Известия вузов. Математика
2016, № 3, с. 23–37
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.А. ГИМАЛТДИНОВА, К.В. КУРМАН

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Аннотация. Для уравнения с двумя перпендикулярными внутренними линиями изменения типа изучена задача с граничными условиями первого и второго рода на границе прямоугольной области. Спектральным методом доказаны теоремы единственности и существования решения. Полученная в процессе разделения переменных задача на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения не является самосопряженной и система корневых функций не является ортогональной. Построена соответствующая биортогональная система функций и доказана ее полнота, на основе которой установлен критерий единственности рассматриваемой задачи. Решение поставленной задачи построено в виде суммы биортогонального ряда.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, смешанная краевая задача, биортогональная система функций, полнота, существование и единственность решения.

УДК: 517.956

В работах [1]–[3] было положено начало большой серии работ по изучению задачи Дирихле для уравнений смешанного типа. В [4]–[9] единственность решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа с одной линией вырождения или изменения типа доказана с помощью принципа экстремума или методом интегральных тождеств, а существование — методом интегральных уравнений или разделения переменных. В [10]–[15] исследована задача Дирихле для уравнения смешанного типа с одной внутренней линией степенного вырождения в прямоугольной области и методами спектрального анализа установлен критерий единственности и решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} x)u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$.

Обозначим $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_4 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$.

В области D для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Задача. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, y) \in \mathrm{C}^1(\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4), \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \tag{3}$$

Поступила 05.08.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-97003-р_Поволжье_а).

$$u_x(x,y)\big|_{x=1} = u_x(x,y)\big|_{x=-1} = 0, \quad y \in [-\alpha, \beta], \tag{4}$$

$$u(x,y)\big|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad u(x,y)\big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \quad x \in [-1,1], \tag{5}$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции.

В данной работе впервые для уравнения (1) с двумя внутренними перпендикулярными линиями изменения типа изучена краевая задача со смешанными граничными условиями (первого и второго рода) в прямоугольной области, методами спектрального анализа установлен критерий единственности и построено решение задачи в виде суммы ряда. При разделении переменных возникла спектральная задача на сопряжение для обыкновенного дифференциального оператора с разрывным коэффициентом. Построены система корневых функций и биортогональная система, доказана полнота в пространстве $L_2[-1,1]$. Отметим, что доказательство единственности решения поставленной задачи основано на полноте биортогональной системы функций. Ранее такая идея использовалась в работе [16] при обосновании единственности решения задач для гиперболических уравнений и в [10] для уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа. При доказательстве существования решения задачи (2)–(5) аналогично [17], [9] возникла так называемая “проблема малых знаменателей”, создающая определенные трудности при обосновании сходимости построенного ряда в классе функций (2). При соответствующих ограничениях на параметры α, β доказаны утверждения об отделимости малых знаменателей от нуля. Показано, что при некоторых значениях α, β решение нельзя построить в виде суммы ряда.

2. Построение биортогональной системы. После разделения переменных $u(x,y) = X(x)Y(y)$ в уравнении (1) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\operatorname{sgn} x \cdot X'' + d \cdot X = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1), \tag{6}$$

$$\operatorname{sgn} y \cdot Y'' - d \cdot Y = 0, \quad y \in (-\alpha,0) \cup (0,\beta), \tag{7}$$

$$X(0+0) = X(0-0), \quad X'(0+0) = X'(0-0), \quad X'(1) = X'(-1) = 0, \tag{8}$$

$$Y(0+0) = Y(0-0), \quad Y'(0+0) = Y'(0-0), \tag{9}$$

где $d = \mu^2 \in \mathbb{C}$. Спектральная задача (6), (8) не является классической из-за незнакоопределенности коэффициента при старшей производной.

Решениями уравнения (6), удовлетворяющими условиям (8), являются функции

$$X(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x), & x > 0; \\ C_1 \operatorname{ch}(\mu x) + C_2 \operatorname{sh}(\mu x), & x < 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, μ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{th} \mu. \tag{10}$$

Лемма 1. *Уравнение* $\operatorname{tg}(az) = \operatorname{th}(bz)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, *имеет счетное множество корней, состоящее из нуля, простых попарно противоположных действительных и попарно противоположных чисто мнимых корней, для которых справедливо асимптотическое представление*

$$z_k^{(1),(2)} = \pm\left(\frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a}k + O(e^{-2\pi k b/a})\right), \quad z_k^{(3),(4)} = \pm i\left(\frac{\pi}{4b} + \frac{\pi}{b}k + O(e^{-2\pi k a/b})\right).$$

Доказательство. Очевидно, $z = 0$ является корнем уравнения. Пусть далее $z \neq 0$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1) Пусть $y = 0$. Найдем корни уравнения

$$\operatorname{tg}(ax) = \operatorname{th}(bx). \tag{11}$$

Рассмотрим $x > 0$, так как корни будут попарно противоположны. Из графиков функций $\operatorname{tg}(ax)$ и $\operatorname{th}(bx)$ видно, что уравнение имеет по одному корню в каждом интервале $\frac{\pi k}{a} < x_k < \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}$, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку $\operatorname{tg}\left[a\left(x_k - \frac{\pi k}{a}\right)\right] = \operatorname{tg}(ax_k) = \operatorname{th}(bx_k) \to 1$ при $k \to \infty$, то $ax_k - \pi k \to \frac{\pi}{4}$, поэтому $x_k \to \frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a}k$ при $k \to \infty$.

Пусть $x_k = \frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a}k + \varepsilon(k)$, где $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon(k) = 0$. Подставив эти значения в уравнение (11), после преобразований получим

$$\operatorname{tg}(a\varepsilon(k)) \cdot \left(1 + \operatorname{th}\left(\frac{\pi b}{4a} + \frac{\pi k b}{a}\right)\right) \cdot \big(1 + \operatorname{th}(b\varepsilon(k))\big) = \left(1 - \operatorname{th}\left(\frac{\pi b}{4a} + \frac{\pi k b}{a}\right)\right) \cdot \big(\operatorname{th}(b\varepsilon(k)) - 1\big).$$

Используя асимптотические равенства

$$\operatorname{tg} x = x + o(x), \quad \operatorname{th} x = x + o(x) \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$\operatorname{th} y = \frac{1 - e^{-2y}}{1 + e^{-2y}} = 1 - 2e^{-2y} + o(e^{-2y}) \quad \text{при} \quad y \to +\infty, \tag{12}$$

имеем

$$\varepsilon(k) = -\frac{1}{a} e^{b(-2\pi k + \pi/2)/a} + o(e^{-2\pi k b/a}), \quad \text{т.е.} \quad x_k = \frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a}k + O(e^{-2\pi k b/a}).$$

2) При $x = 0$ аналогично найдем $y_k = \frac{\pi}{4b} + \frac{\pi}{b}k + O(e^{-2\pi k a/b})$.

