УДК 519.6

Абрамова В.В., кандидат физико-математических наук, доцент, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

ПРОЕКЦИОННЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация: Данная работа посвящена проекционным методам решения регулярных интегральных уравнений, часто встречаемых как в теории, так и в различных приложениях. Основой исследований являются: теория положительных операторов, общая теория приближённых методов анализа и конструктивная теория функций.

Ключевые слова: интегральное уравнение, положительно определённый оператор, обратный оператор, проекционный метод, итерационный метод, проекционно-итеративный метод, сходимость, скорость сходимости, оценка погрешности.

1. Введение.

Значительное число прикладных задач приводит к необходимости решения различных классов интегральных уравнений. Теория таких уравнений в настоящее время достаточно хорошо разработана и изложена в известных учебниках, монографиях и научных статьях. Из неё следует, что указанные уравнения точно решаются лишь в редких частных случаях, и даже в этих случаях для доведения результата до числа приходится использовать теорию приближения функций и операторов. Поэтому для приложений первостепенное значение приобретает разработка аппроксимативных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием.

Для теоретического обоснования использовалась методика исследований, разработанная в гл.4 монографии Б. Г. Габдулхаева [1].

В работе исследуются методы решения интегральных уравнений вида

$$Kx \equiv c(t)x(t) + \int_a^b \rho(\tau)h(t,\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad t \in [a,b] \qquad (1)$$

здесь $\rho(\tau)$ — весовая функция, $x(t)$ — искомая функция, а известные функции удовлетворяют (если не указано другое) условиям:

$$c(t) \in C[a,b], \quad c(t) \ldots \gamma^2 = const > 0; \tag{2}$$

$$\int_a^b \rho(t)\,|\,y(t)\,|^2\, dt < \infty, \quad \int_a^b\!\!\int_a^b \rho(t)\rho(\tau)\,|\,h(t,\tau)\,|^2\, dt d\tau < \infty. \tag{3}$$

Функцию $x(t)$ будем искать в весовом лебеговом пространстве функций $L_2(\rho) = L_2(\rho;\ [a,\ b])$ со скалярным произведением и с нормой соответственно

$$(f,g) = \int_a^b \rho(t) f(t) g(t) dt, \quad f, g \in L_2(\rho);$$

$$\| f \| = \Big\{ \int_a^b \rho(t)\,|\,f(t)\,|^2) dt \Big\}^{1/2}, \quad f \in L_2(\rho).$$

2. Теоремы существования и единственности решения.

Для уравнения (1)–(3) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

1) ядро $h(t, \tau)$ кососимметрично в $[a, b]^2$: $h(t, \tau) = -h(\tau, t)$;

2) ядро $h(t, \tau)$ симметрично и неотрицательно в $[a, b]^2$;

3) ядро $h(t, \tau)$ симметрично и разлагается в ряд, сходящийся по крайней мере в $L_2(q;\ [a, b]^2)$, $q = q\ (t, \tau) = \rho(t)\rho(\tau)$,

$$h(t,\tau) = h(\tau,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(t)\theta_k(\tau), \tag{4}$$

где $\theta_k(\xi)$ — линейно независимые функции из $L_2(\rho)$.

Тогда оператор K имеет в $L_2(\rho)$ непрерывный обратный и

$$\| K^{-1} \| ,, \ \gamma^{-2} < \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Из (1)–(3) для любой функции $x(t) \in L_2(\rho)$ находим

$$(Kx, x) = (cx, x) + (Hx, x) \ldots \gamma^2 \| x \|^2 + \theta, \tag{6}$$

где $\theta \equiv (Hx, x)$, $Hx = \int_a^b \rho(\tau) h(t,\tau) x(\tau) d\tau.$

Тогда при условии 1) теоремы, последовательно получаем (см., напр., гл.4 [1, стр.139])

$$\theta = (Hx, x) = \int_a^b \rho(t) x(t) dt \int_a^b \rho(\tau) h(t,\tau) x(\tau) d\tau =$$

$$= \int_a^b \rho(\tau)x(\tau)d\tau \int_a^b \rho(t)h(\tau,t)x(t)dt = -\int_a^b \rho(\tau)x(\tau)d\tau \int_a^b \rho(t)h(t,\tau)x(t)dt =$$

$$= -\int_a^b \rho(t)x(t)dt \int_a^b \rho(\tau)h(t,\tau)x(\tau)d\tau = -(Hx,x) = -\theta = 0. \quad (7_1)$$

