2\pi\mu \int_0^{\pi} \frac{R^2 \sin\psi}{r} d\psi .$$

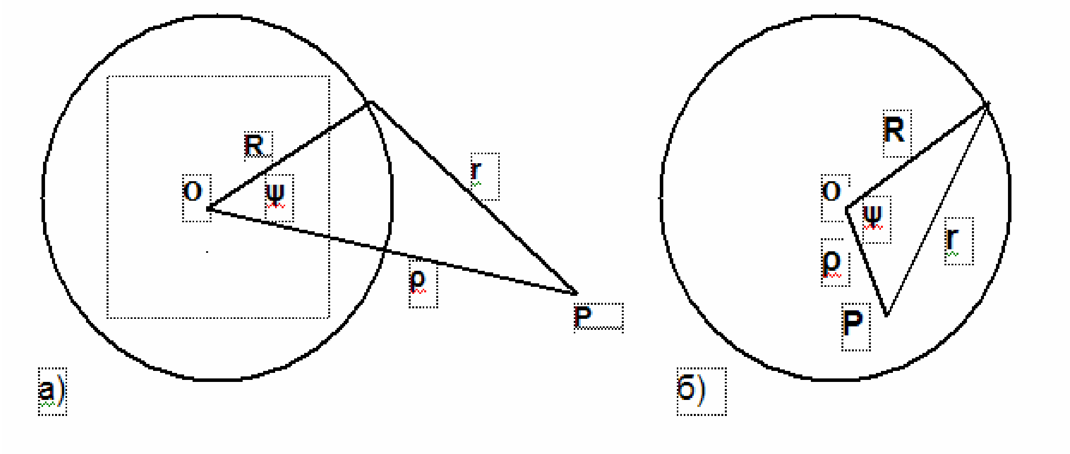

Рис. 1. Притяжение внешней (а) и внутренней (б) точки сферическим слоем

Пользуясь формулой косинусов $r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi$, перейдем от интегрирования по переменной ψ к интегрированию по переменной r:

$$r dr = R\rho \sin\psi d\psi, \quad \frac{R}{\rho} dr = \frac{R^2}{r} \sin\psi d\psi,$$

$$V(P) = 2\pi\mu \frac{R}{\rho} \int_{\rho-R}^{\rho+R} dr = \frac{4\pi\mu R^2}{\rho}.$$

Вводя массу однородного сферического слоя $m = 4\pi R^2 \mu$, получаем:

$$V(P) = \frac{m}{\rho}. \tag{13}$$

Случай притяжения на внутреннюю точку P (рис. 1б) отличается лишь расстановкой пределов при интегрировании по радиусу-вектору:

$$V(P) = 2\pi\mu \frac{R}{\rho} \int_{R-\rho}^{R+\rho} dr = 4\pi R\mu = \frac{m}{R}. \qquad (14)$$

Это означает, что потенциал притяжения однородного сферического слоя на внутреннюю точку есть постоянная величина.

Б) Притяжение однородного шара на внешнюю и внутреннюю точки.

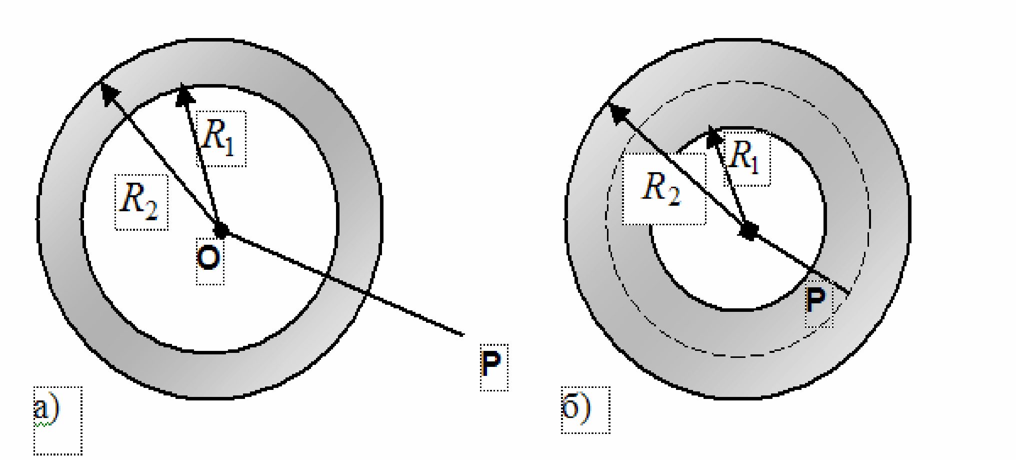

Рис. 2. Притяжение внешней (а) и внутренней (б) точек слоем конечной толщины dR.

Пользуясь формулой (13), вычислим притяжение однородного сферического слоя конечной толщины dR на внешнюю точку P (рис.2а):

$$V(P) = \frac{4\pi}{\rho} \int_{R_1}^{R_2} \delta R^2 dR = \frac{4}{3}\pi \frac{\delta}{\rho}\left(R_2^3 - R_1^3\right),$$

так как

$$\mu = \frac{dm}{d\sigma} = \frac{\delta d\sigma dR}{d\sigma} = \delta dR.$$

Для шара радиуса $R = R_2$ при $R_1 = 0$ получаем:

$$V(P) = \frac{4}{3}\pi \frac{\delta}{\rho} R^3 = \frac{m}{\rho}. \qquad (15)$$

Для вычисления притяжения слоя конечной толщины на внутреннюю точку P, проведем через нее концентрическую сферу, разделяющую слой на внешнюю (1) и внутреннюю (2) по отношению к точке P области (рис.2б). Тогда потенциал $V(P)=V_1+V_2$. Воспользовавшись формулами (15) и (14), имеем:

$$V_1(P)=\frac{4}{3}\pi\frac{\delta}{\rho}\left(\rho^3-R_1^3\right), \text{ и } V_2(P)=4\pi\delta\int_{\rho}^{R_2}RdR=2\pi\delta\left(R_2^2-\rho^2\right).$$

