Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2015, №12, с. 43–54 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.А. КОСОВ, Э.И. СЕМЕНОВ

О РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Изучается система двух уравнений эллиптического типа с двумя нелинейностями, зависящими от суммы квадратов искомых функций. Получены условия на нелинейности, при выполнении которых система редуцируется к одному уравнению. Найдены параметрические семейства точных решений, как радиально-симметричных, так и анизотропных по пространственным переменным, задаваемые элементарными или гармоническими функциями. В случае управляемой нелинейности указан широкий класс реализуемых точных решений, выражаемых через гармонические функции.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, нелинейные системы, точные решения.

УДК: 517.946

1. Введение

Для моделирования плазмы и движения заряженных частиц в магнитном поле применяют обычно уравнения Больцмана, Власова и другие аналогичные уравнения и системы уравнений с частными производными (например, [1]–[3] и цитированная там литература). Для них требуется отыскивать решения, удовлетворяющие заданным начальным и краевым условиям, что представляет собой весьма трудноразрешимую задачу. Поэтому обычно стараются выполнить редукцию к более простой задаче [4], описываемой, например, обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). На этом пути в [5] была предложена модель магнитной изоляции электронов в плоском вакуумном диоде, описываемая системой двух нелинейных ОДУ второго порядка. Для модели [5] и ее обобщения, получаемого заменой производных второго порядка трехмерным оператором Лапласа, характерна зависимость входящих в систему нелинейностей от разности квадратов искомых функций. Как указано в [6], системы с такого рода нелинейностями, зависящими от суммы или разности квадратов искомых функций, часто встречаются в теории тепло- и массопереноса реагирующих систем, в теории химических реакторов, теории горения и математической биологии.

В данной статье рассматриваем в качестве объекта исследования такую систему двух уравнений эллиптического типа с двумя нелинейностями, зависящими от суммы квадратов искомых функций, и основной целью ставим редукцию к одному уравнению и построение

Поступила 07.05.2014

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №13-01-00376-а, №15-08-06680-а) и Программы №17 Президиума РАН.

точных решений. Отметим, что в работах [3], [4], [7]–[9] указывалось на важную роль построения точных решений нелинейных систем уравнений в частных производных.

2. Постановка задачи и основные уравнения

В [6] рассмотрена система нелинейных уравнений с частными производными в двумерном координатном пространстве

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} &= \psi F(\psi^2+a^2) + aG(\psi^2+a^2), \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} &= aF(\psi^2+a^2) - \psi G(\psi^2+a^2), \end{aligned} \tag{1}$$

которая встречается при моделировании стационарных процессов теории тепло- и массопереноса. Там же предлагается искать точное решение системы (1) в виде

$$\begin{aligned} \psi(x_1,x_2) &= r(z)\cos\left(\theta(z)+C_1x_2+C_2\right), \\ a(x_1,x_2) &= r(z)\sin\left(\theta(z)+C_1x_2+C_2\right), \end{aligned} \tag{2}$$

где $z = k_1x_1+k_2x_2$, k_1, k_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $r(z)$, $\theta(z)$ должны определяться из системы двух нелинейных ОДУ второго порядка.

Цель данной статьи – построение точных решений системы уравнений

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \psi F(\mathbf{x},\psi^2+a^2) + aG(\mathbf{x},\psi^2+a^2), \\ \Delta a &= aF(\mathbf{x},\psi^2+a^2) - \psi G(\mathbf{x},\psi^2+a^2). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\psi = \psi(\mathbf{x})$, $a = a(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Δ – n-мерный оператор Лапласа.

В отличие от (1) в системе (3) размерность вектора пространственных переменных произвольна и может быть больше двух, от этого вектора могут явно зависеть нелинейности $F(\mathbf{x},W)$ и $G(\mathbf{x},W)$.

Опираясь на структуру (2), точные решения системы (3) будем отыскивать в виде

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= f\cos\omega, \\ a(\mathbf{x}) &= f\sin\omega, \end{aligned} \tag{4}$$

где $f = f(\mathbf{x})$, $\omega = \omega(\mathbf{x})$ — пока произвольные дважды дифференцируемые по переменным $(x_1,\ldots,x_n)$ функции. После подстановки формул (4) в систему (3) соответственно получим

$$\begin{aligned} A\cos\omega - B\sin\omega &= 0, \\ A\sin\omega + B\cos\omega &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где приняты обозначения

$$A = \Delta f - f|\nabla\omega|^2 - fF(\mathbf{x},f^2), \quad B = f\Delta\omega + 2\nabla f\cdot\nabla\omega + fG(\mathbf{x},f^2).$$

