Известия вузов. Математика
2016, № 5, с. 93–98

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Ж.Н. ТЕМИРГАЛИЕВА, Н. ТЕМИРГАЛИЕВ

БЫСТРЫЕ "АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ" ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЕТКАХ

Аннотация. На основе алгебраической теории чисел определены дискретные преобразования Фурье, с дальнейшими различными конкретизациями. При этом множества задания дискретной функции связываются с различными оптимизационными задачами, включая метод квази Монте-Карло.

Ключевые слова: идеал, решетка, характеристическая функция решетки, дискретное преобразование Фурье (ДПФ), быстрое преобразование Фурье (БПФ), равномерно распределенные на многомерном единичном кубе сетки, критическая решетка, критический определитель.

УДК: 621.391

Введение. В математике многочисленные применения имеет следующее представление в одномерном случае $s = 1$ характеристической функции решетки $ZN = \{kN : k \in Z\}$ из Z $(N \in Z)$:

$$\chi_{ZN}(m) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \exp\left(2\pi i \frac{k}{N} m\right) \quad (m \in Z) \tag{1}$$

(в частности, равномерная сетка с шагом $\frac{1}{N}$ при интегрировании периодических функций появляется в результате применения именно этого представления).

Дискретное преобразование Фурье — прямое и обратное с последующим построением алгоритмов быстрого преобразования Фурье, предложенные в [1], основано также на равенстве (1) (см., например, [2], с. 171–178).

Данная работа (используемые на протяжении всей статьи обозначения и определения даны в [3]–[5]) посвящена изучению прямых и обратных s-мерных дискретных преобразований Фурье:

$$\widehat{f}(m) = \frac{1}{|\det d|} \sum_{k \bmod \mathrm{Z}^s d'} f\left(k\left(d'\right)^{-1}\right) e^{-2\pi i\left(m, k(d')^{-1}\right)} \left(m \bmod \mathrm{Z}^s d\right) \tag{2}$$

и

$$f\left(t\left(d'\right)^{-1}\right) = \sum_{m \bmod \mathrm{Z}^s d} \widehat{f}(m)\, e^{2\pi i\left(t, md^{-1}\right)} \left(t \bmod \mathrm{Z}^s d'\right) \tag{3}$$

соответственно, где, как обычно, здесь и всюду ниже приписка "$\alpha \bmod \wp$" к знаку суммы будет означать, что индекс α, по которому производится суммирование, должен пробежать полную систему вычетов $\bmod \wp$, d есть произвольная невырожденная целочисленная $(s \times s)$-матрица, а d' транспонирована по отношению к ней.

Поступила 26.10.2015

Также напомним определение $\mathrm{mod}\wp = \mathrm{mod}A_s\,(d)$ — полной системы представителей классов вычетов по модулю заданного невырожденной целочисленной матрицей d идеала $\wp$ из кольца A_s (см., например, [6] и ниже п. 2).

def 1. Пусть $a \in A_s$ и $b \in A_s$. Говорят, что a сравнимо с b по модулю $\wp$ (в обозначении $a \equiv b\,(\mathrm{mod}\wp)$), если $(a-b) \in \wp$.

def 2. Пусть $a \in A_s$. Классом K_a по данному модулю $\wp$ называется множество, составленное из всех b из A_s таких, что $a \equiv b\,(\mathrm{mod}\wp)$.

Для разных a классы $\{K_a\}$ либо совпадают, либо не пересекаются.

def 3. Вычетом класса K_a по модулю $\wp$ называется любое из чисел $b \in A_s$ из класса K_a.

def 4. Полной системой представителей классов вычетов по модулю $\wp$ (в количестве $N\wp = |\det d|$), или, коротко, полной системой вычетов (в обозначении $\mathrm{mod}\wp$) называется множество, составленное из элементов A_s взятых по одному из разных классов K_a по этому модулю.

Отметим, что преобразования (2), (3) определены на основе представления характеристической функции произвольного идеала в [3], являющегося далеко идущим обобщением равенства (1).

Тем самым, согласно (2), (3), устанавливается взаимоодназначное соответствие

$$\left\{f\left(t(d')^{-1}\right) : t \bmod \mathrm{Z}^s d'\right\} \to \left\{\widehat{f}(m) : m \bmod \mathrm{Z}^s d\right\}.$$

Важным фактором данного исследования является возможность построения прямых и обратных преобразований Фурье со специальными свойствами.