Тогда $$V(P)=\frac{4}{3}\pi\delta\rho^2-\frac{4}{3}\pi\delta\frac{R_1^3}{\rho}+2\pi\delta R_2^2-2\pi\delta\rho^2=$$

$$=\frac{2}{3\rho}\pi\delta\left(2\rho^3-2R_1^3+3\rho R_2^2-3\rho^3\right)=\frac{2}{3\rho}\left(3\rho R_2^2-2R_1^3-\rho^3\right).$$

Для шара радиуса $R=R_2$ при $R_1=0$ получаем:

$$V(P)=\frac{2}{3}\pi\delta\left(3R^2-\rho^2\right). \tag{16}$$

В) Притяжение плоского однородного простого слоя.

В данном примере рассмотрим притяжение однородного плоского слоя, распределенного на круге σ радиуса a. Центр круга выберем в качестве центра цилиндрической системы координат, ось z которой устремим по нормали к плоскости круга. Силу притяжения масс плотностью μ

$$F = -\iint_{\sigma} \frac{\mu \cos(r, z)}{r^2} d\sigma$$

вычислим в точках P , $\hat{P}$ и O , расположенных на оси z (рис. 3).

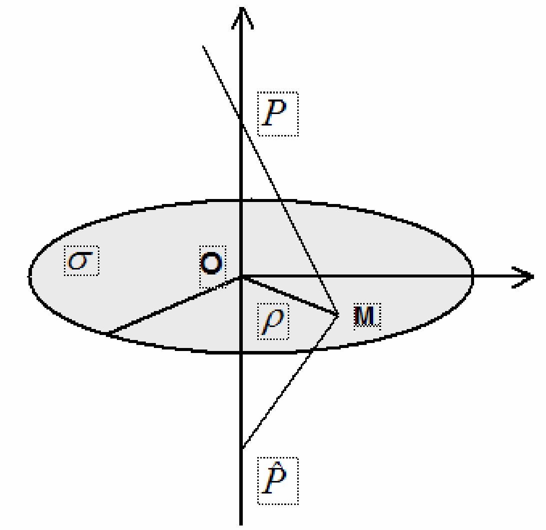

Рис.3. Притяжение плоского материального круга

Положение текущей точки интегрирования M, $M \in \sigma$ договоримся описывать полярными координатами $M(\rho, \alpha)$. Тогда $r^2 = z^2 + \rho^2$ и $r dr = \rho d\rho$, а $d\sigma = \rho d\rho d\alpha$ и $d\sigma = r dr d\alpha$. Поскольку в точке P $\cos(r,z) = \frac{|z|}{r}$, в точке $\hat{P}$ $\cos(r,z) = -\frac{|z|}{r}$, а в точке O $\cos(r,z) = 0$, для каждой из трех точек имеем:

$$F(P) = -\mu |z| \int_{|z|}^{\sqrt{z^2 + a^2}} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\alpha}{r^2} = -2\pi\mu \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right),$$

$$F(\hat{P}) = \mu|z| \int\limits_{|z|}^{\sqrt{z^2+a^2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{rdrd\alpha}{r^2} = 2\pi\mu\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2+a^2}}\right), \quad (17)$$

$$F(O) = 0.$$

Исследуем поведение функции (17) на границе простого слоя с помощью предельных переходов:

$$F_e(O) = \lim_{P \to O} F(P) = \lim_{z \to +0} F(P) = -2\pi\mu, \qquad (18)$$

$$F_i(O) = \lim_{\hat{P} \to O} F(\hat{P}) = \lim_{z \to -0} F(\hat{P}) = +2\pi\mu.$$

Формулы (18) показывают, что первая производная (сила) потенциала притяжения простого слоя при пересечении точкой P поверхности простого слоя претерпевает разрыв непрерывности (скачок).

В заключение параграфа заметим, что общим решением внешней $(P \notin \tau)$ прямой задачи теории потенциала можно считать разложение его в ряд объемных сферических (шаровых) функций, коэффициенты которого вычисляются по известным форме поверхности σ и плотности δ гравитирующего тела.

§5. Решение прямой задачи теории потенциала для однородного трехосного эллипсоида.

А) Притяжение эллипсоида во внутренней точке.

Рассмотрим притяжение заполненного массами объемной плотности $\delta=\text{const}$ трехосного эллипсоида объема τ

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1 \qquad (19)$$

на точку $P(x,y,z)$, расположенную внутри эллипсоида, вследствие чего

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1.$$

Пользуясь формулами (4), вычислим компоненты вектора силы притяжения эллипсоида на точку P:

$$F_x(P)=\delta\iiint_\tau \frac{\xi-x}{r^3}d\tau,$$

$$F_y(P)=\delta\iiint_\tau \frac{\eta-y}{r^3}d\tau, \qquad (20)$$

$$F_z(P)=\delta\iiint_\tau \frac{\zeta-z}{r^3}d\tau.$$

Поскольку выражения (20) однотипны, достаточно подробно проследить процедуру вычисления одной из компонент, например, аппликаты F_z.

