Известия вузов. Математика
2015, № 11, с. 44–53

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.В. МАРТЕМЬЯНОВА

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Аннотация. Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с переменным потенциалом в прямоугольной области изучается задача Дирихле. Установлен критерий единственности. Единственность решения доказана на основе полноты системы собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При определенных условиях на отношение сторон прямоугольника из части гиперболичности уравнения, граничные функции и потенциал доказано существование решения в виде суммы ряда по системе собственных функций.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Дирихле, спектральный метод, единственность, малые знаменатели, существование.

УДК: 517.95

Введение. Рассмотрим уравнение смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе

$$Lu = u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - q(x)u = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < \pi,\ -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные постоянные, $q(x)$ — заданная на $[0, \pi]$ достаточно гладкая функция, причем $q(x) \geq 0$, и следующую задачу.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{2}$$

$$Lu = 0, \quad (x, y) \in D_- \cup D_+; \tag{3}$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \tag{4}$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{5}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции,

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0, \tag{6}$$

$D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$.

Задача Дирихле для уравнений смешанного типа изучалась в [1]–[9]. В работах Ф.И. Франкля [1], [2] впервые показано, что ряд задач трансзвуковой динамики сводятся к задаче Дирихле для уравнения смешанного типа. Так, например, если рассматривать задачу перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах, когда сверхзвуковые волны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения, то она сводится к задаче Дирихле для уравнения Чаплыгина.

Поступила 07.04.2014

На некорректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в смешанной области, гиперболическая часть γ границы которой лежит в характеристическом треугольнике $0 \leq x+y < x-y \leq 1$, впервые обратил внимание А.В. Бицадзе [3]. Причем некорректность задачи Дирихле не зависит от малости меры области, заключенной между γ и $y=0$. Результат А.В. Бицадзе с необходимостью поставил вопрос поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной.

А.М. Нахушев [4] установил критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа первого рода в цилиндрической области.

В.И. Жегалов [5] доказал однозначную разрешимость нелокальной задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в области D, где D_- — квадрат $0 < -y, x < 1$, а D_+ — односвязная область при $y \geq 0$, ограниченная простой дугой σ с концами в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и интервалом $I=(0,1)$ оси x.

В работах А.П. Солдатова [6], [7] доказаны теоремы существования и единственности решения задач типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в смешанной области, ограниченной при $y>0$ и $y<0$ соответственно гладкими дугами Γ и γ с общими концами в точках $(0,0)$ и $(0,1)$, при этом дуга γ при $y<0$ лежит внутри характеристического треугольника.

К.Б. Сабитовым [8] исследована задача Дирихле для вырождающегося уравнения смешанного типа первого рода

$$(\operatorname{sgn} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - b^2 (\operatorname{sgn} y)|y|^m u = 0, \quad m>0, \quad b \geq 0, \tag{7}$$

в прямоугольной области $D=\{(x,y)|0<x<1, -\alpha<y<\beta\}$, α, β — заданные действительные числа. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы ряда Фурье.

Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе в прямоугольной области рассматривалась в [9].

В данной работе, в отличие от рассмотренных выше работ, исследуется задача Дирихле для уравнения с оператором Лаврентьева–Бицадзе и переменным произвольным потенциалом в прямоугольной области. Ранее первая граничная задача (аналог задачи Дирихле) для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа при $q(x) = \mathrm{const} = b^2 \geq 0$ впервые изучена в [10], а в случае произвольной достаточно гладкой функции $q(x)$ — в [11]. Здесь единственность решения задачи (2)–(5) доказана на основе полноты системы собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Ранее такой подход применялся в работах Х.Л. Смолицкого [12], В.А. Ильина [13], [14]. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций. При доказательстве существования решения, в случае когда отношение сторон α/π прямоугольника D_- является рациональным, получена оценка об отделенности от нуля малого знаменателя. Эта оценка при некоторых условиях на функции $q(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ позволяет доказать сходимость построенного ряда в классе (2).