Именно, и в этом фактически заключены новые дополнения к известному, для всякого конечного множества $E \subset \mathrm{Z}^s$ определитель d и решетка $\mathrm{Z}^s d$ в (2), (3) могут быть выбраны равными или близкими к критическим (подробности см. в [4] и [7]).

Последнее в контексте численного интегрирования тесно связано с классами 1-периодических по каждой из своих s переменных функций с абсолютно сходящимися тригонометрическими рядами Фурье, спектр “больших коэффициентов Фурье” которых есть E (подробности см. ниже в п. 7). Тем самым, полученные здесь результаты можно понимать как обеспечение таких классов функций дискретными преобразованиями Фурье, более того — быстрыми.

Особого внимания заслуживает случай, когда множества E есть “гиперболические кресты” из Z^s, поскольку тогда в (3) множества $(\mathrm{mod}Z^s \cdot d') \cdot \left((d')^{-1}\right)$ равномерно распределены на $[0,1]^s$, что означает внедрение быстрых преобразований Фурье в сферу применений метода квази Монте-Карло.

Заметим, что многомерные ДПФ в [8], [9] определены повторным s-кратным применением представления (1).

1. Характеристические функции целочисленных решеток евклидового пространства в контексте теории дивизоров. В силу соответствия

$$A_s \ni m = m_1\omega_1 + \cdots + m_s\omega_s \to (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s,$$

где $s = l-1$, $l \geq 3$ простое, $\theta = e^{i\frac{2\pi}{l}}$, $\omega_j = \theta^{j-1}$ $(j = 1, \ldots, s)$, всякая невырожденная целочисленная $(s \times s)$-матрица

$$d = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{s1} & \ldots & c_{ss} \end{pmatrix} = (c_{kj})_{k,j=1}^{s}$$

устанавливает изоморфизм между полными решетками $\wp = A_s(d) = \{m_1\gamma_1 + \dots + m_s\gamma_s : (m_1, \dots, m_s) \in Z^s\}$ из A_s с базисом $\gamma_k = \sum\limits_{j=1}^{s} c_{kj}\omega_j$ $(k = 1, \dots, s)$ и $Z^s d$ в Z^s,

$$Z^s d = \left\{ \left(\sum_{k=1}^{s} m_k c_{k1}, \dots, \sum_{k=1}^{s} m_k c_{ks} \right) \in Z^s : (m_1, \dots, m_s) \in Z^s \right\}.$$

В этих обозначениях справедлива (см. также [3], лемма 2)

Теорема 1. *Пусть дана целочисленная невырожденная $(s \times s)$-матрица d. Тогда имеет место представление*

$$\chi_{Z^s d}(m) = \frac{1}{|\det d|} \sum_{\alpha \bmod Z^s d'} e^{2\pi i \left(m, \alpha (d')^{-1}\right)} \quad (m \in Z^s), \tag{4}$$

где $(d')^{-1}$ — обратная к d' матрица.

2. Взаимно обратные дискретные преобразования Фурье. Пусть дана невырожденная целочисленная $(s \times s)$-матрица d. Пусть на $|\det d|$-точечном множестве $(\bmod Z^s d') \times (d')^{-1}$ определена функция f. Определим ДПФ посредством равенства (2) и, из соображений симметрии, обратное ДПФ — из (3).

Как это следует из представления (4), преобразования (2), (3) действительно соответствуют своему наименованию.

Теорема 2. *Преобразования* (2) *и* (3) *взаимно обратны.*

3. Прямые и обратные ДПФ, заданные посредством треугольных целочисленных матриц. Базис решетки определяется неоднозначно: если $\wp = A_s(d)$, то для всякой целочисленной $(s \times s)$-матрицы u с определителем $\det u = \pm 1$ имеет место равенство $\wp = A_s(ud)$ (см., например, [7], с. 21–22).