Примем точку P, $P\in\tau$ за начало сферической системы координат, так что

$$\xi=x+r\sin\theta\cos\lambda,\qquad \eta=y+r\sin\theta\sin\lambda,\qquad \zeta=z+r\cos\theta,$$

а элемент объема $d\tau=r^2\sin\theta d\theta d\lambda dr$. Тогда

$$F_z = \delta\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\lambda\int_0^{\tilde{r}}dr = \delta\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{r}\sin\theta\cos\theta d\theta d\lambda\ , \quad (21)$$

где символом $\tilde{r}$ обозначена длина радиуса-вектора той точки поверхности эллипсоида, которая лежит в направлении θ,λ от точки P. Для определения величины $\tilde{r}$ воспользуемся уравнением эллипсоида (19), записав его в следующем виде:

$$\frac{x+\tilde{r}\sin\theta\cos\lambda}{a^2}+\frac{y+\tilde{r}\sin\theta\sin\lambda}{b^2}+\frac{z+\tilde{r}\cos\theta}{c^2}=1$$

или

$$A\tilde{r}^2+2B\tilde{r}+C=0, \quad (22)$$

где

$$A=a^{-2}\sin^2\theta\cos^2\lambda+b^{-2}\sin^2\theta\sin^2\lambda+c^{-2}\cos^2\theta,$$

$$B=xa^{-2}\sin\theta\cos\lambda+yb^{-2}\sin\theta\sin\lambda+zc^{-2}\cos\theta, \quad (23)$$

$$C=x^2a^{-2}+y^2b^{-2}+z^2c^{-2}-1.$$

Заметим, что независимо от положения точки P $A>0$, $C\le 0$, в силу чего квадратное уравнение (22) имеет только один положительный корень:

$$\tilde{r}=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A},$$

подставляя который в (21), имеем:

$$F_z = -\delta\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{B}{A}\sin\theta\cos\theta d\theta d\lambda +$$

$$+\delta\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}\sin\theta\cos\theta d\theta d\lambda. \qquad (24)$$

Покажем, что второй интеграл в выражении (24) равен нулю, для чего разделим области интегрирования по θ и по λ пополам, делая в области изменения полярного расстояния $\pi/2 \le \theta \le \pi$ замену переменной $\theta = \pi - \theta$, а в области изменения долготы $\pi \le \lambda \le 2\pi$ – замену переменной $\lambda = \pi + \lambda$. Получившиеся интегралы с учетом положительности и четности функции $\sqrt{B^2 - AC}/A$ будут попарно равны друг другу, но противоположны по знаку. Подставим далее в первый интеграл формулы (24) значение B из (23):

$$F_z = -\delta x a^{-2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} A^{-1}\sin^2\theta\cos\theta\cos\lambda d\theta d\lambda -$$

$$-\delta y b^{-2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} A^{-1}\sin^2\theta\cos\theta\sin\lambda d\theta d\lambda - \qquad (25)$$

$$-\delta z c^{-2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} A^{-1}\sin\theta\cos^2\theta d\theta d\lambda.$$

В выражении (25) первые два интеграла из трех равны нулю. Убедимся в этом, деля в каждом из них область интегрирования по λ пополам, и, делая в области изменения долготы $\pi \le \lambda \le 2\pi$ замену переменных

$\lambda=\pi+\lambda$. Получившиеся пары интегралов оказываются равны друг другу по величине, но противоположными по знаку. Кроме того, деля в третьем интеграле область интегрирования по θ пополам и делая в области изменения полярного расстояния $\pi/2\leq\theta\leq\pi$ замену переменной $\theta=\pi-\theta$, убедимся, что получившиеся интегралы также равны друг другу и совпадают по знаку. Таким образом, окончательно формула (25) преобразуется к виду

$$F_z = -2\delta z c^{-2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} A^{-1} \sin\theta \cos^2\theta d\theta d\lambda. \qquad (26)$$

Остается подставить в (26) значение A из (23), представив его в виде

$$A = M\cos^2\lambda + N\sin^2\lambda,$$

где

$$M = a^{-2}\sin^2\theta + c^{-2}\cos^2\theta, \quad N = b^{-2}\sin^2\theta + c^{-2}\cos^2\theta.$$

Воспользуемся далее табличным интегралом

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{M\cos^2\lambda + N\sin^2\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{MN}}.$$

После приведения к общему знаменателю под знаком радикала получаем:

$$F_x = -2Px, \quad F_y = -2Qy, \quad F_z = -2Rz, \qquad (27)$$

где

$$P = 2\pi\delta bc\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)\left(a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta\right)}},$$

$$Q = 2\pi\delta ac\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{\left(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)\left(b^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta\right)}},$$

$$R = 2\pi\delta ab\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{\left(c^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)\left(c^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)}}. \qquad (28)$$

Анализируя выражения (28), приходим к выводу, что величины P,Q,R зависят только от отношений полуосей эллипсоида (т.е. от формы эллипсоида), но не от его размеров. Установленное обстоятельство доказывает теорему Ньютона, которую сформулируем следующим образом:

Теорема Ньютона. Притяжение, производимое однородным эллипсоидальным слоем на точку, находящуюся в его внутренней полости, равно нулю.

В самом деле, поскольку притяжение однородного эллипсоидального слоя на точку, расположенную в его внутренней полости, можно рассматривать как разность притяжений двух однородных подобных (т.е. имеющих равные отношения полуосей) эллипсоидов, формулы (28) служат доказательством данной теоремы.