1. Формальное построение решения задачи. В уравнении (1), разделяя переменные $u(x,y)=X(x)T(y)$, относительно $X(x)$ получим следующую спектральную задачу:

$$X''(x) + (\lambda - q(x))X(x) = 0, \quad 0<x<\pi, \tag{8}$$

$$X(0)=0, \quad X(\pi)=0. \tag{9}$$

Как известно ([15], § 2), при $q(x) \in C^1[0,\pi]$ задача (8), (9) имеет счетное множество собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{N}$, все они являются простыми, а соответствующая система собственных функций $\{X_n(x)\} = \{X(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ ортогональна и полна в пространстве

$L_2[0,\pi]$, и образует в нем ортонормированный базис. При этом справедливы следующие асимптотические формулы при больших n:

$$\mu_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{10}$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{11}$$

где

$$\omega = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)dx > 0, \quad \text{так как} \quad q(x) \not\equiv 0. \tag{12}$$

Также имеет место теорема В.А. Стеклова о разложении ([16], с. 173): если функция $f(x) \in C^1[0,\pi]$ и удовлетворяет граничным условиям (6), то справедливо разложение в ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n X_n(x), \quad f_n = \int_0^\pi f(x)X_n(x)dx,$$

причем данный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, и справедливо равенство замкнутости

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^2 = \int_0^\pi f^2(x)dx.$$

Решение задачи (2)–(6) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(y)X_n(x), \tag{13}$$

где

$$T_n(y) = \int_0^\pi u(x,y)X_n(x)dx. \tag{14}$$

Дифференцируя равенство (14) два раза по y, а затем учитывая уравнение (1) и интегрируя по частям с учетом граничных условий (4), (9), получим

$$T_n''(y) - \lambda_n^2 T_n(y) = 0, \quad y > 0, \tag{15}$$

$$T_n''(y) + \lambda_n^2 T_n(y) = 0, \quad y < 0. \tag{16}$$

Общие решения полученных уравнений (15), (16) имеют вид

$$T_n(y) = \begin{cases} a_n e^{\mu_n y} + b_n e^{-\mu_n y}, & y > 0; \\ c_n \cos \mu_n y + d_n \sin \mu_n y, & y < 0, \end{cases} \tag{17}$$

где a_n, b_n, c_n, d_n — произвольные постоянные, $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку решение $u(x,y)$ удовлетворяет условию (2), то для функции (17) выполнены условия сопряжения

$$T_n(0-0) = T_n(0+0), \quad T_n'(0-0) = T_n'(0+0). \tag{18}$$

Функция (17) удовлетворяет условиям (18) только тогда, когда

$$c_n = a_n + b_n, \quad d_n = a_n - b_n.$$

Подставив найденные значения c_n, d_n в (17), найдем

$$T_n(y) = \begin{cases} a_n e^{\mu_n y} + b_n e^{-\mu_n y}, & y > 0; \\ (a_n + b_n)\cos \mu_n y + (a_n - b_n)\sin \mu_n y, & y < 0. \end{cases} \tag{19}$$

Из равенства (14) с учетом граничных условий (5), будем иметь

$$T_n(-\alpha) = \psi_n, \quad T_n(\beta) = \varphi_n, \tag{20}$$

где

$$\varphi_n = \int_0^\pi \varphi(x) X_n(x) dx, \quad \psi_n = \int_0^\pi \psi(x) X_n(x) dx. \tag{21}$$

Удовлетворяя функцию (19) граничным условиям (20), относительно a_n, b_n получим систему

$$\begin{gathered} a_n e^{\mu_n \beta} + b_n e^{-\mu_n \beta} = \varphi_n, \\ a_n(\cos\mu_n\alpha - \sin\mu_n\alpha) + b_n(\sin\mu_n\alpha + \cos\mu_n\alpha) = \psi_n. \end{gathered} \tag{22}$$

Решая систему (22) методом определителей, имеем

$$a_n = \frac{\psi_n e^{\mu_n\beta} - \varphi_n(\cos\mu_n\alpha - \sin\mu_n\alpha)}{2\Delta_{\alpha\beta}(n)}, \tag{23}$$

$$b_n = \frac{\varphi_n(\cos\mu_n\alpha + \sin\mu_n\alpha) - \psi_n e^{-\mu_n\beta}}{2\Delta_{\alpha\beta}(n)} \tag{24}$$

при условии, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{\alpha\beta}(n) = 2\cos\mu_n\alpha \operatorname{sh}\mu_n\beta + 2\sin\mu_n\alpha \operatorname{ch}\mu_n\beta \neq 0. \tag{25}$$

Подставляя найденные значения постоянных (23), (24) в формулу (19), найдем формальное решение задачи (2)–(6) в виде суммы ряда (13).

