Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2015, № 11, с. 3–22 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

С.Б. ВАКАРЧУК, А.В. ШВАЧКО

НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К АППРОКСИМАЦИИ “УГЛОМ”

Аннотация. Для функций двух переменных получены точные неравенства колмогоровского типа для частных и смешанных промежуточных производных. Также рассмотрены приложения указанных результатов к некоторым задачам аппроксимации функций двух переменных “углом” и получен ряд точных в определенном смысле соотношений.

Ключевые слова: полиномы Эрмита, ряд Фурье–Эрмита, неравенства колмогоровского типа, наилучшее приближение “углом”, обобщенный полином.

УДК: 517.5

1. С начала 20-го века у многих математиков, начиная с Э. Ландау, Ж. Адамара, Г. Харди, Дж. Литтльвуда, А.Н. Колмогорова, особый интерес вызывает получение точных неравенств для норм промежуточных производных функции через норму ее старшей производной. Современное развитие указанного направления теории функций связано с работами В.В. Арестова, С.Б. Стечкина, Л.В. Тайкова, В.Н. Габушина, В.М. Тихомирова, Н.П. Корнейчука, Г.Г. Магарил-Ильяева и других (см., например, [1], п. 6 и список приведенной там литературы). В случае функций нескольких переменных получено значительно меньше окончательных в том или ином смысле результатов, чем для функций одного переменного. Первый точный результат, касающийся мультипликативных неравенств типа Ландау–Колмогорова, для функций двух переменных был получен В.Н. Коноваловым в 1976 г. [2]. Напомним его. Обозначим через $\mathfrak{N}^{(3,3)}(\mathbb{R}^2)$, где $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} := \{(x, y) : -\infty < x,\, y < \infty\}$, класс функций f, имеющих при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}$ локально абсолютно непрерывную производную $f^{(2,0)}(x, y) := \partial^2 f(x, y)/\partial x^2$, а при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ — локально абсолютно непрерывную производную $f^{(0,2)}(x, y) := \partial^2 f(x, y)/\partial y^2$ и таких, что следующие величины являются конечными:

$$\|f\| := \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x, y)|,$$
$$\big\|f^{(3,0)}\big\| := \sup_{y\in\mathbb{R}}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \big|f^{(3,0)}(x, y)\big|,$$
$$\big\|f^{(0,3)}\big\| := \sup_{x\in\mathbb{R}}\ \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}} \big|f^{(0,3)}(x, y)\big|.$$

Поступила 14.03.2014

Полагая $f^{(1,0)}(x,y) := \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $f^{(0,1)}(x,y) := \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $f^{(1,1)}(x,y) := \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, $\|f^{(1,1)}\| := \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f^{(1,1)}(x,y)|$, для произвольной функции $f \in \mathfrak{N}^{3,3}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\|f^{(1,1)}\| \leqslant \sqrt[3]{3}\, \|f\|^{1/3}\, \|f^{(0,3)}\|^{1/3}\, \|f^{(3,0)}\|^{1/3}, \qquad (1)$$

причем данное неравенство является неулучшаемым в том смысле, что существует функция из рассматриваемого класса, обращающая (1) в равенство. Этот результат и общая теорема о наилучшем приближении линейных функционалов, доказанная В.Н. Габушиным [3], позволили А.П. Буслаеву [4] и О.А. Тимошину [5] найти экстремальный оператор в соответствующей задаче С.Б. Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами.

Следующий точный результат, полученный В.Г. Тимофеевым в работе [6] и касающийся функций m $(m \geqslant 2)$ переменных, сформулируем в общем случае. Пусть $\mathbb{R}^m := \mathbb{R} \otimes \cdots \otimes \mathbb{R} = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) : -\infty < x_j < \infty,\ j = \overline{1,m}\}$ — m-мерное евклидово пространство, $C(\mathbb{R}^m)$ — пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^m$ функций с нормой $\|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} := \sup\{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}$, $L_p(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство измеримых на $\mathbb{R}^m$ функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^m)} := \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{1/p},$$

где $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_m$. В случае $p = \infty$ под $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ понимаем пространство измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{R}^m$ функций с нормой $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^m)} := \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} |f(\mathbf{x})|$. Обозначим через U класс функций $f \in C(\mathbb{R}^m)$, для которых значение оператора Лапласа

$$\triangle f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}$$

принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}^m)$. При этом $\triangle f$ понимается в смысле Соболева. Под U_1 понимаем класс функций $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, значения оператора Лапласа которых также принадлежат $L_1(\mathbb{R}^m)$. В работе [6] показано, что функции из классов U и U_1 удовлетворяют следующим неравенствам соответственно:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{C(\mathbb{R}^m)} \leqslant \sqrt{2} \|f\|^{1/2}_{C(\mathbb{R}^m)}\, \|\triangle f\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbb{R}^m)}, \quad j = \overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L_1(\mathbb{R}^m)} \leqslant \sqrt{2} \|f\|^{1/2}_{L_1(\mathbb{R}^m)}\, \|\triangle f\|^{1/2}_{L_1(\mathbb{R}^m)}, \quad j = \overline{1,m}. \qquad (3)$$

При этом неравенства (2) и (3) являются точными на классах U и U_1 в указанном выше смысле.

2. Данная статья продолжает тематику, указанную в п. 1, и может, в определенном смысле, рассматриваться как распространение одного результата И.В. Бердниковой и С.З. Рафальсона [7] на случай функций двух переменных. Напомним этот результат.

Пусть $L_2(\mathbb{R})$ — пространство вещественных измеримых функций, суммируемых на действительной оси $\mathbb{R}$ с квадратом. Обозначим через $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, где $\rho(x) := \exp(-x^2/2)$, множество функций f таких, что $f \cdot \rho \in L_2(\mathbb{R})$. Норма в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$\|f\|_{L_{2,\rho}(\mathbb{R})} := \left\{ \int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\rho(x)\big)^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Пусть $\{\widehat{H}_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормированная на прямой $\mathbb{R}$ с весом ρ^2 система многочленов Эрмита (см., например, [8]), где

$$\widehat{H}_k(x) := (-1)^k\, 2^{-k/2}\, (k!)^{-1/2}\, \pi^{-1/2}\, e^{x^2}\, \frac{d^k(e^{-x^2})}{dx^k}.$$

Представим функцию $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ в виде разложения в ряд Фурье по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\, \widehat{H}_k(x),$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, а

$$c_k(f) := \int_{\mathbb{R}} \rho^2(x) f(x) \widehat{H}_k(x) dx \quad (k \in \mathbb{Z}_+)$$

есть коэффициенты Фурье–Эрмита функции f.

Полагаем $\beta_{j,r} := j(j-1)\cdots(j-r+1)$, где $j \geqslant r$. В работе [7] было показано, что если $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$, — натуральное число и заданная на вещественной оси $\mathbb{R}$ функция f обладает следующими свойствами: 1) $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке, 2) $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, 3) $c_k(f) = 0$ для $k = \overline{r-\nu, r-1}$, то имеет место неравенство

$$\big\|f^{(r-\nu)}\big\|_{L_{2,\rho}(\mathbb{R})} \leqslant \left(\frac{\beta_{r,r-\nu}}{\beta_{r,r}^{1-\nu/r}}\right)^{1/2} \|f\|_{L_{2,\rho}(\mathbb{R})}^{\nu/r} \big\|f^{(r)}\big\|_{L_{2,\rho}(\mathbb{R})}^{1-\nu/r}. \tag{4}$$

Отметим, что неравенство (4) является точным в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, удовлетворяющая свойствам 1)–3) и обращающая (4) в равенство.

3. Распространим изложенный в п. 2 результат (4) на случай вещественных функций двух переменных и рассмотрим его приложения к некоторым задачам теории аппроксимации "углом". Однако предварительно введем необходимые понятия и определения и докажем одну вспомогательную лемму. Обозначим через $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, где $\widetilde{\rho}(x,y) := \exp\big(-(x^2+y^2)/2\big)$, множество вещественных измеримых функций f таких, что $f\cdot\widetilde{\rho} \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$. Норма в данном пространстве определяется равенством

$$\|f\|_{2,\widetilde{\rho}} := \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \big(f(x,y)\widetilde{\rho}(x,y)\big)^2 dx\, dy \right\}^{1/2}. \tag{5}$$

Для функции $f \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ запишем ее разложение в двойной ряд Фурье–Эрмита

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(f) \widehat{H}_j(x) \widehat{H}_k(y), \tag{6}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, а

$$c_{jk}(f) := \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{\rho}^2(x,y) f(x,y) \widehat{H}_j(x) \widehat{H}_k(y) dx\, dy, \tag{7}$$

где $j,k \in \mathbb{Z}_+$, есть коэффициенты Фурье–Эрмита функции f.

Напомним необходимые сведения об абсолютно непрерывных функциях двух переменных (см., например, [9]). Пусть на двумерном промежутке $\widetilde{\delta} := \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ задана непрерывная функция F. Построим с помощью F функцию промежутков $\varphi(\delta)$, содержащихся в $\widetilde{\delta}$, а именно, если двумерный промежуток $\delta := \{(x,y) : x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2\}$

принадлежит $\widetilde{\delta}$, то

$$\varphi(\delta) := F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \tag{8}$$

Функция промежутков φ называется абсолютно непрерывной, если любому заданному положительному числу ε отвечает такое положительное число η, что если δ_k, где $k = \overline{1, n}$, есть попарно не налегающие друг на друга двумерные промежутки, сумма площадей которых не превосходит η, то

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varphi(\delta_k) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Функция F называется абсолютно непрерывной функцией двух переменных (x, y), если функция промежутков φ, определяемая формулой (8), является абсолютно непрерывной, и, если, кроме того, $F(a, y)$ и $F(x, c)$ — абсолютно непрерывные функции от y и x соответственно. Если F — абсолютно непрерывная функция своих переменных (x, y), то она есть абсолютно непрерывная функция x при любом фиксированном значении y и абсолютно непрерывная функция y при любом фиксированном значении x. Обратное утверждение неверно.