Соотношения (27) показывают, что потенциал силы притяжения однородного эллипсоида на внутреннюю точку описывается выражением:

$$V(P) = V_0 - Px^2 - Qy^2 - Rz^2, \qquad (29)$$

где V_0 есть постоянная интегрирования, равная значению потенциала в начале координат (при $x = y = z = 0$):

$$V_0 = \delta\iiint_\tau \frac{d\tau}{r} = \delta\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{\hat{r}} r\sin\theta d\theta d\lambda dr,$$

где $\hat{r}$ есть решение уравнения (22) при $x=y=z=0$: $\hat{r}^2=\frac{1}{A}$. Тогда

$$V_0 = \frac{1}{2}\delta\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\hat{r}^2\sin\theta d\theta d\lambda = \frac{1}{2}\delta\int_0^\pi\int_0^{2\pi}A^{-1}\sin\theta d\theta d\lambda.$$

Заметим, что, разделив область интегрирования по θ пополам, получим два равных друг другу интеграла с одним и тем же знаком, вследствие чего, воспользовавшись тем же табличным интегралом, приходим к

$$V_0 = 2\pi\delta abc^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\left(c^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)\left(c^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)}}.$$

Для более компактной записи сделаем замену переменной интегрирования:

$$\cos\theta=c(c^2+s)^{-\frac{1}{2}},$$

тогда

$$V_0 = \pi\delta abc\int_0^\infty\frac{ds}{\sqrt{\left(a^2+s\right)\left(b^2+s\right)\left(c^2+s\right)}}.$$

Обозначив $\Gamma=\sqrt{\left(a^2+s\right)\left(b^2+s\right)\left(c^2+s\right)}$, окончательно запишем:

$$V_0 = \pi\delta abc\int_0^\infty \frac{ds}{\Gamma},$$

$$V(x,y,z)=\pi\delta abc\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\Gamma}\ , \quad (30)$$

а также перепишем (28):

$$P = \pi\delta abc\int_0^\infty \frac{ds}{\left(a^2+s\right)\Gamma},$$

$$Q = \pi\delta abc\int_0^\infty \frac{ds}{\left(b^2+s\right)\Gamma}, \qquad (31)$$

$$R = \pi\delta abc\int_0^\infty \frac{ds}{\left(c^2+s\right)\Gamma}.$$

Б) Притяжение эллипсоида во внешней точке.

Для вывода искомых соотношений воспользуемся теоремой Лапласа, которую здесь приведем без доказательства.

Теорема Лапласа: Однородные софокусные эллипсоиды притягивают внешнюю точку с силами, одинаково направленными и по величине пропорциональными массам эллипсоидов.

Пусть однородный трехосный эллипсоид, описываемый уравнением (19), притягивает внешнюю точку $P(x,y,z)$ с силой $\overline{F}$, компоненты вектора которой обозначим символами F_x, F_y, F_z. Проведем далее через точку $P(x,y,z)$ эллипсоид, софокусный заданному уравнением (19). Уравнение этого софокусного эллипсоида запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1. \tag{32}$$

Представим, что весь этот эллипсоид также заполнен массами плотности δ, в силу чего он притягивает точку $P(x,y,z)$ с силой $\bar{\tilde{F}}$, компоненты вектора которой в свою очередь обозначим символами $\tilde{F}_x$, $\tilde{F}_y$, $\tilde{F}_z$. Согласно теореме Лапласа

$$\frac{F_x}{\tilde{F}_x}=\frac{F_y}{\tilde{F}_y}=\frac{F_z}{\tilde{F}_z}=\frac{M}{\tilde{M}},$$

где M и $\tilde{M}$ - суть массы эллипсоидов (19) и (32) соответственно.

Поскольку точка $P(x,y,z)$ находится на поверхности эллипсоида (32), для вычисления компонент $\tilde{F}_x$, $\tilde{F}_y$, $\tilde{F}_z$ следует использовать формулы (27), заменив в них значения полуосей a,b,c на $\sqrt{a^2+u},$ $\sqrt{b^2+u},$ $\sqrt{c^2+u}$ соответственно. Сделаем это для компоненты $\tilde{F}_x$.

$$\tilde{F}_x=-2Px=-2\pi\delta x\sqrt{\left(a^2+u\right)\left(b^2+u\right)\left(c^2+u\right)}\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+u+s)\tilde{\Gamma}},$$

$$\tilde{\Gamma}=\sqrt{\left(a^2+u+s\right)\left(b^2+u+s\right)\left(c^2+u+s\right)}.$$

Под знаком интеграла сделаем очевидную замену переменных $s = u + s$. Тогда

$$\tilde{F}_x = -2Px = -2\pi\delta x\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}\int_u^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Gamma}.$$

Следуя теореме Лапласа и заменяя отношение масс отношением объемов, имеем:

$$F_x = \tilde{F}_x \frac{M}{\tilde{M}} = \tilde{F}_x \frac{abc}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}.$$

Окончательно получаем:

$$F_x = -2Px, \quad F_y = -2Qy, \quad F_z = -2Rz, \tag{33}$$

где

$$P = \pi\delta abc\int_u^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Gamma},$$

$$Q = \pi\delta abc\int_u^\infty \frac{ds}{(b^2+s)\Gamma}, \tag{34}$$

$$R = \pi\delta abc\int_u^\infty \frac{ds}{(c^2+s)\Gamma}.$$

Нетрудно заметить, что при $u = 0$ (в этом случае точка $P(x, y, z)$ лежит на поверхности исходного эллипсоида (19)) формулы (34) совпадут с (31).

Потенциал силы притяжения однородного эллипсоида на внешнюю точку $P(x,y,z)$:

$$V(x,y,z)=\pi\delta abc\int_u^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\Gamma}. \quad (35)$$

Напомним в заключение, что для определения значения параметра u служит уравнение (32).

§6. Свойства потенциала объемных масс.

В данном параграфе будут рассмотрены свойства гравитационного потенциала, соответствующего притяжению материальных тел с произвольным распределением плотности гравитирующих масс.

