Приложение 2

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по образовательной деятельности
_________________________ Таюрский Д.А.
« 16 » _____сентября_____ 20_15__ г.

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ (ДО КФУ)

**Программа дисциплины**

**ФТД.1 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ**

Направление подготовки: 12.03.04 Биотехнические системы и технологии

Профиль подготовки: —

Квалификация выпускника: бакалавр

Казань 2015

## 1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Целями освоения дисциплины являются систематизация знаний и изучение дополнительных разделов элементарной математики, развитие логического мышления, алгоритмической культуры, необходимых для освоения математических дисциплин базовой части общепрофессионального цикла, закрепление практических навыков, связанных с алгебраическими преобразованиями, решения задач некоторых разделов математического анализа.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Данная учебная дисциплина включена в раздел "ФТД.1 Факультативные дисциплины" основной образовательной программы 12.03.04 Биотехнические системы и технологии и относится к базовой части. Осваивается на 1 курсе, 1, 2 семестры.

Дисциплина ФТД.1 "Введение в математику" является факультативной дисциплиной для бакалавров по направлению подготовки 12.03.04 "Биотехнические системы и технологии". Для освоения дисциплины необходимо владение языком элементарной математики в устной и письменной форме, математическими знаниями и умениями, полученными при изучении школьных естественнонаучных дисциплин. Освоение данной дисциплины необходимо для изучения математических дисциплин базовой части общепрофессионального цикла, таких как Б1.Б.8 "Математический анализ", Б1.Б.9 "Аналитическая геометрия", Б1.Б10 "Линейная алгебра".

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Обучающийся, завершивший изучение дисциплины, должен
демонстрировать способность и готовность:
к изучению дисциплин базовой части математического и естественнонаучного цикла, таких как Б1.Б.8 "Математический анализ", Б1.Б.9 "Аналитическая геометрия", Б1.Б.10 "Линейная алгебра".
В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции | Расшифровка приобретаемой компетенции |
|---|---|
| ОПК-2 | способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат |

## 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы 72 часа.
Форма промежуточной аттестации по дисциплине: зачет во 2 семестре.

| | Раздел дисциплины | Семестр | Лекции | Практические занятия | Лабораторные работы | Самостоятельная работа |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Тема 1. Дополнительные разделы элементарной математики. | 1 | 0 | 10 | 0 | 10 |
| 2. | Тема 2. Систематизация знаний из основных разделов элементарной математики. | 1 | 0 | 8 | 0 | 8 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3. | Тема 3. Использование аппарата элементарной математики при освоении практической части темы "Ряды". | 2 | 0 | 18 | 0 | 18 |
| | Итого | | 0 | 36 | 0 | 36 |

**4.2 Содержание дисциплины**

**Тема 1. Дополнительные разделы элементарной математики.**

практическое занятие (10 часа(ов)):

1. Метод математической индукции.
2. Элементы комбинаторики (перестановки, размещения, сочетания). Бином Ньютона.
3. Комплексные числа.

**Тема 2. Систематизация знаний из основных разделов элементарной математики.**

практическое занятие (8 часа(ов)):

4. Преобразования иррациональных, степенных, тригонометрических, показательных и логарифмических выражений.
5. Основные элементарные функции: области определения, множества значений, свойства, графики.

**Тема 3. Использование аппарата элементарной математики при освоении практической части темы "Ряды".**

практическое занятие (18 часа(ов)):

6. Числовые ряды. Исследование сходимости знакопостоянных рядов.
7. Исследование сходимости знакопеременных рядов.
8. Функциональные ряды. Область сходимости.
9. Степенные ряды. Радиус, интервал, область сходимости.
10. Разложение функций в степенной ряд. Вычисление суммы степенного ряда.

**5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**Курс практических занятий, организованных по стандартной технологии в интерактивной форме с живым диалогом между преподавателем и обучающимся.

## 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Домашнее задание: решение задач по теме раздела.

Примерные задачи указаны в приложении 1.

## 7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

**7.1. Регламент дисциплины**

Суммарно по дисциплине можно получить максимум 100 баллов, из них текущий контроль в течение семестра оценивается в 50 баллов, зачёт - в 50 баллов.

**25 баллов** – контрольная работа №1

**25 баллов** – контрольная работа №2

**Итого: 25+25=50 баллов**

**7.2. Оценочные средства текущего контроля**

**Тема 1. Дополнительные разделы элементарной математики**.

Спецификация варианта контрольной работы:

1. Выполнение действий (сложение, вычитание, умножение, деление) с комплексными числами.
2. Запись комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.