2. Критерий единственности решения обратной задачи. Пусть существуют два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ задачи (2)–(6). Тогда разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению (1), условию (4) и однородным граничным условиям

$$u(x,\beta) = 0, \quad u(x,-\alpha) = 0. \tag{26}$$

Пусть при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия (25). Поскольку в силу (26) $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$, то $\varphi_n = \psi_n = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В силу этого и условий (25), из равенств (23), (24) получаем $a_n = b_n = 0$. Тогда из (19) следует, что $T_n(y) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, $-\alpha \le y \le \beta$. Отсюда на основании (14) при всех $y \in [-\alpha, \beta]$ имеем

$$\int_0^\pi u(x,y) X_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots .$$

В силу полноты системы функций $X_n(x)$ в пространстве $L_2[0,1]$ из последних равенств следует, что $u(x,y) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. В силу (2) функция $u(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$, поэтому $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β и $n = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (25), т. е. $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$. Тогда задача (2)–(6), где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$, имеет ненулевое решение

$$u_p(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sh}\mu_p(y-\beta) X_p(x), & y > 0; \\ (\operatorname{ch}\mu_p\beta \sin\mu_p y - \operatorname{sh}\mu_p\beta \cos\mu_p y) X_p(x), & y < 0. \end{cases} \tag{27}$$

Выясним при каких α нарушается условие (25), т. е. $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$. Для этого запишем

$$\Delta_{\alpha\beta b}(p) = \sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_p\beta} \sin(\mu_p\alpha + \varphi_p), \tag{28}$$

где $\varphi_p = \arcsin(\operatorname{sh}\mu_p\beta/\sqrt{\operatorname{ch}2\mu_p\beta}) \to \pi/4$ при $p \to +\infty$. Из (28) видно, что выражение $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$ только в том случае, если

$$\alpha = \frac{\pi k}{\mu_p} - \frac{\varphi_p}{\mu_p}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, установлена

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)–(6), *то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия* (25).

3. Обоснование существования решения обратной задачи. Решение задачи (2)–(6) при выполнении условий (25) для всех $n \in \mathbb{N}$ получено формально в виде суммы ряда (13). Поскольку α и β — любые числа из промежутков задания, то при достаточно больших n выражение $\Delta_{\alpha\beta}(n)$, которое входит в знаменатели коэффициентов этих рядов, может стать достаточно малым, т. е. возникает проблема "малых знаменателей" [10], [17]. Для обоснования существования решения помимо условий (25) необходимо показать существование чисел α, β таких, что при достаточно больших n выражение $\Delta_{\alpha\beta}(n)$ отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Лемма 1. *Если $\widetilde{\alpha} = \alpha/\pi$ является рациональным числом, то существуют положительные постоянные C_0, $n_0 \in \mathbb{N}$, вообще зависящие от α, β, такие, что при всех $n > n_0$ и любом фиксированном $\beta > 0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| \geq \frac{C_0}{n} e^{\mu_n\beta} > 0. \tag{29}$$

Доказательство. Из (10) и (28) при больших n выполнено

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| = \sqrt{\operatorname{ch}2\mu_n\beta}\left|\sin\left(\pi\widetilde{\alpha}n + \frac{\omega\widetilde{\alpha}}{n} + \varphi_n\right)\right| > \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mu_n\beta}\left|\sin\left(\pi\widetilde{\alpha}n + \frac{\omega\widetilde{\alpha}}{n} + \varphi_n\right)\right|.$$

Если $\widetilde{\alpha} = p \in \mathbb{N}$, то

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mu_n\beta}\left|\sin\left(\frac{\omega p}{n} + \varphi_n\right)\right|.$$

При больших n с учетом неравенства $\sin x > 2x/\pi$, $0 < x < \pi/2$, получим

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| > \frac{\sqrt{2}}{\pi}e^{\mu_n\beta}\left(\frac{\omega p}{n} + \varphi_n\right) > \frac{\sqrt{2}}{\pi}e^{\mu_n\beta}\varphi_0.$$

Если $\widetilde{\alpha} = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $p/q \notin \mathbb{N}$, то

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mu_n\beta}\left|\sin\left(\pi\frac{pn}{q} + \frac{\omega p}{qn} + \frac{\pi}{4} - \varepsilon_n\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mu_n\beta}\left|\sin\left(\pi\frac{4pn+q}{4q} + \frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n\right)\right|,$$

где $\varepsilon_n = \frac{\pi}{4} - \varphi_n$. Разделим $4pn + q$ на $4q$ с остатком: $4pn + q = 4qs + r$, $0 \leq r < 4q$.