3) Докажем, что исходное уравнение не имеет других комплексных корней. Используя при $x \neq 0$, $y \neq 0$ формулы

$$\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}, \quad \operatorname{th}(x + iy) = \frac{\operatorname{sh} 2x + i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$$

получим уравнение

$$\frac{\operatorname{sh}(2bx)}{\sin(2ax)} = \frac{\sin(2by)}{\operatorname{sh}(2ay)}. \tag{13}$$

Можно убедиться, что для функции $f(x) = \frac{\operatorname{sh}(kx)}{k \sin x}$ при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi a\}$ справедливо неравенство $|f(x)| > 1$. С другой стороны, для функции $g(y) = \frac{\sin(ky)}{k \operatorname{sh} y}$ справедливо $|g(y)| < 1$ при $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Таким образом, уравнение (13) не имеет корней. □

В силу доказанной леммы неотрицательные корни уравнения (10) имеют вид

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_k = \frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда постоянная d может принимать значения $d_0 = 0$, $d_k = \mu_k^2 > 0$ и $d_k = -\mu_k^2 < 0$, $k \in \mathbb{N}$, и решениями задачи (6), (8) будут соответственно функции $X_0(x) \equiv 1$,

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\cos[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k}, & x > 0; \\ \frac{\operatorname{ch}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x < 0, \end{cases} \quad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x > 0; \\ \frac{\cos[\mu_k(x+1)]}{\cos \mu_k}, & x < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Собственному значению $d = 0$ и собственной функции $X_0(x) \equiv 1$ соответствует присоединенная функция

$$X_{01}(x) = \begin{cases} x^2/2 - x, & x > 0; \\ -x^2/2 - x, & x < 0, \end{cases}$$

определяемая единственным образом с точностью до постоянного слагаемого.

При найденных μ_k решениями уравнения (7) с учетом условий (9) будут функции

$$Y_0(y) \equiv a_0 y + b_0, \quad Y_k^{(1)}(y) = \begin{cases} a_k^{(1)} \operatorname{ch}(\mu_k y) + b_k^{(1)} \operatorname{sh}(\mu_k y), & y > 0; \\ a_k^{(1)} \cos(\mu_k y) + b_k^{(1)} \sin(\mu_k y), & y < 0, \end{cases} \tag{15}$$

$$Y_k^{(2)}(y) = \begin{cases} a_k^{(2)} \cos(\mu_k y) + b_k^{(2)} \sin(\mu_k y), & y > 0; \\ a_k^{(2)} \operatorname{ch}(\mu_k y) + b_k^{(2)} \operatorname{sh}(\mu_k y), & y < 0, \end{cases} \tag{16}$$

где a_0, b_0, $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты.

Отметим, что система $\{X_0(x),\ X_{01}(x),\ X_k^{(1)}(x),\ X_k^{(2)}(x)\}$ не является ортогональной в $L_2[-1,1]$. Поэтому рассмотрим задачу, сопряженную к задаче (6), (8),

$$\operatorname{sgn} x \cdot Z'' + d \cdot Z = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1), \tag{17}$$

$$Z(0-0) = -Z(0+0), \quad Z'(0-0) = -Z'(0+0), \quad Z'(-1) = Z'(1) = 0. \tag{18}$$

Решениями задачи (17), (18) являются функции

$$Z_0(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

$$Z_k^{(1)}(x) \begin{cases} \frac{\cos[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k}, & x > 0; \\ -\frac{\operatorname{ch}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x < 0, \end{cases} \quad Z_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x > 0; \\ -\frac{\cos[\mu_k(x+1)]}{\cos \mu_k}, & x < 0. \end{cases}$$

Система $\{Z_0(x),\ Z_{01}(x),\ Z_k^{(1)}(x),\ Z_k^{(2)}(x)\}$ является биортогонально сопряженной к системе

$$\{X_0(x),\ X_{01}(x),\ X^{(1)}(x),\ X_k^{(2)}(x)\}.$$

Лемма 2. *Система* $\{Z_0,\ Z_{01},\ Z_k^{(1)},\ Z_k^{(2)}\}$ *полна в пространстве* $L_2[-1,1]$.

Доказательство. Следуя [18], введем оператор L, порожденный дифференциальной операцией $l\widetilde{X} = -\widetilde{X}''$ при $x \in (-1,0)$, $l\widetilde{X} = \widetilde{X}''$ при $x \in (0,1)$ на множестве функций, абсолютно непрерывных вместе со своей первой производной на $[-1,0)$, $(0,1]$ и удовлетворяющих условиям (8).

Обратим оператор $L - \lambda I = L - \mu^2 I$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ не является собственным значением оператора L. Пусть функция $\widetilde{X} \in D(L)$ почти всюду на $G = (-1,1)$ является решением уравнения

$$l\widetilde{X} - \mu^2 \widetilde{X} = f(x), \quad f \in L^2(G). \tag{19}$$

Найдем фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего (19):

$$\widetilde{X}_1(x) = \exp(i\mu x), \quad \widetilde{X}_2(x) = \exp(-i\mu x), \quad x \in (-1,0),$$
$$\widetilde{X}_3(x) = \exp(\mu x), \quad \widetilde{X}_4(x) = \exp(-\mu x), \quad x \in (0,1).$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, получим общее решение уравнения (19) в виде

$$\widetilde{X}(x) = C_1\widetilde{X}_1(x) + C_2\widetilde{X}_2(x) + \int_{-1}^{x} f(\xi)\frac{\widetilde{X}_1(x)\widetilde{X}_2(\xi) - \widetilde{X}_1(\xi)\widetilde{X}_2(x)}{\widetilde{X}_1'(\xi)\widetilde{X}_2(\xi) - \widetilde{X}_1(\xi)\widetilde{X}_2'(\xi)}d\xi =$$
$$= C_1\exp(i\mu x) + C_2\exp(-i\mu x) + \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{x} f(\xi)\sin\mu(x-\xi)d\xi, \quad x\in[-1,0], \tag{20}$$

$$\widetilde{X}(x) = C_3\widetilde{X}_3(x) + C_4\widetilde{X}_4(x) + \int_{x}^{1} f(\xi)\frac{\widetilde{X}_3(\xi)\widetilde{X}_4(x) - \widetilde{X}_3(x)\widetilde{X}_4(\xi)}{\widetilde{X}_3'(\xi)\widetilde{X}_4(\xi) - \widetilde{X}_3(\xi)\widetilde{X}_4'(\xi)}d\xi =$$
$$= C_3\exp(\mu x) + C_4\exp(-\mu x) + \frac{1}{\mu}\int_{x}^{1} f(\xi)\,\mathrm{sh}\,\mu(\xi-x)d\xi, \quad x\in[0,1], \tag{21}$$

где C_i – произвольные постоянные. Положим $a(\mu) = \int\limits_{-1}^{0} f(\xi)\sin(\mu\xi)d\xi$, $b(\mu) = \int\limits_{0}^{1} f(\xi)\,\mathrm{sh}(\mu\xi)d\xi$, $c(\mu) = \int\limits_{-1}^{0} f(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi$, $d(\mu) = \int\limits_{0}^{1} f(\xi)\,\mathrm{ch}(\mu\xi)d\xi$.

