Известия вузов. Математика
2016, №6, с. 61–72

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

К.Б. САБИТОВ, В.А. НОВИКОВА

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА А.А. ДЕЗИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

Аннотация. Для уравнения смешанного типа $u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0$ в прямоугольной области методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения задачи с условиями периодичности по переменной x, нелокальным условием и граничным условием. Решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей. При некоторых условиях относительно параметров и заданных функций доказана равномерная сходимость построенного ряда и устойчивость решения от этих функций.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальная задача, критерий единственности, малые знаменатели, устойчивость.

УДК: 517.957

1. Постановка задачи и полученные результаты

В прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < l,\ -\alpha < y < \beta\}$, где l, α и β — заданные положительные числа, рассмотрим неоднородное уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = F(x, y). \tag{1}$$

А.А. Дезин [1], [2] отметил, что метод поиска разрешимых расширений для дифференциальных операторов может быть адаптирован к оператору L Лаврентьева–Бицадзе с условиями периодичности по переменной x

$$u(0, y) = u(l, y), \quad u_x(0, y) = u_x(l, y), \quad -\alpha \le y \le \beta, \tag{2}$$

и склеивания

$$u(x, 0+0) = u(x, 0-0) = u(x, 0), \quad u_y(x, 0+0) = u_y(x, 0-0) = u_y(x, 0), \quad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

При этом по переменной y задаются однородные условия

$$u(x, \beta) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

$$u_y(x, -\alpha) - \lambda u(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le l; \tag{5}$$

здесь λ — заданный вещественный числовой параметр; в [1] предполагается $l = 2\pi$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

В работах З.А. Нахушевой ([3]; [4], с. 143–153) задача (1)–(5) изучена, когда $\alpha = l$, $F(x, y) = f(x, y)H(y)$, $H(y)$ — функция Хевисайда, $\lambda \ge 0$. Показано, что при $\lambda < 0$ однородная задача (т. е. когда $f(x, y) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения.

Поступила 29.10.2014

В данной работе для простоты предположим, что $F(x,y)\equiv 0$, т.е. рассмотрим однородное уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$u_{xx}+(\operatorname{sgn} y)u_{yy}=0 \tag{6}$$

и зададим неоднородные условия по переменной y:

$$u(x,\beta)=\varphi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{7}$$

$$u_y(x,-\alpha)-\lambda u(x,0)=\psi(x),\quad 0\le x\le l. \tag{8}$$

Далее исследуем разрешимость задачи (2), (3), (6)–(8) в зависимости от заданных числовых параметров l, α, β, λ и функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в пространстве функций

$$u(x,y)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D_+\cup D_-), \tag{9}$$

где $D_+=D\cap\{y>0\}$, $D_-=D\cap\{y<0\}$.

Отметим, что в работах [5], [6] методом спектрального анализа изучены задача Дирихле и задача с условиями периодичности (2) для вырождающегося уравнения смешанного типа

$$K(y)u_{xx}+u_{yy}-b^2K(y)u=0,$$

где $K(y)=(\operatorname{sgn} y)|y|^n$, $n=\mathrm{const}>0$, $b=\mathrm{const}\ge 0$. Здесь этот метод применяется для исследования поставленной задачи А.А. Дезина.

В данной работе установлен критерий единственности решения задачи (2), (6)–(9). Решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей для отношения сторон α/l прямоугольника D_-. При некоторых условиях относительно α/l, λ, β и функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ показано, что сумма построенного ряда принадлежит классу (9). Доказана также устойчивость решения задачи от заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Отметим, что первые нелокальные задачи для уравнений смешанного типа были изучены в работах [7]–[9].

2. Единственность решения

В уравнении (1), разделяя переменные $u(x,y)=X(x)Y(y)$, относительно $X(x)$ получим известную спектральную задачу

$$X''(x)+\widetilde{\lambda}X(x)=0,\quad 0<x<l, \tag{10}$$

$$X(0)=X(l),\quad X'(0)=X'(l). \tag{11}$$

Задача (10), (11) имеет счетное множество собственных значений $\widetilde{\lambda}_k=\mu_k^2=\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2$, $k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, все они являются простыми, а соответствующая система собственных функций $X_k(x)=\left\{\frac{1}{\sqrt{l}},\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x,\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x\right\}$ ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,l]$, и в нем образует ортонормированный базис.