Если $r > 0$, то

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mu_n\beta}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{4q} + \frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n\right)\right|.$$

При $n > \max\left\{\frac{\pi q}{8\beta^2\omega p}, \frac{8\omega p}{\pi}\right\}$ выполнено

$$0 < \frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n < \frac{\pi}{8q}. \tag{30}$$

Тогда, так как $0 < \frac{\pi r}{4q} \leq \frac{\pi(4q-1)}{4q}$, то $0 < \frac{\pi r}{4q} + \frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n < \pi - \frac{\pi}{8q}$.

Рассмотрим два случая:

$$1)\quad \frac{\pi}{2} < \frac{\pi r}{4q} + \frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n < \pi - \frac{\pi}{8q}, \quad 2)\quad 0 < \frac{\pi r}{4q} + \frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}.$$

В случае 1) имеем $\left|\sin\left(\frac{\pi}{4q} + \frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n\right)\right| > \sin\frac{\pi}{8q} > 0$. Следовательно,

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| > \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{8q}e^{\mu_n\beta}. \tag{31}$$

В случае 2) с учетом неравенства $\sin x > 2x/\pi$, $0 < x < \pi/2$, при указанных выше n получим

$$\left|\sin(\frac{\pi r}{4q} + \frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n)\right| > \frac{2}{\pi}\left|\frac{\pi r}{4q} + \frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n\right| > \frac{r}{2q} > 0.$$

Тогда

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| > \frac{\sqrt{2}r}{4q}e^{\mu_n\beta}. \tag{32}$$

Если $r = 0$, то

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mu_n\beta}\left|\sin\left(\frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n\right)\right|.$$

С учетом оценки (30) и неравенства $\sin x > 2x/\pi$, $0 < x < \pi/2$, имеем

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| > \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mu_n\beta}\left|\frac{\omega p}{qn} - \varepsilon_n\right|.$$

Тогда при $n > \frac{2\pi q}{8\beta^2\omega p}$ найдем

$$|\Delta_{\alpha\beta}(n)| > \frac{\sqrt{2}\omega p}{\pi q}\frac{e^{\mu_n\beta}}{n}. \tag{33}$$

Из (31)–(33) при достаточно больших n следует справедливость оценки (29). □

Теперь при определенных условиях на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ при условии (25) и (29) покажем, что функция $u(x,y)$, определенная рядом (13), удовлетворяет условиям (2)–(4). Формально из (13) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_x(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(y)X_n'(x), \tag{34}$$

$$u_y(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(y)X_n(x), \tag{35}$$

$$u_{xx}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(y)X_n''(x), \tag{36}$$

$$u_{yy}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(y)X_n(x). \tag{37}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (29) *при* $n > n_0$. *Тогда для таких* n *и любых* $y \in [-\alpha,\beta]$ *справедливы оценки*

$$|T_n(y)| \le M_1 n\left(|\varphi_n| + |\psi_n|\right), \quad |T_n'(y)| \le M_2 n^2(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad |T_n''(y)| \le M_3 n^3(|\varphi_n| + |\psi_n|),$$

здесь и далее M_i — *положительные постоянные.*

Доказательство следует из представления (19), полученных значений (23), (24) и оценки леммы 1.

Тогда на основании леммы 2 и формулы (11) ряды (13) и (34), (35) при $(x,y)\in\overline{D}$ мажорируются рядом

$$M_4\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^2(|\varphi_n|+|\psi_n|). \tag{38}$$

В силу теоремы Стеклова ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n X_n(x) \tag{39}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$ при условии, если $\varphi(x)\in C^3[0,\pi]$, $\varphi(0)=\varphi''(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(\pi)=0$, $q(x)\in C^1[0,\pi]$.

Действительно, при помощи (21), (8), (9), (6) имеем

$$\lambda_n\varphi_n=\int_0^\pi\varphi(x)\lambda_n X_n(x)dx=\int_0^\pi\varphi(x)[q(x)X_n(x)-X_n''(x)]dx=$$
$$=\int_0^\pi X_n(x)[q(x)\varphi(x)-\varphi''(x)]dx=\int_0^\pi\chi(x)X_n(x)dx=\chi_n, \tag{40}$$

где $\chi(x)=q(x)\varphi(x)-\varphi''(x)$. Поскольку функция $\chi(x)\in C^1[0,\pi]$ и $\chi(0)=\chi(\pi)=0$, то в силу теоремы Стеклова ряд (39) сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$.