А) <u>Потенциал объемных масс есть функция конечная и непрерывная во всем пространстве.</u>

Очевидно, что во внешнем пространстве, не занятом массами, описываемая выражением (9) потенциальная функция объемных масс обладает свойствами конечности и непрерывности. Покажем, что эти свойства функция (9) сохраняет и в том случае, когда единичная пробная масса, помещаемая в точку $P(x,y,z)$, находится внутри объема τ, занимаемого массами тела.

Примем точку $P(x,y,z)$ за центр сферической системы координат, в которой элемент объема $d\tau=r^2\sin\theta d\theta d\lambda dr$. Тогда равенство (9) перепишется в виде

$$V(P)=\iiint_\tau \delta r\sin\theta d\theta d\lambda dr.$$

Устремляя $r \to 0$, видим, что потенциал $V(P)$ сохраняет при этом конечное значение. Для доказательства его непрерывности исследуем поведение потенциала в окрестности точки $P(x,y,z)$ при $r \to 0$. Опишем вокруг точки $P(x,y,z)$ сферу безопасности настолько малого радиуса R, что плотность внутри нее можно считать постоянной: $\delta^* = \mathrm{const}$ (рис.4).

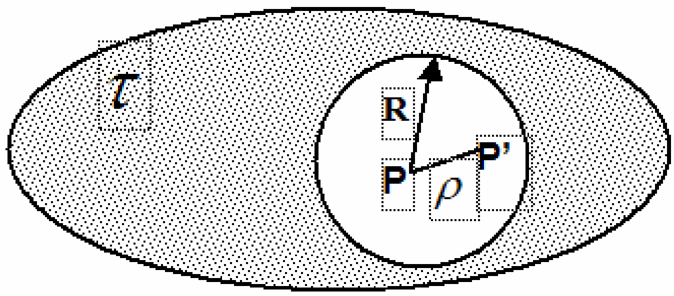

Рис. 4. Непрерывность потенциала объемных масс.

Потенциал этой сферы обозначим $V^*(P)$, а потенциал притяжения находящихся вне сферы безопасности масс тела обозначим $V'(P)$, т.е. $V(P) = V^*(P) + V'(P)$. Потенциал $V'(P)$ в точке P будет, очевидно, непрерывной функцией, для потенциала же $V^*(P)$ справедлива формула (16), согласно которой $V^*(P) = 2\pi\delta^* R^2$. Поместим далее точку P' на расстоянии ρ от точки P так, чтобы $\rho < R$. Тогда потенциал $V^*(P') = \frac{2}{3}\pi\delta^*\left(3R^2 - \rho^2\right)$. Образуем разность $V^*(P) - V^*(P') = \frac{2}{3}\pi\delta^*\rho^2$. Устремляя $R \to 0$, тем самым устремляем и $\rho \to 0$, а тогда и $[V^*(P) - V^*(P')] \to 0$, что доказывает непрерывность потенциала $V(P),\ P \in \tau$ внутри гравитирующих объемных масс.

Б) <u>Первые производные потенциала объемных масс суть функции конечные и непрерывные во всем пространстве.</u>

Первая производная потенциала (9) объемных масс по произвольному направлению s равна

$\dfrac{\partial V(P)}{\partial s} = \iiint\limits_{\tau} \delta \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{1}{r}\right) d\tau$. Так как $\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial s} = -\dfrac{\cos(r,s)}{r^2}$,

то $\dfrac{\partial V(P)}{\partial s} = -\iiint\limits_{\tau} \delta \dfrac{\cos(r,s)}{r^2} d\tau.$ Процедура дальнейшего доказательства конечности и непрерывности производной потенциала объемных масс во всем пространстве повторяет процедуру, использованную выше для доказательства аналогичных свойств самого потенциала.

В) <u>Потенциал объемных масс есть функция гармоническая во внешнем пространстве</u> ($P \notin \tau$).

$$\frac{\partial^2 V(P)}{\partial x^2} = \iiint\limits_{\tau} \delta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x - \xi}{r},$$

$$\Delta V(P) = \frac{\partial^2 V(P)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(P)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(P)}{\partial z^2} = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x - \xi)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-\eta)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}.$$

Суммируя, получаем искомое выражение для уравнения Лапласа:

$$\Delta V(P)=0 \quad P\notin\tau . \tag{37}$$

Г) <u>Внутри притягивающих масс ($P\in\tau$) потенциал объемных масс есть функция, удовлетворяющая уравнению Пуассона.</u>

Для того, чтобы раскрыть неопределенность, возникающую внутри притягивающих масс при вычислении вторых производных потенциала (9), воспользуемся уже использовавшимся выше приемом. Опишем вокруг точки $P(x,y,z)$ сферу безопасности настолько малого радиуса R, что плотность внутри нее можно считать постоянной: $\delta^*=\text{const}$. Тогда $V(P)=V^*(P)+V'(P)$. Наложим на это равенство оператор Лапласа: $\Delta V(P)=\Delta V^*(P)+\Delta V'(P)=\Delta V^*(P)$. Согласно равенству (16) имеем $V^*(P)=\frac{2}{3}\pi\delta^*\left(3R^2-r^2\right)$, где $r<R$ - расстояние от точки $P(x,y,z)$ до текущей внутри сферы безопасности точки $M(\xi,\eta,\zeta)$. Вычислим производные потенциала V^*:

$$\frac{\partial V^*}{\partial x}=\frac{\partial V^*}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{4}{3}\pi\delta^* r\frac{x-\xi}{r}=-\frac{4}{3}\pi\delta^*(x-\xi),$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2}=-\frac{4}{3}\pi\delta^*(P),\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^2}=-\frac{4}{3}\pi\delta^*(P),\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial z^2}=-\frac{4}{3}\pi\delta^*(P).$$

Суммируя вторые производные по всем трем координатным осям, имеем:

$$\Delta V(P) = -4\pi\delta(P) \quad P \in \tau . \qquad (38)$$

Это соотношение носит название уравнения Пуассона. Легко видеть, что уравнение Лапласа (37) представляет собой частный случай уравнения (38) при $\delta(P)=0$. Ясно, что в тех точках, где плотность меняется скачком, например, на границе притягивающей массы, по крайней мере одна из вторых производных потенциала объемных масс также претерпевает скачок.

