Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, № 5, с. 75–79 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное В.П. Максимовым

Е.О. БУРЛАКОВ, Е.С. ЖУКОВСКИЙ

О КОРРЕКТНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙРОПОЛЕЙ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Аннотация. Рассматривается нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, частными случаями которого являются уравнения, используемые в математической нейробиологии. Исследуются решения, стремящиеся к нулю в любой момент времени при неограниченном росте пространственной переменной (соответствующие нормальному функционированию головного мозга). Ставится задача импульсного управления, моделирующая электрическую стимуляцию мозга, применяемую при лечении расстройств центральной нервной системы. Определено специальное полное метрическое функциональное пространство, в котором получены условия существования, единственности и продолжаемости решения, а также его непрерывной зависимости от импульсного управления.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, уравнения Вольтерра, уравнения нейрополей, импульсное управление, корректность.

УДК: 517.988; 517.968

Введение

Однозначная разрешимость системы модельных уравнений и непрерывная зависимость соответствующего решения от параметров модели являются важными свойствами математической модели, обуславливающими, в частности, широту ее использования и применимость к ней различных численных методов. Проблема непрерывной зависимости решений от параметров различных классов операторных уравнений исследовалась многими авторами (см., например, [1], с. 203–210).

В данной работе исследуется корректность (однозначная разрешимость и непрерывная зависимость решения от параметров) интегрального уравнения Вольтерра, охватывающего широкий класс моделей, возникающих в математической нейробиологии. Типичным представителем данного класса является уравнение нейрополя типа Амари [2]

$$w_t(t,x) = -w(t,x) + \int_R \Omega(x-y) f(w(t,y))dy, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Поступила 26.10.2015

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10021).

Неизвестной здесь является функция w, значение $w(t,x)$ которой характеризует активность нейрона в позиции x в момент времени t, $f(w)$ — степень влияния нейрона с активностью w на другие нейроны, функция Ω определяет силу связи между нейронами.

Литература, посвященная модели (1) и ее обобщениям, довольно обширна (см., например, [3]–[6]). Ключевыми вопросами в большинстве работ о таких моделях являются вопросы о существовании и устойчивости так называемых "локализованных в пространстве" решений, или "бампов", т. е. решений, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|x|\to\infty} w(t,x) = 0, \quad t \in [a,\infty). \tag{2}$$

Такие решения соответствуют характеру активности коры мозга, являющемуся преобладающим при его нормальном функционировании (см., например, [7]–[10]).

Модели вида (1) важны в изучении патологических состояний головного мозга [11]. Проблемы терапевтического лечения эпилепсии, болезни Паркинсона и других расстройств центральной нервной системы были недавно исследованы в [12]–[16]. Математические модели в [12]–[16] включают управляющие воздействия, моделирующие электрическую стимуляцию мозга, а также соответствующие задачи оптимизации. В данной работе моделируем такую электрическую стимуляцию посредством импульсных управляющих воздействий, в результате которых функция w по переменной t терпит разрывы. Обобщая модели, используемые в [2]–[4], [6], рассматриваем уравнение

$$w(t,x) = \int_a^t \int_{\mathbb{R}^m} f(t,s,x,y,w(s,y))dy\,ds + \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[t_k,\infty)}(t)u_k(x), \quad t \in [a,\infty), \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{3}$$

относительно неизвестной функции $w : [a,\infty) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию (2). Здесь $f : \triangle \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\triangle = \{(t,s) \in [a,\infty) \times [a,\infty),\ s \le t\}$ — заданная функция; точки t_k, $a \le t_1 < t_2 < \cdots$, и функции $u_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\dots$, являются параметрами управления (для удобства обозначений положим $t_0 = a$, $u_0(x) \equiv 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$); символом χ_M обозначена характеристическая функция множества $M \subset [a,\infty)$.

В данной работе получены результаты об однозначной разрешимости задачи (3), (2) и непрерывной зависимости решения от управления, представленного набором $\mathfrak{U} = \{(t_k,u_k),\ k = 1,2,\dots\}$.