Пусть существует решение задачи (2), (6)–(9). Следуя [5], [6], введем функции

$$u_0(y)=\frac{1}{\sqrt{l}}\int_0^l u(x,y)\,dx,\quad u_k(y)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l u(x,y)\cos\mu_k x\,dx, \tag{12}$$

$$v_k(y)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l u(x,y)\sin\mu_k x\,dx,\ k\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

и аналогично этим работам относительно функций (12), (13) получим дифференциальные уравнения

$$u_k''(y) - (\operatorname{sgn} y)\mu_k^2 u_k(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \tag{14}$$

$$u_0''(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \tag{15}$$

$$v_k''(y) - (\operatorname{sgn} y)\mu_k^2 v_k(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Найдем общее решение уравнения (14)

$$u_k(y) = \begin{cases} c_k e^{\mu_k y} + d_k e^{-\mu_k y}, & y > 0; \\ a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y, & y < 0, \end{cases} \tag{17}$$

где a_k, b_k, c_k и d_k — произвольные постоянные. Выберем эти постоянные так, чтобы выполнялись условия сопряжения

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0). \tag{18}$$

Удовлетворяя функции (17) условиям (18), найдем

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad d_k = \frac{a_k - b_k}{2}.$$

Тогда с учетом найденных значений c_k и d_k функции (17) примут вид

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k \operatorname{ch} \mu_k y + b_k \operatorname{sh} \mu_k y, & y > 0; \\ a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y, & y < 0. \end{cases} \tag{19}$$

Для нахождения постоянных a_k и b_k воспользуемся условиями (7), (8) и формулой (12):

$$u_k(\beta) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x, \beta) \cos \mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \cos \mu_k x \, dx = \varphi_k, \tag{20}$$

$$u_k'(-\alpha) - \lambda u_k(0) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l [u_y(x, -\alpha) - \lambda u(x, 0)] \cos \mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) \cos \mu_k x \, dx = \psi_k. \tag{21}$$

Теперь на основании (19)–(21) получим систему

$$\begin{gathered} a_k \operatorname{ch} \mu_k \beta + b_k \operatorname{sh} \mu_k \beta = \varphi_k, \\ a_k \left(\sin \mu_k \alpha - \frac{\lambda}{\mu_k} \right) + b_k \cos \mu_k \alpha = \frac{\psi_k}{\mu_k}. \end{gathered} \tag{22}$$

Если определитель системы (22)

$$\Delta(k) = \cos \mu_k \alpha \operatorname{ch} \mu_k \beta - \operatorname{sh} \mu_k \beta \sin \mu_k \alpha + \frac{\lambda}{\mu_k} \operatorname{sh} \mu_k \beta \neq 0 \tag{23}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, то данная система имеет единственное решение

$$a_k = \frac{1}{\Delta(k)} \left[\varphi_k \cos \mu_k \alpha - \psi_k \frac{\operatorname{sh} \mu_k \beta}{\mu_k} \right], \tag{24}$$

$$b_k = \frac{1}{\Delta(k)} \left[\varphi_k \left(\frac{\lambda}{\mu_k} - \sin \mu_k \alpha \right) + \psi_k \frac{\operatorname{ch} \mu_k \beta}{\mu_k} \right]. \tag{25}$$

Отметим, что определитель $\Delta(k)$ помимо переменной k зависит от данных задачи α, β, l и λ — как параметров.

Подставляя (24) и (25) в (22), найдем окончательный вид функций

$$u_k(y)=\begin{cases}\varphi_k\frac{A_k(\alpha,y)}{\Delta(k)}-\psi_k\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\beta-y)}{\Delta(k)}, & y>0;\\ \varphi_k\frac{B_k(\alpha,y)}{\Delta(k)}+\psi_k\frac{C_k(y,\beta)}{\Delta(k)}, & y<0,\end{cases} \tag{26}$$

где

$$A_k(\alpha,y)=\cos\mu_k\alpha\operatorname{ch}\mu_k y-\sin\mu_k\alpha\operatorname{sh}\mu_k y+\frac{\lambda}{\mu_k}\operatorname{sh}\mu_k y, \tag{27}$$

$$B_k(\alpha,y)=\cos\mu_k(\alpha+y)+\frac{\lambda}{\mu_k}\sin\mu_k y, \tag{28}$$

$$C_k(y,\beta)=\operatorname{ch}\mu_k\beta\sin\mu_k y-\operatorname{sh}\mu_k\beta\cos\mu_k y. \tag{29}$$

По аналогичной схеме, исходя из уравнения (15), на основании условий сопряжения и граничных условий (7) и (8) найдем

$$u_0(y)=\varphi_0\frac{1+\lambda y}{1+\lambda\beta}+\psi_0\frac{y-\beta}{1+\lambda\beta},\quad -\alpha\le y\le\beta. \tag{30}$$

Здесь $1+\lambda\beta\ne0$, $\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{l}}\int\limits_0^l\varphi(x)\,dx$, $\psi_0=\frac{1}{\sqrt{l}}\int\limits_0^l\psi(x)\,dx$. Формулу (30) и условие $1+\lambda\beta\ne0$ можно получить из равенств (26)–(29) и условия (23) при $k=0$.

