

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»  
Проректор по образовательной деятельности  
Таюрский Д.А.  
« 16 » сентября 20 15 г.



**Программа дисциплины**

**Б1.Б.11 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

Направление подготовки: 12.03.04 Биотехнические системы и технологии  
Профиль подготовки: —  
Квалификация выпускника: бакалавр

## 1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Курс лекций «Теория вероятностей и математическая статистика» состоит из трех разделов: основы теории вероятности, элементы математической статистики и элементы теории случайных процессов.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.Б.11 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 12.03.04 Биотехнические системы и технологии и относится к базовой части. Осваивается на 1 курсе, 2 семестр.

Для освоения курса Б.1Б.11 "Теория вероятностей и математическая статистика" необходимы знания дисциплин Б.1Б.8 "Математический анализ", Б1.Б.10 "Линейная алгебра". Освоение курса необходимо для дальнейшего изучения дисциплин Б1.Б.13 "Молекулярная физика", Б1.Б.18 "Термодинамика" и др..

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Обучающийся, завершивший изучение дисциплины, должен знать:

- основные понятия теории вероятностей и математической статистики и их свойства;

уметь:

- использовать вероятностные модели при решении задач, работать со случайными величинами, выполнять расчет выборочных характеристик, оценивать надежность статистических данных;

владеть:

- навыками работы со случайными величинами, выборочной совокупностью.

демонстрировать способность и готовность:

к дальнейшему обучению.

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-2	способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат

## 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

Форма промежуточной аттестации по дисциплине: зачет во 2 семестре.

	Раздел дисциплины	Семестр	Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Самостоятельная работа
1.	Тема 1. Вероятностное пространство	2	2	4	0	6

2.	Тема 2. Условная вероятность. Независимость событий	2	2	4	0	6
3.	Тема 3. Схема Бернулли	2	2	4	0	6
4.	Тема 4. Случайные величины	2	4	10	0	12
5.	Тема 5. Численные характеристики случайных величин	2	3	6	0	9
6.	Тема 6. Предельные теоремы	2	1	0	0	3
7.	Тема 7. Элементы математической статистики	2	4	8	0	12
	Итого		18	36	0	54

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Вероятностное пространство

События. Вероятность. Общие свойства вероятности. Классическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности.

### Тема 2. Условная вероятность. Независимость событий

Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса

### Тема 3. Схема Бернулли

Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли. Наивероятнейшее число успехов. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

### Тема 4. Случайные величины

Случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Дискретные и непрерывные случайные величины. Функции случайных величин. Совместные распределения. Независимость случайных величин

### Тема 5. Численные характеристики случайных величин

Математическое ожидание. Дисперсия. Ковариация. Коэффициент корреляции

### Тема 6. Предельные теоремы

Закон больших чисел. Центральная предельная теорема

### Тема 7. Элементы математической статистики

Генеральная и выборочная совокупность. Выборочная функция распределения. Выборочные моменты. Состоятельность и несмещенность точечных оценок. Точные выборочные распределения моментов нормально распределенного случайного признака. Интервальные оценки

## 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Формы учебной работы: лекции, практические занятия, самостоятельная работа обучающегося (выполнение индивидуальных домашних заданий), консультации. Проведение лекционных занятий предусматривает использование мультимедийных средств. Материалы курса лекций, список контрольных вопросов, задания для практических занятий и самостоятельной работы, размещены в интернете на сайте Института Физики. Консультации проводятся в обозначенное в расписании время и в режиме "online"

## 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

### Тема 1. Вероятностное пространство

домашнее задание (примеры задач: см.приложение 1):

Задачи по теме: Классическое определение вероятности Геометрическое определение вероятности Общие свойства вероятности

### **Тема 2. Условная вероятность. Независимость событий**

домашнее задание (примеры задач: см.приложение 1):

Задачи по теме: Формула полной вероятности Формула Байеса

### **Тема 3. Схема Бернулли**

домашнее задание (примеры задач: см.приложение 1):

Задачи по теме: Схема Бернулли Теорема Муавра-Лапласа Теорема Пуассона

### **Тема 4. Случайные величины**

домашнее задание (примеры задач: см.приложение 1):

Задачи по теме: Дискретные распределения Непрерывные распределения

### **Тема 5. Численные характеристики случайных величин**

домашнее задание (примеры задач: см.приложение 1):