Всякая абсолютно непрерывная функция F может быть представлена формулой

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(t, \tau) dt\, d\tau + \int_a^x g(t) dt + \int_c^y h(\tau) d\tau + F(a, c). \tag{9}$$

В силу формулы (9) частные производные от абсолютно непрерывной функции F имеют вид

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_c^y f(x, \tau) d\tau + g(x), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \int_a^x f(t, y) dt + h(y),$$

а смешанная производная второго порядка есть

$$F^{(1,1)}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right) = f(x, y).$$

Отметим, что если частные производные $F^{(1,0)}$ и $F^{(0,1)}$ сами являются абсолютно непрерывными функциями двух переменных, то можем определить все частные производные второго порядка. Если же и те, в свою очередь, — абсолютно непрерывные функции двух переменных, то определяем все производные третьего порядка и так далее.

Символом $L^{0,s}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, $s \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, частные производные $f^{(0,s-1)}$ которых локально абсолютно непрерывны по $y \in \mathbb{R}$ при почти всех (п. в.) $x \in \mathbb{R}$ и $f^{(0,s)} \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$. Под $L^{r,0}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, $r \in \mathbb{N}$, понимаем класс функций $f \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, частные производные $f^{(r-1,0)}$ которых локально абсолютно непрерывны по $x \in \mathbb{R}$ при п. в. $y \in \mathbb{R}$ и $f^{(r,0)} \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$. Через $L^{r,s}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, где $r, s \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, частные производные $f^{(r-1,s-1)}$ которых локально абсолютно непрерывны по двум переменным, а производные $f^{(r,s)}$, $f^{(r,s-1)}$ и $f^{(r-1,s)}$ принадлежат пространству $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$.

4. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция f принадлежит классу $L^{0,s}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, где $s \in \mathbb{N}$, и имеет разложение в ряд Фурье–Эрмита* (6)*. Тогда*

$$f^{(0,s)}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=s}^{\infty} c_{jk}(f) 2^{s/2}\, \beta^{1/2}_{k,s}\, \widehat{H}_j(x) \widehat{H}_{k-s}(y). \tag{10}$$

Для функции f из класса $L^{r,0}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, где $r \in \mathbb{N}$, имеем

$$f^{(r,0)}(x,y) = \sum_{j=r}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(f)2^{r/2}\,\beta_{j,r}^{1/2}\,\widehat{H}_{j-r}(x)\widehat{H}_k(y). \tag{11}$$

Если функция f является элементом класса $L^{r,s}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, где $r, s \in \mathbb{N}$, то

$$f^{(r,s)}(x,y) = \sum_{j=r}^{\infty}\sum_{k=s}^{\infty} c_{jk}(f)2^{(r+s)/2}\,\beta_{j,r}^{1/2}\,\beta_{k,s}^{1/2}\,\widehat{H}_{j-r}(x)\widehat{H}_{k-s}(y). \tag{12}$$

В соотношениях (10)–(12) *равенства понимаются в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$.*

Доказательство. Сначала покажем справедливость (10), учитывая, что соотношение (11) доказывается практически аналогичным образом. Рассуждения проведем для случая s=1. Из определения класса $L^{0,1}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ следует, что частная производная $f^{(0,1)}$ принадлежит пространству $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, она имеет представление

$$f^{(0,1)}(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}\big(f^{(0,1)}\big)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y), \tag{13}$$

где $c_{j,k}(f^{(0,1)})$, $j,k \in \mathbb{Z}_+$, — коэффициенты Фурье–Эрмита функции $f^{(0,1)}$, а равенство (13) понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$. Полагаем

$$S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,y) := \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} c_{jk}\big(f^{(0,1)}\big)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y),$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, при $m \to \infty$

$$\big\|f^{(0,1)} - S_{\infty,m}(f^{(0,1)})\big\|^2_{2,\widetilde{\rho}} = \iint_{\mathbb{R}^2}\big(f^{(0,1)}(x,y) - S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,y)\big)^2\widetilde{\rho}^2(x,y)dx\,dy \to 0. \tag{14}$$

Покажем, что для п. в. $x \in \mathbb{R}$ при $m \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}}\big(f^{(0,1)}(x,y) - S_{\infty,m}\big(f^{(0,1)};x,y\big)\big)^2\rho^2(y)dy \to 0, \tag{15}$$

где $\rho(y) := \exp(-y^2/2)$. Рассуждая от противного полагаем, что существует некоторое множество $e \subset \mathbb{R}$, имеющее ненулевую меру $\mathrm{mes}(e) > 0$, в каждой точке $x \in e$ которого предел

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\big(f^{(0,1)}(x,y) - S_{\infty,m}\big(f^{(0,1)};x,y\big)\big)^2\rho^2(y)dy \tag{16}$$

отличен от нуля. Рассматриваем соотношение (16) как определенное правило, задающее на множестве e функцию $\Psi : e \to R_+ \setminus \{0\}$. Из определения весовой функции ρ следует

$$\min_{x\in e}\rho(x) = c_*, \quad c_* > 0. \tag{17}$$

Используя введенные обозначения и понятия, запишем

$$\big\|f^{(0,1)} - S_{\infty,m}(f^{(0,1)})\big\|^2_{2,\widetilde{\rho}} = \int_e\int_{\mathbb{R}}\big(f^{(0,1)}(x,y) - S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,y)\big)^2\widetilde{\rho}^2(x,y)dx\,dy +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}\setminus e}\int_{\mathbb{R}}\big(f^{(0,1)}(x,y) - S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,y)\big)^2\widetilde{\rho}^2(x,y)dx\,dy := \mathbb{I}_{1,m} + \mathbb{I}_{2,m}. \tag{18}$$

Из соотношения (14) получаем
$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{I}_{2,m} = 0. \tag{19}$$
Полагая $\widetilde{c} := c_*^2 \int\limits_e \Psi(x)dx$, где $\widetilde{c} > 0$, и используя формулу (17), имеем
$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{I}_{1,m} \geqslant \widetilde{c}. \tag{20}$$

Переходя в (18) к пределу при $m \to \infty$, в силу (14) и соотношений (19), (20) получаем противоречие: число $\widetilde{c}$ должно удовлетворять равенству $\widetilde{c} = 0$, в то время как оно является положительным. Из данного противоречия следует, что для п. в. $x \in \mathbb{R}$ предел (16) должен быть равен нулю.

Иными словами, для п. в. $x \in \mathbb{R}$ последовательность функций $\{S_{\infty,m}(f^{(0,1)})\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ сходится в среднем по y в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ к функции $f^{(0,1)}$, т. е.
$$\lim_{m\to\infty} \left\| f^{(0,1)}(x,\cdot) - S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,\cdot) \right\|_{L_{2,\rho}(\mathbb{R})} = 0. \tag{21}$$
Из (21) следует, что для любого конечного отрезка $[\alpha,\beta]$ оси OY и для п. в. значений $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство
$$\lim_{m\to\infty} \int_\alpha^\beta \big(f^{(0,1)}(x,y) - S_{\infty,m}\big(f^{(0,1)};x,y\big)\big)^2 \rho^2(y)dy = 0, \tag{22}$$
т. е. последовательность функций $\{S_{\infty,m}(f^{(0,1)})\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ сходится в среднем по переменной y с весом ρ^2 к $f^{(0,1)}$ на любом конечном отрезке $[\alpha,\beta]$ оси OY для п. в. $x \in \mathbb{R}$.

Запишем соотношение
$$f^{(0,1)}(x,t) - S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,t) = \rho^{-1}(t)\rho(t)\big(f^{(0,1)}(x,t) - S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,t)\big). \tag{23}$$
Очевидно, что для произвольного конечного отрезка $[\alpha,\beta]$ оси OY существуют зависящие от него положительные константы c_1 и c_2, для которых
$$0 < c_1 < \int_\alpha^\beta \rho^{-2}(y)dy < c_2. \tag{24}$$
Пусть y_0 и y — произвольные точки отрезка $[\alpha,\beta]$. Не ограничивая общности полагаем $y_0 < y$. Используя неравенство Коши–Буняковского, из (23) получаем
$$\int_{y_0}^y \big(f^{(0,1)}(x,t) - S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,t)\big)dt \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ \int_\alpha^\beta \rho^{-2}(t)dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_\alpha^\beta \big(f^{(0,1)}(x,t) - S_{\infty,m}\big(f^{(0,1)};x,t\big)\big)^2 \rho^2(t)dt \right\}^{1/2}. \tag{25}$$
Переходя в обеих частях неравенства (25) к пределу при $m \to \infty$ и используя формулы (22), (24), для п. в. значений $x \in \mathbb{R}$ получаем
$$\int_{y_0}^y \big(f^{(0,1)}(x,t) - S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,t)\big)dt \rightrightarrows 0 \ \text{ на } \ [\alpha,\beta],$$
т. е.
$$\int_{y_0}^y S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,t)dt \rightrightarrows \int_{y_0}^y f^{(0,1)}(x,t)dt \ \text{ на } \ [\alpha,\beta],$$
где символ $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость.