Повторяя рассуждения, аналогичные при построении формулы (26), на основании общего решения уравнения (16) найдем

$$v_k(y)=\begin{cases}\widetilde{\varphi}_k\frac{A_k(\alpha,y)}{\Delta(k)}-\widetilde{\psi}_k\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\beta-y)}{\Delta(k)}, & y>0;\\ \widetilde{\varphi}_k\frac{B_k(\alpha,y)}{\Delta(k)}+\widetilde{\psi}_k\frac{C_k(y,\beta)}{\Delta(k)}, & y<0,\end{cases} \tag{31}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\varphi(x)\sin\mu_k x\,dx,\quad \widetilde{\psi}_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\psi(x)\sin\mu_k x\,dx.$$

Теперь можем доказать теорему единственности решения задачи (2), (6)–(9). Пусть $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv0$ и выполнены условия (23) при всех $k\in\mathbb{N}_0$. Тогда $\varphi_k=\psi_k=\widetilde{\varphi}_k=\widetilde{\psi}_k=0$ при всех $k\in\mathbb{N}_0$ и $\varphi_0=\psi_0=0$ и из равенств (26), (30), (31), (12), (13) вытекает

$$\int_0^l u(x,y)\,dx=0,\quad \int_0^l u(x,y)\cos\mu_k x\,dx=0,\quad \int_0^l u(x,y)\sin\mu_k x\,dx=0,\quad k=1,2,\dots.$$

Отсюда в силу полноты системы функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{l}},\ \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x,\ \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x\right\}$ в пространстве $L_2[0,l]$ следует $u(x,y)=0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $y\in[-\alpha,\beta]$. Поскольку функция $u(x,y)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,y)\equiv0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β, l, λ и $k=p\in\mathbb{N}_0$ нарушено условие (23), т. е. $\Delta_{\alpha\beta}(p)=0$. Тогда однородная задача (2), (6)–(9) (где $\varphi(x)=\psi(x)\equiv0$) имеет нетривиальные решения

$$u_p(x,y)=u_p(y)\left(A_1+A_2\cos\mu_p x+A_3\sin\mu_p x\right), \tag{32}$$

$$u_p(y)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sh}\mu_p(\beta-y)}{\operatorname{sh}\mu_p\beta}, & y>0,\quad p\in\mathbb{N};\\ \frac{\mu_p\cos\mu_p(\alpha+y)+\lambda\sin\mu_p y}{\mu_p\cos\mu_p\alpha}, & y<0,\quad p\in\mathbb{N};\\ u_0(y)=a_0(y-\beta),\quad a_0=\mathrm{const}\ne0, & -\alpha\le y\le\beta,\quad p=0.\end{cases} \tag{33}$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные.

Теперь естественно возникает вопрос о существовании корней уравнения $\Delta(k) = 0$. Для этого его представим в виде

$$\Delta(p) = \sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_p\beta}\,\sin(\theta_p - 2\pi p\widetilde{\alpha}) + \frac{\lambda}{\mu_p}\operatorname{sh}\mu_p\beta = 0, \tag{34}$$

где

$$\theta_p = \arcsin\frac{\operatorname{ch}\mu_p\beta}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_p\beta}}, \quad \widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{l}.$$

Отсюда видно, что уравнение (34) имеет счетное множество нулей

$$\widetilde{\alpha} = \frac{(-1)^n}{2\pi p}\arcsin\frac{\lambda\operatorname{sh}\mu_p\beta}{\mu_p\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_p\beta}} + \frac{\theta_p}{2\pi p} + \frac{\pi n}{2\pi p}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{35}$$

при условии

$$\frac{|\lambda|}{\mu_p}\operatorname{sh}\mu_p\beta \Big/ \sqrt{\operatorname{sh}^2\mu_p\beta + \operatorname{ch}^2\mu_p\beta} \le 1. \tag{36}$$

Когда $\mu_p \ge |\lambda|$, т. е. $p \ge |\lambda| l/2\pi$, неравенство (36) имеет место для таких p. Таким образом, установлен критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2), (6)–(9), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (23) *при всех* $k \in \mathbb{N}_0$.

3. Построение решения задачи

Решение поставленной задачи (2), (6)–(9) при выполнении условий (23) будем искать формально в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{l}}u_0(y) + \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y)\cos\mu_k x + v_k(y)\sin\mu_k x, \tag{37}$$

где коэффициенты $u_0(y)$, $u_k(y)$ и $v_k(y)$ определяются соответственно формулами (30), (26) и (31). Поскольку $\Delta(k)$ входит в знаменатель коэффициентов ряда (37) и, как показано выше, выражение $\Delta(k)$ имеет относительно α счетное множество нулей (35), то при α, близких к корням уравнения (34), выражение $\Delta(k)$ может стать достаточно малым, т. е. возникает проблема "малых знаменателей" [5], [6], [10]. Следовательно, для обоснования существования решения задачи надо показать существование положительных чисел α, β, l и λ, при которых выражение $\Delta(k)$ при больших k отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Лемма 1. *Если $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$ является натуральным числом и $\lambda > -2\pi/l$, то существует положительная постоянная C_0, зависящая от λ и l, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\Delta(k) \ge e^{\mu_k\beta}C_0 > 0. \tag{38}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\alpha} = p \in \mathbb{N}$. Тогда выражение $\Delta(k)$ в силу левой части уравнения (34) примет вид

$$\Delta(k) = \operatorname{ch}\mu_k\beta + \frac{\lambda}{\mu_k}\operatorname{sh}\mu_k\beta. \tag{39}$$