Подставляя найденные функции (20) и (21) в условия (8), получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{\mu}a(\mu) = C_3 + C_4 + \frac{1}{\mu}b(\mu), \\ C_1 i\mu - C_2 i\mu + c(\mu) = C_3\mu - C_4\mu - d(\mu), \\ C_3 e^{\mu} - C_4 e^{-\mu} = 0, \\ C_1 e^{-i\mu} - C_2 e^{i\mu} = 0, \end{cases}$$

откуда найдем единственное решение

$$C_2 = \frac{1+e^{2\mu}}{\mu A}\big(c(\mu)+d(\mu)\big) + \frac{1-e^{2\mu}}{\mu A}\big(a(\mu)+b(\mu)\big), \tag{22}$$

$$C_3 = \frac{1+e^{2i\mu}}{\mu A}\big(c(\mu)+d(\mu)\big) - \frac{i(1-e^{2i\mu})}{\mu A}\big(a(\mu)+b(\mu)\big), \tag{23}$$

$$C_1 = C_2\,e^{2i\mu}, \quad C_4 = C_3\,e^{2\mu}, \tag{24}$$

где $A = (1-e^{2\mu})(1+e^{2i\mu}) + i(1-e^{2i\mu})(1+e^{2\mu})$.

Подставляя (22)–(24) в (20), для $x\in[-1,0]$ получим

$$\mu\widetilde{X}(x) = \frac{1+e^{2\mu}}{A}\big(c(\mu)+d(\mu)\big)\left(e^{-i\mu x} + e^{2i\mu+i\mu x}\right) +$$
$$+ \frac{1-e^{2\mu}}{A}\big(a(\mu)+b(\mu)\big)\left(e^{-i\mu x} + e^{2i\mu+i\mu x}\right) + \int_{-1}^{x} f(\xi)\sin(\mu(x-\xi))d\xi \tag{25}$$

и соответственно из (21) для $x\in[0,1]$ имеем

$$\mu\widetilde{X}(x) = \frac{1+e^{2i\mu}}{A}\big(c(\mu)+d(\mu)\big)\left(e^{\mu x} + e^{2\mu-\mu x}\right) -$$
$$- \frac{i(1-e^{2i\mu})}{A}\big(a(\mu)+b(\mu)\big)\left(e^{\mu x} + e^{2\mu-\mu x}\right) + \int_{x}^{1} f(\xi)\,\mathrm{sh}(\mu(\xi-x))d\xi. \tag{26}$$

Аналогично [18] можно показать, что для решений (25) и (26) справедлива оценка

$$|\mu\cdot\widetilde{X}(x)| \le C = \mathrm{const}, \tag{27}$$

равномерная по $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ при $\mu_2 < 0$ и $x\in[-1,0]$.

Таким образом, для решения уравнения (19), удовлетворяющего условиям (8), справедлива оценка (27), равномерная по μ при $\mu_2 < 0$ по $x \in [-1,1]$. Аналогично [19], можно установить, что в окрестности каждого собственного значения ν оператора L для функции $X(x)$ справедливо представление

$$\widetilde{X}(x) = -\frac{1}{\lambda-\nu}X(x)\int_{-1}^{1} f(\xi)\overline{Z}(\xi)d\xi + R(x,\lambda), \tag{28}$$

где $X(x)$, $Z(x)$ — собственные функции операторов L и L^*, отвечающие собственному значению ν, а $R(x,\lambda)$ — аналитическая по λ в окрестности точки ν функция.

Выберем в качестве $f(x)$ функцию из $L^2(G)$, ортогональную всем собственным функциям $\{Z(x)\}$ оператора L^*. Согласно (28) главная часть резольвенты оператора $L-\lambda I$ обратится в нуль и функция $\widetilde{X}(x)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости. Но тогда по теореме Фрагмена–Линделефа оценка (27) верна на всей комплексной плоскости (λ), и в силу аналитичности $\widetilde{X}(x)$ будет выполнено тождество $\widetilde{X}(x) \equiv 0$, $x \in \overline{G}$. Тогда в силу (19) получим $f(x) = 0$ на $\overline{G}$. Это означает полноту системы $\{Z_0,\, Z_{01},\, Z_k^{(1)},\, Z_k^{(2)}\}$ в $L_2[-1,1]$. $\square$

Отметим, что в работе [18] рассмотрена задача для уравнения, аналогичного уравнению (6), только коэффициент при старшей производной является кусочно-постоянным с положительными константами.

Лемма 3. *Для систем* $\{X_0,\, X_k^{(1)},\, X_k^{(2)}\}$, $\{Z_0,\, Z_k^{(1)},\, Z_k^{(2)}\}$ *справедливо неравенство Бесселя.*

Лемма 4. *Каждая из систем* $\{X_0,\, X_k^{(1)},\, X_k^{(2)}\}$, $\{Z_0,\, Z_k^{(1)},\, Z_k^{(2)}\}$ *образует базис Рисса в пространстве* $L_2[-1,1]$.

Доказательства лемм 3 и 4 проводятся аналогично [18] на основании теоремы Н.К. Бари [20] и теоремы В.А. Ильина [21].

3. Единственность решения задачи (2)–(5). Следуя [10], рассмотрим функции

$$u_0(y) = \int_{-1}^{1} u(x,y)Z_0(x)dx, \quad u_{01}(y) = \int_{-1}^{1} u(x,y)Z_{01}(x)dx,$$

$$u_k^{(1)}(y) = \int_{-1}^{1} u(x,y)Z_k^{(1)}(x)dx, \quad u_k^{(2)}(y) = \int_{-1}^{1} u(x,y)Z_k^{(2)}(x)dx, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

где $u(x,y)$ — решение задачи (2)–(5). Вычислим вторую производную $\frac{d^2}{dy^2}\big(u_k^{(1)}(y)\big)$, преобразуем ее на основании равенства (1),

$$\frac{d^2}{dy^2}(u_k^{(1)}(y)) = \int_{-1}^{1} u_{yy}(x,y)Z_k^{(1)}(x)dx = \operatorname{sgn} y\int_{-1}^{0} u_{xx}Z_k^{(1)}(x)dx - \operatorname{sgn} y\int_{0}^{1} u_{xx}Z_k^{(1)}(x)dx =$$
$$= -\operatorname{sgn} y\int_{-1}^{0} u_{xx}\frac{\operatorname{ch}(\mu_k(x+1))}{\operatorname{ch}\mu_k}dx - \operatorname{sgn} y\int_{0}^{1} u_{xx}\frac{\cos(\mu_k(x-1))}{\cos\mu_k}dx.$$

После двукратного интегрирования по частям получим равенство

$$\operatorname{sgn} y\cdot(u_k^{(1)})''(y) - d\cdot u_k^{(1)}(y) = 0,$$

совпадающее с уравнением (7). Таким образом, $u_k^{(1)}(y) \equiv Y_k^{(1)}(y)$, $k \in \mathbb{N}$, поэтому $u_k^{(1)}(y)$ определяются по формулам (15). Аналогичное справедливо и для $u_k^{(2)}(y)$, т. е. они определяются по формулам (16). Функция $u_0(y)$ определяется первой из формул (15), функция