Здесь и далее $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — градиент, символ $\cdot$ означает скалярное произведение. Относительно переменных A и B система алгебраических уравнений (5) является линейной и однородной, ее определитель равен единице, поэтому она имеет только тривиальное решение $A = 0$, $B = 0$. Следовательно, с учетом введенных обозначений система (5) сводится к следующим двум нелинейным уравнениям в частных производных

$$\Delta f - f|\nabla\omega|^2 = fF(\mathbf{x},f^2), \tag{6}$$

$$f\Delta\omega + 2\nabla f\cdot\nabla\omega = -fG(\mathbf{x},f^2). \tag{7}$$

Уравнения (6), (7) будем называть разрешающими для системы (3) в виде (4).

С общих позиций система разрешающих уравнений нисколько не проще исходной системы (3), однако, как показано в следующих разделах, такая форма представления задачи может быть полезна для отыскания точных решений.

3. Редукция системы разрешающих уравнений к одному уравнению

Основная цель данного раздела — свести систему разрешающих уравнений (6), (7) при определенных предположениях к одному уравнению. Для указанной цели целесообразно рассмотреть два случая: первый, когда ω есть функция от f, и второй, когда, наоборот, f есть функция от ω.

1. Будем предполагать, что для компонент решения системы (6), (7) имеет место связь $\omega(\mathbf{x}) \equiv u(f(\mathbf{x}))$, где $u(f)$ — дважды дифференцируемая функция скалярного аргумента f. После подстановки $\omega(\mathbf{x}) \equiv u(f(\mathbf{x}))$ в систему (6), (7) придем к следующим формулам:

$$\Delta f - f u'^2(f)|\nabla f|^2 = fF(\mathbf{x}, f^2), \tag{8}$$

$$\Delta f + \frac{fu''(f) + 2u'(f)}{fu'(f)}|\nabla f|^2 = -\frac{G(\mathbf{x}, f^2)}{u'(f)}. \tag{9}$$

Чтобы эта система сводилась к одному уравнению, соотношения (8) и (9) должны совпадать, а для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $u = u(f)$ удовлетворяла обыкновенному ОДУ

$$fu'' + f^2u'^3 + 2u' = 0, \tag{10}$$

а функции $F(\mathbf{x}, f^2)$ и $G(\mathbf{x}, f^2)$ были связаны на решениях $u(f)$ ОДУ (10) тождеством

$$G(\mathbf{x}, f^2) + fu'(f)F(\mathbf{x}, f^2) \equiv 0. \tag{11}$$

ОДУ (10) заменой $u'(f) = z(f)$ сводится к уравнению Бернулли

$$fz' + f^2z^3 + 2z = 0,$$

которое имеет общее решение $z(f) = -\frac{\sigma}{f\sqrt{c_1f^2-1}}$, где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$. Отсюда получим

$$u(f) = c_2 + \sigma \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{c_1 f^2 - 1}},$$

где $c_1 > 0$, c_2 — произвольные постоянные. При этом связь (11) между функциями $F\left(\mathbf{x}, f^2\right)$ и $G\left(\mathbf{x}, f^2\right)$ будет выражаться формулой

$$G\left(\mathbf{x}, f^2\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{c_1 f^2 - 1}} F\left(\mathbf{x}, f^2\right), \tag{12}$$

где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$. Тем самым доказана

Теорема 1. *Пусть при некотором $c_1 > 0$ нелинейности $F(\mathbf{x}, W)$ и $G(\mathbf{x}, W)$ в системе* (3) *связаны соотношением* (12), *где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$. Тогда система* (3) *имеет точное решение*

$$\psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cos\left(c_2 + \sigma \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{c_1 f^2(\mathbf{x}) - 1}}\right), \tag{13}$$

$$a(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \sin\left(c_2 + \sigma \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{c_1 f^2(\mathbf{x}) - 1}}\right), \tag{14}$$

где c_2 — произвольная постоянная, а функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет нелинейному уравнению в частных производных

$$\Delta f - \frac{1}{f(c_1 f^2 - 1)} |\nabla f|^2 = fF\left(\mathbf{x}, f^2\right). \tag{15}$$

Отметим, что в справедливости теоремы 1 можно убедиться и непосредственной подстановкой функций (13), (14) в систему (3). Таким образом, выделен класс правых частей системы (3), для которых точные решения выражаются формулами (13), (14), причем присутствующая в них неизвестная функция $f(\mathbf{x})$ определяется из нелинейного уравнения в частных производных (15).