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\chi_n^2$ ([16], с. 184) получим

$$|\chi_n|=\frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{\lambda_n}},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_n^2<+\infty. \tag{41}$$

Тогда из (40) и (41) следует оценка

$$n^2|\varphi_n|\le\lambda_n|\varphi_n|=|\chi_n|=\frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{\lambda_n}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_n}+\varepsilon_n^2\right),$$

из которой вытекает сходимость ряда $M_4\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}n^2|\varphi_n|$. Аналогично доказывается сходимость ряда $M_4\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}n^2|\psi_n|$. Откуда вытекает сходимость ряда (38).

Ряды (36), (37) мажорируются рядом

$$M_5\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^3(|\varphi_n|+|\psi_n|). \tag{42}$$

Рассмотрим соотношение

$$\lambda_n\varphi_n^{(2)}=\int_0^\pi\varphi''(x)\lambda_n X_n(x)dx=\int_0^\pi\varphi''(x)[q(x)X_n(x)-X_n''(x)]dx=$$
$$=\int_0^\pi\varphi''(x)q(x)X_n(x)dx-\int_0^\pi\varphi''(x)X_n''(x)dx. \tag{43}$$

Интегрируя в последнем интеграле два раза по частям с учетом условий (9) и $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$, получим

$$\int_0^\pi \varphi''(x)X_n''(x)dx = \int_0^\pi \varphi^{IV}(x)X_n(x)dx. \tag{44}$$

Тогда из (43) и (44) будем иметь

$$\lambda_n\varphi_n^{(2)} = \int_0^\pi [q(x)\varphi''(x) - \varphi^{IV}(x)]X_n(x)dx = \int_0^\pi g(x)X_n(x)dx.$$

Если функция $g(x) = q(x)\varphi''(x) - \varphi^{IV}(x) \in C^1[0,\pi]$ и $g(0) = g(\pi) = 0$, т. е. $\varphi(x) \in C^5[0,\pi]$, $\varphi^{IV}(0) = \varphi^{IV}(\pi) = 0$, то по теореме Стеклова ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\varphi_n^{(2)}X_n(x) \tag{45}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$. Из равенства (40) следует

$$\lambda_n\varphi_n = f_n - \varphi_n^{(2)}, \tag{46}$$

где $f_n = \int\limits_0^\pi q(x)\varphi(x)X_n(x)dx$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_nX_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$ к функции $f(x) = q(x)\varphi(x)$, так как $f(x) \in C^1[0,\pi]$ и $f(0) = f(\pi) = 0$.

Подставляя (46) в (45) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_nf_n - \lambda_n^2\varphi_n)X_n(x).$$

Если $f(x) \in C^3[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$, т. е. когда $q(x) \in C^3[0,\pi]$, $q'(0) = q'(\pi) = 0$, то аналогично обоснованию сходимости ряда (39) получим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_nf_nX_n(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$. Следовательно, равномерно и абсолютно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2\varphi_nX_n(x),$$

а значит, и ряд $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} n^3|\varphi_n|$. Аналогично доказывается сходимость $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} n^3|\psi_n|$. Таким образом, доказана сходимость ряда (42).

Если для указанных в лемме 1 чисел $\widetilde{\alpha}$ при некоторых $n = l = n_1, n_2, \ldots, n_p \le n_0$, где $0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_p$, n_i, $i = \overline{1,p}$ и p — заданные натуральные числа, выражение $\Delta_{\alpha\beta}(l) = 0$, то для разрешимости задачи (2)–(6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\psi_ne^{\mu_n\beta} - \varphi_n(\cos\mu_n\alpha - \sin\mu_n\alpha) = 0, \quad n = l = n_1, n_2, \ldots, n_p. \tag{47}$$

Тогда решение задачи (2)–(6) определяется в виде

$$u(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{n_1-1} + \cdots + \sum_{n=n_{p-1}+1}^{n_p-1} + \sum_{n=n_p+1}^{+\infty}\right)[T_n(y)X_n(x)] + \sum_l C_lu_l(x,y), \tag{48}$$