Если искомую в уравнении (3) функцию рассматривать как отображение $t \in [a,\infty) \mapsto w(t,\cdot)$, то уравнение (3) формализуется в виде операторного уравнения Вольтерра в соответствующем функциональном пространстве. Уравнения Вольтерра обычно рассматриваются в пространствах с линейной структурой (см, например, [17]–[19] и библиографию этих работ). Однако в случае, если моменты импульсов t_k не фиксированы и могут быть любыми, а их количество на каждом конечном отрезке не превышает заданное число, множество функций вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \chi_{[t_k,\infty)}(t)u_k(x)$ не замкнуто относительно сложения. Это обстоятельство делает невозможным применение к задаче (3), (2) аппарата, используемого в работах [17]–[19].

1. Существование, единственность и непрерывная зависимость от импульсного управления решений обобщенных уравнений нейрополей

Используются следующие обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}^m$ — m-мерное вещественное векторное пространство с нормой $|\cdot|$, $C_0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ — пространство всех непрерывных функций $\vartheta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{|x|\to\infty} \vartheta(x) = 0$, с нормой $\|\vartheta\|_{C_0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^m} |\vartheta(x)|$. Для некоторого метрического пространства $(\mathrm{X},\rho_{\mathrm{X}})$ и

произвольных $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$, $r > 0$ через $B_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}, r)$ обозначим замкнутый шар радиуса r с центром в точке x, $B_{\mathrm{X}}^{\mathrm{out}}(\mathrm{x}, r) = \mathrm{X} \setminus B_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}, r)$.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

(i) при любых $t \in [a, \infty)$, $w \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$ функция $f(t, \cdot, x, \cdot, w) : [a, t] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ измерима;

(ii) при почти всех $(s, y) \in [a, \infty) \times \mathbb{R}^m$ функция $f(\cdot, s, \cdot, y, \cdot) : [s, \infty) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности аргументов;

(iii) для всякого $b \in (a, \infty)$, произвольного $r > 0$, при всех $w \in B_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ выполнено

$$\lim_{\mathfrak{r} \to \infty} \sup_{t \in [a,b],\ x \in B_{\mathbb{R}^m}^{\mathrm{out}}(0, \mathfrak{r})} \left| \int_a^t \int_{\mathbb{R}^m} f(t, s, x, y, w) dy\, ds \right| = 0;$$

(iv) существует такая неубывающая функция $K : [a, \infty) \to \mathbb{N}_0$, что для любого управления $\mathfrak{U}$ и всякого $b \in (a, \infty)$ выполнено неравенство $\mathrm{card}\big(\{t_k\} \bigcap [a, b]\big) \le K(b)$; здесь символом $\mathrm{card}(\cdot)$ обозначена мощность соответствующего множества;

(v) $u_k \in C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Вследствие сделанных допущений, элемент w, определяемый системой (3), (2), может быть представлен суммой

$$w(t, x) = v(t, x) + \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[t_k, \infty)}(t) u_k(x), \tag{4}$$

где функция $v : [a, \infty) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и $\lim\limits_{|x| \to \infty} v(t, x) = 0$, $t \in [a, \infty)$. Такие функции v, рассматриваемые как отображения $v : [a, \infty) \to C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, образуют локально выпуклое пространство с топологией равномерной сходимости на каждом компакте $[a, b]$ (см. [19]); стандартно обозначаем это пространство $C([a, \infty), C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$. Пространство $C([a, b], C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ сужений на $[a, b]$ функций пространства $C([a, \infty), C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ является банаховым с нормой $\|v\|_{C([a,b], C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))} = \max\limits_{t \in [a,b]} \|v(t)\|_{C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)}$.

Определим множество $W([a, \infty)) = W([a, \infty), C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ отображений $w : [a, \infty) \to C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ вида (4), где v — произвольный элемент пространства $C([a, \infty), C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, $\{(t_k, u_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ — любой набор, удовлетворяющий условиям (iv) и (v). Обозначим через $W([a, b]) = W([a, b], C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ пространство сужений на $[a, b]$ функций из $W([a, \infty))$. Для произвольного $b \in (a, \infty)$ множество $W([a, b])$ образует полное метрическое пространство относительно метрики

$$\rho_{W([a,b])}(w^1, w^2) = \\ = \|v^1 - v^2\|_{C([a,b], C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))} + \int_a^b \Bigg\| \sum_{k:\, t_k^1 \in [a,b]} \chi_{[t_k^1, b]}(t) u_k^1 - \sum_{k:\, t_k^2 \in [a,b]} \chi_{[t_k^2, b]}(t) u_k^2 \Bigg\|_{C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} dt.$$