Возведение в степень, деление, умножение комплексных чисел, записанных в этих формах.

3. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа.

4. Решение уравнения с комплексным неизвестным.

5. Использование формулы бинома Ньютона.

6 - 8. Задачи на перестановки, размещения и сочетания. Дополнительная задача. Доказательство утверждения с использованием метода математической индукции.

Пример контрольной работы:

**Вариант 1**

1. Запишите разложение бинома: $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$.
2. Даны комплексные числа $z_1 = 2-3i$, $z_2 = -1+i$. Найти: $z_1 - z_2$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.
3. Вычислить: $\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}$.
4. Представить в тригонометрической форме $z = i-1$.
5. Вычислить (ответ представить в алгебраической форме): $(i-1)^{20}$.
6. Решить уравнение: $z^4 + i2\sqrt{3}+2 = 0$ (изобразить корни на комплексной плоскости).
7. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи *разного цвета* так, чтобы одна не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находится с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)
8. Сколько трехзначных чисел, делящихся на 2 можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?
9. Применяя метод математической индукции, доказать, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо следующее равенство: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$.

**Вариант 2**

1. Запишите разложение бинома: $(1-y)^7$.
2. Даны комплексные числа $z_1 = i$, $z_2 = -1+2i$. Найти: $z_1+z_2$, $z_1/z_2$, $\operatorname{Re}(z_1)$.
3. Вычислить: $\frac{(2-i)^2+7+14i}{-1+2i}$.
4. Представить в тригонометрической форме: $z = \sqrt{3}+i$.
5. Вычислить (ответ представить в алгебраической форме): $(\sqrt{3}+i)^9$.
6. Решить уравнение: $z^5 + 27 = 0$ (изобразить корни на комплексной плоскости).
7. Сколько *различных* «слов», состоящих из восьми букв, может составить ребенок не умеющий читать, из восьми кубиков с буквами: И, Н, С, Т, И, Т, У, Т?
8. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?
9. Применяя метод математической индукции, доказать, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ неравенство:

$$\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}}}_{n\text{ корней}} \leq \frac{c+\sqrt{4c+1}}{2},\ c>0.$$

**Тема 2. Систематизация знаний из основных разделов элементарной математики.**

Тестирование, примерные вопросы: По аналогам КИМ 2007-2008 по математике (ЕГЭ).

**Тема 3. Использование аппарата элементарной математики при освоении практической части темы "Ряды".**

Спецификация варианта контрольной работы:

1. Построение последовательности частичных сумм и нахождение суммы числового ряда.

2-3. Исследование сходимости знакопостоянных числовых рядов.

4. Исследование сходимости знакопеременного ряда.

5. Нахождение интервала и радиуса сходимости степенного ряда.

6. Вычисление суммы степенного ряда.

7. Разложение функции в степенной ряд.

Пример контрольной работы:

**Вариант 1**

Исследовать на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \arcsin \frac{n+1}{n^3-2}$

4) Найти область сходимости: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$

5) Разложить в ряд Тейлора по степеням $x$: $\ln(x^2+3x+2)$

6) Найти сумму: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}$

7) Исследовать сходимость (абсолютную и условную):

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2+3} \cos n.$

**Вариант 2**

Исследовать на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(3n+2)}\right)^{n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}$

4) Найти область сходимости: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(3n+1)4^n}$

5) Разложить в ряд Тейлора по степеням $x$: $x\sqrt[3]{27-2x}$

6) Найти сумму: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$

7) Исследовать сходимость (абсолютную и условную):

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n + \sqrt{\ln^3 n}}.$

## 7.3. Вопросы к зачету

### Примерные задачи, содержащиеся в зачетных билетах:

**Задача 1.** Найти сумму ряда.

1. $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2-14n+48}.$
2. $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \frac{18}{n^2-13n+40}.$
3. $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2-12n+35}.$
4. $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2-11n+28}.$
5. $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \frac{6}{n^2-10n+24}.$

**Задача 2.** Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arctg^2 n}{n^3}.$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arctg n^2}{n(n+1)(n+2)}.$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}.$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3-\sin n}{n-\ln n}.$

**Задача 3.** Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right).$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} tg \frac{1}{\sqrt{n}}.$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+5}{n^2+4}.$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}} \sin\frac{1}{n+1}.$
5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} arctg \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$

**Задача 4.** Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}.$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n)!}.$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n n!}{(2n)!}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$.

**Задача 5.** Исследовать ряд на сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

**Задача 6.** Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.
4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$.