Замечание 1. Так как предъявлены все решения ОДУ (10), то формула (12) охватывает все случаи выполнения связи (11) и теорема 1 исчерпывающим образом описывает множество решений системы (6), (7) со свойством $\omega(\mathbf{x}) = u(f(\mathbf{x}))$, где функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению (15).

2. Предположим, что для компонент решения системы (6), (7) имеет место связь $f(\mathbf{x}) \equiv v(\omega(\mathbf{x}))$, где $v(\omega)$ — дважды дифференцируемая функция скалярного аргумента ω. После подстановки $f(\mathbf{x}) \equiv v(\omega(\mathbf{x}))$ в систему (6), (7) придем к следующим формулам:

$$\Delta\omega + \frac{v''(\omega) - v(\omega)}{v'(\omega)} |\nabla\omega|^2 = \frac{v(\omega)}{v'(\omega)} F(\mathbf{x}, v^2), \tag{16}$$

$$\Delta\omega + \frac{2v'(\omega)}{v(\omega)} |\nabla\omega|^2 = -G(\mathbf{x}, v^2). \tag{17}$$

Чтобы эта система сводилась к одному уравнению, соотношения (16) и (17) должны совпадать, а для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $v = v(\omega)$ удовлетворяла ОДУ

$$vv'' - 2v'^2 - v^2 = 0, \tag{18}$$

а функции $F\left(\mathbf{x}, v^2\right)$ и $G\left(\mathbf{x}, v^2\right)$ были связаны на решениях $v(\omega)$ ОДУ (18) тождеством

$$G(\mathbf{x}, v^2) + \frac{v(\omega)}{v'(\omega)} F(\mathbf{x}, v^2) \equiv 0. \tag{19}$$

Общее решение ОДУ (18) имеет вид

$$v(\omega) = \frac{1}{c_1 \cos(\omega - c_2)},$$

где $c_1 \neq 0$, c_2 — произвольные постоянные. При этом связь (19) между функциями $F(\mathbf{x}, v^2)$ и $G(\mathbf{x}, v^2)$ будет выражаться формулой $G\left(\mathbf{x}, v^2\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{c_1^2 v^2 - 1}} F\left(\mathbf{x}, v^2\right)$, т.е. фактически формулой (12) с новой положительной постоянной $c_1^2 > 0$ и $\sigma = \operatorname{sign}(\operatorname{ctg}(\omega(\mathbf{x}) - c_2))$. Тем самым доказана

Теорема 2. *Пусть при некотором $c_1 > 0$ нелинейности $F(\mathbf{x}, W)$ и $G(\mathbf{x}, W)$ в системе* (3) *связаны соотношением* (12), *где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$. Тогда система* (3) *имеет в области $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \operatorname{sign}(\operatorname{ctg}(\omega(\mathbf{x}) - c_2)) = \sigma\}$ точное решение*

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{\cos(\omega(\mathbf{x}))}{\sqrt{c_1} \cos(\omega(\mathbf{x}) - c_2)},$$

$$a(\mathbf{x}) = \frac{\sin(\omega(\mathbf{x}))}{\sqrt{c_1} \cos(\omega(\mathbf{x}) - c_2)},$$

где функция $\omega(\mathbf{x})$ удовлетворяет нелинейному уравнению в частных производных

$$\Delta\omega + 2\tan(\omega - c_2)|\nabla\omega|^2 = -G\left(\mathbf{x}, \frac{1}{c_1^2\cos^2(\omega(\mathbf{x}) - c_2)}\right). \tag{20}$$

Замечание 2. Так как предъявлены все решения ОДУ (18), то формула (12) охватывает все случаи выполнения связи (19) и теорема 2 исчерпывающим образом описывает множество решений системы (6), (7) со свойством $f(\mathbf{x}) = v(\omega(\mathbf{x}))$, где функция $\omega(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению (20).

Замечание 3. Уравнения (15), (20) могут использоваться не только с целью построения точных решений, но и для численного построения приближенных решений системы (3). Редукция к одному уравнению существенно понижает размерность системы уравнений, возникающей при дискретизации.