При условии 2) теоремы, как известно, имеем

$$\theta = (Hx,x) \geq 0, \quad x \in L_2(\rho). \quad (7_2)$$

При условии 3) теоремы с помощью (4) находим

$$\theta = (Hx,x) = (x,Hx) = \int_a^b \rho(t)x(t)dt \int_a^b \rho(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k(t)\theta_k(\tau)x(\tau)d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_a^b \rho(\xi)\theta_k(\xi)x(\xi)d\xi\right\}^2 \geq 0, \quad x \in L_2(\rho). \quad (7_3)$$

Из соотношений (6), (7_1)–(7_3) следует неравенство

$$(Kx,x) \geq \gamma^2 \| x \|^2, \quad x \in L_2(\rho).$$

Отсюда, используя неравенство Коши–Буняковского в $L_2(\rho)$, находим оценку

$$\| Kx \| \geq \gamma^2 \| x \|, \quad x \in L_2(\rho). \quad (8)$$

Неравенство (8), как известно (см., напр., [2, стр.157–158]), обеспечивает существование и ограниченность левого обратного оператора K_l^{-1}:

$$\| K_l^{-1} \| \leq \gamma^{-2} < \infty. \quad (9)$$

Из существования K_l^{-1} следует, что однородное уравнение $Kx = 0$, а в силу условий (2)–(3) и уравнение вида

$$Ax \equiv x(t) + \int_a^b \frac{\rho(\tau)}{c(t)} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = 0,$$

имеют в $L_2(\rho)$ лишь тривиальное решение. Тогда неоднородное уравнение $A(x;\ t) = y\ (t)/c(t)$, а следовательно, и уравнение (1) однозначно разрешимы в пространстве $L_2(\rho)$. Поэтому существует не только левый, но и двусторонний обратный оператор K^{-1}, а для него в силу (9) справедлива оценка (5).

Замечание 1. В силу второго условия из (3) оператор H является вполне непрерывным в $L_2(\rho)$. Этот факт был существенным образом использован при завершении доказательства теоремы 1. Однако утверждение теоремы сохраняется и в том случае, если оператор H не является вполне непрерывным, а является лишь непрерывным, т.е. ограниченным. Тогда доказательство теоремы можно завершить с помощью приёма, предложенного в книге [3, стр.104, 131].

Теорему 1 несколько дополняет следующая

Теорема 2. *Пусть функция*

$$g^{\pm}(t,\tau) \equiv h(t,\tau) \pm h(\tau,t) \in L_2(q;[a,b]^2) \qquad (10)$$

и удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $g^{+}(t, \tau)$ — положительное ядро;

2) $g^{+}(t, \tau)$ разлагается в сходящийся в $L_2(q; [a, b]^2)$ ряд вида

$$g^{+}(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t)\eta_k(\tau),$$

где $\eta_k(\xi)$ — линейно независимые функции из $L_2(\rho)$, а $q(t, \tau) = \rho(t)\rho(\tau)$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

Доказательство. Следуя [4, стр.202], представим ядро $h(t,\tau)$ в виде

$$h(t,\tau) = \frac{h(t,\tau) + h(\tau,t)}{2} + \frac{h(t,\tau) - h(\tau,t)}{2} \equiv \frac{g^{+}(t,\tau)}{2} + \frac{g^{-}(t,\tau)}{2}.$$

Учитывая, что $g^{+}(t, \tau)$ — положительное и симметричное ядро, а $g^{-}(t, \tau)$ — кососимметричное ядро, и используя сказанное при доказательстве теоремы 1, находим требуемое утверждение.

Замечание 2. Относительно функции $g^{\pm}(t, \tau)$ из (10) справедливо утверждение, аналогичное приведённому в замечании 1 для функции $h(t, \tau)$.