**Задача 7.** Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.
3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.
4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n(\ln\ln n)}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$.

**Задача 8.** Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha$ .

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, \alpha=0{,}01$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \alpha=0{,}01$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \alpha = 0{,}001.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!(2n+1)}, \alpha = 0{,}001.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \alpha = 0{,}01.$

**Задача 9.** Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^n+1}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+1\right)^{x+2}}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n} e^{n\left(x^2-4\right)+x\sqrt{n}}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}.$

**Задача 10.** Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3}{2n+3}(x+3)^{2n}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)5^n}(x-3)^{n}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}}(x+7)^{n}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^{2n}.$

**Задача 11.** Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n^2}\sin^{3n}x.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} 3^{\frac{n}{x-1}}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^{n}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}8^n n^2 \sin^{3n}x.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}2^{\frac{n}{4-x}}.$

**Задача 12.** Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n(n-1)}.$

2. $\sum_{n=}^{\infty}\frac{5^n}{(n+1)x^n}.$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-x^2\right)^n}{n+1}.$

4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{nx^{4n-4}}.$

**Задача 13.** Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+5)x^{n-1}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^{2n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n-1}$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)x^{3n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)x^{n-1}$.

**Задача 14.** Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $x$ .

1. $\dfrac{9}{20-x-x^2}$.
2. $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.
3. $\ln\left(1-x-6x^2\right)$
4. $2x\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-x$
5. $\dfrac{sh2x}{x}-2.$

### 7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

| **Индекс компетенции** | **Расшифровка компетенции** | **Показатель формирования компетенции для данной дисциплины** | **Оценочное средство** |
|---|---|---|---|
| ОПК-2 | способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат | Знание основных терминов дисциплины.<br>Умение решать основные задачи. | Устный опрос на практических занятиях, контрольные работы № 1 и №2, домашнее задание. Ответы на зачете по задачам №1-14. |

## 8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Работа на практических занятиях предполагает решение задач, подготовку домашнего задания.

При подготовке к зачету необходимо опираться прежде всего на знания и навыки, полученные в ходе практических занятий, а также на источники, которые указывались на занятиях в течение семестра.

## 9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 9.1. Основная литература

1.Основы математического анализа : [учеб. для студентов 1 и 2 курсов втузов и ун-тов : в 2 ч.] / Г.М. Фихтенгольц . изд. 8-е, стереотипное . Санкт-Петербург : Лань, 2006 .-; 21 .-

(Учебники для вузов, Специальная литература) .- ISBN 5-9511-0010-0, 3000.

2. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев .- Москва : Астрель : АСТ, 2007 .? 654, [1] с. : ил. ; 22 .- Предм. указ.: с. 639-649 .- ISBN 5-17-004601-4 ((АСТ)) , 5000 .- ISBN 5-271-01318-9 ((Астрель)) .- ISBN 985-13-8593-X ((Харвест)) .

3.Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович .- Москва : АСТ : Астрель, 2007 .? 558, [2] с. : ил. ; 22 .- ISBN 5-17-010062-0 ((АСТ)) .- ISBN 5-271-03601-4 (( Астрель)) .

**9.2. Дополнительная литература**

1. Анчиков А.М., Валиуллин Р.Л., Даишев Р.А. Введение в математический анализ в вопросах и задачах. Изд-во Казан. гос. ун-та, Казань, 2006.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3, Физматлит.,2008.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М. , 2008.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1,2. Физматлит, 7-е изд., 648 стр. 2005

5. Анчиков А.М. Ряды: учебно-методическое пособие, Казань, 2003. 6. Кропотова Т.В., Подольский В.Г., Кашаргин П.Е. Введение в высшую математику. 1 семестр. Учебно методическое пособие. Казань Казанский университет. 2014 г. http://kpfu.ru/portal/docs/F772398608/______1.a____a_a_a_.pdf

**9.3. Интернет-ресурсы:** Введение в математический анализ в вопросах и задачах Подробности: http://kpfu.ru/main_page?p_sub=12974

А. М. Анчиков, Р. Л. Валиуллин, Р. А. Даишев Подробности: http://kpfu.ru/main_page?p_sub=12974

Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов. Электронная библиотека учебно-методической литературы по математике - http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/696f5fc4-7f5c-b610-713f-014b7f9c0bc8

Московский центр непрерывного математического образования. Свободно распространяемые издания - http://www.mccme.ru/free-books/

Российское образование. Федеральный портал. Тесты - http://www.edu.ru/moodle/course/view.php?id=293 ЭБС Книгафонд - http://www.knigafund.ru/products/176?page=1

**10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)** Освоение дисциплины "Введение в математику" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения: Учебные аудитории для проведения лекционных и практических занятий.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 12.03.04 "Биотехнические системы и технологии" .