Отсюда при $\lambda \ge 0$ следует

$$\Delta(k) \ge \operatorname{ch}\mu_k\beta > \frac{1}{2}e^{\mu_k\beta}.$$

Если $\lambda < 0$, то из соотношения (39) получим

$$\Delta(k) > e^{\mu_k\beta}\left(\frac{1}{2} - \frac{|\lambda|}{2\mu_k}\right) \geq e^{\mu_k\beta}\left(\frac{1}{2} - \frac{|\lambda| l}{4\pi}\right).$$

Отсюда следует справедливость оценки (38). □

Лемма 2. *Если $\widetilde{\alpha} = p/q \notin \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(q, 4) = 1$, $(p, q) = 1$, то существуют положительные постоянные C_0 и k_0 ($k_0 \in \mathbb{N}$), вообще говоря, зависящие от α, l и λ, такие, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|\Delta(k)| \geq C_0 e^{\mu_k\beta} > 0. \tag{40}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\alpha} = p/q \in \mathbb{Q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $(q, 4) = 1$, $\frac{p}{q} \notin \mathbb{N}$. В этом случае разделим $2kp$ на q с остатком: $2kp = sq + r$; здесь $s, r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r < q$. Тогда

$$\Delta(k) = \sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_k\beta}(-1)^{s+1}\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \theta_k\right) + \frac{\lambda}{\mu_k}\operatorname{sh}\mu_k\beta. \tag{41}$$

Если $r = 0$, то этот случай сводится к уже рассмотренному выше $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{N}$.

Пусть $0 < r < q$. Тогда $1 \leq r \leq q - 1$, $q \geq 2$. Поскольку $\theta_k \to \frac{\pi}{4}$ при $k \to +\infty$, то $\theta_k = \frac{\pi}{4} + \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$. В силу этого существует натуральное число k_1 такое, что при всех $k > k_1$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \theta_k\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{4} - \varepsilon_k\right)\right| \geq \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{4}\right)\right| = C_1 > 0. \tag{42}$$

Тогда с учетом оценки (42) из (41) при $k > k_1$ имеем

$$|\Delta(k)| = \sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_k\beta}\left|(-1)^{s+1}\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \theta_k\right) + \frac{\lambda}{\mu_k}\frac{\operatorname{sh}\mu_k\beta}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_k\beta}}\right| >$$
$$> \frac{e^{\mu_k\beta}}{\sqrt{2}}\left(\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \theta_k\right)\right| - \frac{|\lambda|}{\mu_k}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq \frac{e^{\mu_k\beta}}{\sqrt{2}}\left(C_1 - \frac{|\lambda| l}{\pi\sqrt{2}k}\right). \tag{43}$$

Отсюда видно, что существует такое число $k_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_2$

$$\frac{|\lambda| l}{\pi\sqrt{2}k} < \frac{|\lambda| l}{\pi\sqrt{2}k_2} \leq \frac{C_1}{2}.$$

Тогда из (43) следует требуемая оценка (40) при всех $k > k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. □

Лемма 3. *Если $\widetilde{\alpha}$ является иррациональным алгебраическим числом степени 2, то существуют положительные постоянные β_0, λ_0 и C_0, для которых при всех $\beta > \beta_0$, $|\lambda| < \lambda_0$ и $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\Delta(k)| \geq \frac{C_0}{k} e^{\mu_k\beta}. \tag{44}$$

Доказательство. Предварительно оценим выражение

$$\Delta_1(k) = \sin(2k\pi\widetilde{\alpha} - \theta_k) = (-1)^n \sin\left[\pi k\left(2\widetilde{\alpha} - n/k\right) - \theta_k\right], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ можно подобрать $n \in \mathbb{N}$ такое, что имеет место неравенство [11]

$$\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right| < \frac{1}{2k}, \quad \alpha_1 = 2\widetilde{\alpha}. \tag{46}$$

Из теории чисел известно (теорема Лиувилля [12], с. 60), что для любого иррационального алгебраического числа α_1 степени 2 существует число $\delta > 0$ такое, что при любых целых p, q $(q > 0)$ справедливо неравенство

$$|\alpha_1 - p/q| > \delta/q^2. \tag{47}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ такое, что выполнено неравенство (46) или равносильное ему

$$|\pi k\,(\alpha_1 - n/k)| < \pi/2. \tag{48}$$

Учтем, что $\theta_k \to \pi/4$ при $k \to \infty$. Из убывания функции $u = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}$ и возрастания функции $\arcsin u$ получим

$$\pi/4 < \theta_k \le \theta_1 < \pi/2. \tag{49}$$

С учетом оценок (48) и (49) имеем

$$0 \le |\pi k\,(\alpha_1 - n/k) - \theta_k| \le \pi k\,|\alpha_1 - n/k| + \theta_k < \pi/2 + \theta_1 < \pi.$$