Д) <u>Потенциал объемных масс есть функция регулярная на бесконечности.</u>

Покажем, что при удалении притягивающей точки в бесконечность $P \to \infty$ потенциал $V(P) \to 0$ и притом так, что имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{r \to \infty} rV(P) = GM. \qquad (39)$$

Очевидно, что $G\iiint\limits_{\tau}\frac{\delta d\tau}{r_{max}} < V(P) < G\iiint\limits_{\tau}\frac{\delta d\tau}{r_{min}},$ где r_{max} и r_{min} – постоянные при фиксированном положении точки P расстояния до нее от наиболее и наименее удаленных от точки P точек тела τ . В силу их постоянства при интегрировании, имеем:

$$G\frac{1}{r_{max}}\iiint\limits_{\tau}\delta d\tau < V(P) < G\frac{1}{r_{min}}\iiint\limits_{\tau}\delta d\tau \quad \text{или} \quad \frac{GM}{r_{max}} < V(P) < \frac{GM}{r_{min}}.$$

Домножая последнее неравенство на r и переходя к пределам, получаем:

$$GM\frac{r}{r_{max}} < rV(P) < GM\frac{r}{r_{min}},$$

$$GM\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{max}} < \lim_{r\to\infty} rV(P) < GM\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{min}}.$$

Так как

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{max}} = \lim_{r\to\infty}\frac{r}{r_{min}} = 1, \qquad GM < \lim_{r\to\infty} rV(P) < GM,$$

что и доказывает равенство (39), представляющее собой условие регулярности потенциальной функции $V(P)$ на бесконечности. Регулярность на бесконечности означает, что потенциал объемных масс при удалении притягиваемой точки в бесконечность стремится к нулю не менее быстро, нежели функция обратного расстояния $1/r$.

§7. Свойства потенциалов простого и двойного слоев.

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе для потенциала объемных масс, можно доказать, что потенциал простого слоя (10):

- Непрерывен и конечен во всем пространстве;
- Вне притягивающих масс имеет непрерывные производные всех порядков;
- Вне притягивающих масс удовлетворяет уравнению Лапласа (37), т.е. является гармонической функцией;
- Обладает свойством регулярности на бесконечности.

Это означает, что вне притягивающих масс потенциал простого слоя обладает теми же свойствами, что и потенциал объемных масс. Отличие в их свойствах касается поведения первой производной потенциала простого слоя при пересечении пробной массой, помещенной в точку P, границы простого слоя, т.е. поверхности σ. В параграфе 4 мы установили это для частного случая однородного плоского диска. В настоящем параграфе рассмотрим общий случай распределенного на замкнутой поверхности σ простого слоя переменной плотности μ (см. рис. 5). Заметим также, что для потенциалов слоев и их производных различают прямые значения, т.е. те, которые они принимают непосредственно на слое, и предельные значения, которые они принимают при приближении к слою с одной или другой стороны.

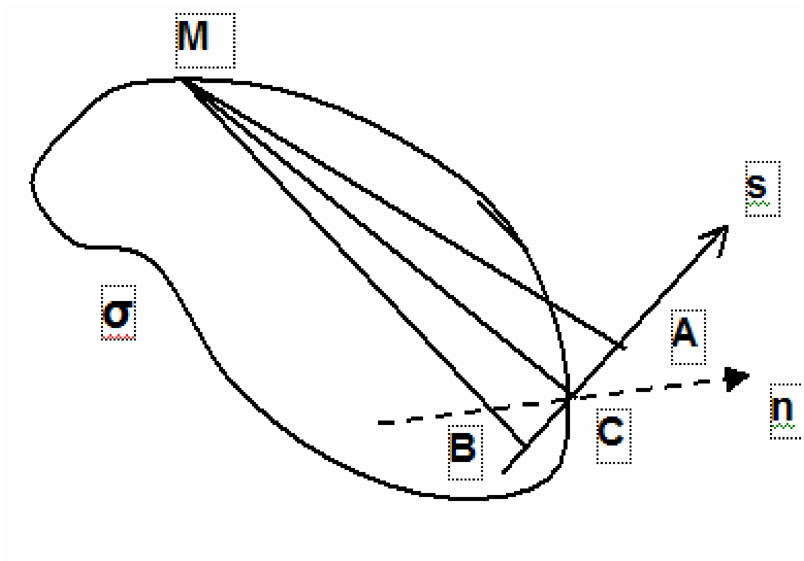

Рис. 5. К исследованию непрерывности производной потенциала простого слоя

Выберем внешнее к слою σ направление нормали, и обозначим символами A и B положения на этой нормали внешней и внутренней по отношению к слою точек пространства. Точку C поместим на поверхности слоя σ. По определению производная потенциала простого слоя является проекцией на направление s силы притяжения простым слоем единичной пробной массы, расположенной во внешней точке A :

$$\frac{\partial V(A)}{\partial s} = \int_\sigma \mu \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r_A}\right) d\sigma = -\int_\sigma \mu \frac{\cos(r_A, s)}{r_A^2} d\sigma$$

или во внутренней точке B :

$$\frac{\partial V(B)}{\partial s} = \int_\sigma \mu \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r_B}\right) d\sigma = -\int_\sigma \mu \frac{\cos(r_B, s)}{r_B^2} d\sigma.$$