Задачи по теме: Математическое ожидание, дисперсия

### **Тема 6. Предельные теоремы**

домашнее задание (примеры задач: см.приложение 1):

Задачи по теме: Неравенство Чебышева

### **Тема 7. Элементы математической статистики**

домашнее задание (примеры задач: см.приложение 1):

Задачи по теме: Выборочные моменты Методы получения точечных оценок Интервальные оценки

## **7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

### **7.1. Регламент дисциплины**

Суммарно по дисциплине можно получить максимум 100 баллов, из них текущий контроль в течение семестра оценивается в 50 баллов, зачёт - в 50 баллов.

7 баллов – контрольная работа №1

7 баллов - контрольная работа №2

7 баллов - контрольная работа №3

7 баллов - контрольная работа №4

7 баллов - контрольная работа №5

15 баллов - контрольная работа №6

**Итого:  $7+7+7+7+7+15=50$  баллов**

### **7.2. Оценочные средства текущего контроля**

#### **Тема 1. Вероятностное пространство**

контрольная работа №1(примеры задач: см.приложение 1):

Задачи по теме:

1. Классическое определение вероятности

2. Геометрическое определение вероятности

#### **Тема 2. Условная вероятность. Независимость событий**

контрольная работа №2 (примеры задач: см.приложение 1):

Задачи по теме

1. Формула полной вероятности Формула Байеса

#### **Тема 3. Схема Бернулли**

контрольная работа №3 (примеры задач: см.приложение 1):

Задачи по теме:



1. Схема Бернулли
2. Теорема Муавра-Лапласа
3. Теорема Пуассона

#### **Тема 4. Случайные величины**

контрольная работа №4 (примеры задач: см. приложение 1):

Задачи по теме:

1. Функция распределения

#### **Тема 5. Численные характеристики случайных величин**

контрольная работа №5 (примеры задач: см. приложение 1):

Задачи по теме:

1. Математическое ожидание, дисперсия

#### **Тема 7. Элементы математической статистики**

контрольная работа №6 (примеры задач: см. приложение 1):

Задачи по теме:

1. Выборочные моменты
2. Интервальные оценки

### **7.3. Вопросы к зачету**

1. Событие. Элементарное событие
2. Множество событий. Алгебра событий
3. Аксиомы вероятности. Неоднозначность вероятностной модели
4. Общие свойства вероятности
5. Классическое определение вероятности.
6. Геометрическая вероятность
7. Условная вероятность. Независимость событий
8. Формула полной вероятности.
9. Формула Байеса
10. Схема Бернулли. Вероятность  $m$  успехов в  $n$  испытаниях
11. Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли
12. Теорема Пуассона,
13. Теорема Муавра-Лапласа
14. Функция распределения и ее свойства
15. Дискретные распределения (вырожденное распределение, гипергеометрическое распределение, биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение)
16. Непрерывные распределения (равномерное распределение, показательное распределение, нормальное распределение, распределение Максвелла)
17. Двумерная функция распределения и ее свойства
18. Независимость случайных величин
19. Математическое ожидание и его свойства
20. Дисперсия и ее свойства
21. Математическое ожидание и дисперсия некоторых распределений (биномиальное распределение, распределение Пуассона, нормальное распределение и др.)
22. Ковариация и ее свойства
23. Неравенство Чебышева
24. Теорема Чебышева
25. Теорема Бернулли
26. Центральная предельная теорема
27. Задачи математической статистики, генеральная совокупность, выборка
28. Статистический ряд, статистическая функция распределения, гистограмма

29. Точечные оценки, методы получения точечных оценок
30. Характеристики точечных оценок: состоятельность, несмещенность, эффективность
31. Распределение хи-квадрат и распределение Стьюдента
32. Теорема о точном распределении выборочных характеристик нормально распределенного случайного признака
33. Доверительная вероятность, доверительный интервал
34. Построение доверительных интервалов для выборочных средней и дисперсии нормально распределенной случайной величины (четыре случая)

#### 7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции для данной дисциплины	Оценочное средство
ОПК-2	способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат	Знание основных терминов дисциплины. Умение решать основные задачи.	Устный опрос, контрольные работы 1-6, домашнее задание. Вопросы к зачету 1 — 34.