Отсюда возможны два случая:

$$0 \le |\pi k\,(\alpha_1 - n/k) - \theta_k| < \pi/2, \tag{50}$$

$$\pi/2 \le |\pi k\,(\alpha_1 - n/k) - \theta_k| < \pi/2 + \theta_1. \tag{51}$$

В случае неравенства (51) получим оценку для выражения (45):

$$|\Delta_1(k)| = \left|\sin\left[\pi k\,(\alpha_1 - n/k) - \theta_k\right]\right| >$$
$$> \sin(\pi/2 + \theta_1) = \cos\theta_1 = (\operatorname{sh}\mu_1\beta)/\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_1\beta} = C_2 \ge C_2/k. \tag{52}$$

Если выполнено условие (50), то с учетом известного неравенства

$$\sin x \ge \frac{2}{\pi}x, \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2},$$

имеем

$$|\Delta_1(k)| = \left|\sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) - \theta_k\right]\right| \ge \frac{2}{\pi}\left|\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) - \theta_k\right|. \tag{53}$$

Оценим правую часть неравенства (53)

$$|\pi k\alpha_1 - \pi n - \theta_k| = \left|\pi k\alpha_1 - \pi n - \frac{\pi}{4} - \theta_k + \frac{\pi}{4}\right| = \left|\pi k\alpha_1 - \pi\frac{4n+1}{4}\right| - \left|\theta_k - \frac{\pi}{4}\right|. \tag{54}$$

С учетом (46) первое слагаемое из правой части (54) оценивается так:

$$\pi k\left|\alpha_1 - \pi\frac{4n+1}{4k}\right| > \frac{\pi\delta}{16k}. \tag{55}$$

Используя формулу разности арксинусов

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \quad \text{если} \quad x \cdot y > 0,$$

оценим второе слагаемое

$$\left|\theta_k - \frac{\pi}{4}\right| = \left|\arcsin\frac{\operatorname{ch}\mu_k\beta}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_k\beta}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \left|\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\operatorname{ch}\mu_k\beta - \operatorname{sh}\mu_k\beta}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_k\beta}}\right)\right| =$$
$$= \arcsin\frac{1}{e^{2\mu_k\beta}\sqrt{1+e^{-4\mu_k\beta}}} < \frac{\pi}{2e^{2\mu_k\beta}}, \tag{56}$$

так как

$$|\arcsin x| < \frac{\pi}{2}|x|, \quad 0 < |x| < 1.$$

Тогда из оценок (55) и (56) следует

$$|\Delta_1(k)| > \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\delta}{16k} - \frac{\pi}{2e^{2\mu_k\beta}}\right) = \frac{\delta}{8k} - \frac{1}{e^{2\mu_k\beta}} > \frac{\delta}{8k} - \frac{1}{2\mu_k\beta} = \frac{1}{k}\left(\frac{\delta}{8} - \frac{l}{4\pi\beta}\right) = \frac{C_3}{k}, \tag{57}$$

где $C_3 = (\pi\delta\beta - 2l)/8\pi\beta > 0$ при $\beta > \beta_0 = 2l/\pi\delta$.

Вернемся к оценке

$$|\Delta(k)| \geq \frac{e^{\mu_k\beta}}{\sqrt{2}}\left|\Delta_1(k) + \frac{\lambda}{\mu_k}\operatorname{sh}\mu_k\beta/\sqrt{\operatorname{ch}2\mu_k\beta}\right|.$$

Используя неравенства (52) и (57), получим требуемую оценку (44):

$$|\Delta(k)| \geq \frac{e^{\mu_k\beta}}{\sqrt{2}}\left(|\Delta_1(k)| - \frac{|\lambda|}{\mu_k}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \frac{e^{\mu_k\beta}}{\sqrt{2}}\left(\frac{C_4}{k} - \frac{|\lambda| l}{2\pi\sqrt{2}k}\right) = \frac{e^{\mu_k\beta}}{k\sqrt{2}}\left(C_4 - \frac{|\lambda| l}{2\pi\sqrt{2}}\right) = \frac{e^{\mu_k\beta}}{k}C_0,$$

где $C_0 = \left(C_4 - \frac{|\lambda| l}{2\pi\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ при $|\lambda| < \lambda_0 = \frac{C_4 2\pi\sqrt{2}}{l}$, $C_4 = \min\{C_2, C_3\}$. □

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *и любом* $y \in [-\alpha, \beta]$ *справедливы оценки*:

$$|u_k(y)| \leq M_1\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), \quad |u_k'(y)| \leq M_2 k\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right), \quad |u_k''(y)| \leq M_3 k^2\left(|\varphi_k| + |\psi_k|\right);$$
$$|v_k(y)| \leq M_1\left(|\widetilde{\varphi}_k| + |\widetilde{\psi}_k|\right), \quad |v_k'(y)| \leq M_2 k\left(|\widetilde{\varphi}_k| + |\widetilde{\psi}_k|\right), \quad |v_k''(y)| \leq M_3 k^2\left(|\widetilde{\varphi}_k| + |\widetilde{\psi}_k|\right),$$

здесь и далее M_i *— положительные постоянные.*

Справедливость приведенных оценок в силу оценки (38) непосредственно следует из формул (26)–(29) и (31).