4. Точные радиально-симметричные решения

Перейдем к построению точных многомерных решений уравнения (15), которое для удобства перепишем в следующем в виде:

$$f\left(c_1f^2 - 1\right)\Delta f - |\nabla f|^2 = f^2\left(c_1f^2 - 1\right)F\left(\mathbf{x}, f^2\right). \tag{21}$$

Найдем радиально-симметричные решения (21) как наиболее простой класс нетривиальных многомерных решений, т. е. функции вида

$$f(\mathbf{x}) \equiv f(r), \quad \text{где} \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

При этом будем полагать, что имеет место тождество $F\left(\mathbf{x}, f^2\right) \equiv F\left(r, f^2\right)$. Очевидно, имеют место равенства

$$|\nabla f|^2 = f'^2, \ \Delta f = f'' + \frac{n-1}{r}f'. \tag{22}$$

Здесь и далее штрих означает обычную производную по аргументу r. С учетом соотношений (22) уравнение (21) сводится к нелинейному ОДУ второго порядка

$$f\left(c_1f^2 - 1\right)\left(f'' + \frac{n-1}{r}f'\right) - f'^2 = f^2\left(c_1f^2 - 1\right)F\left(r, f^2\right). \tag{23}$$

При этом функция $F(r, f^2)$ является заданной и в ряде случаев уравнение (23) допускает решения в элементарных или специальных функциях.

Пример 1. Пусть функция $F(r, f^2)$ имеет вид

$$F(r, f^2) \equiv \frac{\alpha\left(f^2\right)^{1-1/k} + \beta\left(f^2\right)^{-1/k}}{c_1f^2 - 1},$$

где $k \neq 0$, α, β — свободные параметры такие, что α, β не обращаются одновременно в нуль. Тогда уравнение (23) примет вид

$$f\left(c_1f^2 - 1\right)\left(f'' + \frac{n-1}{r}f'\right) - f'^2 = \alpha f^{4-2/k} + \beta f^{2-2/k}. \tag{24}$$

Решения уравнения (24) будем искать в классе степенных функций, т.е

$$f(r) = mr^k, \tag{25}$$

где $m \neq 0$ — пока произвольный параметр. После подстановки функции (25) в уравнение (24) получим тождество, если потребуем совместного выполнения следующих алгебраических соотношений на параметры:

$$\alpha m^{-2/k} - k(k+n-2)c_1 = 0, \quad \beta m^{-2/k} + k(2k+n-2) = 0.$$

При этом возможны следующие случаи.

1. Пусть $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$, тогда в области параметров $D_1 = \{(c_1, \alpha, \beta) : c_1 > 0,\ \alpha < 0,\ \beta = 0\}$ уравнение (24) имеет точное решение

$$f(r) = \left[-\frac{(n-2)^2 c_1}{4\alpha}\right]^{(n-2)/4} r^{-(n-2)/2}.$$

2. Пусть $n > 2$, тогда в области параметров $D_2 = \{(c_1, \alpha, \beta) : c_1 > 0,\ \alpha = 0,\ \beta < 0\}$ функция

$$f(r) = \left[-\frac{(n-2)^2}{\beta}\right]^{(n-2)/2} r^{2-n}$$

является точным решением уравнения (24).

3. Пусть $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$, тогда в области параметров $D_3 = \{(c_1, \alpha, \beta) : c_1 > 0,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ 2\alpha + c_1\beta \neq 0,\ \alpha + c_1\beta < 0\}$ уравнение (24) обладает точным решением

$$f(r) = \left[-\frac{c_1(n-2)\gamma}{2\alpha + c_1\beta}\right]^{\gamma/2} r^{-\gamma},$$

где $\gamma = \frac{(\alpha + c_1\beta)(n-2)}{2\alpha + c_1\beta}$.

4. Пусть $n = 2$, тогда в области параметров $D_4 = \{(c_1, \alpha, \beta, k) : c_1 > 0,\ k \neq 0,\ \alpha \neq 0,\ \beta < 0,\ \beta c_1 + 2\alpha = 0\}$ функция

$$f(r) = \left[-\frac{2k^2}{\beta}\right]^{-k/2} r^k.$$

является точным решением уравнения (24).

Результаты примера 1 используем, чтобы выписать точные многомерные радиально-симметричные решения некоторых конкретных систем вида (3).

Пример 2. Система нелинейных эллиптических уравнений вида

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = \frac{\alpha\left(\psi^2 + a^2\right)^3}{c_1\left(\psi^2 + a^2\right) - 1}\left(\psi + \sigma\frac{a}{\sqrt{c_1\left(\psi^2 + a^2\right) - 1}}\right),$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} = \frac{\alpha\left(\psi^2 + a^2\right)^3}{c_1\left(\psi^2 + a^2\right) - 1}\left(a - \sigma\frac{\psi}{\sqrt{c_1\left(\psi^2 + a^2\right) - 1}}\right)$$

обладает в области $D^3(\alpha, c_1, c_2) = \left\{(x_1, x_2, x_3) : c_1\left(\psi^2(x_1, x_2, x_3) + a^2(x_1, x_2, x_3)\right) - 1 > 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$ точным решением (13), (14) при $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$ с функцией

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{c_1}{4\alpha}\right)^{1/4}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-1/4},$$

где $\alpha < 0$, $c_1 > 0$, c_2 — произвольные постоянные.