### 8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Работа на практических занятиях предполагает решение задач, подготовку домашнего задания.

При подготовке к зачету необходимо опираться прежде всего на лекции, а также на источники, которые указывались на занятиях в течение семестра.

### 9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

#### 9.1. Основная литература

В. А. Попов, М. Х. Бренерман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Казань: Изд-во КГУ. 2008.

В. А. Попов. Теория вероятностей. Часть 1. Элементарная теория вероятностей. Казань: Изд-во КФУ. 2013.

Попов, В.А. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст : электронный ресурс] / В. А. Попов, М. Х. Бренерман ; Казан.гос. ун-т, Физ. фак. — Электронные данные (1 файл: 1,15 Мб) .— (Казань : Научная библиотека Казанского федерального университета, 2014) .— Загл. с экрана .— Режим доступа: открытый.

Оригинал копии: Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. А. Попов, М. Х. Бренерман ; Казан.гос. ун-т, Физ. фак. — Казань : Изд-во Казанского государственного университета, 2008 .— 117, [2] с. : ил. ; 20, 200.

<http://libweb.kpfu.ru/ebooks/publicat/0-773541.pdf>

В. А. Попов. Теория вероятностей. Часть 2. Случайные величины. Казань: Изд-во КФУ. 2013.

## 9.2. Дополнительная литература

Хрущева, И.В. Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон.дан. — СПб. : Лань, 2009. — 300 с.

[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=425](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=425)

Бородин, А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон.дан. — СПб. : Лань, 2011. — 255 с.

[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2026](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2026)

Туганбаев, А.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.А. Туганбаев, В.Г. Крупин. — Электрон.дан. — СПб. : Лань, 2011. — 224 с.

[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=652](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=652)

**9.3. Интернет-ресурсы:** Сайт кафедры теории относительности и гравитации КФУ - <http://old.kpfu.ru/f6/k6/index.php>

В.А.Попов, М.Х.Бренерман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике - [http://old.kpfu.ru/f6/b\\_files/probprob!144.pdf](http://old.kpfu.ru/f6/b_files/probprob!144.pdf)

В.Е.Гмурман. Курс теории вероятностей и математической статистики - [old.kpfu.ru/f6/b\\_files/gmurmantvims!631.zip](http://old.kpfu.ru/f6/b_files/gmurmantvims!631.zip)

Страница доцента В. А. Попова - <http://old.kpfu.ru/f6/index.php?id=12&idm=0&num=23>  
Электронная библиотека мехмата МГУ - <http://lib.mexmat.ru/>

**10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)** Освоение дисциплины "Теория вероятностей и математическая статистика" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения: Мультимедийная аудитория, вместимостью более 60 человек. Мультимедийная аудитория состоит из интегрированных инженерных систем с единой системой управления, оснащенная современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации, получения и передачи электронных документов. Типовая комплектация мультимедийной аудитории состоит из: мультимедийного проектора, автоматизированного проекционного экрана, акустической системы, а также интерактивной трибуны преподавателя, включающей тач-скрин монитор с диагональю не менее 22 дюймов, персональный компьютер (с техническими характеристиками не ниже Intel Core i3-2100, DDR3 4096Mb, 500Gb), конференц-микрофон, беспроводной микрофон, блок управления оборудованием, интерфейсы подключения: USB, audio, HDMI. Интерактивная трибуна преподавателя является ключевым элементом управления, объединяющим все устройства в единую систему, и служит полноценным рабочим местом преподавателя. Преподаватель имеет возможность легко управлять всей системой, не отходя от трибуны, что позволяет проводить лекции, практические занятия, презентации, вебинары, конференции и другие виды аудиторной нагрузки обучающихся в удобной и доступной для них форме с применением современных интерактивных средств обучения, в том числе с использованием в процессе обучения всех корпоративных ресурсов. Мультимедийная аудитория также оснащена широкополосным доступом в сеть интернет. Компьютерное оборудование имеет соответствующее лицензионное программное обеспечение. Учебные аудитории для проведения лекционных и практических занятий. Мультимедийное оборудование (ноутбук, интерактивная доска).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 12.03.04 "Биотехнические системы и технологии" .

Автор(ы): Попов В.А.

Рецензент(ы): Попов А.А.

Программа одобрена на заседании учебно-методической комиссии Института физики  
« 16 »                      сентября 20 15 г.