где $u_l(x,y)$ из (27), C_l — произвольные постоянные, в сумме $\sum\limits_l$ индекс l принимает значения $n_1, n_2, \dots, n_p$. В случае, когда $n_{i+1}-1 < n_i+1$, $i=\overline{1,p}$, соответствующую сумму $\sum\limits_{n_i+1}^{n_{i+1}-1}$ будем считать равной нулю.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть* $q(x) \in C^3[0,\pi]$, $q'(0) = q'(\pi) = 0$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^5[0,\pi]$, $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(\pi) = 0$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(\pi) = 0$, $i = 0,2,4$, *выполнена оценка* (25) *при* $n > n_0$. *Тогда если* $\Delta_{\alpha\beta}(n) \neq 0$ *при всех* $n \le n_0$, *то существует единственное решение задачи* (2)–(6), *которое определяется рядом* (13); *если* $\Delta_{\alpha\beta}(n) = 0$ *при некоторых* $n = l = n_1, n_2, \dots n_p \le n_0$, *то задача* (2)–(6) *разрешима тогда, когда выполнены условия* (47) *и решение в этом случае определяется рядом* (48).

Литература

[1] Франкль Ф.И. *О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **9** (2), 121–142 (1945).

[2] Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике* (Наука, М., 1973).

[3] Бицадзе А.В. *Некорректность задачи Дирихле для уравнения смешанного типа*, ДАН СССР **122** (2), 561–564 (1953).

[4] Нахушев А.М. *Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области*, Дифференц. уравнения **6** (1), 190–191 (1970).

[5] Жегалов В.И. *Нелокальная задача Дирихле для уравнения смешанного типа*, Неклассические уравнения матем. физики. Новосибирск, ИМ СО АН СССР, с. 168–172 (1985).

[6] Солдатов А.П. *Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.* I. *Теоремы единственности*, Докл. РАН **332** (6), 696–698 (1993).

[7] Солдатов А.П. *Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.* II. *Теорема существования*, Докл. РАН **333** (1), 16–18 (1993).

[8] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области*, Докл. РАН **413** (1), 23–26 (2007).

[9] Сабитов К.Б., Мелишева, Е.П. *Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области*, Изв. вузов. Матем., №7, 62–76 (2013).

[10] Сабитов К.Б. *Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области*, Матем. заметки **86** (2), 273–279 (2009).

[11] Сабитов К.Б. *Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с известным потенциалом*, Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Тр. междун. научн. конф.: в 2 т. (26–30 июня 2013 г., г. Стерлитамак), Уфа: РИЦ БашГУ, т. 1, с. 244–254 (2013).

[12] Смолицкий Х.Л. *Предельная задача для волнового уравнения*, Дисс. … докт. физ.-матем. наук (Ленингр. Краснознам. воен.-воздуш. инж. акад., Л., 1950).

[13] Ильин В.А. *Единственность и принадлежность* W_2^1 *классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения*, Матем. заметки **17** (1), 91–101 (1975).

[14] Ильин В.А. *Теорема о единственности и принадлежности классу* W_2^1 *классического решения смешанной задачи для несамосопряженного гиперболического уравнения в произвольном цилиндре*, Дифференц. уравнения **11** (1), 60–65 (1975).

[15] Левитан Б.М., Саргсян Н.С. *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака* (Наука, М., 1988).

[16] Стеклов В.А. *Основные задачи математической физики* (Наука, М., 1983).

[17] Арнольд В.И. *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*, УМН **18** (6), 91–192 (1963).

Н.В. Мартемьянова

старший преподаватель, кафедра математики и методики обучения,

Поволжская государственная социально-гуманитарная академия,

ул. Антонова-Овсеенко, д. 26, г. Самара, 443090, Россия,

`e-mail:` ninamartem@yandex.ru

N.V. Martem'yanova

The Dirichlet problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type with variable potential

Abstract. We study the Dirichlet problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type with variable potential in the rectangular area. We establish a criterion of the uniqueness of a solution to this problem. The uniqueness of a solution is proved on the basis of the completeness of systems of functions corresponding to one-dimensional spectral problem. Solution was constructed as a sum of series on the systems of eigenfunctions. The existence is proved under certain conditions upon the ratio of the rectangle sides of hyperbolic part of the equation, upon the boundary functions and function of potential.

Keywords: mixed type equation, Dirichlet problem, spectral method, uniqueness, small denominators, existence.

N.V. Martem'yanova

Senior Lecturer, Chair of Mathematics and Teaching Principles,
Volga Region Social-Humanitarian Academy,
26 Antonov-Ovseenko str., Samara, 443090 Russia,

`e-mail:` ninamartem@yandex.ru