Пример 3. Система нелинейных эллиптических уравнений вида

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_4^2}=\frac{\beta\sqrt{\psi^2+a^2}}{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}\left(\psi+\sigma\frac{a}{\sqrt{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}}\right),$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial x_4^2}=\frac{\beta\sqrt{\psi^2+a^2}}{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}\left(a-\sigma\frac{\psi}{\sqrt{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}}\right)$$

имеет в области $D^4\left(\beta,c_1,c_2\right)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):c_1\left(\psi^2(x_1,x_2,x_3,x_4)+a^2(x_1,x_2,x_3,x_4)\right)-1>0\}\subset\mathbb{R}^4$ точное решение (13), (14) при $\sigma=1$ или $\sigma=-1$ с функцией

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-\frac{4}{\beta\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)},$$

где $\beta<0$, $c_1>0$, c_2 — произвольные постоянные.

Пример 4. Система нелинейных эллиптических уравнений вида

$$\Delta\psi=\frac{\left(\psi^2+a^2\right)^{1/\gamma}\left(\alpha\left(\psi^2+a^2\right)+\beta\right)}{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}\left(\psi+\sigma\frac{a}{\sqrt{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}}\right),$$

$$\Delta a=\frac{\left(\psi^2+a^2\right)^{1/\gamma}\left(\alpha\left(\psi^2+a^2\right)+\beta\right)}{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}\left(a-\sigma\frac{\psi}{\sqrt{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}}\right)$$

обладает в области $D^n\left(\alpha,\beta,c_1,c_2\right)=\{\mathbf{x}:c_1\left(\psi^2(\mathbf{x})+a^2(\mathbf{x})\right)-1>0\}\subset\mathbb{R}^n$, $n>2$, точным решением (13), (14) при $\sigma=1$ или $\sigma=-1$ с функцией

$$f(\mathbf{x})=\left[-\frac{c_1(n-2)\gamma}{2\alpha+c_1\beta}\right]^{\gamma/2}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)^{-\gamma/2},$$

где $\gamma=\frac{(\alpha+c_1\beta)(n-2)}{2\alpha+c_1\beta}$, $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, $2\alpha+c_1\beta\neq0$, $\alpha+c_1\beta<0$; $c_1>0$, c_2 — произвольные постоянные.

Пример 5. Система нелинейных эллиптических уравнений

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}=\frac{-\beta c_1\left(\psi^2+a^2\right)^{1-1/k}/2+\beta\left(\psi^2+a^2\right)^{-1/k}}{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}\left(\psi+\sigma\frac{a}{\sqrt{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}}\right),$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2}=\frac{-\beta c_1\left(\psi^2+a^2\right)^{1-1/k}/2+\beta\left(\psi^2+a^2\right)^{-1/k}}{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}\left(a-\sigma\frac{\psi}{\sqrt{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}}\right)$$

имеет в области $D^2\left(k,\beta,c_1,c_2\right)=\{(x_1,x_2):c_1\left(\psi^2(x_1,x_2)+a^2(x_1,x_2)\right)-1>0\}\subset\mathbb{R}^2$ точное решение (13), (14) при $\sigma=1$ или $\sigma=-1$ с функцией

$$f(x_1,x_2)=\left[-2k^2/\beta\right]^{-k/2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{k/2},$$

где $k\neq0$, $\beta<0$, $c_1>0$, c_2 — произвольные постоянные.

Покажем, что уравнение (23) имеет явные точные решения не только в классе степенных функций.