$u_{01}(y)$ будет иметь вид

$$u_{01}(y) = \begin{cases} -a_0 y^3/6 - b_0 y^2/2 + c_0 y + d_0, & y > 0; \\ a_0 y^3/6 + b_0 y^2/2 + c_0 y + d_0, & y < 0. \end{cases}$$

Тогда из граничных условий (5) и равенств (29) имеем

$$\begin{gathered} u_0(\beta) = \int_{-1}^{1} u(x,\beta) Z_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \varphi(x) Z_0(x)dx = \varphi_0, \\ u_k^{(1)}(\beta) = \int_{-1}^{1} \varphi(x) Z_k^{(1)}(x)dx = \varphi_k^{(1)}, \quad u_k^{(2)}(\beta) = \int_{-1}^{1} \varphi(x) Z_k^{(2)}(x)dx = \varphi_k^{(2)}, \\ u_{01}(\beta) = \int_{-1}^{1} u(x,\beta) Z_{01}(x)dx = \int_{-1}^{1} \varphi(x) Z_{01}(x)dx = \varphi_{01}, \\ u_0(-\alpha) = \int_{-1}^{1} u(x,-\alpha) Z_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \psi(x) Z_0(x)dx = \psi_0, \\ u_k^{(1)}(-\alpha) = \int_{-1}^{1} \psi(x) Z_k^{(1)}(x)dx = \psi_k^{(1)}, \quad u_k^{(2)}(-\alpha) = \int_{-1}^{1} \psi(x) Z_k^{(2)}(x)dx = \psi_k^{(2)}, \\ u_{01}(-\alpha) = \int_{-1}^{1} u(x,-\alpha) Z_{01}(x)dx = \int_{-1}^{1} \psi(x) Z_{01}(x)dx = \psi_{01}. \end{gathered} \tag{30}$$

На основании (15), (16) и (30) получим системы для нахождения неизвестных коэффициентов a_0, b_0, $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$:

$$\begin{cases} a_0\beta + b_0 = \varphi_0, \\ -a_0\alpha + b_0 = \psi_0, \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} a_k^{(1)} \operatorname{ch}(\mu_k\beta) + b_k^{(1)} \operatorname{sh}(\mu_k\beta) = \varphi_k^{(1)}, \\ a_k^{(1)} \cos(\mu_k\alpha) - b_k^{(1)} \sin(\mu_k\alpha) = \psi_k^{(1)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_k^{(2)} \cos(\mu_k\beta) + b_k^{(2)} \sin(\mu_k\beta) = \varphi_k^{(2)}, \\ a_k^{(2)} \operatorname{ch}(\mu_k\alpha) - b_k^{(2)} \operatorname{sh}(\mu_k\alpha) = \psi_k^{(2)}. \end{cases} \tag{32}$$

Определитель системы (31) $\Delta_0 = \alpha + \beta \neq 0$, поэтому она однозначно разрешима:

$$a_0 = \frac{\varphi_0 - \psi_0}{\alpha + \beta}, \quad b_0 = \frac{\alpha\varphi_0 + \beta\psi_0}{\alpha + \beta}.$$

Если при всех $k \in \mathbb{N}$ определители систем (32) отличны от нуля:

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta) = \cos(\mu_k\alpha) \cdot \operatorname{sh}(\mu_k\beta) + \sin(\mu_k\alpha) \cdot \operatorname{ch}(\mu_k\beta) \neq 0, \tag{33}$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta) = \operatorname{ch}(\mu_k\alpha) \cdot \sin(\mu_k\beta) + \operatorname{sh}(\mu_k\alpha) \cdot \cos(\mu_k\beta) \neq 0, \tag{34}$$

то они имеют единственное решение

$$a_k^{(1)} = \frac{1}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\left[\varphi_k^{(1)} \sin(\mu_k\alpha) + \psi_k^{(1)} \operatorname{sh}(\mu_k\beta)\right], \; b_k^{(1)} = \frac{1}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\left[\varphi_k^{(1)} \cos(\mu_k\alpha) - \psi_k^{(1)} \operatorname{ch}(\mu_k\beta)\right],$$

$$a_k^{(2)} = \frac{1}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}\left[\varphi_k^{(2)} \operatorname{sh}(\mu_k\alpha) + \psi_k^{(2)} \sin(\mu_k\beta)\right], \; b_k^{(2)} = \frac{1}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}\left[\varphi_k^{(2)} \operatorname{ch}(\mu_k\alpha) - \psi_k^{(2)} \cos(\mu_k\beta)\right].$$

Тогда с учетом найденных значений a_0, b_0, $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$ имеем

$$u_0(y) = \frac{\varphi_0(\alpha + y) + \psi_0(\beta - y)}{\alpha + \beta}, \tag{35}$$

$$u_k^{(1)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\left[\varphi_k^{(1)}\Delta_k^{(1)}(\alpha,y) + \psi_k^{(1)}\operatorname{sh}(\mu_k(\beta-y))\right], & y>0; \\ \frac{1}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\left[\varphi_k^{(1)}\sin(\mu_k(\alpha+y)) + \psi_k^{(1)}\Delta_k^{(1)}(-y,\beta)\right], & y<0, \end{cases} \tag{36}$$

$$u_k^{(2)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}\left[\varphi_k^{(2)}\Delta_k^{(2)}(\alpha,y) + \psi_k^{(2)}\sin(\mu_k(\beta-y))\right], & y>0; \\ \frac{1}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}\left[\varphi_k^{(2)}\operatorname{sh}(\mu_k(\alpha+y)) + \psi_k^{(2)}\Delta_k^{(2)}(-y,\beta)\right], & y<0. \end{cases} \tag{37}$$

Пусть $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$ на $[-1,1]$, тогда на основании (30), (35)–(37) получим

$$\int_{-1}^{1} u(x,y)Z_0(x)dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} u(x,y)Z_k^{(j)}(x)dx = 0, \ j=1,2, \ k=1,2,3,\dots .$$

Отсюда в силу полноты системы $\{Z_0,\ Z_k^{(1)},\ Z_k^{(2)}\}$ в $L_2[-1,1]$ вытекает $u(x,y)=0$ для любого $y\in[-\alpha,\beta]$ почти всюду при $x\in[-1,1]$. В силу непрерывности $u(x,y)$ в $\overline{D}$ будет $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β и $k=p\in\mathbb{N}$ имеем $\Delta_p^{(1)}(\alpha,\beta)=0$ или $\Delta_p^{(2)}(\alpha,\beta)=0$. Пусть, например, $\Delta_p^{(1)}(\alpha,\beta)=0$, $\Delta_p^{(2)}(\alpha,\beta)\neq 0$. Тогда однородная задача (2)–(5) (где $\varphi(x)=\psi(x)=0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos[\mu_p(x-1)]\Delta_p^{(1)}(\alpha,y)}{\cos\mu_p\cos(\mu_p\alpha)}, & (x,y)\in D_1; \\ \dfrac{\operatorname{ch}[\mu_p(x-1)]\sin[\mu_p(\alpha-y)]}{\operatorname{ch}\mu_p\cos(\mu_p\alpha)}, & (x,y)\in D_2; \\ \dfrac{\cos[\mu_p(x+1)]\sin[\mu_p(\alpha-y)]}{\cos\mu_p\cos(\mu_p\alpha)}, & (x,y)\in D_3; \\ \dfrac{\operatorname{ch}[\mu_p(x+1)]\Delta_p^{(1)}(\alpha,y)}{\operatorname{ch}\mu_p\cos(\mu_p\alpha)}, & (x,y)\in D_4. \end{cases}$$