Положим

$$(H^{+}x)(t) = \int_a^b \rho(\tau)h^{+}(t,\tau)x(\tau)d\tau, \quad x \in L_2(\rho),$$

где

$$h^{+}(t,\tau) = \frac{h(t,\tau) + h(\tau,t)}{2}.$$

Тогда теоремы 1 и 2 несколько обобщает следующая

Теорема 3. *Пусть выполняются условия:*

1) $c(t) \geqslant c_0 = const$*;*

2) существует такое $\delta \in \boldsymbol{R}$*, что для любых* $x \in L_2(\rho)$*,* $(H^+x, x) \geqslant \delta(x, x)$;

3) $\gamma^2 \equiv c_0 + \delta > 0$*.*

Тогда оператор $K\colon L_2(\rho) \to L_2(\rho)$ *непрерывно обратим и* $\| K^{-1} \| \leqslant \gamma^{-2} < \infty$.

Следствие. Пусть выполнены условия 1), 3) и одно из следующих условий:

2') $h(t, \tau)$ — кососимметричное ядро;

2'') $h(t, \tau)$ — симметричное неотрицательное ядро;

2''') $h^+(t, \tau)$ — неотрицательное ядро.

Тогда справедливо утверждение теоремы при $\delta = 0$.

Доказательство следует из рассуждений, приведённых при доказательстве теорем 1 и 2.

3. Итерационные методы.

В условиях любой из теорем 1 (с учётом замечаний 1, 2 и следствия) интегральное уравнение (1–3) имеет единственное решение $x^*(t) \in L_2(\rho)$ при любой правой части $y(t) \in L_2(\rho)$, при этом справедливо неравенство

$$\| x^*(t) \| \leqslant \gamma^{-2} \| y(t) \|. \qquad (5_1)$$

Это решение можно искать с помощью одного из вариантов универсального итерационного метода:

$$x^i = x^{i-1} + \left(\frac{\gamma}{M}\right)^2 (y - Kx^{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (11)$$

где $x^0(t)$ — произвольное начальное приближение из $L_2(\rho)$, постоянная γ определена в (2), а постоянная M определяется ниже.

Для интегрального уравнения (1) с учётом замечаний 1 и 2 справедлива следующая

Теорема 4. *В условиях любой из теорем 1 единственное решение* $x^*(t) \in L_2(\rho)$ *уравнения (1) можно найти как предел в* $L_2(\rho)$ *итерационной последовательности (11) при любом начальном приближении* $x^0 \in L_2(\rho)$*.*

При этом погрешность i–го приближения может быть оценена неравенствами

$$\| x^* - x^i \| \le q^i \| x^* - x^0 \| \le \frac{q^i}{1-q} \| x^1 - x^0 \|, \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (12)$$

где

$$q = (1 - \gamma^4 M^{-2})^{1/2} < 1, \qquad (13)$$

а постоянная M определяется из неравенства

$$\| K \| \le \| c(t) \|_{C[a,b]} + \| H \|_{L_2(\rho)} \le M. \qquad (14)$$

Следствие. Если начальное приближение определяется по формуле $x^0 = (\gamma / M)^2 y$, то для погрешности *i*–го приближения справедлива оценка

$$\| x^* - x^i \| \le \frac{q^{i+1}}{1-q} \Big(\frac{\gamma}{M}\Big)^2 \| y \|, \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (15)$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 5 гл.4 книги [1, стр.141]. Уравнение (1) представляется в эквивалентном виде

$$x = Tx + \sigma y \quad (x, y \in L_2(\rho)), \qquad (16)$$

где $\sigma > 0$ — пока произвольный параметр, а $T = E - \sigma K$ — так называемый оператор перехода. Выбирая σ исходя из минимальности нормы T: $L_2(\rho) \to L_2(\rho)$, находим (см. также [3, стр.104, 131] $\sigma = (\gamma / \| K \|)^2 \ge (\gamma / M)^2$.