Пусть точки A и B неограниченно приближаются к точке C, покажем, что при этом первые производные потенциала простого слоя по произвольному направлению s будут иметь различные предельные значения. Будем называть внешней производной потенциала простого слоя в точке C производную

$$\frac{\partial V_e(C)}{\partial s} = \lim_{A \to C} \frac{\partial V(A)}{\partial s} = -\lim_{A \to C} \int_\sigma \mu \frac{\cos(r_A, s)}{r_A^2} d\sigma,$$

а внутренней – производную

$$\frac{\partial V_i(C)}{\partial s} = \lim_{B \to C} \frac{\partial V(B)}{\partial s} = -\lim_{B \to C} \int_\sigma \mu \frac{\cos(r_B, s)}{r_B^2} d\sigma.$$

Прямое значение производной на слое определяется без предельных переходов непосредственно в точке $C \in \sigma$:

$$\frac{\partial V_0(C)}{\partial s} = -\int_\sigma \mu \frac{\cos(r_C, s)}{r_C^2} d\sigma.$$

Выделим вокруг точки C плоский круг σ^* бесконечно малого радиуса и плотностью масс $\mu^* = \mathrm{const}$, тогда

$$\frac{\partial V_e(C)}{\partial s} = -\lim_{A\to C}\int\limits_{\sigma-\sigma^*}\mu\frac{\cos(r_A, s)}{r_A^2}d\sigma - \lim_{A\to C}\int\limits_{\sigma^*}\mu^*\frac{\cos(r_A, s)}{r_A^2}d\sigma,$$

$$\frac{\partial V_i(C)}{\partial s} = -\lim_{B\to C}\int\limits_{\sigma-\sigma^*}\mu\frac{\cos(r_B, s)}{r_B^2}d\sigma - \lim_{B\to C}\int\limits_{\sigma^*}\mu^*\frac{\cos(r_B, s)}{r_B^2}d\sigma.$$

Первые интегралы в этих выражениях всегда ограничены и имеют одинаковый предел:

$$-\lim_{A\to C}\int\limits_{\sigma-\sigma^*}\mu\frac{\cos(r_A, s)}{r_A^2}d\sigma = -\lim_{B\to C}\int\limits_{\sigma-\sigma^*}\mu\frac{\cos(r_B, s)}{r_B^2}d\sigma = \frac{\partial V_0(C)}{\partial s}.$$

Для вычисления вторых интегралов воспользуемся формулой (17) потенциала однородного плоского круга, в которой роль оси z играет внешняя нормаль. Устремляя $A\to C,\ B\to C,\ \sigma^*\to 0$, приходим к

$$\frac{\partial V_e(C)}{\partial s} = \frac{\partial V_0(C)}{\partial s} - 2\pi\mu^*\cos(s, n),$$

$$\frac{\partial V_i(C)}{\partial s} = \frac{\partial V_0(C)}{\partial s} + 2\pi\mu^*\cos(s, n).$$

Результат суммирования двух этих формул доказывает теорему Племели (1904): прямое значение первой производной потенциала простого слоя равно полусумме ее внешнего и внутреннего предельных значений, т.е.

$$\frac{\partial V_0(C)}{\partial s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_e(C)}{\partial s} + \frac{\partial V_i(C)}{\partial s}\right). \tag{40}$$

Разность тех же двух формул ведет к формуле Пуассона:

$$\frac{\partial V_e(C)}{\partial s} - \frac{\partial V_i(C)}{\partial s} = -4\pi\mu^* \cos(s,n). \tag{41}$$

Из формулы Пуассона следует, что первые производные потенциала простого слоя непрерывной плотности μ претерпевают скачок при пересечении поверхности слоя. При этом производная испытывает приращение, равное $4\pi\mu^* \cos(s,n)$, где μ^* – плотность слоя в месте его пересечения. Заметим, что касательная производная, для которой $\cos(s,n)=0$, изменяется непрерывно и не претерпевает разрыва при переходе через простой слой.

Обратимся далее к свойствам потенциала двойного слоя. Согласно (12) этот потенциал выражается в виде:

$$V(x,y,z) = \iint\limits_{\sigma} \nu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma(\xi,\eta,\zeta).$$

Производная под знаком интеграла берется по направлению внешней нормали к поверхности σ в точке слоя с текущими координатами ξ,η,ζ, причем внешней считается область пространства с той стороны, где расположены положительные заряды двойного слоя. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(x,n) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(y,n)\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(z,n).$$

Так как $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$, то

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Поэтому

$$V = -\frac{\partial}{\partial x}\iint_{\sigma}\frac{\nu\cos(x,n)}{r}d\sigma - \frac{\partial}{\partial y}\iint_{\sigma}\frac{\nu\cos(y,n)}{r}d\sigma - \frac{\partial}{\partial z}\iint_{\sigma}\frac{\nu\cos(z,n)}{r}d\sigma.$$

Интегралы правой части возможно рассматривать как потенциалы простых слоев с плотностями $-\nu\cos(x,n)$, $-\nu\cos(y,n)$, $-\nu\cos(z,n)$. Это означает, что потенциал двойного слоя представляет собой сумму первых производных трех потенциалов простых слоев. Следовательно, потенциал двойного слоя обладает теми же свойствами, что и первые производные потенциала простого слоя:

- Во внешнем пространстве конечен и непрерывен со всеми своими производными;
- Во внешнем пространстве гармоничен;
- Регулярен на бесконечности;
- При пересечении слоя потенциал двойного слоя претерпевает скачок непрерывности, т.е. прямое значение потенциала двойного слоя на двойном слое не совпадает с его предельными значениями.