Автор(ы): Кропотова Т.В., Подольский В.Г.

Рецензент(ы): Попов А.А.

Программа одобрена на заседании учебно-методической комиссии Института Физики «16» сентября 2015 г.

Приложение: приложение 1 «Банк типовых задач для самостоятельного решения»

**Приложение 1**
к программе дисциплины «Введение в математику»

**«Банк типовых задач для самостоятельного решения»**

## Тема 1. Дополнительные разделы элементарной математики.

Применяя метод математической индукции, доказать, что для $\forall\, n \in N$ справедливы следующие равенства:

1. $1 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
4. $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$;
5. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$;
6. $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;
7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

Найти значения сумм $S_n$ :

13. $S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; $\quad \left[\frac{n}{3n+1}\right]$.

14. $S_n = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - ... + (-1)^n \frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}$; $\left[(-1)^n \frac{(x-1)...(x-n)}{n!}\right]$.

Найти значение выражений:

15. $P_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})...(1 - \frac{1}{n+1})$; $\quad \left[\frac{1}{1+n}\right]$.

16. $P_n = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})...(1 - \frac{1}{n^2})$, $\quad n \geq 2$; $\quad \left[\frac{n+1}{2n}\right]$.

22. Выразить $n$-й член арифметической, геометрической прогрессий через первый член соответственно. Найти значения сумм этих прогрессий.
$\left[a_n = a_1 + (n-1)d,\ S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2};\quad b_n = b_1 q^{n-1},\ S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}\right]$.

23. Сочетаниями из $n$ элементов по $k$ называются такие соединения, которые отличаются друг от друга только своими элементами. $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из $n$ элементов по $k$. Пользуясь этой формулой, легко убедиться в справедливости следующих равенств: $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = 1$; $0! = 1$.

Доказать тождества:

$a)$ $C_n^k = C_n^{n-k}$;

$b)$ $C_{n+1}^n = C_n^k + C_n^{k-1}$;

$c)$ $C_n^m C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$;

$d)$ $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$;

$e)$ $\dfrac{C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n}{n} = 2^{n-1}$.

24. Применяя метод математической индукции, получить формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n a^0 b^n. \quad (19)$$

25. Доказать тождества:

$a)$ $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n;;$

$b)$ $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0.$

Доказать:

29. $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \le |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$.

30. $2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot ... \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n; \ \ \forall n \ge 2.$

31. $2^n > 2n + 1; \ \ \forall n \ge 3.$

32. $(0,7)^n \ge 1 - 0,3n.$

33. $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \ge 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n,$
где $x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n -$ числа одного знака, большие -1 (неравенство Бернулли).

8. Покажите, что

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), \overline{k = 0, n-1,}$$

расположены в вершинах правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат.

9. Покажите, что $e^z$ не обращается в нуль ни в одной точке комплексной плоскости $z$.

10. Покажите, что если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}, \ \ r_2 \ne 0,$ то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \ \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}; \ \ z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

11. Покажите, что $e^{i2\pi k} = 1, \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$

2. Найти разность $z_2 - z_1$ и частное ${}^{z_2}\!/_{z_1}$ комплексных чисел $z_1$ и $z_2$, если

$a)$ $z_1 = 3 + 4i, \ \ z_2 = 0,4 - 0,2i; \ \ [-2; \ 6 - 4,2i].$

$b)$ $z_1 = \sqrt{5} - i, \ \ z_2 = \sqrt{5} - 2i; \ \ [-i; \ {}^7\!/_6 - i{}^{\sqrt{5}}\!/_6].$

4. Найти координаты точки $M$, изображающей комплексное число $z = \dfrac{5i - 2}{3i + 1} + i + \dfrac{8i - 3}{2 - i}.$ $\quad [\ M(-1,5; \ \ 4,7)\ ]$

5. Найти действительные части комплексных чисел:

$a)$ $z = \dfrac{(2-i)^3}{3+4i}; \ \ [\ \mathrm{Re} z = -1,52\ ].$ $b)$ $z = \dfrac{(1+i)^3}{1-i} + \dfrac{1}{i^{10}};$
$[\ \mathrm{Re} z = -3\ ].$

6. Выполнить действия: $a)$ $\dfrac{i^{13} - i^{14}}{1 + i^{15}} + i^{10}; \qquad [\ -1 + i\ ].$

$b)$ $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}; \qquad [\ \dfrac{22}{159} - \dfrac{5}{318} i\ ].$

28. Вычислить:

$a)$ $1+z+z^2+...+z^{19}$, если $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\quad [\,1+(1+\sqrt{2})\,i\,]$.