Тогда

$$\| T \| \le (1 - \gamma^4 M^{-2})^{1/2} \equiv q < 1. \qquad (13_1)$$

Поскольку универсальный итерационный метод (11) является методом простой итерации для уравнения (16), эквивалентного исходному уравнению (1), то утверждение теоремы следует из известных результатов по методу последовательных приближений (см., напр., [2, стр.213, 214]).

В частных случаях теорема 4 несколько усиливается. Например, пусть $\rho(\tau) \equiv 1$, а $h(t, \tau)$ — симметричное положительное ядро; тогда за итерационные параметры σ и q можно принять следующие значения

$$\sigma = \frac{2}{M + m}, \quad q = \frac{M - m}{M + m}, \qquad (17)$$

где M и m — границы спектра самосопряжённого положительно определённого оператора K в пространстве $L_2[a, b]$. Очевидно, что тогда соответствующим образом уточняются также оценки (12) и (15).

4. Общий проекционный метод.

Поскольку $L_2(\rho)$ — сепарабельное гильбертово пространство, то в нём, как известно (см., напр., [2, стр.90–91]), существует полная ортонормальная система функций $\{\varphi_r\}_1^\infty$. Обозначим через $L_{2,n} = L_{2,n}(\rho)$ линейную оболочку, натянутую на первые $n\in\mathbf{N}$ элементов этой системы; в том случае, когда каждый из элементов $\varphi_r = \varphi_{r,n}$ $(r = \overline{1,n})$ зависит от параметра $n\in\mathbf{N}$ (так будет, напр., для сплайновых базисов), предполагается, что последовательность подпространств $\{L_{2,n}\}_1^\infty$ предельно плотна в пространстве $L_2(\rho)$.

Приближённое решение уравнения (1) будем искать в виде элемента

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(t) \in L_{2,n}, \quad n \in \mathbf{N}, \qquad (18)$$

а неизвестные постоянные $\alpha_k = \alpha_{k,n}$ $(k = \overline{1,n})$ будем определять из следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_r(K\varphi_k) = c_r(y), \quad r = \overline{1,n}, \qquad (19)$$

порядка $n\in\mathbf{N}$, где $c_r(f) = (f, \varphi_r)$ — коэффициенты Фурье функции $f\in L_2(\rho)$ по системе координатных функций $\varphi_r \in L_2(\rho)$.

Для вычислительной схемы (1), (18), (19) справедлива следующая

Теорема 5. *В условиях любой из теорем 1-3 СЛАУ (19) однозначно разрешима при любых $n \in \mathbf{N}$. Приближённые решения (18) сходятся в $L_2(\rho)$ к точному решению $x^*(t)$ уравнения (1-3) со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_n(x^*) \leq \| x^* - x_n \| \leq (1+\gamma^{-2}M)E_n(x^*) \leq 2\gamma^{-2}ME_n(x^*), \quad n \in \mathbf{N}, \qquad (20)$$

где $E_n(\varphi) = \inf_{z_n \in L_{2,n}} \| \varphi - z_n \|, \quad \varphi \in L_2(\rho)$ — наилучшее приближение в $L_2(\rho)$ функции $\varphi(t) \in L_2(\rho)$ всевозможными элементами из $L_{2,n}$.

Доказательство. Обозначим через P_n линейный оператор ортогонального проектирования пространства $L_2(\rho)$ на подпространство $L_{2,n}(\rho)$, $n\in\mathbf{N}$. Тогда СЛАУ (19) эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv P_n K x_n = P_n y \quad (x_n, P_n y \in L_{2,n}). \qquad (21)$$

Для любого $x_n \in L_{2,n}$ положим

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_n)\varphi_i,$$

$$Kx_n = \sum_{i=1}^{n} c_i(Kx_n)\varphi_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_i(K\varphi_k)\varphi_i.$$

Тогда в условиях любой из теорем 1-3 находим

$$(K_n x_n, x_n) = (P_n K x_n, x_n) = \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i(Kx_n)\varphi_i, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\Big) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i c_i(Kx_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_k\alpha_i c_i(K\varphi_k) = (Kx_n, x_n) \ge \gamma^2 (x_n, x_n) = \gamma^2 \| x_n \|^2 . \qquad (22)$$

Далее (по аналогии с теоремой 1) имеем двустороннюю обратимость операторов K_n и справедливость неравенств $\| K_n^{-1} \| \le \gamma^{-2}$, $n \in \mathbf{N}$, а также однозначную разрешимость СЛАУ (19) при любых $n\in\mathbf{N}$.