Учитывая вид функции $S_{\infty,m}(f^{(0,1)})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, для п. в. $x \in \mathbb{R}$ при $m \to \infty$ на любом конечном отрезке $[\alpha, \beta]$ оси OY имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(f^{(0,1)})\,\widehat{H}_j(x)\int_{y_0}^{y}\widehat{H}_k(t)dt \rightrightarrows \int_{y_0}^{y} f^{(0,1)}(x,t)dt, \tag{26}$$

где y_0, y — произвольные точки из $[\alpha,\beta]$. Из соотношения (26) для п. в. $x \in \mathbb{R}$ при любых $y_0, y \in [\alpha, \beta]$ получаем

$$f(x,y) - f(x,y_0) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(f^{(0,1)})\widehat{H}_j(x)\frac{\widehat{H}_{k+1}(y)}{\sqrt{2(k+1)}} - \\ - \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(f^{(0,1)})\widehat{H}_j(x)\frac{\widehat{H}_{k+1}(y_0)}{\sqrt{2(k+1)}}. \tag{27}$$

Не ограничивая общности, в формуле (27) полагаем $y_0 := 0$ и, исходя из (27), рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi_m(x,y) := f(x,y) - \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} c_{jk}(f^{(0,1)})\widehat{H}_j(x)\frac{\widehat{H}_{k+1}(y)}{\sqrt{2(k+1)}} + d(x), \tag{28}$$

где

$$d(x) := \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(f^{(0,1)})\widehat{H}_j(x)\frac{\widehat{H}_{k+1}(0)}{\sqrt{2(k+1)}} - f(x,0). \tag{29}$$

Из формул (27)–(29) следует, что для п. в. $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi_m(x,0) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{30}$$

Из вышепроведенных рассуждений и соотношения (28) вытекает, что функция φ_m является элементом класса $L^{0,1}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R})$. Поэтому для п. в. значений $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\varphi_m(x,y) = \varphi_m(x,0) + \int_0^y \varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)d\tau, \tag{31}$$

где y — произвольная точка из множества $\mathbb{R}$.

В ходе дальнейших рассуждений воспользуемся идеей доказательства леммы 1 из работы Р.С. Рафальсона [8]. Используя (31) и неравенство Коши–Буняковского, запишем

$$\|\varphi_m\|^2_{2,\widetilde{\rho}} = \iint_{\mathbb{R}^2}\varphi_m^2(x,y)\widetilde{\rho}^2(x,y)dx\,dy \leqslant 2\Big\{\iint_{\mathbb{R}^2}\varphi_m^2(x,0)\widetilde{\rho}^2(x,y)dx\,dy + \\ + \iint_{\mathbb{R}^2}\widetilde{\rho}^2(x,y)\Big(\int_0^y \varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)d\tau\Big)^2 dx\,dy\Big\} \leqslant 2\Big\{\Big(\int_{\mathbb{R}}\rho^2(y)dy\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}}\rho^2(x)\varphi_m^2(x,0)dx\Big) + \\ + \iint_{\mathbb{R}^2} y\widetilde{\rho}^2(x,y)\Big(\int_0^y \big(\varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)\big)^2 d\tau\Big)dx\,dy\Big\} = \\ = 2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}}\rho^2(x)\varphi_m^2(x,0)dx + \int_{\mathbb{R}}\rho^2(x)\Big\{2\int_{\mathbb{R}} y\rho^2(y)\Big(\int_0^y \big(\varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)\big)^2 d\tau\Big)dy\Big\}dx. \tag{32}$$

Напомним [10], что ортонормированный полином Эрмита $\widehat{H}_{k+1}$ выражается через стандартизированный полином Эрмита $H_{k+1}(y) := (-1)^{k+1} e^{y^2} \frac{d^{k+1}}{dy^{k+1}}(e^{-y})$ следующим образом:

$$\widehat{H}_{k+1}(y) = \frac{1}{\sqrt{(k+1)!2^{k+1}\sqrt{\pi}}} H_{k+1}(y).$$

Поскольку $\frac{d}{dy}H_{k+1}(y) = 2(k+1)H_k(y)$, где $k \in \mathbb{Z}_+$, то

$$\frac{d}{dy}\widehat{H}_{k+1}(y) = \sqrt{2(k+1)}\,\widehat{H}_k(y). \tag{33}$$

Интегрируя по частям несобственный интеграл, расположенный в фигурных скобках во втором слагаемом правой части цепочки неравенств (32), а также используя символ двойной подстановки Ньютона–Лейбница и формулу (33), имеем

$$2\int_{\mathbb{R}} y\rho^2(y)\biggl(\int_0^y \bigl(\varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)\bigr)^2 d\tau\biggr)dy = -\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\biggl(\rho^2(y)\int_0^y \bigl(\varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)\bigr)^2 d\tau\biggr)\bigg|_{y=A}^{y=B} + \\ + \int_{\mathbb{R}} \rho^2(y)\bigl(\varphi_m^{(0,1)}(x,y)\bigr)^2 dy. \tag{34}$$

Из формул (32), (34) получаем

$$\|\varphi_m\|^2_{2,\widetilde{\rho}} \leqslant 2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}}\rho^2(x)\varphi_m^2(x,0)dx - \\ - \int_{\mathbb{R}}\rho^2(x)\biggl\{\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\biggl(\rho^2(y)\int_0^y \bigl(\varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)\bigr)^2 d\tau\biggr)\bigg|_{y=A}^{y=B}\biggr\}dx + \\ + \iint_{\mathbb{R}^2}\widetilde{\rho}^2(x,y)\bigl(\varphi_m^{(0,1)}(x,y)\bigr)^2 dx\,dy. \tag{35}$$

Рассмотрим выражение, заключенное в фигурных скобках второго несобственного интеграла, расположенного в правой части неравенства (35). Не ограничивая общности, полагаем $y > 0$. Используя формулы (28), (33), имеем

$$\rho^2(y)\int_0^y \bigl(\varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)\bigr)^2 d\tau \leqslant \int_0^y \rho^2(\tau)\bigl(\varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)\bigr)^2 d\tau \leqslant \\ \leqslant \int_0^{+\infty}\rho^2(\tau)\biggl(f^{(0,1)}(x,\tau) - \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} c_{jk}(f^{(0,1)})\,\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(\tau)\biggr)^2 d\tau \leqslant \\ \leqslant \bigl\|f^{(0,1)}(x,\cdot) - S_{\infty,m}(f^{(0,1)};x,\cdot)\bigr\|^2_{L_{2,\rho}(\mathbb{R})}. \tag{36}$$

Из соотношений (21), (36) следует, что для п. в. $x \in \mathbb{R}$ при $m \to \infty$

$$\lim_{B\to+\infty}\rho^2(B)\int_0^B \bigl(\varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)\bigr)^2 d\tau \to 0. \tag{37}$$

Аналогичным образом показываем, что для п. в. $x \in \mathbb{R}$ при $m \to \infty$ имеем

$$\lim_{A\to-\infty}\rho^2(A)\int_A^0 \bigl(\varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)\bigr)^2 d\tau \to 0. \tag{38}$$

Следовательно, при $m \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^2(x)\Big\{ \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \Big(\rho^2(y)\int_0^y \big(\varphi_m^{(0,1)}(x,\tau)\big)^2 d\tau\Big)\Big|_{y=A}^{y=B}\Big\}dx \to 0. \tag{39}$$

Используя формулы (28), (14), для третьего слагаемого, расположенного в правой части неравенства (35), при $m \to \infty$ имеем

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{\rho}^2(x,y)\big(\varphi_m^{(0,1)}(x,y)\big)^2 dx\, dy = \big\|f^{(0,1)} - S_{\infty,m}(f^{(0,1)})\big\|_{2,\widetilde{\rho}}^2 \to 0. \tag{40}$$

Из формулы (30) следует, что первое слагаемое в правой части неравенства (35) также будет стремиться к нулю при $m \to \infty$. Учитывая этот результат и формулы (39), (40), получаем $\|\varphi_m\|_{2,\widetilde{\rho}} \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ и на основании формулы (28) имеет место представление функции f в виде суммы ряда

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(f^{(0,1)})\ \widehat{H}_j(x)\frac{\widehat{H}_{k+1}(y)}{\sqrt{2(k+1)}} - d(x), \tag{41}$$

где функция d определяется формулой (29).

Используя формулы (6), (41), получаем

$$c_{j,k+1}(f) = \frac{c_{jk}(f^{(0,1)})}{\sqrt{2(k+1)}}, \tag{42}$$

где $j,k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда с учетом (13), (42) запишем

$$f^{(0,1)}(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{jk}(f)\sqrt{2k}\,\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_{k-1}(y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{jk}(f)2^{1/2}\beta_{k,1}^{1/2}\,\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_{k-1}(y),$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть теперь $s = 2$ и f — произвольная функция из класса $L_{2,\widetilde{\rho}}^{0,2}(\mathbb{R}^2)$. Проводя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, для функции $f^{(0,1)}$ получаем аналог формулы (42) для рассматриваемого случая

$$c_{j,k+1}(f^{(0,1)}) = \frac{c_{jk}(f^{(0,2)})}{\sqrt{2(k+1)}}, \tag{43}$$

где $j,k \in \mathbb{Z}_+$. Из равенства (42) имеем

$$c_{j,k+1}(f^{(0,1)}) = \sqrt{2(k+2)}\,c_{j,k+2}(f). \tag{44}$$

На основании (43), (44) получаем

$$c_{jk}(f^{(0,2)}) = 2\sqrt{(k+2)(k+1)}c_{j,k+2}(f), \tag{45}$$

где $j,k \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ справедливо представление функции $f^{(0,2)}$ в виде двойного ряда

$$f^{(0,2)}(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} c_{jk}(f)2\sqrt{k(k-1)}\ \widehat{H}_j(x)\widehat{H}_{k-2}(y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} c_{jk}(f)\ 2\ \beta_{k,2}^{1/2}\ \widehat{H}_j(x)\widehat{H}_{k-2}(y).$$

Продолжая рассуждать подобным образом, убеждаемся в справедливости формулы (10) в самом общем случае $s \in \mathbb{N}$. Аналогичным путем доказывается и справедливость формулы (11) в общем случае $r \in \mathbb{N}$.