$b)$ $\sin x + a\sin 2x + ... + a^{n-1}\sin nx$; $\quad \left[\frac{a^{n+1}\sin nx + a^n \sin(n+1)x - \sin x}{a^2-2a\cos x+1}\right]$.

$c)$ $C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + ... + C_n^n \sin nx$; $\quad [\,2^n \cdot \cos^n \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2}\,]$.

$d)$ $\sum\limits_{k=0}^{100} C_{100}^k (\sqrt{3}i)^k$; $\quad [\,-2^{99}\cdot(1+i\sqrt{3})\,]$.

**Тема 2. Систематизация знаний из основных разделов элементарной математики.**

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$.

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину $6$. Точки $M$ и $N$ — середины рёбер $AA_1$ и $A_1C_1$ соответственно.
а) Докажите, что прямые $BM$ и $MN$ перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями $BMN$ и $ABB_1$.

Решите неравенство $\dfrac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x} \le \log_{25}9$.

Две окружности касаются внешним образом в точке $K$. Прямая $AB$ касается первой окружности в точке $A$, а второй — в точке $B$. Прямая $BK$ пересекает первую окружность в точке $D$, прямая $AK$ пересекает вторую окружность в точке $C$.
а) Докажите, что прямые $AD$ и $BC$ параллельны.
б) Найдите площадь треугольника $AKB$, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

31 декабря 2013 г. Сергей взял в банке $9\ 930\ 000$ рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какова должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Найдите все положительные значения $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\(x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно $-3$, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно $-8$.
а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

**Тема 3. Использование аппарата элементарной математики при освоении практической части темы "Ряды".**

**Задача 1.** Найти сумму ряда.

1. $\sum\limits_{n=9}^{\infty}\frac{2}{n^2-14n+48}.$

2. $\sum\limits_{n=9}^{\infty}\frac{18}{n^2-13n+40}.$

3. $\sum\limits_{n=8}^{\infty}\frac{4}{n^2-12n+35}.$

4. $\sum\limits_{n=8}^{\infty}\frac{36}{n^2-11n+28}.$

5. $\sum\limits_{n=7}^{\infty}\frac{6}{n^2-10n+24}.$

**Задача 2.** Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^2 n}{n^3}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg n^2}{n(n+1)(n+2)}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-\sin n}{n-\ln n}.$

**Задача 3.** Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right).$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}tg\frac{1}{\sqrt{n}}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}\sin\frac{1}{n+1}.$

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}arctg\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$

**Задача 4.** Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n)!}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\left(n^3+1\right)}{(n+1)!}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n n!}{(2n)!}.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}.$

**Задача 5.** Исследовать ряд на сходимость.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

**Задача 6.** Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.
4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$.

**Задача 7.** Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.
3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.
4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n(\ln\ln n)}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$.

**Задача 8.** Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha$ .

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, \alpha=0{,}01$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \alpha=0{,}01$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \alpha=0{,}001$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}, \alpha=0{,}001$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \alpha=0{,}01$.

**Задача 9.** Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^n+1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\left(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+1\right)^{x+2}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n} e^{n\left(x^2-4\right)+x\sqrt{n}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}$.

**Задача 10.** Найти область сходимости ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-2)^3}{2n+3}(x+3)^{2n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)5^n}(x-3)^n$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}}(x+7)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^{2n}$.

**Задача 11.** Найти область сходимости ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8^n}{n^2}\sin^{3n}x$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} 3^{\frac{n}{x-1}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}8^n n^2\sin^{3n}x$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}2^{\frac{n}{4-x}}$.

**Задача 12.** Найти сумму ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n(n-1)}$.

2. $\sum\limits_{n=}^{\infty}\dfrac{5^n}{(n+1)x^n}$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(1-x^2\right)^n}{n+1}$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)(n+2)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{nx^{4n-4}}$.

**Задача 13.** Найти сумму ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+5)x^{n-1}$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+5)x^{2n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n-1}$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+4)x^{3n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+3)x^{n-1}$.

**Задача 14.** Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $x$ .

1. $\dfrac{9}{20 - x - x^2}$.

2. $\dfrac{x^2}{\sqrt{4 - 5x}}$.

3. $\ln\left(1 - x - 6x^2\right)$

4. $2x\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - x$

5. $\dfrac{sh2x}{x} - 2.$