В силу леммы 4 ряд (37), его производные первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$ и производные второго порядка в областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ мажорируются числовым рядом

$$M_4\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\left(|\varphi_k| + |\psi_k| + |\widetilde{\varphi}_k| + |\widetilde{\psi}_k|\right). \tag{58}$$

Из теории рядов Фурье известно, что если $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0,l]$ и $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l)$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l)$, $i = 0, 1, 2$, то ряд (58) оценивается сходящимся числовым рядом

$$M_5\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}| + |\widetilde{\varphi}_k^{(3)}| + |\widetilde{\psi}_k^{(3)}|\right), \tag{59}$$

где

$$\varphi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi^{(3)}(x)\sin\mu_k x\,dx, \quad \psi_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi^{(3)}(x)\sin\mu_k x\,dx,$$
$$\widetilde{\varphi}_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \widetilde{\varphi}^{(3)}(x)\cos\mu_k x\,dx, \quad \widetilde{\psi}_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \widetilde{\psi}^{(3)}(x)\cos\mu_k x\,dx$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k^{(3)}|^2 \leq \|\varphi^{(3)}(x)\|_{L_2}^2, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}|\psi_k^{(3)}|^2 \leq \|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2}^2,$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\widetilde{\varphi}_k^{(3)}|^2 \leq \|\varphi^{(3)}(x)\|_{L_2}^2, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}|\widetilde{\psi}_k^{(3)}|^2 \leq \|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2}^2.$$

Следовательно, сумма ряда (37) принадлежит классу функций (9).

Если выполнены условия леммы 3, то ряд (37) и его производные до второго порядка включительно мажорируются числовым рядом

$$M_5 \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 \left(|\varphi_k| + |\psi_k| + |\widetilde{\varphi}_k| + |\widetilde{\psi}_k| \right). \tag{60}$$

Для сходимости ряда (60) достаточно, чтобы $\varphi(x), \psi(x) \in C^4[0, l]$ и $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l)$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l)$, $i = \overline{0, 3}$.

Пусть теперь выполнены условия леммы 2. Тогда в силу оценки (40) ряд (37) и его производные до второго порядка включительно мажорируются числовым рядом

$$M_5 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(|\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}| + |\widetilde{\varphi}_k^{(3)}| + |\widetilde{\psi}_k^{(3)}| \right). \tag{61}$$

Если для указанных в лемме 2 чисел $\widetilde{\alpha}$ выражение $\Delta(k) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, k_0}$, то из сходимости ряда (61) в силу признака Вейерштрасса сумма ряда (37) удовлетворяет условиям (9) и (6).

Если для указанных в лемме 2 чисел $\widetilde{\alpha}$ при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_p \le k_0$, где $1 \le k_1 \le k_2 < \cdots < k_p$, k_i, $i = \overline{1, p}$ и p — заданные натуральные числа, выражение $\Delta(k) = 0$, то для разрешимости задачи (2), (3), (6)–(9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} &\varphi_k \mu_k \cos \mu_k \alpha - \psi_k \operatorname{sh} \mu_k \beta = 0, \\ &\widetilde{\varphi}_k \mu_k \cos \mu_k \alpha - \widetilde{\psi}_k \operatorname{sh} \mu_k \beta = 0, \quad k = k_1, k_2, \ldots, k_p. \end{aligned} \tag{62}$$

Тогда решение задачи определяется в виде суммы

$$u(x, y) = u_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} (k \neq k_1, k_2, \ldots, k_p) \left[u_k(y) \cos \mu_k x + v_k(y) \sin \mu_k x \right] + \sum_m \widetilde{u}_m(x, y), \tag{63}$$

где в последней сумме m принимает значения $k_1, k_2, \ldots, k_p$, функции $\widetilde{u}_m(x, y)$ определяются формулой

$$\widetilde{u}_p(x, y) = \widetilde{u}_p(y) \cos \mu_p x + \widetilde{v}_p(y) \sin \mu_p x, \tag{64}$$