Покажем справедливость формулы (12). Из определения класса $L_{2,\widetilde{\rho}}^{r,s}(\mathbb{R}^2)$, где $r,s\in\mathbb{N}$, следует, что производная $f^{(r-1,s-1)}$ является локально абсолютно непрерывной функцией по двум переменным. В этом случае, как отмечалось в п. 3 данной статьи, справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f^{(r-1,s-1)}(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f^{(r-1,s-1)}(x,y)}{\partial y}\right)=f^{(r,s)}(x,y). \tag{46}$$

Рассмотрим случай $r=s=1$. По аналогии с формулой (42) запишем

$$c_{j+1,k}(f)=\frac{c_{jk}(f^{(1,0)})}{\sqrt{2(j+1)}}, \tag{47}$$

где $j,k\in\mathbb{Z}_+$. Но в силу формул (46), (42)

$$c_{j,k+1}(f^{(1,0)})=\frac{c_{jk}(f^{(1,1)})}{\sqrt{2(k+1)}}, \tag{48}$$

где $j,k\in\mathbb{Z}_+$. Из (47), (48) имеем

$$c_{jk}(f^{(1,1)})=2\sqrt{(j+1)(k+1)}\,c_{j+1,k+1}(f), \tag{49}$$

где $j,k\in\mathbb{Z}_+$. Используя формулу (49), получаем разложение функции $f^{(1,1)}$ в двойной ряд в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$:

$$f^{(1,1)}(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}c_{jk}(f)2\sqrt{kj}\,\widehat{H}_{j-1}(x)\widehat{H}_{k-1}(y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}c_{jk}(f)\,2\,\beta_{j,1}^{1/2}\,\beta_{k,1}^{1/2}\,\widehat{H}_{j-1}(x)\widehat{H}_{k-1}(y).$$

Отметим, что для смешанных производных высших порядков формула (12) доказывается аналогичным образом путем последовательного применения указанных выше рассуждений. □

5. Распространением указанного в п. 2 результата С.З. Рафальсона и И.В. Бердниковой [7] на случай функции двух переменных является

Теорема 1. *Пусть $r_1,r_2\in\mathbb{N}$, $0\leqslant k_j\leqslant r_j$, $j=1,2$, — целые неотрицательные числа, $f\in L_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$ — произвольная функция. Если коэффициенты Фурье–Эрмита функции f удовлетворяют одному из следующих условий*:

a) *при $k_1\neq0$ и $k_2\neq0$ справедливы соотношения $c_{\nu,r_2-k_2}(f)=\dots=c_{\nu,r_2-1}(f)=0$, где $\nu=r_1-k_1,r_1-k_1+1,\dots$, и $c_{r_1-k_1,\mu}(f)=\dots=c_{r_1-1,\mu}(f)=0$, где $\mu=r_2-k_2,r_2-k_2+1,\dots$;*

b) *при $k_1\neq0$ и $k_2=0$ имеют место равенства $c_{r_1-k_1,\mu}(f)=\dots=c_{r_1-1,\mu}(f)=0$, где $\mu=r_2,r_2+1,\dots$;*

c) *при $k_1=0$ и $k_2\neq0$ справедливы формулы $c_{\nu,r_2-k_2}(f)=\dots=c_{\nu,r_2-1}(f)=0$, где $\nu=r_1,r_1+1,\dots$,*

то выполнено неравенство

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_{2,\widetilde{\rho}}\leqslant\frac{\beta_{r_1,r_1-k_1}^{1/2}\beta_{r_2,r_2-k_2}^{1/2}}{\beta_{r_1,r_1}^{(1-k_1/r_1)/2}\beta_{r_2,r_2}^{(1-k_2/r_2)/2}}\left\|f\right\|_{2,\widetilde{\rho}}^{k_1k_2/(r_1r_2)}\left\|f^{(r_1,0)}\right\|_{2,\widetilde{\rho}}^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\times$$
$$\times\left\|f^{(0,r_2)}\right\|_{2,\widetilde{\rho}}^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_{2,\widetilde{\rho}}^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}. \tag{50}$$

Неравенство (50) является точным в том смысле, что существует функция f_0, принадлежащая классу $L_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, которая обращает его в равенство. При этом $\beta_{r_1,0}:=1$; $\beta_{r_2,0}:=1$.

Доказательство. Соотношение (50) является очевидным в следующих случаях: при $r_j = k_j$ или при $k_j = 0$, где $j = 1, 2$; при $r_1 = k_1$ и $k_2 = 0$ или при $k_1 = 0$ и $r_2 = k_2$. При $r_1 = k_1$ и $1 \leqslant k_2 \leqslant r_2 - 1$ ($r_2 \geqslant 2$) или при $1 \leqslant k_1 \leqslant r_1 - 1$ ($r_1 \geqslant 2$) и $r_2 = k_2$ ход доказательства неравенства (50) повторяет ход рассуждений, использованных в работе [7] при получении соответствующего одномерного результата в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Поэтому всюду далее полагаем $r_j \geqslant 2$ и $1 \leqslant k_j \leqslant r_j - 1$, где $j = 1, 2$.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in L^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, для которой, в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, справедливо представление в виде двойного ряда Фурье–Эрмита (6). Поскольку $L^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2) \subset L^{r_1,0}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ и $L^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2) \subset L^{0,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, то на основании леммы 1 для частных производных порядка r_1 по x и порядка r_2 по y, а также для смешанной производной порядка r_1 по x и r_2 по y функции f имеем

$$f^{(r_1,0)}(x,y) = \sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(f) 2^{r_1/2} \beta^{1/2}_{j,r_1}\, \widehat{H}_{j-r_1}(x)\widehat{H}_k(y),$$

$$f^{(0,r_2)}(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty} c_{jk}(f) 2^{r_2/2} \beta^{1/2}_{k,r_2}\, \widehat{H}_{j}(x)\widehat{H}_{k-r_2}(y),$$

$$f^{(r_1,r_2)}(x,y) = \sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty} c_{jk}(f) 2^{(r_1+r_2)/2}\, \beta^{1/2}_{j,r_1} \beta^{1/2}_{k,r_2}\, \widehat{H}_{j-r_1}(x)\widehat{H}_{k-r_2}(y).$$

Поскольку $L^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2) \subset L^{r_1-k_1,r_2-k_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, то для смешанной производной $f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}$ на основании леммы 1 и условий данной теоремы на коэффициенты Фурье–Эрмита функции f получаем

$$f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(x,y) = \sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty} c_{jk}(f) 2^{(r_1+r_2-k_1-k_2)/2} \beta^{1/2}_{j,r_1-k_1} \beta^{1/2}_{k,r_2-k_2} \widehat{H}_{j-r_1+k_1}(x)\widehat{H}_{k-r_2+k_2}(y).$$

Отметим, что четыре последних равенства понимаются в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$. Применяя равенство Парсеваля для двойных рядов Фурье–Эрмита в пространстве $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ и учитывая ограничения на коэффициенты $c_{jk}(f)$, приведенные в формулировке теоремы 1, из (6) и четырех приведенных выше соотношений имеем

$$\|f\|^2_{2,\widetilde{\rho}} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |c_{jk}(f)|^2, \quad \|f^{(r_1,0)}\|^2_{2,\widetilde{\rho}} = \sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{r_1} \beta_{j,r_1} c^2_{jk}(f),$$
$$\|f^{(0,r_2)}\|^2_{2,\widetilde{\rho}} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty} 2^{r_2} \beta_{k,r_2} c^2_{jk}(f), \quad \|f^{(r_1,r_2)}\|^2_{2,\widetilde{\rho}} = \sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty} 2^{r_1+r_2} \beta_{j,r_1}\beta_{k,r_2} c^2_{jk}(f), \tag{51}$$
$$\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\|^2_{2,\widetilde{\rho}} = \sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty} 2^{r_1+r_2-k_1-k_2} \beta_{j,r_1-k_1}\beta_{k,r_2-k_2} c^2_{jk}(f).$$

Перепишем последнее равенство из формулы (51) в следующем эквивалентном виде:

$$\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\|^2_{2,\widetilde{\rho}} = \sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty} \left(2^{(r_1+r_2)/2}\, \beta^{1/2}_{j,r_1}\, \beta^{1/2}_{k,r_2} |c_{jk}(f)|\right)^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)} \times$$
$$\times \left(2^{r_1/2}\, \beta^{1/2}_{j,r_1} |c_{jk}(f)|\right)^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2} \left(2^{r_2/2}\, \beta^{1/2}_{k,r_2} |c_{jk}(f)|\right)^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1} \times$$

$$\times\left(\frac{\beta_{j,r_1-k_1}^{1/2}\,\beta_{k,r_2-k_2}^{1/2}|c_{jk}(f)|^{k_1k_2/(r_1r_2)}}{\beta_{j,r_1}^{(1-k_1/r_1)/2}\,\beta_{k,r_2}^{(1-k_2/r_2)/2}}\right)^2.$$