Возникает вопрос об обращении определителей $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)$ в нуль. Представим их в виде

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\mu_k\beta)}\sin(\mu_k\alpha + \operatorname{arctg}(\operatorname{th}\mu_k\beta)), \tag{38}$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\mu_k\alpha)}\sin(\mu_k\beta + \operatorname{arctg}(\operatorname{th}\mu_k\alpha)).$$

Докажем, что система

$$\begin{cases} \sin(\mu_k\alpha + \operatorname{arctg}(\operatorname{th}\mu_k\beta)) = 0, \\ \sin(\mu_k\beta + \operatorname{arctg}(\operatorname{th}\mu_k\alpha)) = 0 \end{cases} \tag{39}$$

при каждом фиксированном $k\in\mathbb{N}$ имеет счетное множество решений (α,β). Из (39) получим

$$\begin{cases} \mu_k\alpha + \operatorname{arctg}(\operatorname{th}\mu_k\beta) = \pi m, \\ \mu_k\beta + \operatorname{arctg}(\operatorname{th}\mu_k\alpha) = \pi t, \qquad m,t\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{40}$$

Легко убедиться, например, графически, что система (40) имеет единственное решение (α,β) при каждой паре значений (m,t). Следовательно, система (39) имеет счетное множество корней $\{\alpha_{k,m}\}$, $\{\beta_{k,t}\}$, соответствующих значению μ_k, $k,m,t\in\mathbb{N}$.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)–(5)*, то оно единственно, только если для всех* $k\in\mathbb{N}$ *выполняются условия* $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)\neq 0$*,* $j=1,2$.

4. Существование решения задачи. Из (36) и (37) видно, что выражения $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)$ являются знаменателями дробей и при указанных выше значениях $\{\alpha_{k,m}\}$, $\{\beta_{k,t}\}$ могут обратиться в нуль. Кроме того, даже если α и β отличны от них, то это не гарантирует того, что определитель не будет сколь угодно малым при больших n, т. е. возникает проблема "малых знаменателей". Поэтому для обоснования существования решения задачи (2)–(5) необходимо показать существование чисел α и β таких, что при больших k выражения $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)$ отделены от нуля.

Лемма 5. *Если выполнено одно из следующих условий*:

1) α *— любое натуральное число, кроме чисел вида* $4p-1$, $p\in\mathbb{N}$;

2) α *— любое дробное число, т. е.* $\alpha=p/q$, *где* $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, *число* $q+p$ *не кратно* 4, *то существуют постоянная* $M_1>0$ *и номер* $k_1\in\mathbb{N}$ *такие, что для всех* $k>k_1$ *справедлива оценка*

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)|\ge M_1e^{\pi k\beta}. \tag{41}$$

Доказательство. В представлении (38) имеем

$$\sqrt{\operatorname{ch}(2\mu_k\beta)}>\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\mu_k\beta}\ge m_1\,e^{\pi k\beta},\quad m_1=\mathrm{const}>0. \tag{42}$$

Оценим значения $\sin(\mu_k\alpha+\xi_k)=\Delta_k^{(1,1)}$. Очевидно, $|\Delta_k^{(1,1)}|\ge\big||z_k|-|\Delta_k^{(1,1)}-z_k|\big|$, где $z_k=\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\alpha+\frac{\pi}{4}\right]$, далее

$$|\Delta_k^{(1,1)}-z_k|=\left|\sin(\mu_k\alpha+\xi_k)-\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\alpha+\frac{\pi}{4}\right]\right|=$$
$$=\left|2\sin\frac{\mu_k\alpha+\xi_k-\pi k\alpha-\frac{\pi}{4}\alpha-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{\mu_k\alpha+\xi_k+\pi k\alpha+\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{\pi}{4}}{2}\right|\le$$
$$\le\left|\left(\mu_k-\pi k-\frac{\pi}{4}\right)\alpha+\xi_k-\frac{\pi}{4}\right|\le\left|\left(\mu_k-\pi k-\frac{\pi}{4}\right)\alpha\right|\le m_2e^{-2\pi k},$$

где $m_2>0$ — некоторая постоянная, вообще говоря, зависящая от α, и эта оценка справедлива, начиная с некоторого k_1. Тогда можем оценить выражение $|z_k|$.

1) Пусть $\alpha\in\mathbb{N}$. При $\alpha=2p$ имеем $|z_k|=\sqrt{2}/2$, при $\alpha=4p-3$ имеем $|z_k|=1$, а при $\alpha=4p-1$ будет $|z_k|=0$. То есть $|\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)|\ge M_1e^{\pi k\beta}$ кроме случая $\alpha=4p-1$.

2) Пусть $\alpha=p/q$, $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, $q\ge2$, тогда $|z_k|=\left|\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{p}{q}\right)+\pi\frac{kp}{q}\right]\right|$. Разделим число kp на q с остатком: $kp=sq+r$, где $s,r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0\le r<q$. Тогда

$$|z_k|=\left|\sin\frac{\pi(p+q+4r)}{4q}\right|.$$

Если $p+q$ не кратно 4, то $|z_k|=\mathrm{const}>0$ и $|\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)|\ge M_1e^{\pi k\beta}$.

Если же $p+q$ кратно 4, то может оказаться, что $z_k=0$. □

Лемма 6. *Если выполнено одно из следующих условий*:

1) β *— любое натуральное число, кроме чисел вида* $4p-1$, $p\in\mathbb{N}$;

2) β *— любое дробное число, т. е.* $\beta=p/q$, *где* $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, *число* $q+p$ *не кратно* 4, *то существуют постоянная* $M_2>0$ *и номер* $k_2\in\mathbb{N}$ *такие, что для всех* $k>k_2$ *справедлива оценка*

$$|\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)|\ge M_2e^{\pi k\alpha}. \tag{43}$$

Приведенные в леммах 4 и 5 условия являются существенными и доказывают следующие утверждения.