в которой

$$\widetilde{u}_p(y) = \begin{cases} \varphi_p \frac{\operatorname{sh} \mu_p y}{\operatorname{sh} \mu_p \beta} + C_p \frac{\operatorname{sh} \mu_p (\beta - y)}{\operatorname{sh} \mu_p \beta}, & y > 0; \\ \psi_p \frac{\sin \mu_p y}{\mu_p \cos \mu_p \alpha} + C_p \frac{\mu_p \cos \mu_p (y + \alpha) + \lambda \sin \mu_p y}{\mu_p \cos \mu_p \alpha}, & y < 0; \end{cases} \tag{65}$$

$$\widetilde{v}_p(y) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}_p \frac{\operatorname{sh} \mu_p y}{\operatorname{sh} \mu_p \beta} + C_p \frac{\operatorname{sh} \mu_p (\beta - y)}{\operatorname{sh} \mu_p \beta}, & y > 0; \\ \widetilde{\psi}_p \frac{\sin \mu_p y}{\mu_p \cos \mu_p \alpha} + C_p \frac{\mu_p \cos \mu_p (y + \alpha) + \lambda \sin \mu_p y}{\mu_p \cos \mu_p \alpha}, & y < 0, \end{cases} \tag{66}$$

C_p – произвольная постоянная.

Отметим, что равенства (64)–(66) составлены с учетом ненулевых решений (32) и (33) однородной задачи.

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. *Если выполнены условия леммы* 1, $1 + \lambda \beta \neq 0$ *и* $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0, l]$, $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l)$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l)$, $i = 0, 1, 2$, *то существует единственное решение задачи* (2), (6)–(9) *и это решение определяется рядом* (37).

Теорема 3. *Если выполнены условия леммы* 3, $1+\lambda\beta\neq 0$ *и* $\varphi(x),\psi(x)\in C^4[0,l]$, $\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(l)$, $\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(l)$, $i=\overline{0,3}$, *то существует единственное решение задачи* (2), (6)–(9) *и это решение определяется рядом* (37).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы* 2 (*следовательно, выполнена оценка* (39) *при всех* $k>k_0$), $1+\lambda\beta\neq 0$, *и* $\varphi(x),\psi(x)\in C^3[0,l]$, $\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(l)$, $\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(l)$, $i=0,1,2$. *Если* $\Delta(k)\neq 0$ *при всех* $k=\overline{1,k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (2), (6)–(9) *и это решение определяется рядом* (37); *если* $\Delta(k)=0$ *при некоторых* $k=k_1,k_2,\ldots,k_p\le k_0$, *то задача* (2), (6)–(9) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (62), *и решение в этом случае определяется рядом* (63).

4. Устойчивость решения задачи от заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

Рассмотрим известные нормы

$$\|u\|_{L_2[0,1]}=\|u\|_{L_2}=\left(\int_0^l |u(x,y)|^2\,dx\right)^{1/2},$$
$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})}=\max_{\overline{D}}|u(x,y)|.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *или* 3. *Тогда для решения* (37) *задачи* (2), (6)–(9) *имеют место оценки*

$$\|u(x,y)\|_{L_2}\le M_6\left(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]}+\|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\right), \tag{67}$$
$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})}\le M_7\left(\|\varphi(x)\|_{C[0,l]}+\|\psi(x)\|_{C[0,l]}+\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}+\|\psi'(x)\|_{C[0,l]}\right), \tag{68}$$

где постоянные M_6 *и* M_7 *не зависят от функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Доказательство проведем, следуя работе [13]. Поскольку система $X_k(x)$ ортонормирована в пространстве $L_2[0,l]$, то из формулы (37) в силу леммы 4 получим

$$\|u(x,y)\|^2_{L_2}=u_0^2(y)+\sum_{k=1}^{+\infty}(u_k^2(y)+v_k^2(y))\le 2\widetilde{M}_1^2\left(\varphi_0^2+\psi_0^2\right)+$$
$$+2M_1^2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(|\varphi_k|^2+|\psi_k|^2+|\widetilde{\varphi}_k|^2+|\widetilde{\psi}_k|^2\right)\le$$
$$\le M_6^2\left(\varphi_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(\varphi_k^2+\widetilde{\varphi}_k^2)+\psi_0^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(\psi_k^2+\widetilde{\psi}_k^2)\right)\le M_6^2\left(\|\varphi(x)\|^2_{L_2}+\|\psi(x)\|^2_{L_2}\right).$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (67). Пусть (x,y) — произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда на основании леммы 4 имеем

$$|u(x,y)|\le|u_0(y)|+M_1\sum_{k=1}^{+\infty}(|u_k(y)|+|v_k(y)|)\le$$
$$\le\widetilde{M}_1\left(|\varphi_0|+|\psi_0|\right)+M_1\sum_{k=1}^{+\infty}\left(|\varphi_k|+|\psi_k|+|\widetilde{\varphi}_k|+|\widetilde{\psi}_k|\right). \tag{69}$$

По условию

$$\varphi_k=-\frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k},\quad \widetilde{\varphi}_k=\frac{\widetilde{\varphi}_k^{(1)}}{\mu_k},\quad \psi_k=-\frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k},\quad \widetilde{\psi}_k=\frac{\widetilde{\psi}_k^{(1)}}{\mu_k}, \tag{70}$$