Из данного соотношения получаем неравенство

$$\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\|_{2,\widetilde{\rho}}^2\leqslant\left\{\sup_{j\geqslant r_1}\frac{\beta_{j,r_1-k_1}}{\beta_{j,r_1}^{1-k_1/r_1}}\right\}\left\{\sup_{k\geqslant r_2}\frac{\beta_{k,r_2-k_2}}{\beta_{k,r_2}^{1-k_2/r_2}}\right\}\times$$
$$\times\sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty}\left\{\left(2^{(r_1+r_2)/2}\beta_{j,r_1}^{1/2}\,\beta_{k,r_2}^{1/2}|c_{jk}(f)|\right)^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\left(2^{r_1/2}\beta_{j,r_1}^{1/2}|c_{jk}(f)|\right)^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(2^{r_2/2}\beta_{k,r_2}^{1/2}|c_{jk}(f)|\right)^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}|c_{jk}(f)|^{2k_1k_2/(r_1r_2)}\right\}.\qquad(52)$$

Для проведения дальнейших рассуждений понадобится одно неравенство из [11]. Пусть a, b, c, d — положительные числа такие, что $a+b+c+d=1$; числа μ_{jk}, ξ_{jk}, γ_{jk}, δ_{jk}, где $j,k\in\mathbb{N}$, являются неотрицательными. Тогда справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{jk}^a\xi_{jk}^b\gamma_{jk}^c\delta_{jk}^d\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{jk}\right)^a\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{jk}\right)^b\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{jk}\right)^c\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{jk}\right)^d.\qquad(53)$$

Полагая $a:=(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)$, $b:=(1-k_1/r_1)k_2/r_2$, $c:=(1-k_2/r_2)k_1/r_1$, $d:=k_1k_2/(r_1r_2)$ и применяя (53) к правой части (52), имеем

$$\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\|_{2,\widetilde{\rho}}^2\leqslant\left\{\sup_{j\geqslant r_1}\frac{\beta_{j,r_1-k_1}}{\beta_{j,r_1}^{1-k_1/r_1}}\right\}\left\{\sup_{k\geqslant r_2}\frac{\beta_{k,r_2-k_2}}{\beta_{k,r_2}^{1-k_2/r_2}}\right\}\times$$
$$\times\left\{\sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty}2^{r_1+r_2}\beta_{j,r_1}\beta_{k,r_2}c_{jk}^2(f)\right\}^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\left\{\sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty}2^{r_1}\beta_{j,r_1}c_{jk}^2(f)\right\}^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\times$$
$$\times\left\{\sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty}2^{r_2}\beta_{k,r_2}c_{jk}^2(f)\right\}^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\left\{\sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty}c_{jk}^2(f)\right\}^{k_1k_2/(r_1r_2)}\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\sup_{j\geqslant r_1}\frac{\beta_{j,r_1-k_1}}{\beta_{j,r_1}^{1-k_1/r_1}}\right\}\left\{\sup_{k\geqslant r_2}\frac{\beta_{k,r_2-k_2}}{\beta_{k,r_2}^{1-k_2/r_2}}\right\}\|f\|_{2,\widetilde{\rho}}^{2k_1k_2/(r_1r_2)}\,\|f^{(r_1,0)}\|_{2,\widetilde{\rho}}^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\times$$
$$\times\|f^{(0,r_2)}\|_{2,\widetilde{\rho}}^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\,\|f^{(r_1,r_2)}\|_{2,\widetilde{\rho}}^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}.\qquad(54)$$

Справедливость равенств

$$\sup_{j\geqslant r_1}\frac{\beta_{j,r_1-k_1}}{\beta_{j,r_1}^{1-k_1/r_1}}=\frac{\beta_{r_1,r_1-k_1}}{\beta_{r_1,r_1}^{1-k_1/r_1}}\qquad(55)$$

и

$$\sup_{k\geqslant r_2}\frac{\beta_{k,r_2-k_2}}{\beta_{k,r_2}^{1-k_2/r_2}}=\frac{\beta_{r_2,r_2-k_2}}{\beta_{r_2,r_2}^{1-k_2/r_2}}\qquad(56)$$

была установлена в ходе доказательства теоремы 1 из [11]. Требуемое неравенство (50) следует из соотношений (54)–(56).

Покажем, что неравенство (50) является точным в указанном в формулировке данной теоремы смысле. Для этого рассмотрим функцию $f_0(x,y):=\widehat{H}_{r_1}(x)\widehat{H}_{r_2}(y)$, принадлежащую классу $L_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$. Поскольку

$$f_0^{(r_1,r_2)}(x,y)=2^{(r_1+r_2)/2}\beta_{r_1,r_1}^{1/2}\beta_{r_2,r_2}^{1/2}\widehat{H}_0(x)\widehat{H}_0(y),$$

$$f_0^{(r_1,0)}(x,y)=2^{r_1/2}\beta_{r_1,r_1}^{1/2}\widehat{H}_0(x)\widehat{H}_{r_2}(y),\quad f_0^{(0,r_2)}(x,y)=2^{r_2/2}\beta_{r_2,r_2}^{1/2}\widehat{H}_{r_1}(x)\widehat{H}_0(y),$$

$$f_0^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(x,y)=2^{(r_1+r_2-k_1-k_2)/2}\beta_{r_1,r_1-k_1}^{1/2}\beta_{r_2,r_2-k_2}^{1/2}\widehat{H}_{r_1-k_1}(x)\widehat{H}_{r_2-k_2}(y),$$

то

$$\|f_0\|=1,\quad \|f^{(r_1,0)}\|_{2,\widetilde{\rho}}=2^{r_1/2}\beta_{r_1,r_1}^{1/2},\quad \|f^{(0,r_2)}\|_{2,\widetilde{\rho}}=2^{r_2/2}\beta_{r_2,r_2}^{1/2},$$

$$\|f^{(r_1,r_2)}\|_{2,\widetilde{\rho}}=2^{(r_1+r_2)/2}\beta_{r_1,r_1}^{1/2}\beta_{r_2,r_2}^{1/2},\quad \|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\|_{2,\widetilde{\rho}}=2^{(r_1+r_2-k_1-k_2)/2}\beta_{r_1,r_1-k_1}^{1/2}\beta_{r_2,r_2-k_2}^{1/2}.$$

Подставляя вычисленные выше нормы частных и смешанных производных функции f_0 в левую и правую части соотношения (50), убеждаемся в том, что оно обращается в равенство. $\square$

6. Рассмотрим далее некоторые приложения полученного в теореме 1 результата к задачам теории аппроксимации функций двух вещественных переменных "углом" в пространстве $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$. Для этого введем следующие понятия и обозначения.

Пусть $L_{2,\rho(x)}(\mathbb{R})$ (соответственно $L_{2,\rho(y)}(\mathbb{R})$) есть пространство $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ в случае, когда в качестве $\mathbb{R}$ выступает ось абсцисс OX (соответственно ось ординат OY). Полагаем, что $\mathfrak{N}_{N+1}\subset L_{2,\rho(x)}(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{M}_{M+1}\subset L_{2,\rho(y)}(\mathbb{R})$ — конечномерные подпространства с базисами $\{\widehat{H}_j(x)\}_{j=0}^N$ и $\{\widehat{H}_k(y)\}_{k=0}^M$ соответственно, где $N,M\in\mathbb{Z}_+$. В пространстве $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим множество

$$G(\mathfrak{N}_{N+1},\mathfrak{M}_{M+1}):=L_{2,\rho(y)}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{N}_{N+1}\oplus L_{2,\rho(x)}(\mathbb{R})\otimes\mathfrak{M}_{M+1}, \tag{57}$$

где символами $\otimes$ и $\oplus$ обозначены операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (57) имеют вид

$$g_{N,M}(x,y):=\sum_{j=0}^{N}\varphi_j(y)\widehat{H}_j(x)+\sum_{k=0}^{M}\psi_k(x)\widehat{H}_k(y), \tag{58}$$

где $\{\varphi_j\}_{j=0}^N\subset L_{2,\rho(y)}(\mathbb{R})$, $\{\psi_k\}_{k=0}^M\subset L_{2,\rho(x)}(\mathbb{R})$ — произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (58) называют "углами" из алгебраических полиномов [12]. Напомним, что понятие "угла", как одного из эффективных средств теории аппроксимации функции многих переменных, было впервые введено М.К. Потаповым в работе [13] и нашло отражение в исследованиях других математиков (см., например, [14]–[18]).