Пример 6. Если
$$F(r,f^2)\equiv 4\left(r^2-1\right)-\frac{4r^2}{c_1f^2-1},$$
то при $n=2$ уравнение (23) обладает точным решением $f(r)=e^{-r^2}$. В этом случае система нелинейных эллиптических уравнений
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}=4\left(x_1^2+x_2^2-1-\frac{x_1^2+x_2^2}{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}\right)\left(\psi+\sigma\frac{a}{\sqrt{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}}\right),$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2}=4\left(x_1^2+x_2^2-1-\frac{x_1^2+x_2^2}{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}\right)\left(a-\sigma\frac{\psi}{\sqrt{c_1\left(\psi^2+a^2\right)-1}}\right)$$
имеет в области $D^2\left(c_1,c_2\right)=\left\{(x_1,x_2)\,:\,c_1\left(\psi^2(x_1,x_2)+a^2(x_1,x_2)\right)-1>0\right\}\subset\mathbb{R}^2$ точное решение (13), (14) при $\sigma=1$ или $\sigma=-1$ с функцией $f(x_1,x_2)=\exp\left(-x_1^2-x_2^2\right)$, где $c_1\geq 1$, c_2 — произвольные постоянные. При этом решения обладают следующими свойствами:
$$\lim_{x_1\to 0}\lim_{x_2\to 0}\psi(x_1,x_2)=\frac{\sqrt{c_1-1}}{\sqrt{c_1}}\cos c_2-\frac{1}{\sqrt{c_1}}\sin c_2,$$
$$\lim_{x_1\to 0}\lim_{x_2\to 0}a(x_1,x_2)=\frac{\sqrt{c_1-1}}{\sqrt{c_1}}\sin c_2+\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cos c_2,$$
$$\lim_{x_1\to\infty}\lim_{x_2\to\infty}\psi(x_1,x_2)=0,\quad \lim_{x_1\to\infty}\lim_{x_2\to\infty}a(x_1,x_2)=0.$$

Пример 7, в котором решение получается с помощью теоремы 2. Пусть $n=2$ и нелинейности в системе (3) имеют вид
$$F(\mathbf{x},w)\equiv\frac{w-2}{w(w-1)},\quad G(\mathbf{x},w)\equiv\frac{2-w}{w(w-1)^{3/2}}.$$
Тогда система (3) имеет точное решение
$$\psi(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cos\left(c_2+\arccos\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right),$$
$$a(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sin\left(c_2+\arccos\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right),$$
где c_2 — произвольная постоянная.

5. Частный случай системы (3)

В этом разделе рассмотрим построение точных решений системы уравнений (3) в частном случае. Пусть $G(\mathbf{x},W)\equiv 0$, тогда система (3) примет вид
$$\begin{aligned}\Delta\psi&=\psi F(\mathbf{x},\psi^2+a^2),\\ \Delta a&=aF(\mathbf{x},\psi^2+a^2).\end{aligned}\tag{26}$$

Точные решения системы уравнений (26) будем отыскивать в виде (4), в этом случае разрешающие уравнения будут следующими:
$$\Delta f-f|\nabla\omega|^2=fF(\mathbf{x},f^2),\tag{27}$$
$$f\Delta\omega+2\nabla f\cdot\nabla\omega=0.\tag{28}$$

Теорема 3. *Если функции* $f = \overline{f}(\mathbf{x})$, $\omega = \overline{\omega}(\mathbf{x})$ *являются гармоническими, имеют ортогональные градиенты* $\nabla\overline{f} \cdot \nabla\overline{\omega} = 0$ *и удовлетворяют тождеству*

$$F(\mathbf{x}, \overline{f}^2) = -|\nabla\overline{\omega}|^2, \tag{29}$$

то система (26) *имеет точное решение вида* $\psi(\mathbf{x}) = \overline{f}(\mathbf{x}) \cos\overline{\omega}(\mathbf{x})$, $a(\mathbf{x}) = \overline{f}(\mathbf{x}) \sin\overline{\omega}(\mathbf{x})$.

Доказательство. Пусть функции $f = \overline{f}(\mathbf{x})$, $\omega = \overline{\omega}(\mathbf{x})$ являются гармоническими и их градиенты ортогональны, тогда равенство (28) выполняется тождественно. В свою очередь, если $F(\mathbf{x}, \overline{f}^2)$ имеет вид (29), то уравнение (27) также обращается в тождество. □

Замечание 4. В случае $n = 2$ функции $f(x_1, x_2)$, $\omega(x_1, x_2)$, фигурирующие в теореме 3, можно выбрать сопряженными гармоническими, для которых условие ортогональности их градиентов $\nabla f \cdot \nabla\omega = 0$ заведомо выполняется.