Определение. Будем считать *локальным решением* задачи (3), (2), определенным на $[a, a+\gamma]$, $\gamma \in (0, \infty)$, функцию $w_\gamma \in W([a, a+\gamma])$, удовлетворяющую уравнению

$$w(t, \cdot) = \int_a^t \int_{\mathbb{R}^m} f(t, s, \cdot, y, w(s, y)) dy ds + \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[t_k, \infty)}(t) u_k(\cdot)$$

всюду на $[a, a + \gamma]$. Определим *предельно продолженное* решение (3), (2), определенное на $[a, a + \eta)$, $\eta \in (0, \infty)$, как функцию $w_\eta : [a, a + \eta) \to C_0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, сужение w_γ на $[a, a + \gamma]$ которой для всякого $\gamma < \eta$ является локальным решением данной задачи, и выполнено

$\lim\limits_{\gamma\to\eta-0}\rho_{W([a,a+\gamma])}(w_\gamma,\mathfrak{o})=\infty$ (здесь $\mathfrak{o}\in W([a,a+\gamma])$ — тождественно равная нулю функция). Назовем *глобальным решением* задачи (3), (2) функцию $w:[a,\infty)\to C_0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, сужение которой w_γ на $[a,a+\gamma]$ для любого $\gamma\in(0,\infty)$ является локальным решением данной задачи.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (i)–(v). *Предположим, что для любых* $b\in(a,\infty)$, $r>0$ *найдется такая суммируемая на* $[a,b]\times\mathbb{R}^m$ *функция* $\widetilde{f}_r$, *что*

$$|f(t,s,x,y,w^1)-f(t,s,x,y,w^2)|\le\widetilde{f}_r(s,y)|w^1-w^2|$$

для всех $w^1,w^2\in B_{\mathbb{R}^n}(0,r)$, *почти всех* $(s,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^m$ *и всех* $(t,x)\in[s,b]\times B_{\mathbb{R}^m}(0,r)$. *Тогда для всякого набора точек* $(t_k,u_k)\in[a,\infty)\times C_0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, $k\in\mathbb{N}$, *задача* (3), (2) *имеет единственное глобальное или предельно продолженное решение и всякое локальное решение является его сужением.*

Пусть в дополнение к предыдущему для некоторого набора пар $(t_k^0,u_k^0)\in[a,\infty)\times C_0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, $k\in\mathbb{N}$, *и некоторого набора последовательностей* $\{(t_k^i,u_k^i)\}_{i=1}^\infty\subset[a,\infty)\times C_0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, $k\in\mathbb{N}$, *при любом* $b>a$ *выполнено условие*

$$\int_a^b\max_{x\in\mathbb{R}^m}\left|\sum_{k:t_k^i\in[a,b]}\chi_{[t_k^i,\infty)}u_k^i(x)-\sum_{k:t_k^0\in[a,b]}\chi_{[t_k^0,\infty)}u_k^0(x)\right|dt\to0\quad\text{при}\quad i\to\infty.$$

Тогда если для управления $\{(t_k^0,u_k^0)\in[a,\infty)\times C_0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n),\ k\in\mathbb{N}\}$, *задача* (3), (2) *имеет локальное решение* w_γ^0, *определенное на* $[a,a+\gamma]$, *то можно указать такой номер* I, *что для всех* $i>I$ *система* (3), (2) *с управлением* $\{(t_k^i,u_k^i)\in[a,\infty)\times C_0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n),\ k\in\mathbb{N}\}$ *имеет локальное решение* w_γ^i, *определенное на* $[a,a+\gamma]$, *и* $\rho_{W([a,a+\gamma])}(w_\gamma^i,w_\gamma^0)\to0$ *при* $i\to\infty$.

Литература

[1] Azbelev N.V., Maksimov V.P. and Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications* (Hindawi Publishing Corporation, New York, 2007).

[2] Amari S. *Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields*, Biol. Cybern. **27** (2), 77–87 (1977).

[3] Coombes S. *Waves, bumps, and patterns in neural field theories*, Biol. Cybern. **93** (2), 91–108 (2005).