Для произвольной функции $f\in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ символом $\mathcal{E}_{N,M}(f)_{2,\widetilde{\rho}}$ обозначим ее наилучшее приближение элементами множества (57) в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{E}_{N,M}(f)_{2,\widetilde{\rho}}:=\inf\{\|f-g_{N,M}\|_{2,\widetilde{\rho}}:g_{N,M}\in G(\mathfrak{N}_{N+1},\mathfrak{M}_{M+1})\}. \tag{59}$$

Поставим в соответствие функции $f\in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ ее ряд Фурье–Эрмита (6), где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. Частные суммы ряда (6) порядка N по x и порядка M по y обозначим соответственно

$$S_{N,\infty}(f;x,y):=\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}c_{jk}(f)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y),$$

$$S_{\infty,M}(f;x,y):=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{M}c_{jk}(f)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y).$$

Под $S_{N,M}(f)$ понимаем частную сумму ряда Фурье–Эрмита (6) функции $f \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ порядка N по x и порядка M по y:

$$S_{N,M}(f;x,y) := \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{M} c_{jk}(f)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y).$$

Функцию

$$\widetilde{S}_{N,M}(f;x,y) := S_{N,\infty}(f;x,y) + S_{\infty,M}(f;x,y) - S_{N,M}(f;x,y) =$$
$$= \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(f)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{M} c_{jk}(f)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y) - \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{M} c_{jk}(f)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y) \quad (60)$$

будем называть обобщенным полиномом Фурье–Эрмита функции $f \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ порядка N по x и порядка M по y. Несложно показать, что функция (60) может быть представлена в виде (58), т.е. $\widetilde{S}_{N,M}(f)$ является элементом множества $G(\mathfrak{N}_{N+1}, \mathfrak{M}_{M+1})$.

Лемма 2. *Пусть $N, M \in \mathbb{N}$ и $f \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ — произвольная функция. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)_{2,\widetilde{\rho}} = \big\|f - \widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)\big\|_{2,\widetilde{\rho}} = \left\{\sum_{j=N}^{\infty}\sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}^2(f)\right\}^{1/2}, \quad (61)$$

т.е. среди всех элементов g, принадлежащих множеству $G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)$, наилучшее приближение функции f доставляет ее обобщенный полином Фурье–Эрмита $\widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)$ порядка $N-1$ по x и $M-1$ по y.

Доказательство. Учитывая, что $\{\varphi_j\}_{j=0}^{N-1} \subset L_{2,\rho(y)}(\mathbb{R})$ и $\{\psi_k\}_{k=0}^{M-1} \subset L_{2,\rho(x)}(\mathbb{R})$, в смысле сходимости в метриках пространств $L_{2,\rho(y)}(\mathbb{R})$ и $L_{2,\rho(x)}(\mathbb{R})$ получаем соответственно

$$\varphi_j(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi_j)\widehat{H}_k(y), \quad j = \overline{0, N-1}, \quad (62)$$

$$\psi_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\psi_k)\widehat{H}_j(x), \quad k = \overline{0, M-1}. \quad (63)$$

Используя равенства (58) и (62), (63), в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ запишем

$$g_{N-1,M-1}(x,y) = \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi_j)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{M-1} c_j(\psi_k)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y). \quad (64)$$

Напомним, что пространство $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ с введенным в нем скалярным произведением

$$\langle f, h\rangle := \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{\rho}(x,y)f(x,y)h(x,y)dx\,dy,$$

где $f, h \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, и нормой $\|f\|_{2,\widetilde{\rho}}^2 := \langle f, f\rangle$ превращается в гильбертово пространство. С учетом этого факта и свойств скалярного произведения для произвольной функции $f \in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\|f - g_{N-1,M-1}\|_{2,\widetilde{\rho}}^2 = \langle f - g_{N-1,M-1}, f - g_{N-1,M-1}\rangle = \langle f, f\rangle - 2\langle f, g_{N-1,M-1}\rangle +$$
$$+ \langle g_{N-1,M-1}, g_{N-1,M-1}\rangle = \|f\|_{2,\widetilde{\rho}}^2 - 2\langle f, g_{N-1,M-1}\rangle + \|g_{N-1,M-1}\|_{2,\widetilde{\rho}}^2.$$

Используя формулы (6) и (64), отсюда получаем

$$\|f-g_{N-1,M-1}\|^2_{2,\widetilde{\rho}}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}c^2_{jk}(f)-2\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{\infty}c_{jk}(f)c_k(\varphi_j)-2\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{M-1}c_{jk}(f)c_j(\psi_k)+$$
$$+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{\infty}c^2_k(\varphi_j)+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{M-1}c^2_j(\psi_k)+2\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1}c_k(\varphi_j)c_j(\psi_k)=$$
$$=\sum_{j=N}^{\infty}\sum_{k=M}^{\infty}c^2_{jk}(f)+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=M}^{\infty}\big(c_{jk}(f)-c_k(\varphi_j)\big)^2+$$
$$+\sum_{j=N}^{\infty}\sum_{k=0}^{M-1}\big(c_{jk}(f)-c_j(\psi_k)\big)^2+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1}\big(c_{jk}(f)-c_k(\varphi_j)-c_j(\psi_k)\big)^2. \quad (65)$$

Из (65) следует, что нижняя грань

$$\inf\{\|f-g_{N-1,M-1}\|_{2,\widetilde{\rho}}:g_{N-1,M-1}\in G(\mathfrak{N}_N,\mathfrak{M}_M)\}$$

достигается в единственном случае, когда

$$\begin{aligned}
&c_{jk}(f)=c_k(\varphi_j), &&\text{где}\ \ j=\overline{0,N-1},\ \ k=M,M+1,\dots;\\
&c_{jk}(f)=c_j(\psi_k), &&\text{где}\ \ k=\overline{0,M-1},\ \ j=N,N+1,\dots;\\
&c_{jk}(f)=c_k(\varphi_j)+c_j(\psi_k), &&\text{где}\ \ j=\overline{0,N-1},\ \ k=\overline{0,M-1},
\end{aligned} \quad (66)$$

и равна $\sum\limits_{j=N}^{\infty}\sum\limits_{k=M}^{\infty}c^2_{jk}(f)$. Следовательно, $\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)_{2,\widetilde{\rho}}=\Big\{\sum\limits_{j=N}^{\infty}\sum\limits_{k=M}^{\infty}c^2_{jk}(f)\Big\}^{1/2}$.

Подставляя в формулу (64) вместо коэффициентов $c_k(\varphi_j)$, где $j=\overline{0,N-1}$, $k=0,1,\dots$, и $c_j(\psi_k)$, где $k=\overline{0,M-1}$, $j=0,1,\dots$, их выражения через коэффициенты $c_{jk}(f)$, где $j,k\in\mathbb{Z}_+$, из соотношений (66) получаем обобщенный полином Фурье–Эрмита $\widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)$ рассматриваемой функции $f\in L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$. При этом

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)_{2,\widetilde{\rho}}=\|f-\widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)\|_{2,\widetilde{\rho}}. \qquad \square$$

7. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для натуральных чисел* N, M *и* r_j, k_j, *где* $j=1,2$, *выполнены неравенства* $N>r_1\geqslant k_1\geqslant 1$ *и* $M>r_2\geqslant k_2\geqslant 1$. *Тогда для произвольной функции* $f\in L^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_{N-r_1+k_1-1,M-r_2+k_2-1}\big(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\big)_{2,\widetilde{\rho}}\leqslant\frac{\beta^{1/2}_{N,r_1-k_1}\beta^{1/2}_{M,r_2-k_2}}{\beta^{(1-k_1/r_1)/2}_{N,r_1}\beta^{(1-k_2/r_2)/2}_{M,r_2}}\times$$
$$\times\big\{\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)_{2,\widetilde{\rho}}\big\}^{k_1k_2/(r_1r_2)}\big\{\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-1}\big(f^{(r_1,0)}\big)_{2,\widetilde{\rho}}\big\}^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\times$$
$$\times\big\{\mathcal{E}_{N-1,M-r_2-1}\big(f^{(0,r_2)}\big)_{2,\widetilde{\rho}}\big\}^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\big\{\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-r_2-1}\big(f^{(r_1,r_2)}\big)_{2,\widetilde{\rho}}\big\}^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}, \quad (67)$$

являющееся точным в том смысле, что существует функция из класса $L^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, *для которой соотношение* (67) *обращается в равенство.*

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, имеющей разложение в ряд Фурье–Эрмита (6), где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, используя формулу (60), полагаем

$$e_{N,M}(f;x,y) := f(x,y) - \widetilde{S}_{N-1,M-1}(f;x,y) = \sum_{j=N}^{\infty}\sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}(f)\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_k(y). \tag{68}$$

Применяя лемму 1 и равенство (60), непосредственным образом можно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{S}_{N-1,M-1}^{(\nu,0)}(f;x,y) = \widetilde{S}_{N-\nu-1,M-1}(f^{(\nu,0)};x,y),\\
&\widetilde{S}_{N-1,M-1}^{(0,\mu)}(f;x,y) = \widetilde{S}_{N-1,M-\mu-1}(f^{(0,\mu)};x,y),\\
&\widetilde{S}_{N-1,M-1}^{(\nu,\mu)}(f;x,y) = \widetilde{S}_{N-\nu-1,M-\mu-1}(f^{(\nu,\mu)};x,y),
\end{aligned} \tag{69}$$