Пример 8. Система уравнений вида

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} &= 9\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 \left(3x_1x_2^2 - x_1^3\right) \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + a^2}}, \\
\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} &= 9\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 \left(3x_1x_2^2 - x_1^3\right) \frac{a}{\sqrt{\psi^2 + a^2}}
\end{aligned}$$

имеет в области $D = \{(x_1, x_2) : x_1\left(x_1^2 - 3x_2^2\right) > 0\}$ точное анизотропное по пространственным переменным x_1, x_2 решение

$$\begin{aligned}
\psi(x_1, x_2) &= \left(x_1^3 - 3x_1x_2^2\right) \cos\left(3x_1^2x_2 - x_2^3\right), \\
a(x_1, x_2) &= \left(x_1^3 - 3x_1x_2^2\right) \sin\left(3x_1^2x_2 - x_2^3\right).
\end{aligned}$$

6. Нелинейные системы с управлением

Рассмотрим более подробно систему (26). Функция $F(\mathbf{x}, W)$ в ней обычно отражает особенности моделируемого процесса, специфику химической технологии и т. п. Эта функция в некоторых случаях может целенаправленно изменяться ради обеспечения желаемого хода процесса, т. е. реализации некоторого точного решения системы. Будем считать, что такие целенаправленные изменения осуществляются посредством аддитивного или мультипликативного управления. Соответственно этим двум типам управления система принимает вид

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= \psi\left(\widetilde{F}(\mathbf{x}, \psi^2 + a^2) + U_a(\mathbf{x})\right), \\
\Delta a &= a\left(\widetilde{F}(\mathbf{x}, \psi^2 + a^2) + U_a(\mathbf{x})\right)
\end{aligned} \tag{30}$$

или

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= \psi U_m(\mathbf{x})/\Phi(\mathbf{x}, \psi^2 + a^2), \\
\Delta a &= a U_m(\mathbf{x})/\Phi(\mathbf{x}, \psi^2 + a^2).
\end{aligned} \tag{31}$$

В уравнениях (30), (31) функции $\widetilde{F}(\mathbf{x}, \psi^2 + a^2)$ и $\Phi(\mathbf{x}, \psi^2 + a^2)$ считаются заданными, а аддитивное $U_a(\mathbf{x})$ и мультипликативное $U_m(\mathbf{x})$ управления можно выбирать. Различный выбор законов управления, очевидно, влияет на множества решений систем (30) и (31). Дадим описание семейства функций $\psi(\mathbf{x})$, $a(\mathbf{x})$, которые гарантированно могут быть реализованы как точные решения систем (30) и (31) за счет выбора управления и укажем соответствующие каждому такому решению законы $U_a(\mathbf{x})$ и $U_m(\mathbf{x})$.

Теорема 4. *Пусть пара гармонических функций* $z_\alpha(\mathbf{x})$ *и* $z_\beta(\mathbf{x})$ *имеет ортогональные градиенты, т. е.* $\nabla z_\alpha(\mathbf{x}) \cdot \nabla z_\beta(\mathbf{x}) \equiv 0$. *Тогда пара функций*

$$\psi(\mathbf{x}) = z_\alpha(\mathbf{x}) \cos z_\beta(\mathbf{x}), \quad a(\mathbf{x}) = z_\alpha(\mathbf{x}) \sin z_\beta(\mathbf{x})$$

является точным решением систем (30) *и* (31) *при следующем выборе управлений*:

$$U_a(\mathbf{x}) = -|\nabla z_\beta(\mathbf{x})|^2 - \widetilde{F}(\mathbf{x}, z_\alpha^2(\mathbf{x})), \tag{32}$$

$$U_m(\mathbf{x}) = -|\nabla z_\beta(\mathbf{x})|^2 \Phi(\mathbf{x}, z_\alpha^2(\mathbf{x})). \tag{33}$$

Доказательство. Рассмотрим систему (30) с аддитивным управлением $U_a(\mathbf{x})$. В этом случае система разрешающих уравнений (27), (28) примет вид

$$\Delta f - f|\nabla \omega|^2 = f\big(\widetilde{F}(\mathbf{x}, f^2) + U_a(\mathbf{x})\big),$$

$$f\Delta\omega + 2\nabla f \cdot \nabla \omega = 0$$

или

$$\Delta z_\alpha(\mathbf{x}) - z_\alpha(\mathbf{x})|\nabla z_\beta(\mathbf{x})|^2 = z_\alpha(\mathbf{x})\big(\widetilde{F}(\mathbf{x}, f^2) + U_a(\mathbf{x})\big), \tag{34}$$

$$z_\alpha \Delta z_\beta(\mathbf{x}) + 2\nabla z_\alpha(\mathbf{x}) \cdot \nabla z_\beta(\mathbf{x}) = 0. \tag{35}$$