Лемма 7. *Если α – любое натуральное число вида $4p-1$, $p \in \mathbb{N}$, то существуют положительные постоянные M_3, M_3' и номер $k_3 \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $k > k_3$ при $0 < \beta \le 1$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)| \le M_3 e^{-\pi k\beta}, \tag{44}$$

а при $\beta > 1$ — оценка

$$M_3' e^{\pi k(\beta-2)} \le |\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)| \le M_3 e^{\pi k(\beta-2)}, \quad M_3' < M_3. \tag{45}$$

Доказательство. Имеет место неравенство (42), с другой стороны, справедливо

$$\sqrt{\operatorname{ch}(2\mu_k\beta)} = \sqrt{\frac{e^{2\mu_k\beta} + e^{-2\mu_k\beta}}{2}} \le \sqrt{\frac{e^{2\mu_k\beta}+1}{2}} \le m_2'\, e^{\pi k\beta}, \quad m_2' > m_2.$$

Найдем асимптотику для $\xi_k = \operatorname{arctg}(\operatorname{th}\mu_k\beta)$. Так как $\mu_k\beta = \frac{\pi\beta}{4} + \beta\pi k + O(e^{-2\pi k})$, то в силу (12) получим

$$\operatorname{th}(\mu_k\beta) = 1 - 2e^{-\pi\beta/2 - 2\beta\pi k + O(e^{-2\pi k})} + o(e^{-2\beta\pi k}) = 1 + O(e^{-2\beta\pi k}),$$

тогда $\xi_k = \operatorname{arctg}(\operatorname{th}\mu_k\beta) = \frac{\pi}{4} + O(e^{-2\beta\pi k})$. Поэтому при $\alpha = 4p-1$ имеем

$$|\sin(\mu_k\alpha + \xi_k)| = \left|\sin\left[\left(\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})\right)(4p-1) + \frac{\pi}{4} + O(e^{-2\beta\pi k})\right]\right| =$$
$$= \left|\sin\left(O(e^{-2\pi\beta k}) + O(e^{-2\pi k})\right)\right| \le |O(e^{-2\pi\beta k}) + O(e^{-2\pi k})|.$$

С другой стороны, в силу неравенства $\sin x > \frac{2x}{\pi}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\left|\sin\left(O(e^{-2\pi\beta k}) + O(e^{-2\pi k})\right)\right| \ge |O(e^{-2\pi\beta k}) + O(e^{-2\pi k})|.$$

При $0 < \beta \le 1$ будем иметь $|\sin(\mu_k\alpha + \xi_k)| \le m_3\, e^{-2\pi\beta k}$, а при $\beta > 1$ — $m_3' e^{-2\pi k} \le |\sin(\mu_k\alpha + \xi_k)| \le m_3 e^{-2\pi k}$, $m_3' > 0$, $m_3 > 0$, $m_3' < m_3$, откуда и следует справедливость леммы. □

Лемма 8. *Если α – любое дробное число, т. е. $\alpha = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, число $q + p$ кратно 4, то существуют положительные постоянные M_3, M_3' и номер $k_3 \in \mathbb{N}$ такие, что для бесконечного количества номеров таких, что $k > k_3$, при $0 < \beta \le 1$ справедлива оценка (44), а при $\beta > 1$ — оценка (45).*

Доказательство. Пусть $p + q = 4t$, $t \in \mathbb{Z}$, т. е. $p = 4t - q$. Тогда

$$|\sin(\mu_k\alpha + \xi_k)| = \left|\sin\left[\pi t \frac{4k+1}{q} + O(e^{-2\pi\beta k}) + O(e^{-2\pi k})\right]\right|.$$

Можно доказать, что число $\frac{4k+1}{q}$ является целым для одного из чисел $k = 1, 2, \dots, k = q$. Кроме того, если число $\frac{4k+1}{q}$ является целым при некотором $k = k_0$, то оно будет целым при $k = k_0 + q$. То есть существует бесконечное множество чисел $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|\sin(\mu_k\alpha + \xi_k)| = \left|\sin\left[O(e^{-2\pi\beta k}) + O(e^{-2\pi k})\right]\right|. \qquad \square$$

Если выполнены условия лемм 5, 6, а также условия (33), (34) при $k \le k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, то решение задачи (2)–(5) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y) = u_0(y)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(1)}(y)X_k^{(1)}(x) + u_k^{(2)}(y)X_k^{(2)}(x), \tag{46}$$

где $u_0(y)$, $u_k^{(1)}(y)$, $u_k^{(2)}(y)$ определяются по формулам (35)–(37).

Определим условия на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при которых сумма ряда (46) будет принадлежать классу (2).

Найдем мажоранту для ряда (46). Оценим отдельно выражения $|u_0(y)| \le |\varphi_0| + |\psi_0|$,

$$|u_k^{(1)}(y)| \le \begin{cases} |\varphi_k^{(1)}| \cdot \left|\dfrac{\Delta_k^{(1)}(\alpha, y)}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\right| + |\psi_k^{(1)}| \cdot \left|\dfrac{\operatorname{sh}(\mu_k(\beta - y))}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\right|, & y > 0; \\ |\varphi_k^{(1)}| \cdot \left|\dfrac{\sin(\mu_k(\alpha + y))}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\right| + |\psi_k^{(1)}| \cdot \left|\dfrac{\Delta_k^{(1)}(-y, \beta)}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\right|, & y < 0, \end{cases} \tag{47}$$

$$|u_k^{(2)}(y)| \le \begin{cases} |\varphi_k^{(2)}| \cdot \left|\dfrac{\Delta_k^{(2)}(\alpha, y)}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}\right| + |\psi_k^{(2)}| \cdot \left|\dfrac{\sin(\mu_k(\beta - y))}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}\right|, & y > 0; \\ |\varphi_k^{(2)}| \cdot \left|\dfrac{\operatorname{sh}(\mu_k(\alpha + y))}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}\right| + |\psi_k^{(2)}| \cdot \left|\dfrac{\Delta_k^{(2)}(-y, \beta)}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\right|, & y < 0. \end{cases} \tag{48}$$

Рассмотрим отношения

$$P_k^{(j)}(y) = \frac{\Delta_k^{(j)}(\alpha, y)}{\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)}, \quad Q_k^{(1)}(y) = \frac{\operatorname{sh}(\mu_k(\beta - y))}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}, \quad Q_k^{(2)}(y) = \frac{\sin(\mu_k(\beta - y))}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)},$$

$$M_k^{(1)}(y) = \frac{\sin(\mu_k(\alpha + y))}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}, \quad M_k^{(2)}(y) = \frac{\operatorname{sh}(\mu_k(\alpha + y))}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}, \quad N_k^{(j)}(y) = \frac{\Delta_k^{(j)}(-y, \beta)}{\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)}.$$

Лемма 9. *Если выполнены условия* (33), (34), (41), (43) *при* $k > k_0$, *то для таких* k *справедливы оценки*

$$|P_k^{(j)}(y)| \le C_1^{(j)}, \quad |(P_k^{(j)}(y))'| \le C_2^{(j)} k, \quad |(P_k^{(j)}(y))''| \le C_3^{(j)}\ k^2,$$

$$|Q_k^{(j)}(y)| \le C_4^{(j)}, \quad |(Q_k^{(j)}(y))'| \le C_5^{(j)} k, \quad |(Q_k^{(j)}(y))''| \le C_6^{(j)} k^2,$$

$$|M_k^{(j)}(y)| \le C_7^{(j)}, \quad |(M_k^{(j)}(y))'| \le C_8^{(j)} k, \quad |(M_k^{(j)}(y))''| \le C_9^{(j)} k^2,$$

$$|N_k^{(j)}(y)| \le C_{10}^{(j)}, \quad |(N_k^{(j)}(y))'| \le C_{11}^{(j)} k, \quad |(N_k^{(j)}(y))''| \le C_{12}^{(j)} k^2,$$