Оценка погрешности приближённого решения (20) выводится из теоремы 6 главы 1 [5, стр.17−18] с учётом неравенства (14) (см. также теорему 7 гл.4 [1, стр.143]):

$$E_n(x^*) \le \| x^* - x_n^* \|_X = \| (E - K_n^{-1}P_n K)(x^* - P_n x^*) \|_X \le (1 + \| K_n^{-1} \|_{X_n \to X_n} \times$$

$$\times \| P_n \|_{X \to X_n} \| K \|_{X \to X}) \| x^* - P_n x^* \|_X \le (1 + \gamma^{-2} M) E_n(x^*) \le 2\gamma^{-2} M E_n(x^*).$$

Следствие. Если $c(t) = const \equiv \gamma^2 > 0$, то погрешность приближённого решения может быть оценена также неравенствами

$$E_n(x^*) \le \| x^* - x_n \| \le (1 + \gamma^{-2} \| H \|) E_n(x^*), \quad n \in \mathbf{N}. \qquad (20_1)$$

В этом случае для оценки погрешности аппроксимации, помимо сказанного выше, достаточно воспользоваться следствием из теоремы 6 главы 1 [5, стр.17−18].

5. Методы ортогональных многочленов и сплайн–подобластей.

В этом разделе рассмотрим некоторые частные случаи общего проекционного метода, исследованного в пункте 4.

Известно (см. напр., [6, стр.335]), что для любой весовой функции $\rho(t)$ существует система ортогональных многочленов $\{Q_r(t)\}_0^\infty$, где $Q_r(t)$ — алгебраический многочлен степени r. Положим $\varphi_r(t) = Q_{r-1}(t), \quad r = 1,2,\ldots$ Тогда приближённое решение (18) принимает вид

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k Q_{k-1}(t), \quad \alpha_k = \alpha_{k,n} \in \mathbf{R},$$

т.е. является алгебраическим многочленом степени не выше $n-1 \in \mathbf{N}$, а СЛАУ (19) для определения его коэффициентов превращается в СЛАУ метода Галёркина по системе ортогональных многочленов. Сходимость и оценки погрешности аппроксимации такого метода следуют из теоремы 5 и её следствия.

Пусть

$$t_\tau = t_{\tau,n} = a + r\frac{b-a}{n}, \quad r = \overline{0,n}, \quad n \in \mathbf{N},$$

а $\varphi_k(t)$ — характеристические функции интервалов $(t_{k-1},\ t_k)$, где $k = \overline{1,n}$. Положим

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(t), \quad \alpha_k = \alpha_{k,n} \in \mathbf{R},$$

$$P_n(f;t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(t)}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\tau)d\tau, \quad f \in L_2[a,b].$$

Ясно, что $P_n^2 = P_n$ и $P_n^* = P_n$ в $L_2[a,\ b]$. Поэтому здесь общий проекционный метод (18), (19), (21) переходит в метод сплайн–подобластей нулевого порядка (см. [1, стр.168]); обоснование этого метода также следует из теоремы 5 и её следствия.

6. Проекционно–итеративные методы.

Следуя гл.4 книги [1, стр.169−170], но пользуясь полученными выше результатами, можно показать, что для уравнения (1–3) справедливы следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть за начальное приближение* $x^0 \in L_2(\rho)$ *в итерационном методе (11) берётся приближённое решение* $x_n \in L_{2,n}(\rho)$ *уравнения (1-3), построенное проекционным методом (18), (19), (21). Тогда погрешность i–го приближения оценивается по формуле*

$$\| x^* - x^i \| \le (1+\gamma^{-2}M)E_n(x^*)q^i, \qquad (23)$$

где n, $i \in \mathbf{N}$, *а числа* q *и* M *определены в (13) (в частном случае см. (*13_1*)) и (14).*

Теперь решения $x_n(t)$ приближённого уравнения (21) будем искать универсальным итерационным методом вида

$$x_n^j = x_n^{j-1} + (\gamma / M)^2 (P_n y - K_n x_n^{j-1}), \qquad (24)$$

где $n, j \in \mathbf{N}$, а x_n^0 — произвольное начальное приближение из $L_{2,n}(\rho)$.