Здесь учли тот факт, что $f(\mathbf{x}) = z_\alpha(\mathbf{x})$ и $\omega(\mathbf{x}) = z_\beta(\mathbf{x})$. Функции $z_\alpha(\mathbf{x})$ и $z_\beta(\mathbf{x})$ являются гармоническими, имеют ортогональные градиенты, поэтому (35) тождественно выполняется, а из (34) получаем (32). Случай мультипликативного управления рассматривается аналогично и приводит к (33). □

Замечание 5. В случае $n = 2$ функции $z_\alpha(x_1, x_2)$, $z_\beta(x_1, x_2)$, фигурирующие в условиях теоремы 4, можно выбрать сопряженными гармоническими, для которых условие ортогональности их градиентов $\nabla z_\alpha(\mathbf{x}) \cdot \nabla z_\beta(\mathbf{x}) \equiv 0$ заведомо выполняется.

Пример 9. Рассмотрим систему (31) с функцией $\Phi(\mathbf{x}, \psi^2 + a^2) \equiv \sqrt{\psi^2 + a^2}$. Применяя теорему 4, находим, что в случае $n = 2$ система (31) вида

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + a^2}}\, U_m(x_1, x_2),$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} = \frac{a}{\sqrt{\psi^2 + a^2}}\, U_m(x_1, x_2),$$

где $U_m(x_1, x_2) = -k^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{3k/2-1} \cos(k\varphi(x_1, x_2))$, имеет точное анизотропное по пространственным переменным x_1, x_2 решение

$$\psi(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{k/2} \cos(k\varphi(x_1, x_2)) \cos\left(\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{k/2} \sin\left(k\varphi(x_1, x_2)\right)\right),$$

$$a(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{k/2} \cos(k\varphi(x_1, x_2)) \sin\left(\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{k/2} \sin\left(k\varphi(x_1, x_2)\right)\right).$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, а функция $\varphi(x_1, x_2)$ может быть двух видов

$$\varphi(x_1, x_2) = \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad \text{или} \quad \varphi(x_1, x_2) = \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

7. Заключение

Полученные в статье явные выражения точных решений имеют не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов. Кроме того, найденные радиально-симметричные точные решения можно применять для построения приближенных решений краевых задач в сферически симметричных областях для систем уравнений эллиптического типа. Отметим также, что предложенный в статье подход может быть использован и для построения точных решений систем параболического типа.

Литература

[1] Дривотин О.И., Овсянников Д.А. *Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц* (Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, СПб, 2003).

[2] Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. *Kinetic Boltzmann–Vlasov and related equations* (Elsevier, Amsterdam, 2011).

[3] Дривотин О.И., Овсянников Д.А. *Решения уравнения Власова для пучка заряженных частиц в магнитном поле*, Изв. ИГУ. Сер. Матем. **6** (4), 2–22 (2013).

[4] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения* (ФИЗМАТЛИТ, М., 2002).

[5] Ben Abdallah N., Degond P., Mehats F. *Mathematical model of magnetic insulation*, Physics of plasmas **5**, 1522–1534 (1998).

[6] http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/syspde/spde3107.pdf

[7] Пухначев В.В. *Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла*, ПМТФ **50** (2), 16–23 (2009).

[8] Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В. *Принцип априорного использования симметрий в теории нелинейных волн*, Акустический журнал **50** (4), 1–15 (2004).

[9] Вязьмина Е.А., Полянин А.Д. *Новые классы точных решений нелинейных диффузионно-кинетических уравнений и систем общего вида*, Теор. основы химической технологии **40** (6), 1–10 (2006).

А.А. Косов

ведущий научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,

e-mail: kosov_idstu@mail.ru

Э.И. Семенов

старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,

e-mail: edwseiz@gmail.com

A.A. Kosov and E.I. Semyonov

Exact radially-symmetric solutions of a class of nonlinear elliptic systems of equations

Abstract. We study the system of two equations of elliptic type with two nonlinearities depending on the sum of squares of sought-for functions. We obtain conditions on nonlinearities with which the system is reduced to one equation. We also find parametric families of exact solutions, both radially symmetric, and anisotropic with respect to spatial variables, described by elementary or harmonic functions. In case of controlled nonlinearity we specify wide class of realizable exact solutions expressed via harmonic functions.

Keywords: equations of elliptic type, nonlinear systems, exact solutions.

A.A. Kosov

Leading Researcher,
Institute of System Dynamics and Control Theory,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,

e-mail: kosov_idstu@mail.ru

E.I. Semyonov

Senior Researcher,
Institute of System Dynamics and Control Theory,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,

e-mail: edwseiz@gmail.com