где здесь и далее $C_l^{(j)}$ *— положительные постоянные,* $j = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Справедливость оценок следует из неравенств (41) и (43). Докажем некоторые из приведенных оценок:

$$|P_k^{(1)}(y)| = \left|\frac{\cos(\mu_k\alpha)\operatorname{sh}(\mu_k y) + \sin(\mu_k\alpha)\operatorname{ch}(\mu_k y)}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\right| \le \frac{|\operatorname{sh}(\mu_k y) + \operatorname{ch}(\mu_k y)|}{C_0\, e^{\pi k\beta}} \le \frac{e^{\mu_k y}}{C_0 e^{\pi k\beta}} \le C_1^{(1)},$$

$$|(P_k^{(1)}(y))'| = \mu_k \left|\frac{\cos(\mu_k\alpha)\operatorname{ch}(\mu_k y) + \sin(\mu_k\alpha)\operatorname{sh}(\mu_k y)}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)}\right| \le \frac{\mu_k\, e^{\mu_k y}}{C_0\, e^{\pi k\beta}} \le C_2^{(1)} k,$$

$$|(P_k^{(1)}(y))''| = \mu_k^2 |P_k^{(1)}(y)| \le C_3^{(1)} k^2,$$

$$|Q_k^{(2)}(y)| = \left|\frac{\sin(\mu_k(\beta - y))}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}\right| \le \frac{1}{\widetilde{C}_0 e^{\pi k\alpha}} \le C_4^{(2)}.$$

Аналогично доказываются остальные приведенные в лемме оценки. □

С учетом оценок леммы 9 из неравенства (47) получим

$$|u_k^{(1)}(y)| \le \begin{cases} |\varphi_k^{(1)}| \cdot C_1^{(1)} + |\psi_k^{(1)}| \cdot C_4^{(1)}, & y > 0; \\ |\varphi_k^{(1)}| \cdot C_7^{(1)} + |\psi_k^{(1)}| \cdot C_{10}^{(1)}, & y < 0, \end{cases}$$

или

$$|u_k^{(1)}(y)| \le C_{13}^{(1)}(|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}|), \quad y \in [-\alpha, \beta], \tag{49}$$

где $C_{13}^{(1)} = \max\{C_1^{(1)}, C_4^{(1)}, C_7^{(1)}, C_{10}^{(1)}\}$.

Аналогично из (48) будем иметь $|u_k^{(2)}(y)| \le C^{(2)}(|\varphi_k^{(2)}| + |\psi_k^{(2)}|)$, $y \in [-\alpha, \beta]$.

Можно доказать, что для функций $X_k^{(j)}$, $j = 1, 2$, определяемых формулами (14), справедливы оценки

$$|X_k^{(j)}(x)| \le C_{14}^{(j)}, \quad x \in [-1, 1], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{50}$$

тогда из (49) и (50) имеем $|u_k^{(j)}(y)| \cdot |X_k^{(j)}(x)| \le C_{15}^{(j)}(|\varphi_k^{(j)}| + |\psi_k^{(j)}|)$, $j = 1, 2$.

Таким образом, можем записать

$$|u(x,y)| \le |\varphi_0| + |\psi_0| + C\sum_{k=1}^{\infty}(|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}| + |\varphi_k^{(2)}| + |\psi_k^{(2)}|), \quad (x,y) \in \overline{D}, \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Аналогично можно доказать, что первые производные u_x, u_y мажорируются в $\overline{D}$ рядом вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}| + |\varphi_k^{(2)}| + |\psi_k^{(2)}|)$, а производные второго порядка u_{xx}, u_{yy} мажорируются в $\overline{D}_i$ рядом вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2(|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}| + |\varphi_k^{(2)}| + |\psi_k^{(2)}|)$.

Лемма 10. *Пусть функции* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^1[-1,1] \cap C^3[-1,0] \cap C^3[0,1]$, *причем* $\varphi(-1) = \varphi(1) = \psi(-1) = \psi(1) = 0$, $\varphi''(0+0) = -\varphi''(0-0)$, $\psi''(0+0) = -\psi''(0-0)$. *Тогда справедливы соотношения*

$$\varphi_k^{(1)} = \frac{p_k^{(1)}}{\mu_k^3}, \quad \varphi_k^{(2)} = \frac{p_k^{(2)}}{\mu_k^3}, \quad \psi_k^{(1)} = \frac{q_k^{(1)}}{\mu_k^3}, \quad \psi_k^{(2)} = \frac{q_k^{(2)}}{\mu_k^3}, \tag{51}$$

где $p_k^{(j)} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi'''(x) V_k^{(j)}(x)dx$, $q_k^{(j)} = \int\limits_{-1}^{1} \psi'''(x) V_k^{(j)}(x)dx$,

$$V_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x > 0; \\ \dfrac{\mathrm{sh}[\mu_k(x+1)]}{\mathrm{ch}\,\mu_k}, & x < 0, \end{cases} \qquad V_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}[\mu_k(x-1)]}{\mathrm{ch}\,\mu_k}, & x > 0; \\ -\dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям три раза в интеграле второго из равенств (30) с учетом условий леммы:

$$\varphi_k^{(1)} = \int_{-1}^{1} \varphi(x) Z_k^{(1)}(x)dx = \frac{1}{\mu_k^3}\int_{-1}^{0} \varphi'''(x)\frac{\mathrm{sh}(\mu_k(x+1))}{\mathrm{ch}\,\mu_k}dx +$$
$$+ \frac{1}{\mu_k^3}\int_{0}^{1} \varphi'''(x)\frac{\sin(\mu_k(x-1))}{\cos\mu_k}dx = \frac{1}{\mu_k^3}\int_{-1}^{1}\varphi'''(x)V_k^{(1)}(x)dx = \frac{p_k^{(1)}}{\mu_k^3},$$

аналогично доказываются остальные равенства (51). □

Аналогично лемме 3 можно доказать, что для системы $\{V_k^{(1)},\ V_k^{(2)}\}$ справедливо неравенство Бесселя, тогда так как $\varphi'''(x)$ и $\psi'''(x)$ кусочно-непрерывны, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(p_k^{(j)})^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(q_k^{(j)})^2$ сходятся. Тогда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|p_k^{(1)}|+|q_k^{(1)}|+|p_k^{(2)}|+|q_k^{(2)}|),$$

откуда следует равномерная сходимость (46) и рядов, полученных однократным дифференцированием по переменным x и y в $\overline{D}$, а ряды из производных второго порядка сходятся равномерно в замкнутых областях $\overline{D}_i$, $i=\overline{1,4}$.