где $f^{(0,0)} \equiv f$, $\widetilde{S}_{N-1,M-1}^{(0,0)}(f) \equiv \widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)$, $0 \leqslant \nu \leqslant N-1$, $0 \leqslant \mu \leqslant M-1$, $\nu,\mu \in \mathbb{Z}_+$. Учитывая, что функция $e_{N,M}(f)$ принадлежит классу $L_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R})$ и используя лемму 1, а также равенства (68),(69), получаем

$$\begin{aligned}
e_{N,M}^{(r_1,0)}(f;x,y) &= \sum_{j=N}^{\infty}\sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}(f)2^{r_1/2}\beta_{j,r_1}^{1/2}\widehat{H}_{j-r_1}(x)\widehat{H}_k(y) =\\
&= f^{(r_1,0)}(x,y) - \widetilde{S}_{N-r_1-1,M-1}(f^{(r_1,0)};x,y) = e_{N-r_1,M}(f^{(r_1,0)};x,y),
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
e_{N,M}^{(0,r_2)}(f;x,y) &= \sum_{j=N}^{\infty}\sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}(f)2^{r_2/2}\beta_{k,r_2}^{1/2}\widehat{H}_j(x)\widehat{H}_{k-r_2}(y) =\\
&= f^{(0,r_2)}(x,y) - \widetilde{S}_{N-1,M-r_2-1}(f^{(0,r_2)};x,y) = e_{N,M-r_2}(f^{(0,r_2)};x,y),
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
e_{N,M}^{(r_1,r_2)}(f;x,y) &= \sum_{j=N}^{\infty}\sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}(f)2^{(r_1+r_2)/2}\beta_{j,r_1}^{1/2}\beta_{k,r_2}^{1/2}\widehat{H}_{j-r_1}(x)\widehat{H}_{k-r_2}(y) =\\
&= f^{(r_1,r_2)}(x,y) - \widetilde{S}_{N-r_1-1,M-r_2-1}(f^{(r_1,r_2)};x,y) = e_{N-r_1,M-r_2}(f^{(r_1,r_2)};x,y),
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
e_{N,M}^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(f;x,y) &= \sum_{j=N}^{\infty}\sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}(f)2^{(r_1+r_2-k_1-k_2)/2}\beta_{j,r_1-k_1}^{1/2}\beta_{k,r_2-k_2}^{1/2}\widehat{H}_{j-r_1+k_1}(x)\times\\
&\times \widehat{H}_{k-r_2+k_2}(y) = f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(x,y) - \widetilde{S}_{N-r_1+k_1-1,M-r_2+k_2-1}(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)};x,y) =\\
&= e_{N-r_1+k_1,M-r_2+k_2}(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)};x,y).
\end{aligned} \tag{73}$$

Используя равенства (61), (68) и (70)–(73), запишем

$$\begin{gathered}
\|e_{N,M}(f)\|_{2,\widetilde{\rho}} = \mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)_{2,\widetilde{\rho}}, \quad \|e_{N,M}^{(r_1,0)}(f)\|_{2,\widetilde{\rho}} = \mathcal{E}_{N-r_1-1,M-1}(f^{(r_1,0)})_{2,\widetilde{\rho}},\\
\|e_{N,M}^{(0,r_2)}(f)\|_{2,\widetilde{\rho}} = \mathcal{E}_{N-1,M-r_2-1}(f^{(0,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}}, \quad \|e_{N,M}^{(r_1,r_2)}(f)\|_{2,\widetilde{\rho}} = \mathcal{E}_{N-r_1-1,M-r_2-1}(f^{(r_1,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}},\\
\|e_{N,M}^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(f)\|_{2,\widetilde{\rho}} = \mathcal{E}_{N-r_1+k_1-1,M-r_2+k_2-1}(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)})_{2,\widetilde{\rho}}.
\end{gathered} \tag{74}$$

Применяя к функции $e_{N,M}(f)$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 1, неравенство (50) и учитывая равенства (74), получаем требуемое соотношение (67).

Далее покажем неулучшаемость неравенства (67) в указанном в формулировке теоремы 2 смысле. Для этого рассмотрим функцию $f_1(x,y) := \widehat{H}_N(x)\widehat{H}_M(y)$, где $N>r_1$, $M>r_2$, принадлежащую классу $L^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$. Используя (61) и определение ортонормированной системы функций, получаем

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f_1)_{2,\widetilde{\rho}} = \|f_1\|_{2,\widetilde{\rho}} = 1. \tag{75}$$

Учитывая, что для частных и смешанных производных функции f_1 имеют место равенства

$$f_1^{(r_1,0)}(x,y) = 2^{r_1/2}\,\beta^{1/2}_{N,r_1}\widehat{H}_{N-r_1}(x)\widehat{H}_M(y), \quad f_1^{(0,r_2)}(x,y) = 2^{r_2/2}\,\beta^{1/2}_{M,r_2}\widehat{H}_N(x)\widehat{H}_{M-r_2}(y),$$

$$f_1^{(r_1,r_2)}(x,y) = 2^{(r_1+r_2)/2}\,\beta^{1/2}_{N,r_1}\,\beta^{1/2}_{M,r_2}\widehat{H}_{N-r_1}(x)\widehat{H}_{M-r_2}(y),$$

$$f_1^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(x,y) = 2^{(r_1+r_2-k_1-k_2)/2}\,\beta^{1/2}_{N,r_1-k_1}\,\beta^{1/2}_{M,r_2-k_2}\widehat{H}_{N-r_1+k_1}(x)\widehat{H}_{M-r_2+k_2}(y)$$

и используя формулу (61), получаем

$$\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-1}(f_1^{(r_1,0)})_{2,\widetilde{\rho}} = 2^{r_1/2}\,\beta^{1/2}_{N,r_1}, \tag{76}$$

$$\mathcal{E}_{N-1,M-r_2-1}(f_1^{(0,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}} = 2^{r_2/2}\,\beta^{1/2}_{M,r_2}, \tag{77}$$

$$\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-r_2-1}(f_1^{(r_1,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}} = 2^{(r_1+r_2)/2}\,\beta^{1/2}_{N,r_1}\,\beta^{1/2}_{M,r_2}, \tag{78}$$

$$\mathcal{E}_{N-r_1+k_1-1,M-r_2+k_2-1}(f_1^{(r_1-k_1,r_2-k_2)})_{2,\widetilde{\rho}} = 2^{(r_1+r_2-k_1-k_2)/2}\beta^{1/2}_{N,r_1-k_1}\beta^{1/2}_{M,r_2-k_2}. \tag{79}$$

Подставляя в (67) соответствующие величины из правых частей формул (75)–(79), убеждаемся в том, что неравенство (67) обращается в равенство, т. е. является неулучшаемым. □

8. Используя полученные в предыдущих пунктах результаты, рассмотрим одну экстремальную задачу теории аппроксимации функций двух переменных "углом".

Символом $\mathcal{W}^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$, где $r_1,r_2\in\mathbb{N}$, обозначим класс функций $f\in L^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}$, для каждой из которых выполнено условие $\|f^{(r_1,r_2)}\|_{2,\widetilde{\rho}}\leqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть натуральные числа N, M и r_j, k_j, где $j=1,2$, удовлетворяют неравенствам $N>r_1\geqslant k_1\geqslant 1$ и $M>r_2\geqslant k_2\geqslant 1$. Тогда имеем*

$$\sup\bigl\{\mathcal{E}_{N-r_1+k_1-1,M-r_2+k_2-1}(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)})_{2,\widetilde{\rho}} : f\in\mathcal{W}^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)\bigr\} =$$
$$= 2^{-(k_1+k_2)/2}\{(N-r_1+k_1)\cdots(N-r_1+1)(M-r_2+k_2)\cdots(M-r_2+1)\}^{-1/2}. \tag{80}$$

Доказательство. Используя лемму 1, для произвольной функции $f\in\mathcal{W}^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ запишем

$$\|f^{(r_1,r_1)}\|_{2,\widetilde{\rho}} = \left\{\sum_{j=r_1}^{\infty}\sum_{k=r_2}^{\infty} c^2_{jk}(f)2^{r_1+r_2}\beta_{j,r_1}\beta_{k,r_2}\right\}^{1/2}. \tag{81}$$

В силу леммы 2, определения класса $\mathcal{W}^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$ и равенства (81) имеем

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)_{2,\widetilde{\rho}} = \left\{\sum_{j=N}^{\infty}\sum_{k=M}^{\infty} c^2_{jk}(f)\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{j=N}^{\infty}\sum_{k=M}^{\infty} c^2_{jk}(f)\frac{2^{r_1+r_2}\beta_{j,r_1}\beta_{k,r_2}}{2^{r_1+r_2}\beta_{j,r_1}\beta_{k,r_2}}\right\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|f^{(r_1,r_2)}\|_{2,\widetilde{\rho}}}{2^{(r_1+r_2)/2}\beta^{1/2}_{N,r_1}\beta^{1/2}_{M,r_2}} \leqslant 2^{-(r_1+r_2)/2}\beta^{-1/2}_{N,r_1}\beta^{-1/2}_{M,r_2}. \tag{82}$$

Следующие три неравенства получаем на основании соотношений (70)–(74), (81) и из определения класса $\mathcal{W}^{r_1,r_2}_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{E}_{N-1,M-r_2-1}(f^{(0,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}} = \left\{ \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}^2(f) 2^{r_2} \beta_{k,r_2} \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}^2(f) \frac{2^{r_1+r_2}\beta_{j,r_1}\beta_{k,r_2}}{2^{r_1}\beta_{j,r_1}} \right\}^{1/2} \leqslant \frac{\|f^{(r_1,r_1)}\|_{2,\widetilde{\rho}}}{2^{r_1/2}\beta_{N,r_1}^{1/2}} \leqslant 2^{-r_1/2}\beta_{N,r_1}^{-1/2}, \quad (83)$$

$$\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-1}(f^{(r_1,0)})_{2,\widetilde{\rho}} = \left\{ \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}^2(f) 2^{r_1} \beta_{j,r_1} \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}^2(f) \frac{2^{r_1+r_2}\beta_{j,r_1}\beta_{k,r_2}}{2^{r_2}\beta_{k,r_2}} \right\}^{1/2} \leqslant \frac{\|f^{(r_1,r_1)}\|_{2,\widetilde{\rho}}}{2^{r_2/2}\beta_{M,r_2}^{1/2}} \leqslant 2^{-r_2/2}\beta_{M,r_2}^{-1/2}, \quad (84)$$

$$\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-r_2-1}(f^{(r_1,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}} = \left\{ \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{k=M}^{\infty} c_{jk}^2(f) 2^{r_1+r_2} \beta_{j,r_1}\beta_{k,r_2} \right\}^{1/2} \leqslant \|f^{(r_1,r_2)}\|_{2,\widetilde{\rho}} \leqslant 1. \quad (85)$$