Приложения: Приложение 1 «Банк типовых задач для самостоятельного решения»

## Приложение 1

к программе дисциплины «Теория вероятности и математическая статистика»

### I. Банк типовых задач для самостоятельного решения

(задачи из пособия В.А.Попов, М.Х.Бренерман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике))

#### Тема 1. Вероятностное пространство

**Задача 29.** Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

**Задача 30.** На полке в случайном порядке расставлено  $n$  книг, среди которых находится двухтомник Д. Лондона. Предполагая, что различные расположения книг равновероятны, найти вероятность того, что оба тома двухтомника расположены рядом.

**Задача 31.** Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой (и не равные шести).

**Задача 32.** В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

**Задача 33.** Батарея, состоящая из  $k$  орудий, ведет огонь по группе, состоящей из  $l$  самолетов ( $k < l$ ). Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что а) все  $k$  орудий будут стрелять по одной и той же цели; б) все орудия будут стрелять по разным целям.

**Задача 34.** Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Вероятность какого события больше:  $A = \{\text{в каждой из пачек окажется по 2 туза}\}$  или  $B = \{\text{в одной пачке один туз, в другой — три}\}$ ?

**Задача 39.** На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной  $a$  наудачу брошена монета радиуса  $r < a/2$ . Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

## Тема 2. Условная вероятность. Независимость событий

**Задача 48.** Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0.95 для первого сигнализатора и 0.9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

**Задача 49.** Ученик 6б класса Костя Сидоров и его приятель, заняв выгодную позицию вблизи школьных дверей, обстреливали снежками всех выходящих девчонок. Когда дверь в очередной раз открылась, два снежка одновременно полетели в голову застывшего на пороге завуча — Маргариты Викентьевны. Какова вероятность того, что цель была поражена, если известно, что Костя обычно попадает 8 раз из 10, а его приятель только 7?

**Задача 50.** Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0.4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

**Задача 51.** Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время  $t$ ) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0.6; 0.7; 0.8. Найти вероятности того, что за время  $t$  безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

**Задача 52.** При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью  $p$ . Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при  $n$  циклах объект будет обнаружен.

**Задача 65.** Среди посетителей кафе 30% мужчин, 30% женщин, 40% детей. Мужчина заказывает пирожное с вероятностью 0.1, женщина — с вероятностью 0.5, ребенок — с вероятностью 0.7. Какова вероятность того, что случайный посетитель закажет пирожное?

### Тема 3. Схема Бернулли

**Задача 73.** При передаче сообщения вероятность искажения каждого знака равна 0.01. Предполагая независимость искажения любого из знаков, найти вероятность того, что группа из 5 знаков а) не будет искажена; б) будет содержать менее двух искажений.

чья в матчах не учитываются.

**Задача 76.** В подъездах нового дома включено  $2n$  новых электролампочек. Каждая лампочка в течение года выходит из строя с вероятностью  $p$ . Найти вероятность того, что в течение года не менее половины первоначально включенных лампочек придется заменить новыми.

**Задача 77.** Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0.9. Найти наименее вероятное число элементов, которые выдержат испытание.

**Задача 78.** Два стрелка одновременно стреляют по одной мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0.2, а для второго — 0.4. Найти наименее вероятное число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 залпов.

**Задача 79.** Папа пообещал купить Косте Сидорову велосипед, когда Костя сумеет выиграть у него 20 партий. Они договорились каждый день играть одну партию, которая с одинаковой вероятностью может завершиться вничью, победой Кости или его поражением. Когда надо начинать матч, чтобы шансы получить велосипед к 1 мая были максимальными?

**Задача 80.** Том Сойер ставит свою дохлую крысу на веревочке против приятельского сломанного будильника, что при подбрасывании 6 монет выпадет 3 орла. Том считает, что шансы получить или не получить загаданный результат равны. Прав ли он? Каковы шансы Тома выиграть спор?

**Задача 63.** В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

### Тема 4. Случайные величины

**Задача 89.** Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины  $\xi$  — числа появлений «орла» при двух подбрасываниях монеты. Найти функцию распределения случайной величины.