где

$$\varphi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi'(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad \widetilde{\varphi}_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi'(x) \cos \mu_k x \, dx,$$
$$\psi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi'(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad \widetilde{\psi}_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi'(x) \cos \mu_k x \, dx.$$

С учетом представлений (70) из оценки (69) на основании неравенства Коши–Буняковского получим

$$|u(x,y)| \le \widetilde{M}_1\big(|\varphi_0| + |\psi_0|\big) + M_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_k}\big(|\varphi_k^{(1)}| + |\widetilde{\varphi}_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}| + |\widetilde{\psi}_k^{(1)}|\big) \le \widetilde{M}_1\left(|\varphi_0| + |\psi_0|\right) +$$
$$+ M_1 \frac{l}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(1)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\widetilde{\varphi}_k^{(1)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(1)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\widetilde{\psi}_k^{(1)}|^2\right)^{1/2}\right] \le$$
$$\le \widetilde{M}_2 \left[\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_k^{(1)}|^2 + |\widetilde{\varphi}_k^{(1)}|^2)\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (|\psi_k^{(1)}|^2 + |\widetilde{\psi}_k^{(1)}|^2)\right)^{1/2}\right] \le$$
$$\le \widetilde{M}_2 \left[\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2} + \left(|\varphi_0^{(1)}|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_k^{(1)}|^2 + |\widetilde{\varphi}_k^{(1)}|^2)\right)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \left(|\psi_0^{(1)}|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (|\psi_k^{(1)}|^2 + |\widetilde{\psi}_k^{(1)}|^2)\right)^{1/2}\right] \le$$
$$\le M_7\big(\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2} + \|\varphi'(x)\|_{L_2} + \|\psi'(x)\|_{L_2}\big),$$

где $\varphi_0^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{l}} \int\limits_0^l \varphi'(x)\, dx = 0$, $\psi_0^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{l}} \int\limits_0^l \psi'(x)\, dx = 0$. Отсюда следует (68). □

Литература

[1] Дезин А.А. *On the solvable extensions of partial differential operators*, Outlines of the joint Soviet-American Symposium on Partial Diff. Equat., Novosibirsk, 65–66 (1963).

[2] Дезин А.А. *Операторы с первой производной по времени и нелокальные граничные условия*, Изв. АН СССР **31** (1), 61–86 (1967).

[3] Нахушева З.А. *Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева–Бицадзе*, Дифференц. уравнения **45** (8), 1199–2003 (2009).

[4] Нахушева З.А. *Нелокальные краевые задачи для основных и смешанных типов дифференциальных уравнений* (Изд-во КБНЦ РАН, Нальчик, 2011).

[5] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа*, Докл. РАН **413**, (1), 23–26 (2007).

[6] Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. *Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа*, Дифференц. уравнения **46** (1), 105–113 (2010).

[7] Франкль Ф.И. *Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения*, ПММ **20** (2), 196–202 (1956).

[8] Жегалов В.И. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии*, Учен. зап. Казанск. ун-та **122** (3), 3–16 (1962).

[9] Нахушев А.М. *О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа*, Дифференц. уравнения **5** (1), 44–69 (1969).

[10] Арнольд В.И. *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*, УМН **18** (6), 91–192 (1963).

[11] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа*, Матем. заметки **87** (6), 901–912 (2010).

[12] Хинчин А.Я. *Цепные дроби* (Наука, М., 1978).
[13] Сабитов К.Б. *Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием*, Дифференц. уравнения **46** (10), 1468–1478 (2010).

К.Б. Сабитов

Поволжская государственная социально-гуманитарная академия,
ул. М. Горького, д. 65/67, г. Самара, 443099, Россия,

e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

В.А. Новикова

Поволжская государственная социально-гуманитарная академия,
ул. М. Горького, д. 65/67, г. Самара, 443099, Россия,

e-mail: violetta.novikova.1991@mail.ru

K.B. Sabitov and V.A. Novikova

Nonlocal A.A. Dezin's problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation

Abstract. For mixed type equation $u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0$ in the rectangular domain by the method of spectral analysis we establish a criterion of uniqueness of the solution to a problem with the periodicity conditions on the variable x, nonlocal condition and the boundary condition. The solution is constructed as the sum of a series in eigenfunctions corresponding to one-dimensional spectral problem. In the substantiation of convergence of series the problem of small denominators arises. Under certain conditions on the parameters and the given functions we prove uniform convergence of the constructed series and stability of the solution from the set of these functions.

Keywords: mixed type equation, non-local problem, criterion of uniqueness, small denominators, stability.

K.B. Sabitov

Volga Region State Socially-Humanitarian Academy,
65/67 Gorky str., Samara, 443099 Russia,

e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

V.A. Novikova

Volga Region State Socially-Humanitarian Academy,
65/67 Gorky str., Samara, 443099 Russia,

e-mail: violetta.novikova.1991@mail.ru