Теорема 7. *В условиях любой из теорем 1−3 решение* $x_n \in L_{2,n}(\rho)$ *уравнения (21) можно найти как предел в* $L_2(\rho)$ *итерационной последовательности (24), причём в случае начального приближения*

$$x_n^0 = \Big(\frac{\gamma}{M}\Big)^2 P_n y \in L_{2,n}(\rho), \quad n \in \mathbf{N} \qquad (25)$$

справедлива оценка

$$\| x_n - x_n^j \| \le \frac{q^{j+1}}{1-q} \Big(\frac{\gamma}{M}\Big)^2 \| P_n y \|, \quad n, j \in \mathbf{N}. \qquad (26)$$

Доказательство. Воспользуемся новым оператором перехода

$$T_n = E - \Big(\frac{\gamma}{M}\Big)^2 P_n K = P_n\{E - \Big(\frac{\gamma}{M}\Big)^2 K\} : L_{2,n} \to L_{2,n}$$

и для него, по аналогии с [1, стр.169], имеем

$$\| T_n \|_{L_{2,n} \to L_{2,n}} \le \| T \|_{L_2(\rho) \to L_2(\rho)} \le (1 - \gamma^4 M^{-2})^{1/2} = q < 1.$$

Отсюда (аналогично доказательству теоремы 4) получаем искомое утверждение.

Из теорем 5 и 7 следует

Теорема 8. *В условиях любой из теорем 1-3 единственное решение* $x^*\in L_2(\rho)$ *уравнения (1) можно найти как предел*

$$x^*(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty}x_n^j(t) \qquad (27)$$

в $L_2(\rho)$ *проекционно–итеративной последовательности (24). При этом для любых* $n, j\in \mathbf{N}$ *и* $x_n^0\in L_{2,n}(\rho)$ *справедлива оценка*

$$\| x^*-x_n^j \| \le (1+\gamma^{-2}M)E_n(x^*)+\frac{q^j}{1-q}\| x_n^1-x_n^0 \|; \qquad (28)$$

если же x_n^0 *выбирается по формуле (25), то справедлива оценка*

$$\| x^*-x_n^j \| \le (1+\gamma^{-2}M)E_n(x^*)+\frac{q^{j+1}}{1-q}\Big(\frac{\gamma}{M}\Big)^2\| y \|, \qquad (29)$$

где $n, j\in \mathbf{N}$, *а* γ, q *и* M *определены соответственно в (2), (13) и (14) (см. также* (13_1)*).*

7. Заключение.

В теоремах 1–3 предложены весьма простые и эффективные достаточные условия существования, единственности и устойчивости решений уравнения (1)–(3), а также приведено теоретическое обоснование проекционных, итерационных и проекционно-итеративных методов его решения. Полученные результаты могут быть использованы при решении конкретных прикладных задач.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы. – Казань: Изд–во Казан.ун–та, 1995. – 230 с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
3. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
4. Михлин С.Г. Некоторые вопросы теории погрешностей. – Л.: Изд–во ЛГУ, 1988. – 334 с.

5. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд–во Казан. ун–та, 1980. – 232 с.
6. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

Abramova V.V., candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University

THE PROJECTION AND ITERATIVE METHODS FOR SOLVING SOME REGULAR INTEGRAL EQUATIONS

Abstract: This work is devoted to projection methods for solving regular integral equations frequently encountered both in theory and in different applications. The research is based on the theory of positive operators, the general theory of approximate methods of analysis and constructive theory of functions.

Key words: integral equation, positive definite operator, inverse operator, projection method, iterative method, projection-iterative method, convergence, rate of convergence, error estimation.