Если при указанных в леммах 5, 6 числах α и β и некоторых $k=k_1,k_2,\dots,k_l$, где $1\le k_1<k_2<\dots<k_l\le k_0$, одно из выражений $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)=0$ (пусть для определенности $\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)=0$ при этих k_i, $\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)\ne 0$), то для разрешимости первой из систем (32) относительно $a_k^{(1)}$ и $b_k^{(1)}$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\varphi_{k_i}^{(1)}\cos(\mu_{k_i}\alpha)=\psi_{k_i}^{(1)}\operatorname{ch}(\mu_{k_i}\beta),\quad i=\overline{1,l}. \tag{52}$$

Тогда соответствующие частные решения при $k=k_1,k_2,\dots,k_l$ имеют вид

$$\widetilde{u}_k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}\Big(\operatorname{ch}(\mu_k y)+\dfrac{\varphi_k^{(1)}-\operatorname{ch}(\mu_k\beta)}{\operatorname{sh}(\mu_k\beta)}\operatorname{sh}(\mu_k y)\Big), & (x,y)\in D_1;\\ \dfrac{\operatorname{ch}[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}\Big(\cos(\mu_k y)+\dfrac{\varphi_k^{(1)}-\operatorname{ch}(\mu_k\beta)}{\operatorname{sh}(\mu_k\beta)}\sin(\mu_k y)\Big), & (x,y)\in D_2;\\ \dfrac{\cos[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}\Big(\cos(\mu_k y)+\dfrac{\varphi_k^{(1)}-\operatorname{ch}(\mu_k\beta)}{\operatorname{sh}(\mu_k\beta)}\sin(\mu_k y)\Big), & (x,y)\in D_3;\\ \dfrac{\operatorname{ch}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}\Big(\operatorname{ch}(\mu_k y)+\dfrac{\varphi_k^{(1)}-\operatorname{ch}(\mu_k\beta)}{\operatorname{sh}(\mu_k\beta)}\operatorname{sh}(\mu_k y)\Big), & (x,y)\in D_4.\end{cases} \tag{53}$$

Поэтому решение задачи (2)–(5) в этом случае определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y)=u_0(y)+\Big(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}+\dots+\sum_{k=k_{l-1}+1}^{k_l-1}+\sum_{k=k_l+1}^{\infty}\Big)u_k^{(1)}(y)X_k^{(1)}(x)+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(2)}(y)X_k^{(2)}(x)+\sum_{k=k_1,k_2,\dots,k_l}A_k\widetilde{u}_k(x,y), \tag{54}$$

где A_k — произвольные коэффициенты, $\widetilde{u}_k(x,y)$ определяются формулой (53), конечные суммы считаем равными нулю, если нижний предел суммирования больше верхнего.

Аналогичное решение строится в случае, когда при некоторых k будут выполнены условия $\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)=0$, $\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)\ne 0$, или если оба знаменателя обращаются в нуль.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 10 *и выполнены оценки* (41), (43) *при $k>k_0$. Тогда если при указанных в леммах* 5 *и* 6 *значениях α и β при всех $k=\overline{1,k_0}$ выполнены условия* (33), (34), *то существует единственное решение задачи* (2)–(5) *и оно определяется рядом* (46).

Если $\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)=0$ *и* $\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)\neq 0$ *при* $k=k_1,k_2,\dots,k_l\leq k_0$*, то задача* (2)–(5) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (52)*, и решение определяется в виде суммы ряда* (54)*.*

Замечание 1. Для некоторых α, β, например, $\alpha=\beta=1$ или $\alpha=\beta=2$, легко убедиться, что условия (33), (34) выполнены при всех $k\in\mathbb{N}$, т. е. для всех $k\in\mathbb{N}$ выполняются оценки (41), (43). При таких α, β справедлива

Теорема 3. *Если* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 10*, то существует единственное решение задачи* (2)–(5) *и оно определяется рядом* (46)*.*

Замечание 2. При указанных в леммах 7 и 8 значениях α или β решение задачи (2)–(5) нельзя построить в виде суммы ряда.

Литература

[1] Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике* (Наука, М., 1973).

[2] Шабат Б.В. *Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа*, ДАН СССР **112** (3), 386–389 (1957).

[3] Бицадзе А.В. *Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа*, ДАН СССР **122** (2), 167–170 (1958).

[4] Cannon J.R. *Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinious coefficient*, Ann. Mat. Pura Appl. **62**, 371–377 (1963).

[5] Нахушев А.М. *Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области*, Дифференц. уравнения **6** (1), 190–191 (1970).

[6] Солдатов А.П. *Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.* I, Докл. РАН **332** (6), 696–698 (1993).

[7] Солдатов А.П. *Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.* II, Докл. РАН **333** (1), 16–18 (1993).

[8] Жегалов В.И. *О задачах типа Дирихле со сдвигами для уравнения Лаврентьева–Бицадзе*, Тр. семин. по краевым задачам **23**, 81–88 (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1987).

[9] Хачев М.М. *Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа* (Эльбрус, Нальчик, 1998).

[10] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области*, Докл. РАН **413** (1), 23–26 (2007).

[11] Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области*, Изв. вузов. Матем., №4, 45–53 (2007).

[12] Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области*, Изв. вузов. Матем., №11, 43–52 (2009).

[13] Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области*, Дифференц. уравнения **49** (1), 68–78 (2013).

[14] Хайруллин Р.С. *К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением*, Дифференц. уравнения **49** (4), 528–535 (2013).

[15] Сабитов К.Б., Мелишева Е.П. *Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа*, Изв. вузов. Матем., №7, 62–76 (2013).

[16] Ильин В.А. *Единственность и принадлежность* W_2^1 *классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения*, Матем. заметки **17** (1), 91–101 (1975).

[17] Ломов И.С. *Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений*, Дифференц. уравнения **29** (12), 2079–2089 (1993).

[18] Ломов И.С. *Негладкие собственные функции в задачах математической физики*, Дифференц. уравнения **47** (3), 358–365 (2011).

[19] Келдыш М.В. *О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов*, УМН **26** (4), 15–41 (1971).

[20] Бари Н.К. *Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве*, Учен. зап. Московск. ун-та **4** (148), 69–107 (1971).

[21] Ильин В.А. *О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка*, ДАН СССР **273** (5), 1048–1053 (1983).

А.А. Гималтдинова

*доцент, кафедра математического анализа,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, д. 37, г. Стерлитамак, 453103, Россия,*

e-mail: g_alfira@mail.ru

К.В. Курман

*аспирант, кафедра математического анализа,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, д. 37, г. Стерлитамак, 453103, Россия,*

e-mail: kseniakurman@yandex.ru

A.A. Gimaltdinova and K.V. Kurman

Boundary problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation with two internal lines of change of a type

Abstract. We study the problem with boundary conditions of the first and second kind on the boundary of the rectangular area for an equation with two internal perpendicular lines of change of a type. With the use of spectral method we prove the uniqueness and the existence of a solution. Obtained in the process of separation of variables, the eigenvalue problem for an ordinary differential equation is not self-adjoint, and the system of root functions is not orthogonal. We construct corresponding biorthogonal system of functions and prove its completeness, based on which we establish a criterion for the uniqueness of the problem. A solution to the problem is constructed as a sum of biorthogonal series.

Keywords: mixed type equation, mixed boundary-value problem, biorthogonal system functions, completeness, existence and uniqueness of solution.

A.A. Gimaltdinova

*Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis,
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University,
37 Lenin Ave., Sterlitamak, 453103 Russia,*

e-mail: g_alfira@mail.ru

K.V. Kurman

*Postgraduate, Chair of Mathematical Analysis,
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University,
37 Lenin Ave., Sterlitamak, 453103 Russia,*

e-mail: kseniakurman@yandex.ru