**Задача 90.** Случайная величина  $\xi$  может принимать следующие значения:  $-2, 1, 2, 5$ . Известно, что  $\mathbf{P}(\xi = -2) = 0.1$ ,  $\mathbf{P}(\xi = 2) = 0.1$ ,  $\mathbf{P}(\xi = 5) = 0.6$ . Найти закон распределения случайной величины и построить ее функцию распределения.

**Задача 91.** В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

**Задача 92.** После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0.9. Требуется: а) составить закон распределения случайной дискретной величины  $\xi$  — числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту; б) найти наивероятнейшее число заданных студенту дополнительных вопросов.

**Задача 94.** Случайная величина  $\xi$  имеет показательное распределение с параметром  $\lambda = 1$ . Найти значение  $x_0$  такое, что  $\mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\xi > x)$ .

**Задача 95.** Дана плотность распределения случайной величины  $p(x) = e^{a|x|}$ . Найти параметр  $a$  и функцию распределения.

**Задача 96.** Дана функция распределения случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения  $p(x)$ .



**Тема 5. Численные характеристики случайных величин**

**Задача 109.** Найти математическое ожидание и дисперсию для следующих распределений: а) равномерного (формула (31)); б) показательного (формула (33)); в) геометрического (формула (28)); г) Рэлея (задача 100).

**Задача 110.** Случайная величина  $\xi$  — скорость молекулы газа — распределена по закону Максвелла:

$$p(x) = \begin{cases} av^2 e^{-v^2/b^2}, & v \geq 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент  $a$ ; б) среднее значение скорости и дисперсию; в) моду  $V$ , т. е. точку локального максимума плотности распределения; г) вероятность того, что скорость молекулы лежит между модой и средним значением.

**Задача 111.** К случайной величине  $\xi$  прибавили постоянную, не случайную величину  $a$ . Как от этого изменятся ее характеристики: а) математическое ожидание; б) дисперсия; в) среднее квадратическое отклонение; г) второй начальный момент?

**Задача 112.** Случайную величину  $\xi$  умножили на постоянную, не случайную величину  $a$ . Как от этого изменятся ее характеристики: а) математическое ожидание; б) дисперсия; в) среднее квадратическое отклонение; г) второй начальный момент?

**Задача 113.** Две независимые случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  заданы законами распределения:

$x_i$	-5	1	4
$p_i$	0.3	0.1	0.6

$y_i$	-1	0	1
$p_i$	0.1	0.7	0.2

Найти математическое ожидание и дисперсию величины  $\zeta = \xi + 3\eta$ .

**Задача 114.** Две независимые случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  заданы законами распределения:

$x_i$	-2	-1	0	2
$p_i$	0.2	0.3	0.1	0.4

$y_i$	-2	1
$p_i$	0.3	0.7

Найти математическое ожидание и дисперсию величины  $\zeta = \xi - 2\eta^2$ .

**Задача 120.** Производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.4. Рассматривается случайная величина  $\xi$  — число попаданий при трех выстрелах. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины  $\xi$ . Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

**Тема 6. Предельные теоремы**

**Задача 154.** Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

**Задача 155.** Вероятность рождения мальчика равна 0.51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

**Задача 156.** Монета брошена  $2N$  раз ( $N$  велико!). Найти вероятность того, что «орел» выпадет а) ровно  $N$  раз. б) на  $2m$  раз больше, чем «решка».

**Задача 157.** Вероятность появления события в каждом из 21 независимого испытания равна 0.7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

**Задача 158.** Монета брошена  $2N$  раз ( $N$  велико!). Найти вероятность того, что число выпадений «орла» будет заключено между числами  $N - \sqrt{N/2}$  и  $N + \sqrt{N/2}$ .

**Задача 161.** Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

**Тема 7. Элементы математической статистики**

**Задача 169.** Для данного распределения выборки

а) 

$x_i$	1	4	6
$n_i$	10	15	25

б) 

$x_i$	2	5	7	10
$n_i$	20	14	10	6

построить полигон относительных частот, эмпирическую функцию распределения, найти среднее значение, выборочную и исправленную дисперсии.



**Задача 172.** При измерении длины крыла пчелы были получены следующие данные (в мм):

9.68	9.81	9.77	9.60	9.61	9.55	9.74	9.48	9.72	9.70
9.52	9.63	9.68	9.88	9.47	9.44	9.82	9.71	9.84	9.57
9.79	9.43	9.59	9.50	9.78	9.64	9.72	9.71	9.58	9.61

Разбив все значения на 5 интервалов, построить гистограмму относительных частот. Найти выборочное среднее, выборочную и исправленную дисперсию. За варианты принять середины интервалов.