Для всякой целочисленной невырожденной матрицы d по отношению к стандартному базису $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_s = (0, 0, \dots, 1)$ решетки Z^s (и соответствующему базису $\omega_1, \dots, \omega_s$ идеала A_s) для решетки $Z^s \cdot d$ из Z^s (идеала $\wp = A_s(d)$ из A_s) базис $\tau_1, \dots, \tau_s$ можно выбрать так, что ([7], с. 22)

$$\begin{array}{l} \tau_1 = \upsilon_{11} e_1 \\ \tau_2 = \upsilon_{21} e_1 + \upsilon_{22} e_2 \\ \quad \dots \\ \tau_s = \upsilon_{s1} e_1 + \upsilon_{s2} e_2 + \dots + \upsilon_{ss} e_s \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} \gamma_1 = \upsilon_{11}\omega_1 \\ \gamma_2 = \upsilon_{21}\omega_1 + \upsilon_{22}\omega_2 \\ \quad \dots \\ \gamma_s = \upsilon_{s1}\omega_1 + \upsilon_{s2}\omega_2 + \dots + \upsilon_{ss}\omega_s \end{array} \right). \tag{5}$$

Базисы вида (5) технически весьма полезны тем обстоятельством, что в явном виде выписывается полная система вычетов, что делает (2), (3) преобразованиями прямого применения (в том смысле, что отпадает необходимость нахождения $\bmod \wp$ и $\bmod Z^s \cdot d$). Действительно, для нижней треугольной целочисленной матрицы

$$d = (v_{kj})_{k,j=1}^{s},$$

где $\nu_{11} > 0$, $0 \le \nu_{kj} < \nu_{kk}$ $(k = 2, \dots, s,\ j = 1, \dots, k-1)$, $\nu_{kj} = 0$ $(k = 1, \dots, s-1,\ j = k+1, \dots, s)$, множество $\bmod \wp = \bmod A_s(d) \to \bmod Z^s d$ есть

$$\bmod Z^s d = \{\beta \equiv (\beta_1, \dots, \beta_s) \in Z^s : 0 \le \beta_j < v_{jj} \ \ (j = 1, \dots, s)\}. \tag{6}$$

4. Прямые и обратные дискретные “алгебраические”преобразования Фурье (Д“а”ПФ) с простым $p = \det d$. Пусть нижняя треугольная целочисленная матрица $d = (v_{kj})_{k,j=1}^{s}$ с неотрицательными членами такова, что $\det d = p$, где $p > 2$ — простое

число. Тогда $p = v_{11} \cdots v_{ss}$, поэтому существует такой номер j_0, что $p = v_{j_0 j_0}$ и $v_{jj} = 1$ ($j \neq j_0$, $j = 1, \ldots, s$). Далее, в силу (6)

$$\begin{aligned} &\mathrm{mod}\ \wp' \equiv \mathrm{mod} A_s\left(d'\right) = \\ &\quad \left\{\alpha^{(n)} = 0 \cdot \omega_1 + \cdots + 0 \cdot \omega_{j_0-1} + n \cdot \omega_{j_0} + 0 \cdot \omega_{j_0+1} + \cdots + 0 \cdot \omega_s : n = 1, \ldots,\ p\right\} \to \\ &\qquad \to \left\{\left(0, \ldots, 0, \underset{j_0}{n}, \ldots, 0\right) \in Z^s : n = 1, \ldots, p\right\} = \mathrm{mod} Z^s d', \end{aligned} \quad (7)$$

т. е. множество $\alpha^{(n)} = n\omega_{j_0}$ $(n = 1, \ldots, p)$ образует полную систему представителей классов вычетов $\mathrm{mod}\wp' \equiv A_s\left(d'\right)$.

Отсюда, при некотором подлежащем вычислению векторе $a = (a_1, \ldots, a_s)$ с целыми компонентами (что есть сформулированная в [10] известная проблема, в определенном смысле решенная в [3]–[5]) представление (4) будет иметь вид

$$\chi_\wp\left(m\right) = \chi_{A_s(d)}\left(m\right) = \chi_{Z^s d}\left(m\right) = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} e^{2\pi i \frac{n}{p}(m,a)} = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} e^{2\pi i \frac{n}{p}(m_1 a_1 + \cdots + m_s a_s)}. \quad (8)$$

Отметим, что при $s = 1 = a_1$ представление (8) сводится к (1). Соответствующие (8) взаимообратные прямые и обратные Д“а”ПФ (2), (3) будут следующими (см. также (7)):

$$\begin{aligned} \widehat{f}\left(m\right) &= \widehat{f}\left(0, \ldots, 0, \underset{j_0}{n}, 0, \ldots, 0\right) = \widehat{f}_{j_0}\left(n\right) = \\ &= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{k}{p}a_1\right\}, \ldots, \left\{\frac{k}{p}a_s\right\}\right) e^{-2\pi i n \frac{k}{p} a_{j_0}} \quad (n = 1, 2, \ldots, p) \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} &f\left(\left\{\frac{t}{p}a_1\right\}, \ldots, \left\{\frac{t}{p}a_s\right\}\right) = \\ &\quad = \sum_{n=1}^{p} \widehat{f}\left(0, \ldots, 0, \underset{j_0}{n}, 0, \ldots, 0\right) e^{2\pi i t \frac{n}{p} a_{j_0}} = \sum_{n=1}^{p} \widehat{f}_{j_0}\left(n\right) e^{2\pi i t \frac{n}{p} a_{j_0}} \quad (t = 1, 2, \ldots, p), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\{y\}$ — дробная часть числа y.