[4] Blomquist P., Wyller J. and Einevoll G.T. *Localized activity patterns in two-population neuronal networks*, Physica D **206** (9), 180–212 (2005).

[5] Faye G. and Faugeras O. *Some theoretical and numerical results for delayed neural field equations*, Physica D **239** (9), 561–578 (2010).

[6] Malyutina E., Wyller J. and Ponosov A. *Two bump solutions of a homogenized Wilson–Cowan model with periodic microstructure*, Physica D **271** (1), 19–31 (2014).

[7] Sompolinsky H., Shapley R. *New perspectives on the mechanisms for orientation selectivity*, Curr. Opin. Neurobiol. **5** (7), 514–522 (1997).

[8] Taube J.S., Bassett J.P. *Persistent neural activity in head direction cells*, Cereb. Cortex **13** (11), 1162–1172 (2003).

[9] Fuster J.M., Alexander G. *Neuron activity related to short-term memory*, Science **173** (3997), 652–654 (1971).

[10] Wang X-J. *Synaptic reverberation underlying mnemonic persistent activity*, Trends Neurosci. **24** (8), 455–463 (2001).

[11] Pinotsis D.A., Leite M., and Friston K.J. *On conductance-based neural field models*, Frontiers in Comput. Neurosci. **7**, 158 (2013) (http://dx.doi.org/10/3389/nfcom.2013.00158).

[12] Tass P.A. *A model of desynchronizing deep brain stimulation with a demand-controlled coordinated reset of neural subpopulations*, Biol. Cybern. **89** (2), 81–88 (2003).

[13] Suffczynski P., Kalitzin S. and Lopes Da Silva F.H. *Dynamics of non-convulsive epileptic phenomena modeled by a bistable neuronal network*, Neurosci. **126** (2), 467–484 (2004).

[14] Kramer M.A., Lopour B.A., Kirsch H.E. and Szeri A.J. *Bifurcation control of a seizing human cortex*, Phys. Rev. E **73**, 419–428 (2006) (DOI: 10.1103/PhysRevE.73.041928).

[15] Schiff S.J. *Towards model-based control of Parkinson's disease*, Philos. Trans. of the Royal Soc. A: Math., Phys. and Engin. Sci. **368** (1918), 2269–2308 (2010).
[16] Ruths J., Taylor P., Dauwels J. *Optimal control of an epileptic neural population model* (Proc. Intern. Fed. of Automat. Contr., Cape Town, 2014).
[17] Жуковский Е.С. *Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра*, Матем. сб. **197** (10), 1435–1457 (2006).
[18] Burlakov E., Zhukovskiy E., Ponosov A. and Wyller J. *On wellposedness of generalized neural field equations with delay*, J. Abstr. Dif. Eq. Appl. **6** (1), 51–80 (2015).
[19] Burlakov E., Zhukovskiy E.S. *Existence, uniqueness and continuous dependence on control of solutions to generalized neural field equations*, Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер.: Естеств. и технич. науки **20** (1), 9–16 (2015).

Е.О. Бурлаков

Норвежский университет естественных наук,
5003, Ос, 1432, Норвегия,

e-mail: eb_@bk.ru

Е.С. Жуковский

Тамбовский государственный университет,
ул. Интернациональная, д. 33, г. Тамбов, 392000, Россия,

e-mail: zukovskys@mail.ru

E.O. Burlakov and E.S. Zhukovskii

On well-posedness of generalized neural field equations with impulsive control

Abstract. We consider nonlinear nonlocal integral equation generalizing equations typically used in mathematical neuroscience. We investigate solutions tending to zero at any fixed moment with unbounded growth of the spatial variable (these solutions correspond to normal brain functioning). We consider an impulsive control problem, which models electrical stimulation used in the presence of various diseases of central nervous system. We define suitable complete metric space, where we obtain conditions for existence, uniqueness and extendability of solution to the problem as well as continuous dependence of this solution on the impulsive control.

Keywords: nonlinear integral equations, Volterra equations, neural field equations, impulsive control, well-posedness.

E.O. Burlakov

Norwegian University of Life Sciences,
P. O. Box 5003, Ås, 1432, Norway,

e-mail: eb_@bk.ru

E.S. Zhukovskii

Tambov State University,
33 Internatsional'naya str., Tambov, 392000 Russia,

e-mail: zukovskys@mail.ru