**Задача 186.** Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0.975 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней равна 0.2, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности  $\sigma = 1.5$ .

**Задача 187.** Из генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n = 10$ :

$x_i$	-2	1	2	3	4	5
$n_i$	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0.95 математическое ожидание  $\mu$  нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

**Задача 188.** По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений  $\bar{x} = 30.1$  и «исправленное» среднее квадратическое отклонение  $s = 6$ . Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью  $\beta = 0.99$ . Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

## I. Примеры вариантов контрольных работ

### Вариант 1

1. Случайная величина  $X$  задана плотностью распределения  $\rho(x) = A \sin x$  в интервале  $(0, \pi)$ ; вне этого интервала  $\rho(x) = 0$ . Найти: а) параметр  $A$ ; б) функцию распределения; в) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины  $X$ ; г) вероятность, что случайная величина принимает значение в интервале  $X \in [-1, \pi/3]$ .

2. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины  $X$ , заданной равномерным законом распределения:

$X$	1	2	3	...	$n$
$P$	$1/n$	$1/n$	$1/n$	...	$1/n$

3. В квартире 4 электролампочки. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение года, равна  $\frac{5}{6}$ . Какова вероятность того, что в течение года а) придется менять лампочки (т.е. хотя бы одну из них); б) придется заменить не меньше половины лампочек?

4. У мальчика в левом кармане 3 конфеты «Белочка» и 1 конфета «Маска», а в правом – две «Белочки» и две «Маски». Он достал две конфеты из одного кармана (случайно выбранного), и оказалось, что одна из них «Белочка», а другая «Маска». Чему равны вероятности того, что он достал конфеты из левого кармана? Из правого кармана?

5. Пусть  $X$  – число появлений «6 очков» при трех бросаниях игральной кости. Составить закон распределения случайной величины  $X$ . Найти математическое ожидание  $M(X)$ .

### Вариант 2

1. Случайная величина  $X$  задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} A(1 - e^{-x}) & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найти: а) параметр  $A$ ; б) плотность распределения; в) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины  $X$ ; г) вероятность, что случайная величина принимает значение  $X \geq \ln 2$ .

2. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины  $X$ , заданной законом распределения:

$X$	-10	2	3
$P$	0,1	0,7	?

3. В телевизоре 10 ламп. Для любой из ламп вероятность, что она останется исправной в течение года, равна  $p$ . Какова вероятность того, что: а) в течение года хотя бы одна лампа выйдет из строя; б) в течение года выйдут из строя две лампы?

4. Чайный сервиз состоит из двенадцати предметов: пяти блюдец, пяти чашек, одного чайника и сахарницы. Капиталина Марковна поссорившись с Федором Алексеевичем запустила в него первыми попавшимися под руку четырьмя предметами из сервиза. Какова вероятность, что все чашки остались целыми?

5. Экзаменатор задает студенту вопросы. Преподаватель прекращает задавать вопросы, как только обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой вопрос, равна  $p = 0,9$ . Составить закон распределения случайной величины  $X$  – числа заданных вопросов. Найти среднее число вопросов ( $M(X)$ ).

### Вариант 1

1. Случайная величина  $X$  подчинена закону арксинуса с плотностью распределения вероятностей

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \geq a, \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & \text{если } |x| < a \quad (a > 0). \end{cases}$$

Найти константу  $b$ , функцию распределения  $F(x)$ , математическое ожидание  $M(x)$ , среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  и центральный момент третьего порядка  $\mu_3$ . Определить вероятность того, что случайная величина принадлежит интервалу:  $a/2 < X < a/\sqrt{2}$ .

2. Бросается две игральные кости. Случайной величиной  $X$  является количество выпадений «6». Написать закон распределения случайной величины, найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

3. На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи различного цвета. Какова вероятность, что они не бьют друг друга? Ладьи ходят по горизонтали и вертикали на любое количество клеток.

4. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0,2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,3 – шатеном, с вероятностью 0,4 – блондином, и с вероятностью 0,1 – рыжим. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятность события  $A$  – в составе группы ровно четыре блондина.