Последнее свойство запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_e &= V_0 + 2\pi\nu \\ V_i &= V_0 - 2\pi\nu \end{aligned} \qquad (42)$$

Прямое значение потенциала двойного слоя равно полусумме его предельных (внутреннего и внешнего) значений:

$$V_0 = \frac{1}{2}(V_e + V_i).$$

§8. Свойства симметрии гравитационного потенциала.

Свойства симметрии гравитационных потенциалов небесных тел отражают особенности их внутренней структуры и потому играют важную роль в процессе изучения этих тел. Понятно, что любая симметрия плотностной функции $\delta(M)$, описывающей распределение масс в недрах исследуемого тела, влечет за собой соответствующую симметрию гравитационного потенциала этого тела. Справедливо и обратное утверждение: если потенциальная функция (9) обладает одним из свойств симметрии, тем же самым свойством обладает и функция распределения плотности $\delta(M), M \in \tau$ вещества в теле τ.

Рассмотрим различные варианты симметрии внешнего гравитационного потенциала объемных масс, предварительно введя сферическую систему координат ρ, θ, λ, центр которой совместим с центром масс исследуемого тела.

- *Центральная (сферическая) симметрия*, условием которой является постоянство потенциала на поверхности произвольной объемлющей сферы фиксированного радиуса: при $\rho = R = \text{const}, \quad V(R, \theta, \lambda) = \text{const}$. Иными словами, в случае центральной симметрии величина потенциала зависит только от радиуса вектора ρ, но не зависит от угловых переменных θ, λ, т.е. $V(\rho, \theta, \lambda) = V(\rho)$. Напомним, что центральной симметрией обладают гравитационные потенциалы точечной массы и однородной сферы, а также сферы с изотропным (не зависящим от угловых переменных) радиальным распределением плотности вещества $\delta(M)=\delta(\rho), \quad M\in\tau$.

- *Осевая симметрия.* В этом случае потенциальная функция симметрична относительно полярной оси, от которой отсчитывается полярное расстояние θ . Условие осевой симметрии отражает постоянство потенциала на фиксированной параллели, т.е. независимость потенциала от долготы λ и формулируется равенством $V(R,\theta,\lambda)=V(R,\theta)$, которое означает, что для любых λ

$$\rho = R = \text{const}, \quad \theta = \theta_0 = \text{const}, \quad V(R,\theta_0) = \text{const}$$

- *Экваториальная симметрия.* Условие симметрии потенциальной функции относительно плоскости экватора записывается в виде $V(R,\theta,\lambda)=V(R,\pi-\theta,\lambda)$.
- *Симметрия относительно нулевого меридиана*. Условие симметрии гравитационного потенциала относительно плоскости нулевого меридиана имеет вид $V(R,\theta,\lambda)=V(R,\theta,-\lambda)$.

§ 9. Постановка обратной задачи теории потенциала

Обратная задача теории потенциала (применительно к потенциалу силы притяжения ее часто называют обратной гравиметрической задачей) предполагает потенциал силы притяжения $V(P)$ заданным в некоторой области пространства. Требуется определить функцию $\delta(M), \; M\in\tau$

распределения плотности гравитирующих масс, при этом форма притягивающего тела τ также обычно считают априорно известной.

Итак, предположим, что материальное тело τ, ограниченное гладкой поверхностью σ, имеет кусочно-непрерывное распределение плотности $\delta(M),\ M\in\tau$. Тогда гравитационный потенциал $V(P)$ представляется в стандартной интегральной форме (9):

$$V(P)=\iiint_{\tau}\frac{\delta(M)}{r}d\tau(M). \tag{9}$$

Существенно то, что функция $V(P)$ является линейной относительно функции $\delta(M)$, что позволяет символически записать (9) в виде:

$$V(P)=\Re\cdot\delta(M), \tag{43}$$

где символ $\Re$ означает линейный оператор, определяемый равенством (9). В этих обозначениях обратная задача теории потенциала может быть сформулирована путем обращения (43):

$$\delta(M)=\Re^{-1}\cdot V(P). \tag{44}$$

Поскольку для гравитационного потенциала во всех точках пространства справедливо уравнение Пуассона (45),

$$\Delta V(P)=-4\pi G\cdot\delta(P), \tag{45}$$

то

$\Re^{-1}=-\dfrac{1}{4\pi G}\Delta,$ где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в прямоугольной системе координат. Кстати, заметим, что, если потенциал задан во всех точках пространства (вне и внутри тела τ), оператор $\Re^{-1}$, а, следовательно, и решение (44) будет единственным. В действительности решение (44) не является единственным, так как потенциал $V(P)$ может быть получен только во внешней по отношению к поверхности σ области. Хорошо известно, что существует множество вариантов распределения плотности $\delta(M)$, совместимых с заданным во внешней области потенциалом $V(P)$, что, собственно, и составляет сложность решения обратных задач. В наших обозначениях сказанное означает необходимость выбора единственного оператора $\Re^{-1}$ из множества возможных вариантов, удовлетворяющих (44). Понятно, что этот выбор должен основываться на привлечении дополнительной априорной информации, позволяющей сузить класс возможных решений. Другим обстоятельством, осложняющим решение обратной задачи, является ее некорректность, что требует использования специальных регуляризирующих алгоритмов при выполнении решающих ее процедур.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. – М., Наука, 1988, 272 с.
2. Идельсон Н.И. Теория ньютоновского потенциала. – Л.-М., Гостехиздат, 1932, 348 с.
3. Серкеров С.А. Теория гравитационного и магнитного потенциалов: Учебник для вузов. – М., Недра, 1990, 304 с.
4. Холшевников К.В., Питьев Н.П., Титов В.Б. Притяжение небесных тел: учебное пособие. – СПб, 2005. – 108 с.