Замечание. В преобразованиях (9) и (10) значение индекса j_0, и потому величины a_{j_0} существенны, поскольку по условию $\det d = p$ и решетка $A_s(d)$ определяется неоднозначно: если треугольные целочисленные матрицы $d_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ a & p \end{smallmatrix}\right)$ и $d_2 = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right)$ при $p > 1$ связаны равенством $d_1 = V d_2$, то матрица $V = (v_{ij})_{i,j=1,2}$ из-за равенства $p \cdot v_{22} = 1$ не может быть целочисленной, тем более унимодулярной (приведенный двумерный случай не ограничивает общности).

Процедура построения базиса (5) и, как следствие, вычисления значения j_0 в (7)–(10) по простому p дана в [4].

Далее, согласно [3]–[4], по произвольному конечному множеству $E \subset Z^s$ ($s = l - 1$, $l \geq 3$ — простое число) за $\ll \left[\sum\limits_{m \in E^*} \ln N\left(m\right)\right] \ln\ln \left[\sum\limits_{m \in E^*} \ln N\left(m\right)\right]$ элементарных арифметических операций (при $1 \leq s \leq 18$ см. [3] и при произвольных s – [4]) находятся простое число p, $p \equiv 1\,(\mathrm{mod} l)$, $p \ll \sum\limits_{m \in E^*} \ln N\left(m\right)$, целые числа $a_1 = a_1\left(p\right), \ldots, a_s = a_s\left(p\right)$ и идеал $\wp =$

$A_s(d) \subset A_s(Z^s \cdot d \subset Z^s)$ такой, что $N\wp = |\det d| = p$, $\wp \bigcap E^* = \varnothing$, где $E^* = E \setminus \{0\}$ и $N(m) = \prod\limits_{k=1}^{s} \left(m_1 + m_2\theta^k + \dots + m_s\theta^{(s-1)k}\right)$.

Таким образом, для всякого конечного множества $E \subset Z^s$ определены взаимообратные Д“а”ПФ (9)–(10) с $\widehat{f}(m)$, определенном на таком $\mathrm{mod}\wp$, что $\wp \bigcap E^* = \varnothing$ и $N\wp \ll \sum\limits_{m \in E^*} \ln N(m)$.

При этом значение индекса j_0 в них зависит от идеала $\wp$, выбранного с как можно меньшей нормой $N\wp$ такой, что $N\wp$ не делит $N(m)$ для всякого $m \in E^*$.

5. Дискретные “алгебраические” преобразования Фурье как быстрые преобразования Фурье. Следуя Рейдеру [11] можно показать, что Д“а”ПФ есть Б“а”ПФ:

Теорема 3. *Пусть $p > 2$ — простое число. Вычисление p-точечного Д“а”ПФ* (9), (10) *производится за $\succ\prec p \log p$ элементарных арифметических операций.*

6. Равномерно распределенные сетки и заданные на них Б“а”ПФ. Взаимообратные преобразования в случае, когда конечное множество $E \subset Z^s$ в п. 4 есть “гиперболический крест” ($\bar{m}_j = \max\{1; |m_j|\}$),

$$E = \Gamma_R = \{(m_1, \dots, m_s) : \overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \le R\} \quad (R \ge 1), \tag{11}$$

соединяют два самостоятельных раздела математики — это метод квази-Монте-Карло и быстрые преобразования Фурье, поскольку соответствующая сетка

$$\left(\left\{\frac{t}{p}a_1\right\}, \dots, \left\{\frac{t}{p}a_s\right\}\right) \quad (t = 1, \dots, p) \tag{12}$$

— множество, на котором задаются функции, для которых определены Д“а”ПФ (9), (10) (и дальнейшие их конкретизации), будет равномерно распределена на единичном кубе $[0,1]^s$.