Подставляя правые части цепочек неравенств (82)–(85) вместо соответствующих величин наилучших приближений в правую часть соотношения (67), для произвольной функции $f \in \mathcal{W}_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\mathcal{E}_{N-r_1+k_1-1,M-r_2+k_2-1}(f_1^{(r_1-k_1,r_2-k_2)})_{2,\widetilde{\rho}} \leqslant \left\{ \frac{\beta_{N,r_1-k_1}\beta_{M,r_2-k_2}}{2^{k_1+k_2}\beta_{N,r_1}\beta_{M,r_2}} \right\}^{1/2} =$$
$$= 2^{-(k_1+k_2)/2}\{(N-r_1+k_1)\cdots(N-r_1+1)(M-r_2+k_2)\cdots(M-r_2+1)\}^{-1/2}. \quad (86)$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, записанной в левой части равенства (80), рассмотрим функцию $f_2(x,y) := \widehat{H}_N(x)\widehat{H}_M(y)/(2^{r_1+r_2}\beta_{N,r_1}\beta_{M,r_2})^{1/2}$. Очевидно, что $f_2 \in \mathcal{W}_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$ и смешанная производная функции f_2 в силу леммы 1 равна

$$f_2^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(x,y) = \left\{ \frac{\beta_{N,r_1-k_1}\beta_{M,r_2-k_2}}{2^{k_1+k_2}\beta_{N,r_1}\beta_{M,r_2}} \right\}^{1/2} \widehat{H}_{N-r_1+k_1}(x)\widehat{H}_{M-r_2+k_2}(y). \quad (87)$$

Из формул (60) и (87) следует, что обобщенный полином Фурье–Эрмита функции $f_2^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(x,y)$ порядка $N-r_1+k_1-1$ по x и порядка $M-r_2+k_2-1$ по y равен тождественно нулю, т. е. $\widetilde{S}_{N-r_1+k_1-1,M-r_2+k_2-1}(f_2^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}) \equiv 0$. Тогда на основании леммы 2 получаем

$$\sup\left\{\mathcal{E}_{N-r_1+k_1-1,M-r_2+k_2-1}(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)})_{2,\widetilde{\rho}} : f \in \mathcal{W}_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \mathcal{E}_{N-r_1+k_1-1,M-r_2+k_2-1}(f_2^{(r_1-k_1,r_2-k_2)})_{2,\widetilde{\rho}} = \left\|f_2^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_{2,\widetilde{\rho}} =$$
$$= 2^{-(k_1+k_2)/2}\{(N-r_1+k_1)\cdots(N-r_1+1)(M-r_2+k_2)\cdots(M-r_2+1)\}^{-1/2}. \quad (88)$$

Сопоставляя неравенство (86), полученное для произвольного элемента $f \in \mathcal{W}_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, и неравенство (88), имеем требуемое соотношение (80). □

Следствие. Пусть выполнены все условия теоремы 3. Тогда для произвольной функции $f \in \mathcal{W}_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{N-r_1+k_1-1,M-r_2+k_2-1}(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)})_{2,\widetilde{\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{-(k_1+k_2)/2}\,\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-r_2-1}(f^{(r_1,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}}}{\{(N-r_1+k_1)\cdots(N-r_1+1)(M-r_2+k_2)\cdots(M-r_2+1)\}^{1/2}}, \quad (89)$$

которое является неулучшаемым в указанном в теореме 3 смысле.

Доказательство. Из формулы (85) и соотношений (82)–(84) имеем

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)_{2,\widetilde{\rho}} \leqslant 2^{-(r_1+r_2)/2}\,\beta_{N,r_1}^{-1/2}\,\beta_{M,r_2}^{-1/2}\,\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-r_2-1}(f^{(r_1,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}}, \quad (90)$$

$$\mathcal{E}_{N-1,M-r_2-1}(f^{(0,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}} \leqslant 2^{-r_1/2}\,\beta_{N,r_1}^{-1/2}\,\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-r_2-1}(f^{(r_1,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}}, \quad (91)$$

$$\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-1}(f^{(r_1,0)})_{2,\widetilde{\rho}} \leqslant 2^{-r_2/2}\,\beta_{M,r_2}^{-1/2}\,\mathcal{E}_{N-r_1-1,M-r_2-1}(f^{(r_1,r_2)})_{2,\widetilde{\rho}}. \quad (92)$$

Подставляя в правую часть соотношения (67) вместо величин наилучших приближений соответствующие им правые части неравенств (90)–(92), получаем требуемое равенство (89).

Для того, чтобы показать неулучшаемость неравенства (89), достаточно рассмотреть функцию $f_1 \in \mathcal{W}_{2,\widetilde{\rho}}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, введенную при доказательстве теоремы 2, и воспользоваться равенствами (78), (79). Непосредственной проверкой несложно убедиться в том, что для f_1 неравенство (89) обращается в равенство. □

Литература

[1] Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. *Выпуклый анализ и его приложения* (Эдиториал УРСС, М., 2000).

[2] Коновалов В.Н. *Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных и косых производных*, Матем. заметки **23** (1), 67–78 (1978).

[3] Габушин В.Н. *Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах*, Матем. заметки **8** (5), 552–562 (1970).

[4] Буслаев А.П. *О приближении оператора дифференцирования*, Матем. заметки **29** (5), 731–749 (1981).

[5] Тимошин О.А. *Наилучшее приближение оператора дифференцирования второй смешанной производной в метриках L и C на плоскости*, Матем. заметки **36** (3), 369–377 (1984).

[6] Тимофеев В.Г. *Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных*, Матем. заметки **37** (5), 676–689 (1985).

[7] Бердникова И.В., Рафальсон С.З. *Некоторые неравеснтва между нормами функции и ее производных в интегральных метриках*, Изв. вузов. Матем., № 12, 3–6 (1985).

[8] Рафальсон С.З. *О приближении функций в среднем суммами Фурье–Эрмита*, Изв. вузов. Матем., № 7, 78–84 (1968)

[9] Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* В 5-ти томах. Т. 5 (Физматлит., М., 1959).

[10] Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены*, 3-е изд. (Физматлит, М., 2007).

[11] Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. *Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их применение к теории аппроксимации*, Укр. матем. журн. **63** (12), 1579–1601 (2011).

[12] Ржавинская Е.В. *О приближении алгебраическими многочленами в метрике L_p с весом*, Дисс. … канд. физ.-матем. наук (М., 1980).

[13] Потапов М.К. *О приближении "углом"*, Proceedings of the conference on constructive theory of functions, Akadémiai Kidaó, Budapest, 371–399 (1972).

[14] Томич М. *О приближении углом функций с доминирующим модулем гладкости*, Publ. De L'inst. Math. (Beograd) **23** (37), 193–206 (1978).

[15] Haussmann W., Zeller K. *Uniqueness and non-uniqueness in bivariate L^1-approximation*, Approximation Theory IV. Proc. of Intern. Symp., College Station, Tex., January 10–14, 1983 (Academic Press, New York), pp. 509–514.

[16] Темляков В.Н. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. матем. ин-та АН СССР **178**, 1–113 (1986).

[17] Gonska H., Jetter K. *Jackson-type theorems on approximation by trigonometric and algebraic pseudopolynomials*, J. Approxim. Theory **48** (4), 396–406 (1986).

[18] Вакарчук С.Б. *О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных*, Изв. вузов. Матем., № 7, 14–25 (1991).

С.Б. Вакарчук

заведующий кафедрой экономической кибернетики и математических методов в экономике,
Днепропетровский университет им. Альфреда Нобеля,
ул. Набережная Ленина, д. 18, г. Днепропетровск, 49000, Украина,

`e-mail:` sbvakarchuk@mail.ru

А.В. Швачко

ассистент, кафедра высшей математики,
Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет,
ул. Ворошилова, д. 25, г. Днепропетровск, 49600, Украина

S.B. Vakarchuk and A.V. Shvachko

Inequalities of Kolmogorov's type for derived functions in two variables and application to approximation by an "angle"

Abstract. For functions of two variables we obtain sharp inequalities of Kolmogorov's type for partial and mixed intermediate derivatives. We also consider applications of the results to some problems of approximation of functions of two variables by "angles" and obtain a series of relations which are exact in definite sense.

Keywords: Hermite polynomials, Fourier–Hermite series, inequalities of Kolmogorov's type, the best approximation by "angle", generalized polynomial.

S.B. Vakarchuk

Head of the Chair of Economic Cybernetics and Mathematical Methods in Economy,
Alfred Nobel University of Dnepropetrovsk,
18 Naberezhnaya Lenina str., Dnepropetrovsk, 49000 Unkraine,

`e-mail:` sbvakarchuk@mail.ru

A.V. Shvachko

Assistant, Chair of Higher Mathematics,
Dnepropetrovsk State Agrarian-Economic University,
25 Voroshilov str., Dnepropetrovsk, 49600 Ukraine