Именно, описанная в конце п. 4 процедура в случае (11) приводит к целым числам $a_1, ..., a_s$ таким, что сетка (12) будет равномерно распределенной на $[0,1]^s$ (причем, если в [3], [4] даны близкие к оптимальным алгоритмы, когда p узлов в сетке (12) находятся за $\ll p \log\log p$ элементарных арифметических операций, то в [5] приведен метод вычислительных экспериментов в той же задаче).

7. Заключительный комментарий. Обращение к произвольному конечному множеству $E \subset Z^s$ объясняется следующим. Если F — какой-либо класс 1-периодических по каждой из s переменных функций (в их числе — индивидуальная функция) с абсолютно сходящимися тригонометрическими рядами Фурье, то ряд аппроксимативных задач разного содержания сводится к построению решетки с как можно меньшим значением модуля ее определителя такой, что со спектром “больших коэффициентов Фурье класса”

$$E = E_\varepsilon = \left\{ m \in Z^s : \sup_{f \in F} \left| \int_{[0,1]^s} f(x)\, e^{-2\pi i (m,x)} dx \right| \ge \varepsilon \right\} \quad (\varepsilon > 0)$$

пересекается самое большее по нулевому элементу $0 \in Z^s$.

Затем, как об этом говорилось в п. 4, выписывается сетка вида (12) в (9), (10). По этим же сеткам строятся квадратурные формулы и операторы восстановления, к числу которых присоединяются и Д“а”ПФ со своей сферой применений.

Не исключено, что эффект в численном интегрировании [3]–[4], когда s-мерные квадратурные формулы с равными весами и с равнораспределенной сеткой в степенной шкале в s раз лучше таких же s-мерных квадратурных формул, но с равномерной сеткой, соответствующим образом переносится и на случай Д“а”ПФ и ДПФ из [8], [9].

Дальнейшее развитие и применения Д“а”ПФ планируются в последующих публикациях.

Литература

[1] Cooley J.W. and Tukey J.W. *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series,* Mathematics of Computation **19** (90), 297–301 (1965).

[2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Н. *Численные методы* (БИНОМ. Лаборатория знаний, М., 2007).

[3] Темиргалиев Н. *Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных*, Матем. сб. **181** (4), 490–505 (1990).

[4] Баилов Е.А., Сихов М.Б., Темиргалиев Н. *Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **54** (7), 1059–1077 (2014).

[5] Жубанышева А.Ж., Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. *Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул,* Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **49** (1), 14–25 (2009).

[6] Гекке Э. *Лекции по теории алгебраических чисел* (ГИТТЛ, М.–Л., 1940).

[7] Грубер П.М., Леккеркеркер К.Г. *Геометрия чисел.* Пер. с англ. (Наука, М., 2008).

[8] Нуссбаумер Г. *Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток.* Пер. с англ. (Радио и связь, М., 1985).

[9] Блейхут Р. *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.* Пер. с англ. (Мир, М., 1989).

[10] Wang Yuan. *Number theoretic method in numerical analysis*, Contemporary Mathematics **77**, 63–82 (1988).

[11] Rader C.M. *Discrete Fourier transforms when the number of data samples is prime*, Proc. IEEE **56** (6), 1107–1108 (1968).

Ж.Н. Темиргалиева

Университет Южной Калифорнии,
Лос-Анджелес, США,

e-mail: temirgal@usc.edu

Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Сатпаева, д. 2, г. Астана, 010008, Республика Казахстан,

e-mail: ntmath10@mail.ru

Zh.N. Timergaliyeva and N. Timergaliyev

Rapid "algebraic" Fourier transforms on uniformly distributed meshes

Abstract. Based on algebraic theory of number, we determine discrete Fourier transforms with further concrete definitions. At that, the sets of specification of discrete function are interconnected with various optimization problems, quasi-Monte Carlo method including.

Keywords: ideal, mesh, characteristic function of mesh, discrete Fourier transform (DFT), rapid Fourier transform (RFT), meshes uniformly distributed on multidimensional unit cube, critical mesh, critical determinant.

Zh.N. Temirgaliyeva
University of Southern California,
Los Angeles, CA, USA,

e-mail: temirgal@usc.edu

N. Temirgaliyev
Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computing,
L.N. Gumilyov Eurasian National University,
2 Satpayev str., Astana, 010008 Republic of Kazakhstan,

e-mail: ntmath10@mail.ru